



UNIVERSITÉ DE NANTES

ECOLE DOCTORALE

SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR, GÉOSCIENCES ET ARCHITECTURE.

Année 2010

**Thèse de Doctorat de l'Université de Nantes**

Spécialité : GÉNIE MÉCANIQUE

*Présentée et soutenue publiquement par*

**Emmanuel LACOSTE**

le 25 novembre 2010  
à St-Nazaire – C.R.T.T.

---

**MODELISATION ET SIMULATION MULTI-ECHELLES DES CONTRAINTES  
D'ELABORATION ET DE SERVICE DANS LES MATERIAUX COMPOSITES**

---

**JURY**

<b>Président :</b>	Jean-Yves COGNARD	Professeur des universités, ENSIETA Brest
<b>Rapporteurs :</b>	Nicolas CARRERE Sylvain DRAPIER	Ingénieur de recherche, ONERA/DMSE Châtillon Professeur des universités, ENSM Saint-Etienne
<b>Examineurs :</b>	Sylvain FREOUR Frédéric JACQUEMIN Michelle SALVIA	Maître de conférences, Université de Nantes Professeur des universités, Université de Nantes Maître de conférences, Ecole Centrale de Lyon
<b>Invité :</b>	Claude DAUPHIN	Ingénieur, HEXCEL Composites Dagneux

\*\*\*\*\*

**Directeur de thèse :** Frédéric JACQUEMIN

**Co-encadrant :** Sylvain FREOUR

**Equipe :** Etat Mécanique et Microstructure

**Laboratoire :** Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM) UMR – CNRS 6183

**Adresse :** 37 Boulevard de l'Université, B.P. 406, 44602 Saint-Nazaire Cedex

N° BU :



## Remerciements

Ce travail a été effectué au sein de l'équipe "Etat Mécanique et Microstructure" de l'Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM), rattaché à l'Université de Nantes et à l'Ecole Centrale de Nantes. La thèse s'est déroulée au Centre de Recherches et de Transfert de Technologies de l'IUT de Saint-Nazaire. A ce titre, je souhaite remercier M. Arnaud POITOU, directeur du GeM, pour m'avoir accueilli dans son laboratoire ; ainsi que Mr Ronald GUILLEN, directeur de l'IUT de Saint-Nazaire, au sein duquel j'ai également pu enseigner en tant que vacataire.

M<sup>r</sup> Nicolas CARRERE et Mr Sylvain DRAPIER ont accepté la lourde tâche de rapporter ces travaux, et je les en remercie vivement. Je remercie également M<sup>r</sup> Claude DAUPHIN, M<sup>me</sup> Michelle SALVIA, M<sup>r</sup> Jean-Claude GRANDIDIER pour avoir participé à mon jury de thèse, ainsi que M<sup>r</sup> Jean-Yves COGNARD pour l'avoir présidé.

J'adresse toute ma gratitude à M<sup>r</sup> Frédéric JACQUEMIN à M<sup>r</sup> Sylvain FREOUR (-sensei) qui ont encadré mes travaux de recherche durant ces trois dernières années. Leur fort investissement, leur présence attentive et leur efficacité, et surtout la sympathie qu'ils m'ont témoignée, ont très largement contribué à faire de cette thèse une expérience passionnante, tant sur le plan personnel que professionnel.

Pour l'excellent accueil qu'ils m'ont réservé, un grand merci aussi aux membres de l'équipe EMM : M<sup>mes</sup> Marie-José MOYA et Annick PERRONNET, M<sup>rs</sup> David GLOAGUEN, Vincent LEGRAND, Pascal CASARI, Bruno COURANT, Samuel BRANCHU, Emmanuel GIRARD. Merci aux secrétaires, M<sup>mes</sup> Françoise HATE et Sabrina SAMSON pour avoir compensé ma nullité dans le domaine administratif !

Toute mon amitié à mes collègues doctorants-et-assimilés pour les nombreux bons moments passés ensemble: Hussam EL CHEIKH (qui n'a pas encore explosé), Guy OUM (amateur de la sieste digestive !), Jamal FAJOU (futur Jean Fajoui, Président de la République), Amandine CELINO ("Où est mon sac ?"), Hossein RAMEZANI-DANA (the great shoulder breaker), Bun-Eang SAR (qui se méfie du terroriste), Luan TRAN VAN (lapin compris), Raphael GERARD (and the winner is...), Georges YOUSSEF (il est frais).

Je souhaite saluer les (nombreux) participants au projet LCM-Smart, et en particulier M<sup>elles</sup> Katarzyna SZYMANSKA, Svetlana TEREKHINA et Olga KLINKOVA, doctorantes au sein du LTDS, avec lesquelles une collaboration très fructueuse s'est installée. Merci également à M<sup>rs</sup> Mathieu BONNAFOUX et Claude DAUPHIN, ingénieurs chez Hexcel Composites France, qui m'ont fourni un certain nombre d'informations utiles sur le Hextool, et qui se sont chargés de la fabrication de pièces composites en Hextool. Je remercie aussi M<sup>r</sup> Pascal CASARI, Jean-Michel LEBRUN, ainsi que le personnel technique de l'IUT de Saint-Nazaire, pour avoir participé à leur mise en œuvre (découpe et usinage).

Mes plus chaleureux sentiments vont à mes parents, ma famille et à mes amis (qui se reconnaîtront) pour leurs encouragements, leur amitié, leur présence, qui m'ont permis de tenir le coup dans les moments de stress !

Plus que tout, cette thèse est dédiée à Amandine, qui m'a accompagné de cœur et d'esprit tout au long de cette expérience. Les mots ne sont pas suffisants pour te remercier du soutien, de la patience et de l'amour inépuisable que tu m'as témoigné, contre vents et marées nazairiennes !



# SOMMAIRE

<b>SOMMAIRE .....</b>	<b>1</b>
<b>INTRODUCTION GENERALE.....</b>	<b>5</b>
<b>CONTEXTE DE LA THESE : LE PROJET LCM-SMART.....</b>	<b>11</b>
<b>PARTIE I : APPLICATION DE MODELES DE TRANSITION D'ECHELLES A LA DETERMINATION DES PROPRIETES EFFECTIVES D'UN MATERIAU COMPOSITE INDUSTRIEL .....</b>	<b>13</b>
1 PROPOS GENERAL .....	15
2 PRINCIPES DES MODELES DE TRANSITION D'ECHELLES .....	17
2.1 Définition des échelles .....	17
2.2 Méthodologie de la transition d'échelles.....	20
2.2.1 Localisation des états mécaniques.....	20
2.2.2 Principes de Hill .....	21
2.2.3 Calcul des propriétés effectives.....	21
2.2.3.1 Homogénéisation en contraintes ( $H\sigma$ ).....	21
2.2.3.2 Homogénéisation en déformations ( $H\varepsilon$ ).....	22
2.2.3.3 Autocohérence des modèles .....	22
2.2.4 Remarque sur le calcul des moyennes volumiques .....	22
3 ETAT DE L'ART DES MODELES DE TRANSITION D'ECHELLES .....	24
3.1 Les modèles simplifiés .....	24
3.1.1 Bornes de Voigt et Reuss .....	24
3.1.2 Modèle de Hill.....	24
3.2 Les modèles basés sur l'inclusion d'Eshelby .....	25
3.2.1 Le problème de l'inclusion d'Eshelby.....	25
3.2.2 Le modèle de Eshelby-Kröner classique (EK).....	28
3.2.2.1 Principe.....	28
3.2.2.2 Expression des tenseurs d'influence.....	28
3.2.2.3 Expression des propriétés effectives .....	29
3.2.3 Le modèle de Mori-Tanaka (MT) .....	30
3.2.3.1 Principe.....	30
3.2.3.2 Expression des tenseurs d'influence.....	31
3.2.3.3 Expression des propriétés effectives .....	32
3.2.4 Le modèle de Eshelby-Kröner généralisé (EKG).....	32
3.2.5 Quelques considérations sur les modèles à champs moyens.....	34
3.3 Mise en application des modèles.....	37
4 PROCEDURE DE TRANSITION D'ECHELLES POUR LE HEXTOOL .....	38
4.1 Description de la structure du composite étudié .....	38
4.2 Procédure d'homogénéisation : la double transition d'échelles.....	39
4.3 Ecriture des lois de comportement anélastiques.....	40
4.3.1 Ecriture des tenseurs d'élasticité.....	40
4.3.2 Lois de comportement anélastiques .....	42
4.3.2.1 Comportement thermo-élastique .....	42

4.3.2.2	Comportement chimio-élastique .....	42
4.3.2.3	Comportement hygro-élastique .....	42
5	PROPRIETES EFFECTIVES DU COMPOSITE A L'ETAT CUIT .....	44
5.1	Propriétés thermo-élastiques des constituants .....	44
5.2	Homogénéisation des renforts unidirectionnels .....	44
5.3	Homogénéisation du composite .....	46
5.3.1	Modèle MT .....	46
5.3.2	Modèle EK .....	47
5.3.2.1	Formulations en contraintes et en déformations .....	47
5.3.2.2	Formulation mixte .....	51
5.3.3	Modèle EKG .....	56
6	CORRECTIONS DU MODELE ET FINALISATION .....	57
6.1	Confrontation avec les résultats expérimentaux .....	57
6.1.1	Propriétés thermo-élastiques mesurées du Hextool .....	57
6.1.1.1	Propriétés élastiques .....	57
6.1.1.2	Propriétés thermiques .....	59
6.1.2	Comparaison théorie - expérience .....	60
6.2	Influence de la morphologie des bandes renforçantes .....	60
6.3	Influence de l'ondulation des bandes renforçantes .....	65
6.4	Influence du taux volumique et de la répartition de la matrice .....	66
6.5	Conclusion .....	68
7	CONCLUSION ET PERSPECTIVES .....	69

**PARTIE II : MODELISATION DES CONTRAINTES HYGRO-THERMO-MECANIKES LOCALES ET DES CONTRAINTES RESIDUELLES DE FABRICATION .....71**

1	INTRODUCTION .....	73
1.1	Avant-propos .....	73
1.2	Définition des échelles et phénomènes associés .....	73
2	CONTRAINTES LOCALES DE SERVICE .....	75
2.1	Rappel des principaux résultats antérieurs .....	75
2.2	Critère de rupture de la résine .....	76
2.3	Sollicitations mécaniques .....	78
2.3.1	Traction uniaxiale de 100 MPa dans le plan .....	78
2.3.2	Traction de 100 MPa hors-plan .....	81
2.4	Sollicitation thermique .....	82
2.5	Sollicitation hygroscopique .....	83
2.6	Conclusion et perspectives .....	87
3	COMPARAISON AVEC L'APPROCHE A CHAMP COMPLET PERIODIQUE .....	88
3.1	Avant-propos .....	88
3.2	Revue bibliographique .....	89
3.2.1	Notion de réseau périodique .....	89
3.2.2	Influence des conditions aux limites .....	90
3.2.3	Prise en compte des symétries .....	91
3.3	Préparation de la simulation .....	92
3.3.1	Géométrie et maillage .....	92
3.3.2	Description des chargements .....	93

3.4	Discussion des résultats.....	96
3.4.1	Propriétés homogénéisées.....	96
3.4.2	Contraintes locales.....	102
3.4.2.1	Sollicitation thermique.....	102
3.4.2.2	Traction longitudinale.....	105
3.4.2.3	Traction transverse.....	106
3.5	Conclusion.....	108
3.6	Perspectives : quelques mots-clés pour aller plus loin.....	109
4	CONTRAINTES LOCALES DE FABRICATION.....	110
4.1	Positionnement de l'étude.....	110
4.2	Propriétés mécaniques et cinétique de cuisson de la résine.....	112
4.2.1	Thermo-cinétique de cuisson.....	112
4.2.1.1	Modèles phénoménologiques.....	112
4.2.1.2	Détermination expérimentale de la cinétique de cuisson.....	113
4.2.2	Propriétés mécaniques de la résine.....	116
4.2.2.1	Module visco-élastique.....	117
4.2.2.2	Coefficient d'expansion thermique.....	121
4.2.2.3	Coefficient de retrait chimique.....	121
4.3	Implémentation du modèle.....	122
4.3.1	Hypothèses de départ.....	122
4.3.2	Implémentation.....	122
4.4	Evolutions des propriétés effectives du composite.....	125
4.5	Contraintes résiduelles locales de fabrication.....	126
4.5.1	Cas de fabrication 1.....	126
4.5.2	Cas de fabrication 2.....	129
4.5.3	Cas de fabrication 3.....	130
4.6	Conclusion et perspectives.....	132
5	PREDICTION DE LA RUPTURE DU COMPOSITE SOUS SOLLICITATIONS COMBINEES DE FABRICATION ET DE SERVICE.....	134
5.1	Avant-propos.....	134
5.2	Résultats et discussion.....	134
5.2.1	Sollicitation thermique.....	134
5.2.2	Sollicitation hygroscopique.....	135
5.2.3	Sollicitation mécanique : traction uniaxiale dans le plan du pli.....	136
5.3	Conclusion et perspectives.....	138
<b>PARTIE III : DEFORMATION RESIDUELLE DES PIECES COMPOSITES.....</b>		<b>139</b>
1	INTRODUCTION ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.....	141
1.1	Avant-propos.....	141
1.2	Déformation résiduelle des pièces composites : revue bibliographique.....	142
1.2.1	Phénomènes intervenant à l'échelle mésoscopique.....	142
1.2.2	Phénomènes intervenant à l'échelle pseudo-macroscopique.....	143
1.2.3	Phénomènes intervenant à l'échelle macroscopique.....	144
1.3	Cas particulier des équerrés composites.....	145
2	DEFORMATIONS RESIDUELLES DANS UNE EQUERRE COMPOSITE.....	148
2.1	Avant-propos.....	148
2.2	Mise en données du problème.....	148
2.2.1	Géométrie et maillage.....	148

2.2.2	Cycle de fabrication et propriétés matériau.....	150
2.2.3	Modules de calcul.....	151
2.2.3.1	Prise en compte de l'évolution des propriétés.....	151
2.2.3.2	Simulation du démoulage de l'équerre.....	152
2.3	Résultats et discussion.....	153
2.4	Conclusion et perspectives .....	159
3	QUALIFICATION D'UN MOULE COMPOSITE .....	160
3.1	Avant-propos .....	160
3.2	Mise en données .....	160
3.3	Résultats et discussion.....	163
3.3.1	Déformation de l'équerre .....	163
3.3.2	Interactions moule-pièce .....	164
3.3.3	Déformation initiale du moule composite.....	166
3.3.4	Déformation résiduelle de service du moule composite .....	168
4	CONCLUSION ET PERSPECTIVES .....	169
	<b>CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES.....</b>	<b>173</b>
	<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....</b>	<b>179</b>
	<b>VALORISATION DE LA THESE : PUBLICATIONS ET COMMUNICATIONS .....</b>	<b>193</b>

# INTRODUCTION GENERALE



Le récent développement des matériaux composites a ouvert de nouvelles perspectives pour la conception de pièces mécaniques, en raison de leur important rapport performances/poids et de leur forte résistance à la corrosion et à la fatigue. Ces matériaux sont généralement constitués de fibres (de verre, carbone, kevlar, ou naturelles...) qui leur confèrent une grande rigidité, et de résine (thermodurcissable ou thermoplastique) dont le rôle est de transférer les charges vers les fibres, et de protéger ces dernières des agressions environnementales. La résine est soumise à des cahiers des charges très sévères, comportant un grand nombre de critères multiphysiques : tolérance aux dommages, dureté, tenue au feu, toxicité des fumées, conductivité électrique, et bien d'autres. Quant aux fibres, elles doivent également satisfaire un grand nombre de critères : rigidité et résistance, compatibilité avec la résine et résistance interfaciale... La modélisation et l'optimisation de la microstructure du composite (tissage des plis, stratification) est également un champ de recherche très ouvert.

La fabrication des pièces composites peut se faire via différents procédés : la pultrusion, l'infusion/diffusion de résine (ou procédés LCM, Liquid Composite Molding), ou la stratification de plis préimprégnés de résine, pour ne citer que les plus courants. Dans tous les cas, la fabrication passe par une étape de cuisson à haute température (120°C ou plus) qui permet de polymériser la résine, ce qui donne au matériau une rigidité.

Le matériau composite sur lequel porte ces travaux diffère des composites « classiques » par de nombreux points, et en premier lieu sa microstructure, qui n'est ni celle d'un stratifié (empilement de plis unidirectionnels) ni celle d'un mat (arrangement aléatoire de fibres). Le Hextool® est constitué à partir de fibres de carbone haute résistance (AS4) et d'une résine bismaléimide (BMI) M61 qui se caractérise par une excellente tenue en température (jusqu'à 220°C). Le pli Hextool est composé par des bandes de plis préimprégnés unidirectionnels (UD) de dimensions mésoscopiques (60×8×0,15 mm), qui sont disposés aléatoirement dans le plan du pli. L'ensemble forme un pli épais (1,3 mm) quasi-isotrope dans le plan, qui présente souvent une légère ondulation. Cette mésostructure particulière est bien adaptée à la fabrication de pièces épaisses. En outre, le matériau est usinable et rechargeable à volonté, ce qui permet d'obtenir des tolérances dimensionnelles serrées et, éventuellement, de réparer facilement des zones endommagées. Le Hextool est donc bien adapté à la fabrication de pièces d'outillage, c'est à dire des pièces pouvant servir de moules pour la fabrication de pièces composites ; le faible coefficient d'expansion thermique (CET) du moule dans le plan permet ainsi de minimiser à la fois sa déformation thermique, et l'intensité des interactions moule-pièce. Cependant, tous ces avantages ont une contrepartie : en tant que matériau composite, le Hextool soulève un certain nombre de problématiques en termes de propriétés effectives, de contraintes internes, et de déformations résiduelles.

De par leur hétérogénéité intrinsèque, le comportement des matériaux composites revêt un fort aspect multi-échelles. Le pli composite, qui peut paraître homogène à l'échelle macroscopique, est très hétérogène à l'échelle microscopique. En effet, le comportement de la résine se traduit par une rigidité modérée et un coefficient de dilatation thermique important, alors que les fibres ont une rigidité importante mais sont relativement inertes sous l'effet de la température. Cette différence de comportement induit, durant la fabrication, des contraintes résiduelles dues au retrait thermo-chimique de la résine ; d'autre part, les sollicitations externes de service génèrent des contraintes microscopiques et mésoscopiques dont l'estimation est difficile. Certaines propriétés mécaniques effectives (macroscopiques) du pli composite sont parfois difficiles à obtenir expérimentalement, d'autant que ces propriétés peuvent dépendre fortement de la température et du degré de réticulation de la résine.

Les méthodes dites « de transition d'échelles » permettent de résoudre ces problématiques en séparant le comportement du composite aux différentes échelles : microscopique, mésoscopique, et macroscopique. Les modèles dits « à champs moyens », tels que le modèle autocohérent de

Eshelby-Kröner ou encore celui de Mori-Tanaka, permettent de relier le comportement *moyen* des éléments aux différentes échelles, et cela pour un coût de calcul très restreint. Ces modèles reposent essentiellement sur des lois de moyennes (comme les lois des mélanges popularisées par Tsai), ainsi que sur les travaux d'Eshelby sur le comportement d'une inclusion noyée dans un milieu infini.

Une autre méthode permet d'aboutir à des résultats plus précis, mais pour un coût de calcul beaucoup plus important. La méthode dite « d'homogénéisation périodique » utilise les éléments finis afin de calculer l'ensemble des champs mécaniques dans le matériau, qui est assimilé à un réseau périodique à l'échelle microscopique. Cette méthode n'est cependant adaptée qu'à des microstructures présentant une certaine régularité, comme les plis UD par exemple ; elle est difficilement applicable au cas du Hextool.

La fabrication des composites génère également un certain nombre de problèmes à l'échelle macroscopique, le plus gênant, industriellement parlant, étant la déformation des pièces moulées après la fabrication. Cette déformation résiduelle peut avoir de nombreuses sources, les principales étant l'anisotropie du matériau, d'une part, et le déséquilibre des contraintes intra-laminaires dans le cas des pièces stratifiées, d'autre part. De nombreux paramètres de fabrication peuvent jouer sur la déformée finale, citons de manières non-exhaustive : le cycle de fabrication, la cinétique de réticulation de la résine, l'empilement des plis, la géométrie de la pièce et des moules... La méthode des éléments finis permet de simuler la fabrication de la pièce en prenant en compte un certain nombre de ces paramètres. La simulation peut ainsi permettre de corriger la forme initiale de la pièce afin de limiter la déformation finale, plutôt que de recourir systématiquement à un cycle de fabrication - test - correction, très coûteux.

Le présent travail est focalisé sur le cas particulier d'un matériau composite de microstructure semblable au Hextool et de ses différentes applications. Les thématiques évoquées plus haut seront traitées dans trois parties séparées :

- **Estimation des propriétés effectives du composite :**

Celle-ci sera faite à l'aide des modèles d'homogénéisation à champs moyens : les modèles de Mori-Tanaka et de Eshelby-Kröner seront dans un premier temps décrits en s'appuyant sur la littérature, et une formulation originale de ce dernier (« modèle autocohérent généralisé ») sera proposée. Une transition d'échelle en deux étapes sera proposée afin de calculer les propriétés des bandes UD, puis du composite. On montrera que les morphologies particulières, observables dans la mésostructure entraînent des problèmes avec le modèle de Eshelby-Kröner (autocohérent) classique, qui peuvent être résolus avec une formulation mixte direction-dépendante et, mieux encore, avec le modèle autocohérent généralisé. Pour conclure, on caractérisera l'influence d'un certain nombre de paramètres (forme et ondulation des bandes UD, taux volumique et répartition de la résine) sur les propriétés effectives du composite.

- **Estimation des contraintes locales de fabrication et de service :**

La caractérisation des contraintes de service sera abordée, dans un premier temps, à l'aide des modèles à champ moyen, pour différentes sollicitations typiques appliquées au composite. Les méthodes à champ complet seront ensuite décrites, puis appliquées au cas des bandes renforçantes UD ; ceci permettra de comparer les propriétés effectives et les contraintes obtenues par les deux approches, et de discuter la validité des résultats obtenues par les modèles à champ moyen.

Dans un second temps, on s'intéressera aux contraintes résiduelles de fabrication. Les propriétés mécaniques de la résine BMI seront définies à partir de données expérimentales ou issues de la littérature. Le développement des contraintes résiduelles durant la cuisson sera ensuite calculé avec une démarche incrémentale, pour plusieurs chargements typiques appliqués au composite.

Enfin, le comportement à rupture du composite sous contraintes de fabrication et de service combinées sera décrit à l'aide d'un critère de rupture de la résine.

- **Estimation de la déformée résiduelle des pièces composites**

Dans cette dernière partie, on s'intéressera aux déformations résiduelles créées dans les pièces composites durant leur cycle de fabrication. On se focalisera sur le retrait angulaire dans les équerres composites, qui constituent des démonstrateurs à la fois simples et pertinents pour les applications industrielles. Le logiciel de calcul par éléments finis Comsol Multiphysics sera utilisé dans cette optique, et une méthode spécifique sera développée afin de prendre en compte l'évolution des propriétés de la pièce au cours de la fabrication, ainsi que l'étape de démoulage de la pièce.

Cette méthode sera appliquée, dans un premier temps, au calcul du retrait angulaire final dans une équerre composite de type Hextool, en fonction des conditions aux limites ou du moule utilisé. Les interactions moule-pièce seront également étudiées, afin de qualifier la cohésion moule-pièce.

Dans un second temps, on reprendra ce travail mais en s'intéressant plutôt à une pièce fabriquée à partir de plis UD orientés à  $0^\circ$ . Les déformations résiduelles et interactions moule-pièce obtenues avec un moule en acier ou en aluminium seront comparées à celles obtenues avec un moule en composite. Les déformations de fabrication et de service du moule lui-même seront également étudiées.



# CONTEXTE DE LA THESE :

## LE PROJET LCM-SMART

*(Procédés LCM innovants pour pièces complexes en composites)*

Cette thèse s'inscrit dans le cadre du projet national de recherche LCM-Smart, financé par le Fonds Unique Interministériel, qui rassemble les partenaires industriels et universitaires suivants autour des problématiques liées à la fabrication des pièces composites par les procédés LCM :

- **5 sociétés industrielles** : HEXCEL Renforcements (porteur du projet), HEXCEL Composites, SKF Aerospace France (utilisateur final des produits), Isoire Aviation, ESI Group ;
- **2 PME** : ISOJET Equipement et VISUOL Technologies ;
- **6 équipes de recherche publique** : LaMI (FR TMS/CNRS 2856), LTDS (UMR CNRS 5513, regroupant 3 équipes : LTDS/ECL, LTDS/ENISE et LTDS/ARMINES/SMS), Laboratoire Hubert Curien (UMR CNRS 5516) et GeM (UMR CNRS 6183).

L'objectif principal de ce projet est d'effectuer un **saut technologique** dans la simulation et l'utilisation des procédés LCM, qui consistent en l'injection ou l'infusion de résine liquide à travers des préformes fibreuses pour la production de pièces composites complexes de qualité, à destination du secteur aéronautique notamment. Les résultats scientifiques attendus sont une meilleure appréhension des phénomènes intervenant durant ce procédé, et le développement du **système LCM du futur**. Les enjeux industriels sont la compression des coûts de développement et des temps de mise sur le marché, ainsi la maîtrise optimale de l'industrialisation.

Trois axes de recherche principaux ont été dégagés :

- le développement d'outils de simulation numérique des phénomènes et des procédés ;
- l'instrumentation *in-situ* des pièces par fibres optiques, et le développement d'une technologie de moules en composites, en utilisant notamment le Hextool® produit par la société Hexcel ;
- le pilotage assisté en temps réel et l'optimisation des procédés de fabrication par LCM.

La contribution majeure du GeM concerne la simulation numérique des contraintes internes générées par les cycles de service (température, humidité relative et fluage) et des contraintes résiduelles de fabrication. Il participera également à la caractérisation des propriétés hygro-thermo-mécaniques du matériau candidat Hextool. Le but de ce travail est d'estimer la durabilité du moule composite dans les conditions d'utilisation.

Pour atteindre cet objectif, des approches multi-échelles seront développées afin d'estimer d'une part les propriétés hygro-thermo-mécaniques effectives du pli composite (c'est à dire les tenseurs de raideur, ainsi que les coefficients de dilatation thermique et hygroscopique) en fonction des propriétés hygro-thermo-mécaniques de ses constituants, et, d'autre part, les concentrations des contraintes internes à l'échelle des constituants, connaissant les états hygro-thermo-mécaniques subis par chacun des plis de la structure. Il s'agira également de caractériser et de simuler la tenue du matériau composite vis-à-vis de sollicitations hygrothermomécaniques (humidité, température, contrainte mécanique statique : fluage) représentatives des cycles de service des moules composites. Concernant la simulation des contraintes et de la déformée résiduelles du moule après fabrication, le GeM interviendra par le biais des approches de transition d'échelles qui permettront de prendre en compte notamment, la morphologie et l'orientation des constituants, les évolutions des propriétés de la résine au cours de la solidification.



## **PARTIE I :**

# **APPLICATION DE MODELES DE TRANSITION D'ECHELLES A LA DETERMINATION DES PROPRIETES EFFECTIVES D'UN MATERIAU COMPOSITE INDUSTRIEL**



# 1 PROPOS GENERAL

Le domaine de la mécanique a subi une profonde évolution au cours des trente dernières années, accompagnant l'essor des matériaux composites et leur utilisation grandissante dans l'industrie et plus particulièrement l'aéronautique. La structure particulière de ces matériaux, leur hétérogénéité intrinsèque due à l'association de deux composants (matrice et renforts) aux comportements élastiques très différents, a poussé la communauté scientifique à revisiter la mécanique des milieux continus.

Dans un premier temps, des « lois des mélanges » simplifiées ont été développées afin de calculer le comportement moyen de ces matériaux à l'échelle d'un pli composite. On pourra notamment citer les travaux pionniers de Tsai et Hahn [Tsai et Hahn, 1980] ou de Hashin et Shtrikman [Hashin et Shtrikman, 1963], qui ont permis de dimensionner les structures composites simples. Néanmoins, ces approches simplifiées qui ne donnent pas d'information sur les états mécaniques locaux dans le renfort et la matrice, ne permettaient pas d'expliquer certains phénomènes tels que les décohésions renforts - matrice ou l'endommagement des composites. Plus récemment, le développement d'outils de mesure fine (analyse par rayons X, microscopie électronique) a permis de franchir la barrière du macroscopique et d'observer directement ces effets.

Parallèlement, l'explosion des capacités de calcul a permis de résoudre les équations développées au cours des dernières décades, auparavant irrésolubles par les méthodes analytiques traditionnelles. Deux méthodes de modélisation mécanique se sont ainsi répandues :

- D'une part, la Méthode des Eléments Finis (MEF), qui a été développée afin de modéliser le comportement mécanique d'éléments à géométrie complexe. En « découpant » la structure à étudier en éléments finis de petite taille, qui respectent à la fois la compatibilité des déformations et l'équilibre des contraintes, on peut définir avec précision la forme et la disposition spatiale d'une structure donnée. Cette approche est la plus adaptée quand on s'intéresse à une échelle en particulier. Néanmoins, elle permet difficilement la représentation d'un matériau à deux échelles simultanément : la quantité d'informations à fournir pour alimenter le modèle est alors très importante, de même que les temps de calculs (parfois plusieurs semaines). Elle est parfois utilisée pour l'approche dite « à champ complet » qui fournit des solutions de référence pour les propriétés et champs mécaniques locaux. Cependant cette approche ne peut pas être généralisée aux problèmes larges.
- D'autre part, les modèles dits de « transition d'échelles » proposent une approche radicalement opposée. Ces modèles proposent de décrire un matériau en introduisant des paramètres significatifs tels que la texture cristalline et morphologique, ou encore l'anisotropie, à différentes échelles caractéristiques. Le lien entre les différentes échelles est assuré par un formalisme mathématique définissant des relations de passage d'une échelle à l'autre. Contrairement à la logique de la mécanique des milieux continus, on décrit le matériau à partir de ses hétérogénéités ou « inclusions », définies par leurs propriétés mécaniques et leur morphologie. Seuls les rapports de forme interviennent effectivement dans la définition de la morphologie, de sorte qu'on exclut notamment les effets de taille et d'arrangement spatial des inclusions. Cette simplification de la microstructure permet ainsi de décrire « simplement » le matériau à plusieurs échelles simultanément. Cette approche est donc complémentaire de la MEF, elle permet notamment d'alimenter cette dernière dans le cas de problèmes faisant intervenir des chargement complexes, associés à des distributions temporelles et spatiales des propriétés des constituants au sein de la structure ; ceci se traduisant par des distributions de propriétés effectives, comme l'illustrent [Youssef et al., 2009a, 2009b] par exemple.

Les modèles de transition d'échelles sont particulièrement adaptés à l'étude multi-échelles des composites, en raison de la grande périodicité de ces matériaux et de la forte hétérogénéité de comportement qui se manifeste entre le renfort et la matrice. On peut les utiliser pour calculer le comportement macroscopique d'un pli composite ou, inversement, retrouver les états de contraintes et déformations d'un constituant, connaissant les états du matériau à l'échelle macroscopique. Cela est particulièrement intéressant si on souhaite vérifier la cohésion entre les renforts et la matrice, ou bien la tenue de l'un et l'autre constituant.

Dans cette première partie, on décrira d'abord de façon extensive les principaux modèles de transition d'échelles présents dans la bibliographie, notamment ceux de Mori-Tanaka et de Eshelby-Kröner. On exploitera les possibilités offertes par ces modèles de transition d'échelles afin de prédire les propriétés mécaniques d'un matériau composite carbone – époxy renforcé par des inclusions non-orientées. La pertinence de chaque modèle sera comparée et discutée sur la base des données expérimentales disponibles. L'influence de certains paramètres matériaux tel que la répartition de résine au sein du matériau, ou la configuration des renforts dans le matériau, sera également discutée et, si possible, modélisée.

## 2 PRINCIPES DES MODELES DE TRANSITION D'ECHELLES

### 2.1 Définition des échelles

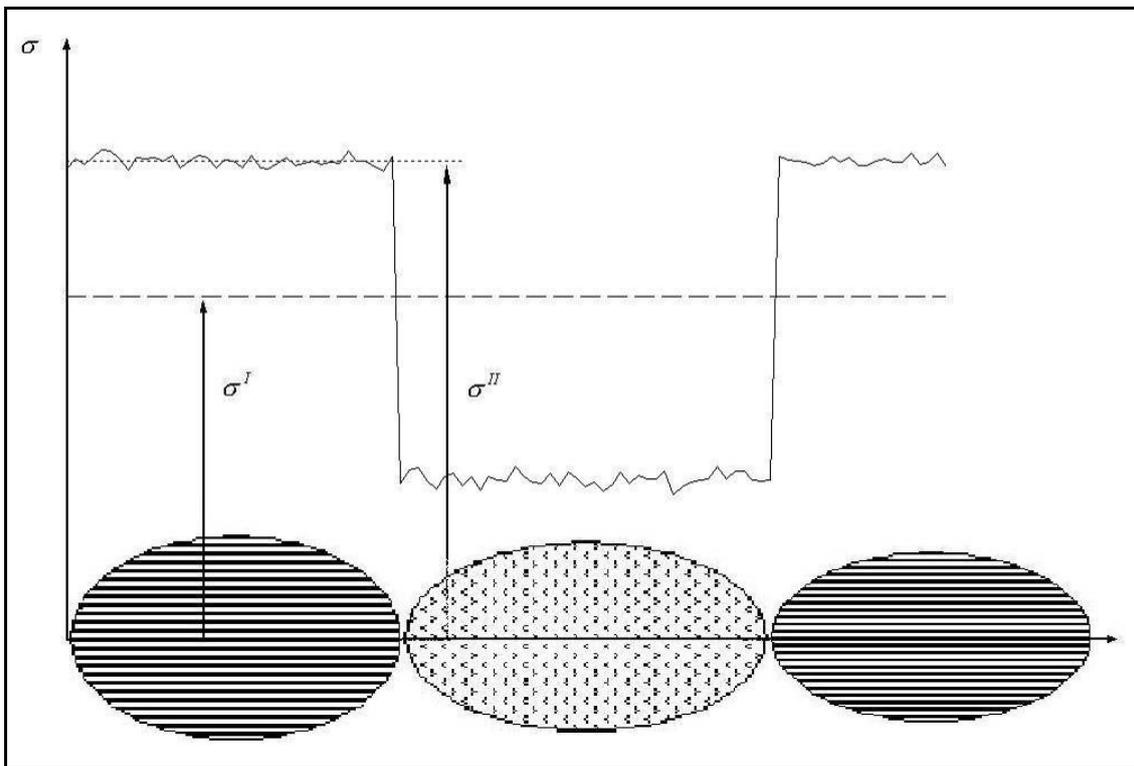
Les modèles de transition d'échelles sont fondés sur une représentation du matériau à plusieurs échelles. Dans le cas des matériaux composites à matrice polymère, deux échelles suffisent en général pour décrire complètement le matériau :

- l'échelle mésoscopique, de l'ordre de  $1\ \mu\text{m}$  à  $100\ \mu\text{m}$ , à laquelle on observe le comportement des inclusions de matrice et de renfort. Ces deux phases seront notées, respectivement, par les exposants  $m$  et  $r$  ;
- l'échelle macroscopique, au-delà de  $1\ \text{mm}$ , suffisamment grande devant l'échelle mésoscopique pour qu'on puisse considérer le matériau comme homogène.

On associe à chacune de ces échelles un « ordre d'état » :

- l'ordre I qui correspond à l'échelle macroscopique, où les variables d'état (contraintes  $\sigma^I$  et déformations  $\varepsilon^I$ ) varient continûment sur des distances de l'ordre du millimètre ;
- l'ordre II, correspondant à l'échelle mésoscopique, où l'on considère l'état mécanique ( $\sigma^{II}$ ,  $\varepsilon^{II}$ ) comme continu et homogène à l'intérieur d'une phase (matrice ou renfort), mais discontinu d'une phase à l'autre.

Figure I-1 : Représentation de la contrainte dans les différentes phases du matériau



La figure I-1 ci-dessus propose une représentation de la contrainte mécanique dans chacune des phases du matériau. La contrainte d'ordre I est une moyenne de la contrainte sur les différentes phases, la contrainte d'ordre II est la contrainte moyenne dans chacune des deux phases. On notera que la contrainte n'est pas tout à fait homogène au sein d'une phase donnée, mais varie légèrement en raison d'effets non observables à l'échelle mésoscopique. On pourrait donc définir, à titre indicatif, un « ordre III » qui permettrait de prendre en compte des effets microstructuraux, par exemple un endommagement local.

A l'échelle mésoscopique, on définit la structure du matériau comme un arrangement d'inclusions noyées dans un « milieu homogène d'intégration ». La forme de l'inclusion élémentaire constitue le Volume de Base (VB) du matériau. A une inclusion  $\Omega$  constituée d'une phase  $\alpha$  donnée, on affecte

une déformation et une contrainte  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{II}}(\Omega), \boldsymbol{\sigma}^{\text{II}}(\Omega)$  homogènes, ainsi qu'une loi de comportement. Celle-ci s'écrit, dans le cadre d'un comportement anélastique linéaire :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{II}}(\Omega) = \mathbf{L}^{\alpha}(\Omega) : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{II}}(\Omega) + \mathbf{I}^{\alpha}(\Omega) \cdot \Delta P, \quad (\text{I-1})$$

$$\text{ou sous forme inverse : } \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{II}}(\Omega) = \mathbf{M}^{\alpha}(\Omega) : \boldsymbol{\sigma}^{\text{II}}(\Omega) + \mathbf{m}^{\alpha}(\Omega) \cdot \Delta P, \quad (\text{I-2})$$

où le symbole « : » représente le produit doublement contracté,  $\mathbf{L}^{\alpha}(\Omega)$  représente le tenseur de rigidité de la phase  $\alpha$  dans le repère global, et  $\mathbf{M}^{\alpha}(\Omega)$  le tenseur de souplesse (tous deux d'ordre 4 et totalement symétriques) ;  $\mathbf{I}^{\alpha}(\Omega)$  est le coefficient de contrainte anélastique,  $\mathbf{m}^{\alpha}(\Omega)$  le coefficient de déformation anélastique (d'ordre 2 et diagonaux ici) et  $\Delta P$  une variation d'une variable d'état scalaire quelconque, responsable de ces transformations anélastiques (température, humidité...) ; on simplifie ici l'écriture en supposant que  $\Delta P$  est identique dans tous les constituants, bien que cette hypothèse soit facilement contournable (voir titre 4.3.2.3).

On notera que le tenseur de rigidité  $\mathbf{L}^{\alpha}(\Omega)$  correspond plus simplement au tenseur de rigidité  $\mathbf{L}^{\alpha}$  d'un monphasé  $\alpha$  dans le repère global ; dans le cas des renforts fibreux, cette donnée est généralement interpolée à partir d'essais sur un unidirectionnel, bien que des essais sur un monofilament permettent également de déterminer certaines composantes. Par la suite, afin de simplifier les écritures, on remplacera les notations  $\mathbf{X}^{\alpha}(\Omega)$  et  $\mathbf{X}^{\text{II}}(\Omega)$  par la forme simplifiée  $\mathbf{X}^i$ , où l'exposant  $i$  symbolise une inclusion d'un constituant donné, avec un VB donné d'orientation donnée. Les équations I-1 et I-2 seront donc réécrites sous la forme :

$$\boldsymbol{\sigma}^i = \mathbf{L}^i : \boldsymbol{\varepsilon}^i + \mathbf{I}^i \cdot \Delta P \quad (\text{I-1 bis})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^i = \mathbf{M}^i : \boldsymbol{\sigma}^i + \mathbf{m}^i \cdot \Delta P \quad (\text{I-2 bis})$$

En outre, les deux formes de la loi de comportement étant équivalentes, on peut écrire les relations suivantes entre les tenseurs caractérisant les propriétés d'un milieu  $k$  quelconque :

$$\mathbf{M}^k = \mathbf{L}^{k-1} \text{ et } \mathbf{L}^k = \mathbf{M}^{k-1} \quad (\text{I-3})$$

$$\mathbf{m}^k = -\mathbf{M}^k : \mathbf{I}^k \text{ et } \mathbf{I}^k = -\mathbf{L}^k : \mathbf{m}^k \quad (\text{I-4})$$

On définit également un Volume Élémentaire Représentatif (VER) composé d'un grand nombre de VB, qui est supposé représenter le matériau à l'échelle macroscopique. On assimile alors l'état mécanique macroscopique ( $\boldsymbol{\sigma}^{\text{I}}, \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{I}}$ ) du matériau à celui du VER, et on définit de même une loi de comportement anélastique représentée par :

$$\boldsymbol{\sigma}^{\text{I}} = \mathbf{L}^{\text{I}} : \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{I}} + \mathbf{I}^{\text{I}} \cdot \Delta P, \quad (\text{I-5})$$

$$\text{qui s'inverse sous la forme : } \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{I}} = \mathbf{M}^{\text{I}} : \boldsymbol{\sigma}^{\text{I}} + \mathbf{m}^{\text{I}} \cdot \Delta P \quad (\text{I-6})$$

où les tenseurs  $\{\mathbf{L}^{\text{I}}, \mathbf{M}^{\text{I}}, \mathbf{I}^{\text{I}}, \mathbf{m}^{\text{I}}\}$  représentent les propriétés effectives. Ces propriétés sont, d'une manière ou d'une autre, issues des opérations d'homogénéisation des propriétés mécaniques de chacune des phases.

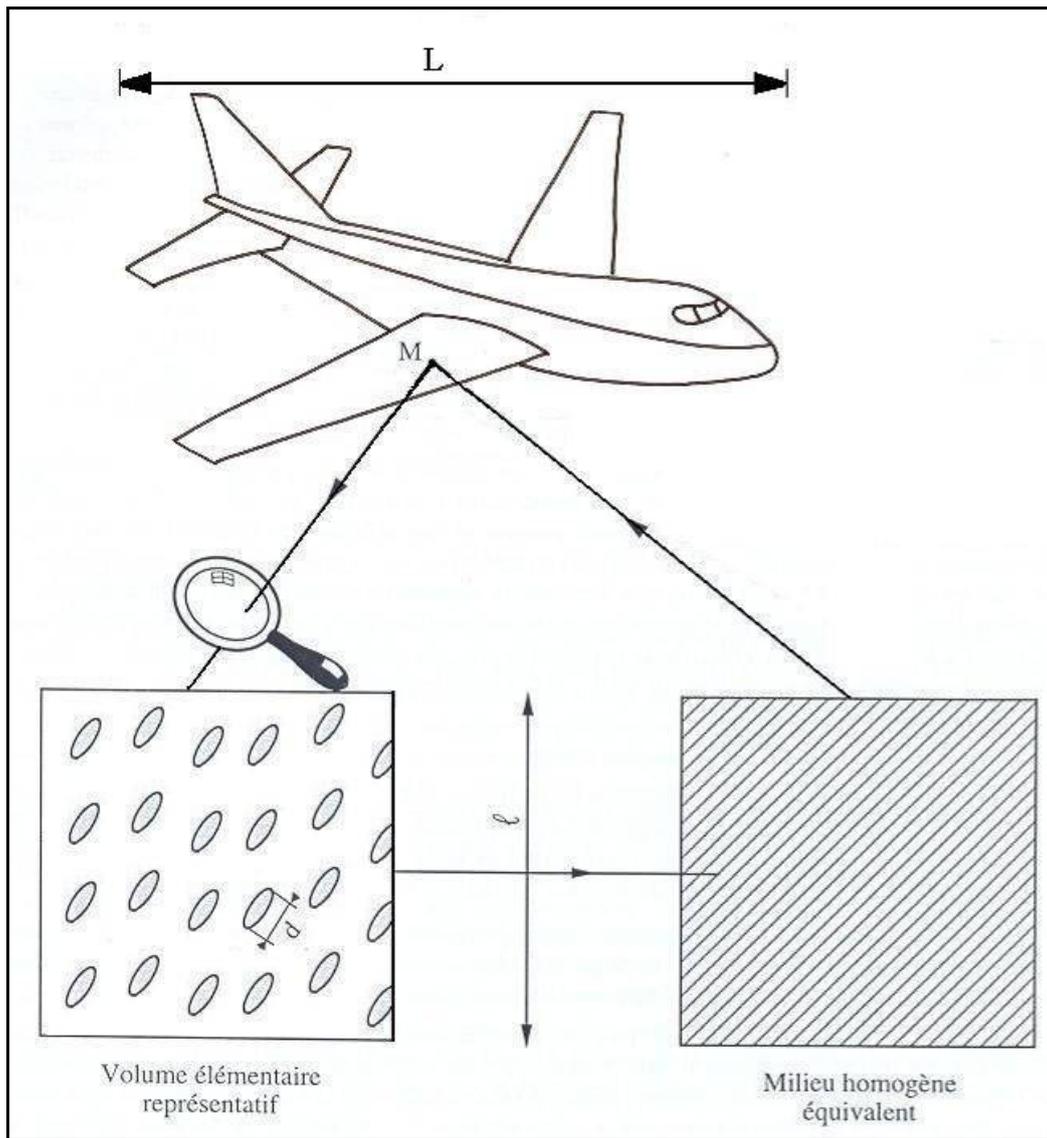
Cette approche, conçue pour fonctionner dans un cadre statistique, est d'autant plus valable que les inclusions sont nombreuses et uniformément réparties. Cela exclut notamment les singularités spatiales (comme la présence de zones non renforcées), ou les fortes interactions entre inclusions de même famille. Ces cas sont difficiles à appréhender par les modèles de transition d'échelles, et relèvent plutôt de l'approche par éléments finis.

[Chaboche et al., 1998] décrivent les conditions d'échelle à satisfaire dans le cadre d'un modèle de transition d'échelles. Si  $d$  est la taille caractéristique des hétérogénéités prises en compte, et  $L$  la

taille caractéristique de la structure macroscopique considérée, alors la taille caractéristique  $l$  du VER considéré est soumise à deux contraintes (cf. figure I-2) :

- $l \ll L$  : c'est la condition pour qu'on puisse traiter le matériau comme un milieu continu et y déterminer des champs continus de contraintes et déformations ;
- $l \gg d$  : c'est la condition nécessaire pour pouvoir affecter au VER un comportement macroscopique homogène malgré son hétérogénéité mésoscopique. En effet, ces hétérogénéités provoquent des fluctuations du comportement global, qui s'atténuent *dans la plupart des cas* lorsque le rapport  $l/d$  augmente, jusqu'à devenir négligeables si ce rapport est suffisamment grand.

Figure I-2 : Echelles d'analyse ( $d \ll l \ll L$ ), d'après [Chaboche et al, 1998]



Si cette double condition de méso-hétérogénéité et de macro-homogénéité est satisfaite, le milieu hétérogène réel peut être remplacé par un « Milieu Homogène Equivalent » (MHE) fictif, qui permet de découpler les effets mécaniques structuraux (macroscopiques) et locaux (mésoscopiques). [Broohm, 2003] ajoute également une condition sur la taille caractéristique de l'inclusion,  $d$ , qui doit être supérieure à la limite de validité  $d_0$  des lois de la mécanique des milieux continus. Ceci limite notamment les effets dus aux forces microscopiques (forces de Van der Waals, liaisons hydrogène) et aux défauts de la structure cristalline (dislocations notamment), qu'on retrouve en particulier dans les métaux.

En résumé, la validité des modèles de transition d'échelles est soumise à deux contraintes :

- le caractère purement aléatoire de l'agencement spatial des inclusions ;
- la triple condition d'échelles :  $\mathbf{d}_0 \ll \mathbf{d} \ll \mathbf{l} \ll \mathbf{L}$ .

## 2.2 Méthodologie de la transition d'échelles

### 2.2.1 Localisation des états mécaniques

Le cœur des modèles de transition d'échelles repose dans les relations de passage entre l'état mécanique local  $\{\boldsymbol{\varepsilon}^i, \boldsymbol{\sigma}^i\}$  et l'état mécanique macroscopique  $\{\boldsymbol{\varepsilon}^I, \boldsymbol{\sigma}^I\}$  au sein du VER. Ces modèles suivent souvent la description introduite par [Kröner, 1958], qui expose la notion de localisation des contraintes et déformations. D'après cette description, les contraintes (et déformations) locales peuvent s'écrire comme une fonction bilinéaire des contraintes (et déformations) macroscopiques élastiques et anélastiques :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^i = \mathbf{A}^i : \boldsymbol{\varepsilon}^I + \mathbf{a}^i \cdot \Delta P \quad (\text{I-7})$$

$$\boldsymbol{\sigma}^i = \mathbf{B}^i : \boldsymbol{\sigma}^I + \mathbf{b}^i \cdot \Delta P \quad (\text{I-8})$$

où  $\mathbf{A}^i$  et  $\mathbf{B}^i$  sont les tenseurs (adimensionnels, d'ordre 4) de localisation des déformations élastiques et de concentration des contraintes, respectivement.  $\mathbf{a}^i$  et  $\mathbf{b}^i$  sont respectivement les tenseurs (d'ordre 2) de polarisation des déformations et contraintes anélastiques. La notation « . » figure le produit simplement contracté.

Les « tenseurs d'influence »  $\{\mathbf{A}^i, \mathbf{a}^i, \mathbf{B}^i, \mathbf{b}^i\}$  s'expriment analytiquement en fonction des propriétés de la phase  $i$  et de la morphologie de l'inclusion, et dépendent du modèle mis en œuvre. En outre, en raison de la symétrie des tenseurs de contrainte et déformation, on notera les symétries mineures (droite et gauche) des tenseurs  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  :

$$\mathbf{A}_{ijkl} = \mathbf{A}_{jikl} = \mathbf{A}_{ijlk} \quad (\text{I-9})$$

mais dans le cas général  $\mathbf{A}_{ijkl} \neq \mathbf{A}_{klij}$  (il n'y a pas de symétrie majeure, contrairement au cas du tenseur  $\mathbf{L}$ ).

On notera également que les tenseurs  $\mathbf{A}^i$  et  $\mathbf{a}^i$  peuvent s'écrire en fonction des tenseurs  $\mathbf{B}^i$  et  $\mathbf{b}^i$ , et inversement. Ainsi, si l'on injecte les deux lois de comportement, locale (I-2) et macroscopique (I-6), dans l'expression des déformations localisées, on obtient :

$$\left(\mathbf{M}^i : \boldsymbol{\sigma}^i + \mathbf{m}^i \cdot \Delta P\right) = \mathbf{A}^i : \left(\mathbf{M}^I : \boldsymbol{\sigma}^I + \mathbf{m}^I \cdot \Delta P\right) + \mathbf{a}^i \cdot \Delta P,$$

ce qui permet d'obtenir la forme générale suivante, pour la contrainte locale :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^i &= \mathbf{M}^{i-1} : \left[ \mathbf{A}^i : \left(\mathbf{M}^I : \boldsymbol{\sigma}^I + \mathbf{m}^I \cdot \Delta P\right) + \mathbf{a}^i \cdot \Delta P - \mathbf{m}^i \cdot \Delta P \right] \\ &= \left(\mathbf{M}^{i-1} : \mathbf{A}^i : \mathbf{M}^I\right) : \boldsymbol{\sigma}^I + \mathbf{M}^{i-1} : \left(\mathbf{A}^i : \mathbf{m}^I + \mathbf{a}^i - \mathbf{m}^i\right) \Delta P \\ &= \left(\mathbf{L}^i : \mathbf{A}^i : \mathbf{L}^{I-1}\right) : \boldsymbol{\sigma}^I + \left[ -\left(\mathbf{L}^i : \mathbf{A}^i : \mathbf{L}^{I-1}\right) : \mathbf{l}^I + \mathbf{l}^i + \mathbf{L}^i : \mathbf{a}^i \right] \Delta P \end{aligned} \quad (\text{I-10})$$

Par identification avec les termes de l'équation (I-8), et au prix de quelques manipulations algébriques, on retrouve les facteurs  $\mathbf{B}^i$  et  $\mathbf{b}^i$  :

$$\mathbf{B}^i = \mathbf{L}^i : \mathbf{A}^i : \mathbf{L}^{I-1} \quad (\text{I-11})$$

$$\mathbf{b}^i = \mathbf{l}^i + \mathbf{L}^i : \mathbf{a}^i - \mathbf{B}^i : \mathbf{l}^I \quad (\text{I-12})$$

De la même façon, on peut écrire les facteurs  $\mathbf{A}^i$  et  $\mathbf{a}^i$  comme :

$$\mathbf{A}^i = \mathbf{M}^i : \mathbf{B}^i : \mathbf{M}^{I-1} \quad (\text{I-13})$$

$$\mathbf{a}^i = \mathbf{m}^i + \mathbf{M}^i : \mathbf{b}^i - \mathbf{A}^i : \mathbf{m}^I \quad (\text{I-14})$$

## 2.2.2 Principes de Hill

Les modèles d'homogénéisation mis en œuvre ici, dans un cadre statistique, reposent sur des opérations de moyenne sur le volume du VER (et du VB). Afin d'assurer la cohérence de la transition d'échelles, il est nécessaire que la moyenne de contraintes (resp. des déformations) dans l'ensemble des inclusions du matériau, donc du VER, soit égale à la contrainte (resp. la déformation) macroscopique. Ces relations fondamentales, démontrées de manière très générale par [Hill, 1967], assument l'équivalence entre les moyennes d'ensemble (*i.e.* pondérées par les fractions volumiques) et les intégrales sur le volume. On a donc, pour toute déformation macroscopique  $\boldsymbol{\varepsilon}^I$  et tout changement de phase  $\Delta P$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^I = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^i \rangle \quad (\text{I-15})$$

$$\boldsymbol{\sigma}^I = \langle \boldsymbol{\sigma}^i \rangle \quad (\text{I-16})$$

où les crochets  $\langle \dots \rangle$  représentent l'opération de moyenne sur le volume, qui sera discutée plus bas. Si on combine ces équations avec l'équation de localisation et de concentration, on obtient :

$$\langle \mathbf{A}^i \rangle = \langle \mathbf{B}^i \rangle = \mathbf{I}^{(4)} \quad (\text{I-17})$$

$$\langle \mathbf{a}^i \rangle = \langle \mathbf{b}^i \rangle = \mathbf{0}^{(2)} \quad (\text{I-18})$$

où  $\mathbf{I}^{(4)}$  représente le tenseur Identité d'ordre 4, et  $\mathbf{0}^{(4)}$  le tenseur nul d'ordre 4. En notation contractée, le tenseur Identité s'écrit :

$$\mathbf{I}^{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{I-19})$$

## 2.2.3 Calcul des propriétés effectives

Connaissant les propriétés mécaniques de chacun des constituants, et ayant défini une expression analytique pour les tenseurs de localisation et de concentration via un modèle d'homogénéisation, on peut écrire les propriétés mécaniques effectives du matériau. Cette homogénéisation du VER peut s'opérer, de manière très générale, via deux approches complémentaires.

### 2.2.3.1 Homogénéisation en contraintes ( $H\sigma$ )

Pour l'homogénéisation en contraintes (qu'on notera  $H\sigma$ ), on part du principe des moyennes de Hill écrit sur les contraintes (ou « cohérence des contraintes »), et des expressions des tenseurs  $\mathbf{B}^i$  et  $\mathbf{b}^i$  données par (I-11) et (I-12) :

$$\langle \mathbf{B}^i \rangle = \langle \mathbf{L}^i : \mathbf{A}^i \rangle : \mathbf{L}^{I^{-1}} = \mathbf{I}^{(4)} \quad (\text{I-20})$$

$$\langle \mathbf{b}^i \rangle = \langle \mathbf{I}^i + \mathbf{L}^i : \mathbf{a}^i \rangle - \langle \mathbf{B}^i \rangle : \mathbf{I}^I = \mathbf{0}^{(2)} \quad (\text{I-21})$$

Il suffit alors de quelques manipulations algébriques de ces équations pour retrouver les expressions dites d'homogénéisation, permettant la détermination des propriétés effectives du VER à partir de celles des constituants élémentaires de ce dernier :

$${}_{H\sigma} \mathbf{L}^I = \langle \mathbf{L}^i : \mathbf{A}^i \rangle \quad (\text{I-22})$$

$${}_{H\sigma} \mathbf{l}^I = -\mathbf{L}^I : \mathbf{m}^I = \langle \mathbf{l}^i + \mathbf{L}^i : \mathbf{a}^i \rangle \quad (\text{I-23})$$

Cette approche assure automatiquement la cohérence des contraintes, mais pas forcément celle des déformations.

### 2.2.3.2 Homogénéisation en déformations ( $H\varepsilon$ )

Pour l'homogénéisation en déformations (qu'on notera  $H\varepsilon$ ), on part cette fois du principe des moyennes de Hill écrit sur les déformations (« cohérence des déformations »). Les expressions des tenseurs  $\mathbf{A}^i$  et  $\mathbf{a}^i$  données par (I-13) et (I-14) donnent alors :

$$\langle \mathbf{A}^i \rangle = \langle \mathbf{M}^i : \mathbf{B}^i \rangle : \mathbf{M}^{I^{-1}} = \mathbf{I}^{(4)} \quad (\text{I-24})$$

$$\langle \mathbf{a}^i \rangle = \langle \mathbf{m}^i + \mathbf{M}^i : \mathbf{b}^i \rangle - \langle \mathbf{A}^i \rangle : \mathbf{m}^I = 0^{(2)} \quad (\text{I-25})$$

Il suffit alors de quelques manipulations algébriques de ces équations pour retrouver les expressions des propriétés effectives suivantes :

$${}_{H\varepsilon} \mathbf{M}^I = \mathbf{L}^{I^{-1}} = \langle \mathbf{M}^i : \mathbf{B}^i \rangle \quad (\text{I-26})$$

$${}_{H\varepsilon} \mathbf{m}^I = \langle \mathbf{m}^i + \mathbf{M}^i : \mathbf{b}^i \rangle \quad (\text{I-27})$$

Cette approche assure automatiquement la cohérence des contraintes, mais pas forcément celle des déformations.

### 2.2.3.3 Autocohérence des modèles

On voit bien ici que le choix d'une approche ou d'une autre affecte directement les propriétés mécaniques, mais également la cohérence des états mécaniques. Si l'on assure la cohérence des déformations, on n'aura pas forcément de cohérence des contraintes, et inversement. Les expressions données ci-dessus, bien que rigoureuses, peuvent donc aboutir à deux ensembles distincts de propriétés.

La satisfaction simultanée des deux relations de cohérence (ou « autocohérence ») dépend, en fait, des expressions données aux tenseurs d'influence, et donc du modèle mis en œuvre. Les modèles de Mori-Tanaka (MT) et de Eshelby-Kröner (EK) qui seront détaillés plus bas, font partie de cette classe de modèles dits « autocohérents ».

## 2.2.4 Remarque sur le calcul des moyennes volumiques

Dans les équations précédentes, des crochets  $\langle \dots \rangle$  ont été utilisés pour symboliser les opérations de moyenne d'ensembles. Ces opérations, qui ne dépendent d'aucune modélisation spécifique, correspondent en fait à des intégrations sur le volume. Ces intégrales étant le plus souvent difficiles à calculer par les méthodes analytiques, [Hill, 1952] a proposé deux formules alternatives pour déterminer simplement ces moyennes :

- la moyenne arithmétique, qui se définit comme la somme des éléments de l'ensemble divisée par le nombre total d'éléments de cet ensemble ;
- la moyenne géométrique, qui se définit comme la racine  $n^{\text{ième}}$  du produit des  $n$  éléments de l'ensemble considéré.

Plus généralement, si on considère un ensemble  $X = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$  contenant  $n$  éléments affectés d'une pondération  $W = \{w^1, w^2, \dots, w^n\}$ , les moyennes arithmétiques et géométriques de cet ensemble s'écrivent (respectivement) :

$$\langle X^i \rangle_{MA}^{i=1,2,\dots,n} = \frac{\sum_{i=1}^n X^i \cdot W^i}{\sum_{i=1}^n W^i} \quad (I-28)$$

$$\langle X^i \rangle_{MG}^{i=1,2,\dots,n} = \left( \prod_{i=1}^n (X^i)^{W^i} \right)^{1/\sum_{i=1}^n W^i} \quad (I-29)$$

La moyenne géométrique présente l'avantage d'être cohérente par inversion : l'inverse de la moyenne reste égale à la moyenne des inverses. Cependant, la moyenne arithmétique reste la plus largement employée dans le domaine des sciences des matériaux, afin de réaliser des calculs du comportement micromécanique d'une vaste gamme de matériaux au moyen de modèles de transition d'échelles.

On trouve néanmoins plusieurs exemples d'utilisation de la moyenne géométrique ; le lecteur pourra se référer, par exemple, à [Moriawec, 1989], [Matthies et Humbert, 1993], [Matthies et al., 1994], qui peuvent être considérés comme des illustrations typiques de travaux tirant parti de la moyenne géométrique pour estimer les propriétés ainsi que les états élastiques de polycristaux ; cependant, aucun de ces articles ne met en œuvre ce type d'opérations de moyennes dans le cadre du modèle de Eshelby-Kröner (détaillé plus bas). D'autre part, certaines références telles que [Kocks et al., 1998], [Gloaguen et al., 2002], [Fréour et al., 2003a], [Fréour et al., 2003b] et [Jacquemin et al., 2005] présentent des applications de la moyenne arithmétique à l'étude de polycristaux ainsi que de structures composites.

L'alternative de la moyenne géométrique a également été envisagée dans un article récent, [Fréour et al., 2006], afin d'estimer le comportement effectif de composites carbone-époxy ; les résultats obtenus furent loin d'être aussi satisfaisant que ceux publiés dans le cadre d'étude précédentes portant sur les polycristaux métalliques ou les composites céramique-métal. En effet, les très fortes hétérogénéités existant entre les propriétés des constituants des composites à matrice polymère renforcés par des renforts de carbone se traduisent par une sous-estimation pouvant atteindre 50 % pour les propriétés effectives déterminées par l'intermédiaire du modèle de Eshelby-Kröner, par comparaison avec les valeurs de références (mesurées). Il s'ensuit que la moyenne géométrique ne devrait pas être considérée comme une alternative fiable à la moyenne arithmétique, utilisée traditionnellement dans le cadre de la modélisation de structures composites à matrice organique par des modèles de transition d'échelles.

Par conséquent, la moyenne arithmétique, décrite par l'équation I-22 ci-dessus, sera mise en œuvre dans la suite de ce manuscrit. De plus, dans le cas traité ici où l'on s'intéresse à deux phases seulement, on peut simplifier considérablement cette expression. En effet, si on introduit par  $V^r$  et  $V^m$  les fractions volumiques des constituants du pli étudié, et si l'on considère l'absence de vides ou porosités dans le matériau (ce qui entraîne la relation classique  $V^r + V^m = 1$ ), l'équation I-22 peut se réécrire :

$$\langle X^i \rangle_{MA}^{i=r,m} = \langle X^i \rangle^{i=r,m} = V^r \cdot X^r + V^m \cdot X^m \quad (I-30)$$

Dans la suite de cette étude, l'indice  $_{MA}$  désignant la moyenne arithmétique sera volontairement omis, afin d'alléger l'écriture des équations. On fera de même pour l'exposant  $^{i=r,m}$  indiquant que l'opération de moyenne s'opère sur la matrice et le renfort.

### 3 ETAT DE L'ART DES MODELES DE TRANSITION D'EHELLES

#### 3.1 Les modèles simplifiés

Dans ce paragraphe, on présentera quelques-uns des modèles d'homogénéisation simplifiés disponibles dans la bibliographie. Ces modèles proposent des formules analytiques permettant d'encadrer, ou de déterminer de façon approchée, les propriétés mécaniques effectives d'un matériau à structure simple.

##### 3.1.1 Bornes de Voigt et Reuss

Les approximations de Voigt ([Voigt, 1910]) et Reuss ([Reuss, 1929]) sont les premières et les plus simples relations de passage proposées, elles se réduisent en fait à une simple « loi des mélanges » sur les propriétés des constituants.

- Le modèle de Voigt suppose que les déformations sont homogènes dans le VER, c'est à dire  $\mathbf{A}^i = \mathbf{I}^{(4)}$  et  $\mathbf{a}^i = 0^{(2)}$  pour tous les constituants. Il en résulte, d'après les équations (I-22) et (I-23), que les propriétés effectives sont données par les expressions très simples :

$${}_v \mathbf{L}^I = \langle \mathbf{L}^i \rangle \quad (\text{I-31})$$

$${}_v \mathbf{I}^I = \langle \mathbf{I}^i \rangle \quad (\text{I-32})$$

- Le modèle de Reuss part de l'approche opposée, en supposant des contraintes homogènes dans le VER, c'est-à-dire  $\mathbf{B}^i = \mathbf{I}^{(4)}$  et  $\mathbf{b}^i = 0^{(2)}$  pour tous les constituants. Les équations (I-26) et (I-27) entraînent alors:

$${}_R \mathbf{M}^I = \langle \mathbf{M}^i \rangle \quad (\text{I-33})$$

$${}_R \mathbf{m}^I = \langle \mathbf{m}^i \rangle \quad (\text{I-34})$$

Les modèles de Voigt et Reuss conduisent donc à deux expressions très différentes des propriétés effectives, et à des états mécaniques locaux radicalement différents. On notera cependant que l'hypothèse qui est faite sur les tenseurs  $\mathbf{A}^i$  et  $\mathbf{a}^i$  pour le modèle de Voigt, et  $\mathbf{B}^i$  et  $\mathbf{b}^i$  pour le modèle de Reuss, font que ces deux modèles sont autocohérents, dans le sens où ils respectent toujours simultanément les deux principes de cohérence de Hill sur les contraintes et les déformations.

Les modèles de Voigt et Reuss sont donc très utilisés comme première approche pour l'homogénéisation de matériaux hétérogènes. En outre, des « lois des mélanges » inspirées de ces approches fournissent de bonnes estimations des propriétés effectives dans des cas particuliers (par exemple, les lois des mélanges pour un pli composite uni-directionnel récapitulées dans [Berthelot, 1999]), voir même des états mécaniques (déformations mesurées par DRX sur le volume diffractant de matériaux polycristallins [Baczmanski et al., 2009 ; Welzel et al., 2005 ; Kumar et al., 2006]).

Il reste que, de façon générale, aucun de ces modèles ne fournit d'estimation fiable du comportement d'un matériau multi-phasé. On montre en effet que la microstructure des matériaux joue un rôle important dans leur propriétés effectives et états mécaniques locaux. Les unidirectionnels à base de fibre de verre sont un bon exemple : bien qu'étant composés de constituants isotrope (verre et matrice organique), le matériau a un comportement anisotrope à l'échelle macroscopique en raison de la forme allongée des fibres de verre, qui « oriente » le matériau.

##### 3.1.2 Modèle de Hill

En appliquant les équations de la thermo-dynamique, Hill montra que les modèles de Voigt et Reuss fournissaient des bornes pour le comportement thermo-dynamique d'un matériau multiphasé [Hill,

1952]. Cette notion de « borne » se définit au sens de l'énergie de déformation. Avec cette convention, Hill a montré que le tenseur de rigidité calculé par le modèle Voigt est une estimation par excès du tenseur de rigidité effectif :

$$\mathbf{L}^I : \boldsymbol{\varepsilon}^* : \boldsymbol{\varepsilon}^* \leq \mathbf{L} : \boldsymbol{\varepsilon}^* : \boldsymbol{\varepsilon}^*, \forall \boldsymbol{\varepsilon}^* \text{ symétrique} \quad (\text{I-35})$$

De même, on peut montrer que le tenseur de souplesse calculé par le modèle de Reuss est une estimation par excès du tenseur de souplesse effectif :

$$\mathbf{M}^I : \boldsymbol{\sigma}^* : \boldsymbol{\sigma}^* \leq \mathbf{M} : \boldsymbol{\sigma}^* : \boldsymbol{\sigma}^*, \forall \boldsymbol{\sigma}^* \text{ symétrique} \quad (\text{I-36})$$

On notera qu'avec cette définition énergétique de la borne, on ne peut encadrer que certains termes du tenseur de rigidité (ou de souplesse) : les termes « diagonaux » c'est-à-dire de la forme  $L_{ijij}$ . Cela permet néanmoins d'encadrer certains modules ingénieurs très utilisés tels que le module de Young (généralement noté E) ou le module de cisaillement (généralement noté G) ; en effet, en prenant des sollicitations de traction pure ou de cisaillement pur, on arrive aux encadrements suivants :

$${}_R E \leq E \leq {}_V E \quad \text{et} \quad {}_R G \leq G \leq {}_V G \quad (\text{I-37})$$

Ces considérations conduisirent Hill à proposer un modèle d'homogénéisation semi-empirique, issu de la moyenne de ces deux rigidités :

$${}_H \mathbf{L} = \frac{1}{2} ({}_V \mathbf{L} + {}_R \mathbf{L}) = \frac{1}{2} \left[ \langle \mathbf{L}^I \rangle + \langle \mathbf{L}^{I^{-1}} \rangle^{-1} \right] \quad (\text{I-38})$$

Le modèle de Hill, purement phénoménologique, n'a pas de sens mécanique clair : il ne permet pas de retrouver les états mécaniques locaux. En revanche, il reproduit assez fidèlement les résultats expérimentaux à l'échelle macroscopique, en particulier pour les polycristaux.

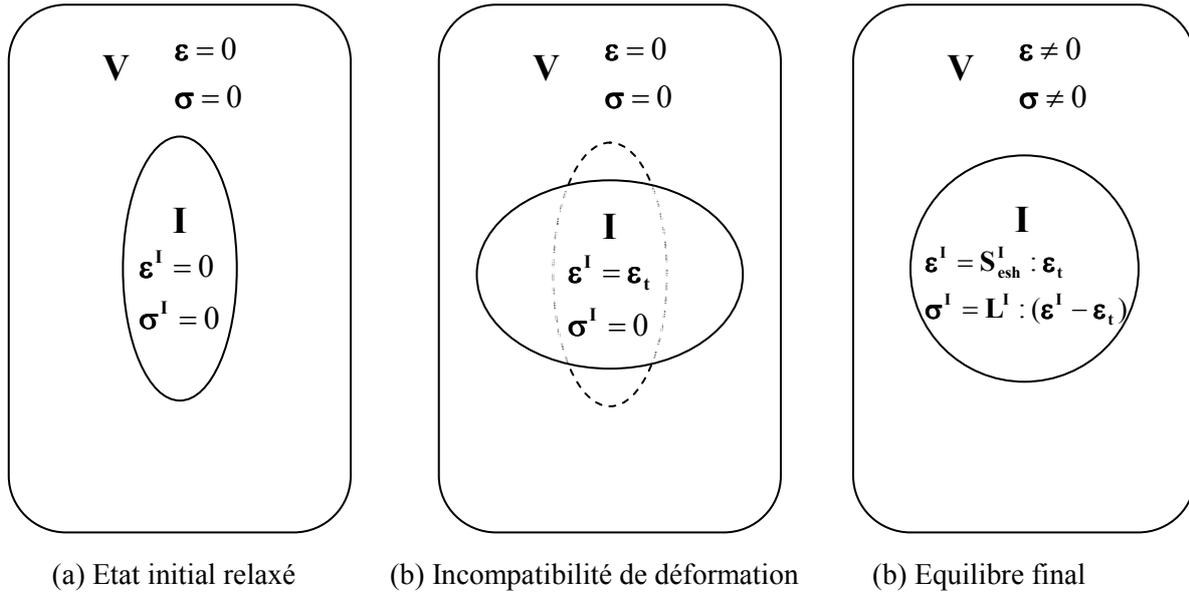
## 3.2 Les modèles basés sur l'inclusion d'Eshelby

### 3.2.1 Le problème de l'inclusion d'Eshelby

Comme expliqué au début de cette partie, le principe général des modèles de transition d'échelles est de mettre en relation le comportement d'un Volume de Base (ou inclusion) et d'un Volume Élémentaire Représentatif (ou milieu effectif). Ces relations reposent pour l'essentiel sur des opérations de moyenne, qui doivent vérifier les deux principes de Hill : la cohérence des déformations et la cohérence des contraintes. Si le modèle vérifie ces deux conditions simultanément, on dit qu'il est autocohérent.

Eshelby a ouvert la voie aux modèles autocohérents en étudiant le comportement d'une inclusion ellipsoïdale plongée dans une matrice homogène et isotrope, sous chargement mécanique à la frontière de l'inclusion. Il a ainsi montré que les champs de contraintes et déformations sont constants dans l'inclusion si (et seulement si) celle-ci est de forme ellipsoïdale, ce qui se vérifie aisément par un calcul aux éléments finis. Il posa le « problème d'Eshelby homogène » comme une séquence d'opérations fictives sur le matériau [Eshelby, 1957] : isoler une région ellipsoïdale dans le solide (un VB), la soumettre à une déformation libre de contraintes  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  (entraînant une incompatibilité des déformations entre l'inclusion et la matrice), puis la replacer dans le milieu et laisser l'équilibre se rétablir entre les deux constituants (cf. figure I-3).

Figure I-3 : Problème d'Eshelby homogène



On montre aisément que les champs de contraintes et déformation finaux dépendent linéairement de  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ , on peut donc écrire :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^I = \mathbf{S}_{esh}^I : \boldsymbol{\varepsilon}_t \quad (I-39)$$

où  $\mathbf{S}_{esh}^I$  est un tenseur adimensionnel du 4<sup>ème</sup> ordre appelé tenseur d'Eshelby. Par construction,  $\mathbf{S}_{esh}^I$  est doté des même symétries que le tenseur de localisation de la déformation ; on montre également, qu'il ne dépend que de deux rapports de forme et de trois angles d'Euler, si les axes de l'ellipsoïde et ceux de la base de projection sont différents. En outre, en conséquence directe de l'équation précédente, on peut écrire la contrainte à l'équilibre dans l'inclusion comme :

$$\boldsymbol{\sigma}^I = \mathbf{L}^I : (\boldsymbol{\varepsilon}^I - \boldsymbol{\varepsilon}_t) \quad (I-40)$$

Dans les travaux d'Eshelby, la nature de la déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  n'est pas précisée et peut donc correspondre à une dilation thermique, hygroscopique, ou encore à une déformation plastique. C'est pourquoi cette solution d'Eshelby est assez largement utilisée en mécanique des matériaux. Eshelby donne également la solution du problème dans le cas où on soumet l'inclusion, non plus à une déformation libre  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ , mais à une contrainte libre  $\boldsymbol{\sigma}_t$ .

Hill [Hill, 1965] fut le premier à proposer la relation de transition d'échelles suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}^I - \boldsymbol{\sigma}^i = -\mathbf{L}^{*I} : (\boldsymbol{\varepsilon}^I - \boldsymbol{\varepsilon}^i) \text{ avec } \mathbf{L}^{*I} = \mathbf{L}^I : (\mathbf{S}_{esh}^{I^{-1}} - \mathbf{I}^{(4)}) \quad (I-41)$$

dans laquelle  $\boldsymbol{\varepsilon}^i$  et  $\boldsymbol{\sigma}^i$  représentent les états mécaniques dans l'inclusion ellipsoïdale, et  $\boldsymbol{\varepsilon}^I$  et  $\boldsymbol{\sigma}^I$  sont les états mécaniques appliqués à l'infini au milieu qui entoure l'inclusion, dit milieu « ambient ». Le tenseur  $\mathbf{L}^{*I}$  est souvent appelé « tenseur des contraintes de Hill », et il traduit l'interaction entre l'inclusion et le milieu ambient. Il est calculé à partir de la rigidité du milieu ambient (exprimée dans le repère de l'inclusion). Cette formulation généralise l'expression d'Eshelby dans le cas où le milieu ambient et l'inclusion ont des propriétés différentes ; elle est aussi valide pour des matériaux anisotropes. Le lecteur intéressé pourra se reporter à [Chaboche et al., 1998], qui propose une synthèse claire et relativement exhaustive de ces développements.

Le calcul des tenseurs d'Eshelby et de Hill n'est pas trivial dans le cas général ; il peut même constituer un blocage pour l'utilisation des modèles de transition d'échelles. Dans la pratique, on définit généralement ces tenseurs à partir du tenseur de Morris  $\mathbf{E}^I$ , via les relations suivantes :

$$\mathbf{S}_{esh}^I = \mathbf{E}^I : \mathbf{L}^I \quad (I-42)$$

$$\mathbf{L}^{*I} = \mathbf{E}^{I^{-1}} - \mathbf{L}^I \quad (I-43)$$

Le tenseur de Morris  $\mathbf{E}^I$  [Morris, 1970] dépend de la morphologie de l'inclusion  $i$  considérée [Hill, 1965] et de la rigidité du milieu ambiant. Dans le cas d'inclusions ellipsoïdales d'axes principaux 1-2-3, le tenseur de Morris  $\mathbf{E}^I$  s'écrit :

$$\mathbf{E}_{ijkl}^I = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} \gamma_{ijkl}^I \, d\varphi, \text{ avec } \gamma_{ijkl}^I = (\mathbf{K}_{ik}^I)^{-1} \cdot \xi_j \cdot \xi_l \quad (I-44)$$

Dans le cas d'une symétrie macroscopique orthotrope, les composantes  $\mathbf{K}_{ik}(\xi)$  ont été données par [Kröner, 1953] :

$$\mathbf{K}^I = \begin{bmatrix} L_{11}^I \xi_1^2 + L_{66}^I \xi_2^2 + L_{55}^I \xi_3^2 & (L_{12}^I + L_{66}^I) \xi_1 \xi_2 & (L_{13}^I + L_{55}^I) \xi_1 \xi_3 \\ (L_{12}^I + L_{66}^I) \xi_1 \xi_2 & L_{66}^I \xi_1^2 + L_{22}^I \xi_2^2 + L_{44}^I \xi_3^2 & (L_{23}^I + L_{44}^I) \xi_2 \xi_3 \\ (L_{13}^I + L_{55}^I) \xi_1 \xi_3 & (L_{23}^I + L_{44}^I) \xi_2 \xi_3 & L_{55}^I \xi_1^2 + L_{44}^I \xi_2^2 + L_{33}^I \xi_3^2 \end{bmatrix}$$

avec  $\xi_1 = \frac{\sin \theta \cos \varphi}{a_1}, \xi_2 = \frac{\sin \theta \sin \varphi}{a_2}, \xi_3 = \frac{\cos \theta}{a_3} \quad (I-45)$

où  $\{2a_1, 2a_2, 2a_3\}$  sont les longueurs des axes principaux de l'ellipsoïde représentant l'inclusion. La forme générale du tenseur  $\mathbf{K}^I$  (pour une symétrie quelconque du tenseur de raideur macroscopique) est déduite de la relation suivante pour la composante d'indice  $np$  :

$$\mathbf{K}_{np}^I = \sum_{m=1}^3 \sum_{q=1}^3 \mathbf{L}_{mnpq}^I \zeta_m \zeta_q \quad (I-46)$$

Des exemples de calculs de ces tenseurs sont donnés dans [Kocks et al., 1998 ; Mura, 1982]. En raison de l'expression complexe de l'intégrande  $\gamma_{ijkl}^I$ , on ne peut généralement pas donner d'expression analytique du tenseur de Morris. Cela reste cependant possible pour certaines configurations particulières (fibres, disques et sphères notamment). Pour la plupart des applications pratiques, on considère que les inclusions sont soit sphériques, soit toutes orientées dans la même direction. Ce dernier cas correspond à un pli composite renforcé par des fibres longues alignées (voir [Jacquemin et al., 2005 ; Fréour et al., 2005]).

L'approche d'Eshelby est dite de « champ moyen » car elle ne prend en compte que les interactions entre le milieu ambiant et l'inclusion. Notamment, les interactions inter-particules sont négligées. C'est pourquoi la définition du milieu ambiant revêt une importance particulière pour cette classe de modèles, tant elle peut influencer sur les résultats. Elle distingue ainsi le modèle de « l'inclusion diluée » et son extension le modèle de Mori-Tanaka, du modèle de Eshelby-Kröner. En outre, l'utilisation des équations d'Eshelby et notamment de la formulation de Hill, permet d'obtenir des modèles autocohérents. En effet, si le tenseur  $\mathbf{L}^{*I}$  est identique pour toutes les inclusions (donc si tous les VB ont la même forme et orientation), on peut écrire :

$$\boldsymbol{\sigma}^I - \langle \boldsymbol{\sigma}^i \rangle = -\mathbf{L}^{*I} : (\boldsymbol{\varepsilon}^I - \langle \boldsymbol{\varepsilon}^i \rangle) \quad (I-47)$$

Par la suite, et pour les besoins de l'étude, on s'attachera à discuter l'autocohérence des modèles dans le cas où le tenseur de Hill varie d'une inclusion à une autre. On l'écrira alors :

$$\mathbf{L}^{*i} = \mathbf{E}^{i^{-1}} - \mathbf{L}^I \quad (I-48)$$

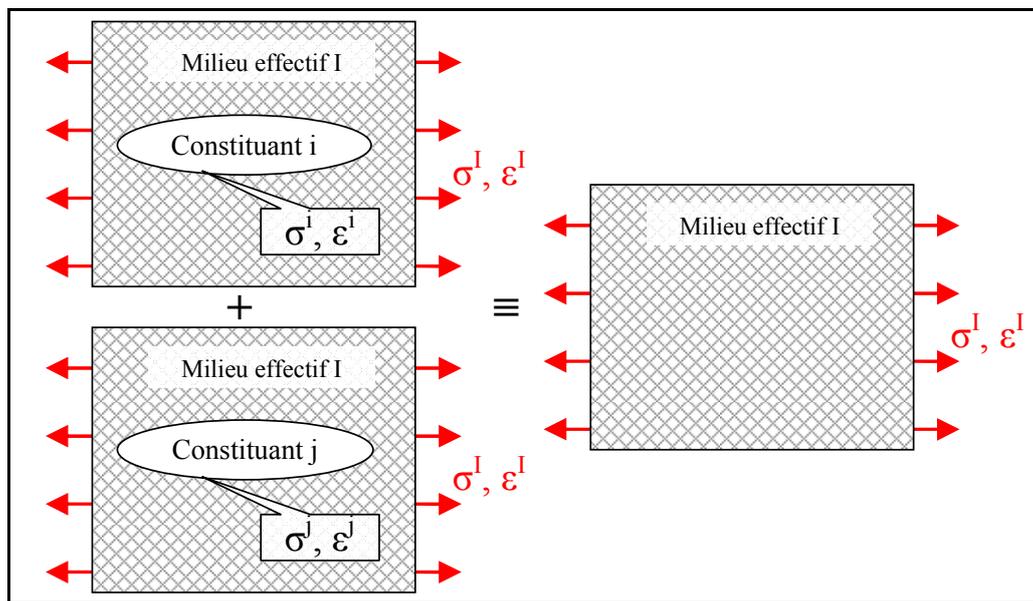
## 3.2.2 Le modèle de Eshelby-Kröner classique (EK)

### 3.2.2.1 Principe

Le modèle de Eshelby-Kröner (qu'on appellera « modèle EK ») a été introduit en premier lieu par Kröner sous la dénomination « modèle autocohérent des polycristaux ». Il a été utilisé pour calculer les modules élastiques [Kröner, 1958] puis le comportement plastique [Kröner, 1961] de polycristaux. Ce modèle élastoplastique a inspiré des études similaires sur le comportement thermo-élastique des matériaux hétérogènes [Hutchinson, 1970], puis sur l'écroutissage et la relaxation des polycristaux [Weng, 1993]. Ce modèle est également apparu très intéressant pour les matériaux composites, qui ont une forte hétérogénéité de constituants. Plusieurs articles récents montrent la pertinence de cette approche pour décrire le comportement hygro-mécanique et thermo-mécanique multi-échelles des structures composites [Fréour et al., 2005; Fréour et al., 2006; Jacquemin et al., 2005].

Une présentation exhaustive du modèle de Eshelby-Kröner peut être trouvée dans [Kocks et al., 1998]. A la base de ce modèle, on suppose que le milieu ambiant a les propriétés du milieu effectif, qu'on souhaite calculer. Ceci affecte le calcul des facteurs de localisation, et donc l'expression des propriétés effectives. Ces expressions sont alors implicites et doivent être résolues de manière itérative (tout du moins pour la rigidité, l'expression du tenseur des déformations anélastiques pouvant être remise sous forme canonique). Cependant, l'avantage de cette approche est que les interactions entre les particules sont prises en compte de façon indirecte, ce qui aboutit à des prédictions a priori plus fiables des états locaux lorsque les fractions volumiques des différentes phases sont comparables.

Figure I-4 : Représentation de la microstructure pour le modèle de Eshelby-Kröner classique



### 3.2.2.2 Expression des tenseurs d'influence

On part de l'équation de transition d'échelles, telle que donnée par Hill (I-41) mais en considérant un tenseur de Hill propre à chaque inclusion, tel qu'exprimé dans l'équation (I-48). On y injecte alors les lois de comportement locales et macroscopiques. Quelques manipulations algébriques permettent d'obtenir les déformations et contraintes locales sous la forme suivante :

$${}_{KE} \boldsymbol{\varepsilon}^i = (\mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^i)^{-1} : [(\mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^i) : \boldsymbol{\varepsilon}^I + (\mathbf{I}^I - \mathbf{I}^i) \Delta P] \quad (I-49)$$

$${}_{KE} \boldsymbol{\sigma}^i = (\mathbf{M}^{*i} + \mathbf{M}^i)^{-1} : [(\mathbf{M}^{*i} + \mathbf{M}^i) : \boldsymbol{\sigma}^I + (\mathbf{m}^I - \mathbf{m}^i) \Delta P] \quad (I-50)$$

Dans ces expressions,  $\mathbf{M}^{*i}$  désigne l'inverse du tenseur de Hill et s'écrit donc :

$${}_{KE} \mathbf{M}^{*i} = \mathbf{L}^{*i^{-1}} = \left( \mathbf{E}^{i^{-1}} - \mathbf{L}^I \right)^{-1} = \left( \mathbf{E}^{i^{-1}} - \mathbf{M}^{I^{-1}} \right)^{-1} \quad (\text{I-51})$$

Par identification, on obtient alors les facteurs  $\mathbf{A}^i$ ,  $\mathbf{a}^i$ ,  $\mathbf{B}^i$  et  $\mathbf{b}^i$ . Pour faciliter les calculs ultérieurs, ceux-ci seront donnés en fonction du tenseur de Hill et en fonction du tenseur de Morris.

$${}_{KE} \mathbf{A}^i = \left( \mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^I \right)^{-1} : \left( \mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^I \right) = \left[ \mathbf{I}^{(4)} + \mathbf{E}^i : \left( \mathbf{L}^i - \mathbf{L}^I \right) \right]^{-1} \quad (\text{I-52})$$

$${}_{KE} \mathbf{a}^i = \left( \mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^I \right)^{-1} : \left( \mathbf{I}^I - \mathbf{I}^i \right) = \left( \mathbf{E}^{i^{-1}} + \mathbf{L}^i - \mathbf{L}^I \right)^{-1} : \left( \mathbf{I}^I - \mathbf{I}^i \right) \quad (\text{I-53})$$

$${}_{KE} \mathbf{B}^i = \left( \mathbf{M}^{*i} + \mathbf{M}^I \right)^{-1} : \left( \mathbf{M}^{*i} + \mathbf{M}^I \right) = \left[ \left( \mathbf{E}^{i^{-1}} - \mathbf{M}^{I^{-1}} \right)^{-1} + \mathbf{M}^i \right]^{-1} : \left[ \left( \mathbf{E}^{i^{-1}} - \mathbf{M}^{I^{-1}} \right)^{-1} + \mathbf{M}^I \right] \quad (\text{I-54})$$

$${}_{KE} \mathbf{b}^i = \left( \mathbf{M}^{*i} + \mathbf{M}^I \right)^{-1} : \left( \mathbf{m}^{I^{-1}} - \mathbf{m}^i \right) = \left[ \left( \mathbf{E}^{i^{-1}} - \mathbf{M}^{I^{-1}} \right)^{-1} + \mathbf{M}^i \right]^{-1} : \left( \mathbf{m}^{I^{-1}} - \mathbf{m}^i \right) \quad (\text{I-55})$$

### 3.2.2.3 Expression des propriétés effectives

Si on choisit d'homogénéiser en contraintes (approche que l'on notera « Hσ »), les équations (I-22) et (I-23) donnent les expressions suivantes des propriétés effectives (équations I-56 et I-57). Par définition, cette approche assure automatiquement la cohérence des contraintes, mais pas forcément celle des déformations.

$$\begin{aligned} {}_{KEHG} \mathbf{L}^I &= \left\langle \mathbf{L}^i : \mathbf{A}^i \right\rangle \\ &= \left\langle \mathbf{L}^i : \left( \mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^I \right)^{-1} : \left( \mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^I \right) \right\rangle = \left\langle \mathbf{L}^i : \left[ \mathbf{I}^{(4)} + \mathbf{E}^i : \left( \mathbf{L}^i - \mathbf{L}^I \right) \right]^{-1} \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{I-56})$$

$$\begin{aligned} {}_{KEHG} \mathbf{I}^I &= -\mathbf{L}^I : \mathbf{m}^I = \left\langle \mathbf{I}^i + \mathbf{L}^i : \mathbf{a}^i \right\rangle \\ &= \left\langle \mathbf{I}^i + \mathbf{L}^i : \left( \mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^I \right)^{-1} : \left( \mathbf{I}^I - \mathbf{I}^i \right) \right\rangle, \text{ et donc :} \\ &= \left\langle \left[ \mathbf{I}^{(4)} - \mathbf{L}^i : \left( \mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^I \right)^{-1} \right] : \mathbf{I}^i \right\rangle + \left\langle \mathbf{L}^i : \left( \mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^I \right)^{-1} : \mathbf{I}^I \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_{KEHG} \mathbf{I}^I &= \left\langle \mathbf{I}^{(4)} - \mathbf{L}^i : \left( \mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^I \right)^{-1} \right\rangle^{-1} : \left\langle \left[ \mathbf{I}^{(4)} - \mathbf{L}^i : \left( \mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^I \right)^{-1} \right] : \mathbf{I}^i \right\rangle \\ &= \left\langle \mathbf{I}^{(4)} - \mathbf{L}^i : \left( \mathbf{E}^{i^{-1}} + \mathbf{L}^i - \mathbf{L}^I \right)^{-1} \right\rangle^{-1} : \left\langle \left[ \mathbf{I}^{(4)} - \mathbf{L}^i : \left( \mathbf{E}^{i^{-1}} + \mathbf{L}^i - \mathbf{L}^I \right)^{-1} \right] : \mathbf{I}^i \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{I-57})$$

Inversement, si l'on choisit d'homogénéiser en déformations (approche que l'on notera « Hε »), les équations (I-26) et (I-27) donnent un deuxième ensemble de propriétés effectives, a priori distinct du premier. Au contraire de l'approche précédente, celle-ci assure automatiquement la cohérence des déformations, mais pas forcément celle des contraintes.

$$\begin{aligned} {}_{KEHE} \mathbf{M}^I &= \mathbf{L}^{I^{-1}} = \left\langle \mathbf{M}^i : \mathbf{B}^i \right\rangle \\ &= \left\langle \mathbf{M}^i : \left( \mathbf{M}^{*i} + \mathbf{M}^i \right)^{-1} : \left( \mathbf{M}^{*i} + \mathbf{M}^I \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \left[ \mathbf{I}^{(4)} + \mathbf{E}^i : \left( \mathbf{L}^i - \mathbf{L}^I \right) \right]^{-1} : \mathbf{M}^I \right\rangle = \left\langle \mathbf{A}^i \right\rangle : \mathbf{M}^I \end{aligned} \quad (\text{I-58})$$

$$\begin{aligned}
{}_{\text{KEHE}} \mathbf{m}^I &= \left\langle \mathbf{I}^{(4)} - \mathbf{M}^i : (\mathbf{M}^{*i} + \mathbf{M}^i)^{-1} \right\rangle^{-1} : \left\langle \left[ \mathbf{I}^{(4)} - \mathbf{M}^i : (\mathbf{M}^{*i} + \mathbf{M}^i)^{-1} \right] : \mathbf{m}^i \right\rangle \\
&= \left\langle (\mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^i)^{-1} : \mathbf{L}^i \right\rangle^{-1} : \left\langle (\mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^i)^{-1} : \mathbf{L}^i : \mathbf{m}^i \right\rangle \\
&= \left\langle (\mathbf{E}^{i-1} + \mathbf{L}^i - \mathbf{L}^I)^{-1} : \mathbf{L}^i \right\rangle^{-1} : \left\langle (\mathbf{E}^{i-1} + \mathbf{L}^i - \mathbf{L}^I)^{-1} : \mathbf{L}^i : \mathbf{m}^i \right\rangle
\end{aligned}
\tag{I-59}$$

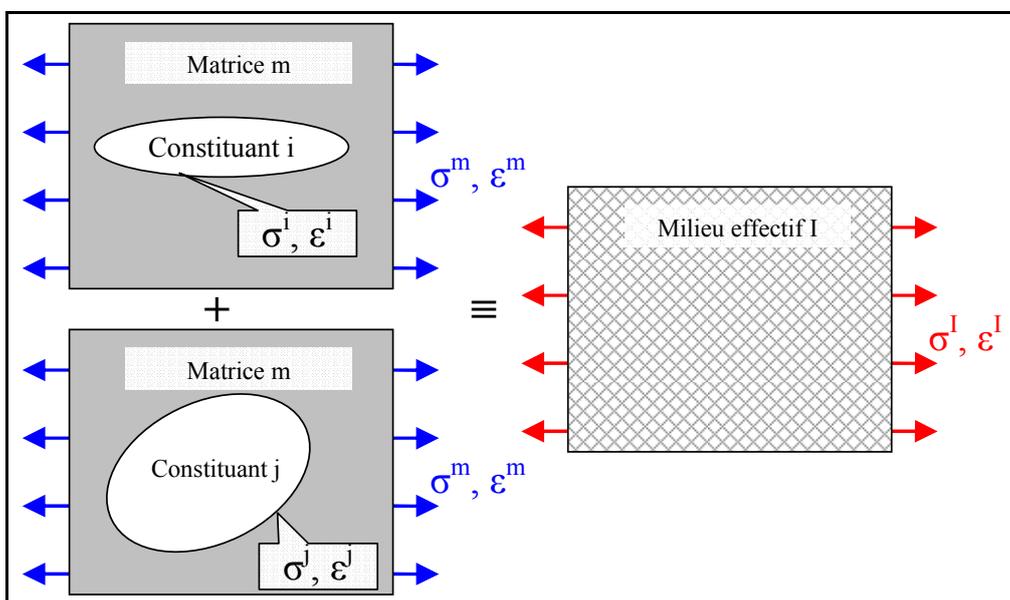
En vertu de l'équation (I-47), on peut montrer que ces deux approches sont identiques à la condition qu'il existe un unique tenseur de Hill pour toutes les inclusions, c'est à dire si celles-ci ont toutes la même morphologie (forme et orientation). Dans le cas contraire, les deux approches conduisent à des propriétés effectives différentes, comme on le montrera plus tard sur un exemple numérique. Ceci corrobore les propos de [Benveniste,1987] et plusieurs autres auteurs, qui ont montré que l'autocohérence pouvait être assurée au prix de quelques restrictions sur la microstructure du matériau : i) soit les inclusions présentes au sein du VER doivent avoir le même volume de base (forme et alignement), ii) ou le matériau et ses constituants doivent être isotrope, iii) ou le matériau est monophasé ou biphasé (dans le cas du modèle de Mori-tanaka). Ceci inclut les particules sphériques orientées aléatoirement, les particules en forme de soucoupe orientées aléatoirement dans le plan, les fibres alignées dans un pli composite, les agrégats isotropes... Des expressions analytiques des propriétés thermo-élastiques effectives ont été données pour ces configurations, dans une série d'articles de Benveniste, Dvorak et Chen (1991, 1992). Quelques applications peuvent également être trouvées dans [Pham, 2000] ou [Qiu et Weng, 1991].

### 3.2.3 Le modèle de Mori-Tanaka (MT)

#### 3.2.3.1 Principe

Une présentation claire et exhaustive du modèle de Mori-Tanaka (qu'on appellera « modèle MT ») est donnée dans [Weng, 1984] mais également dans [Berryman et Berge, 1996]. Ce modèle est une extension directe du problème de l'inclusion d'Eshelby, où l'on considère cette fois une fraction non infinitésimale d'inclusions noyées dans un milieu environnant. Le milieu est donc séparé en une phase environnante (ou « matrice » m) et une phase d'inclusion, constituée de particules ellipsoïdales alignées ou non. Aucune hypothèse n'est faite sur la géométrie de la matrice. Celle-ci est généralement choisie comme étant le constituant ayant la plus forte fraction volumique ; typiquement, pour un matériau composite, on choisit la résine.

Figure I-5 : Représentation de la microstructure pour le modèle de Mori-Tanaka



Le modèle de Mori-Tanaka est en réalité une transition d'échelles en deux étapes : le milieu macroscopique interagit avec la matrice, qui transmet contraintes et déformations aux inclusions. L'équation de transition d'échelles établie par Eshelby est alors utilisée sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}^m - \boldsymbol{\sigma}^i = -\mathbf{L}^{*i} : (\boldsymbol{\varepsilon}^m - \boldsymbol{\varepsilon}^i) \text{ avec } \mathbf{L}^{*i} = \mathbf{L}^m : \left( \mathbf{S}_{\text{esh}}^{i-1} - \mathbf{I}^{(4)} \right) \quad (\text{I-60})$$

Contrairement au modèle de Eshelby-Kröner présenté plus haut, cette expression ne fait pas intervenir la rigidité macroscopique mais celle du constituant choisi comme milieu ambiant (qui est connue). Le modèle est donc explicite, ce qui constitue un énorme avantage en simplicité et temps de calcul. Cette formulation permet aussi d'obtenir des expressions analytiques de la rigidité, pour certaines morphologies simples comme la sphère ([Weng, 1984]), le disque ([Welzel et al., 2005]) ou la fibre ([Fréour et al., 2005]).

Une comparaison des résultats des modèles de Mori-Tanaka et de Eshelby-Kröner, pour un unidirectionnel carbone-époxy, est proposée dans [Fréour et al., 2006]. Cet article démontre des écarts importants entre les deux modèles dans les propriétés (cisaillement transverse principalement) et contraintes locales calculées dès lors que le taux de renforts dépasse 10 %. Aux forts taux de renforts, le modèle de Mori-Tanaka tend à sous-estimer les contraintes locales par rapport à celui de Eshelby-Kröner, notamment pour la direction transverse et le cisaillement. Ces écarts sont dûs notamment au fait que le modèle de Mori-Tanaka prend en compte uniquement les interactions entre les inclusions et la matrice. On peut dire que le modèle de Mori-Tanaka minimise les interactions entre les particules, par opposition au modèle de Eshelby-Kröner qui les maximise.

### 3.2.3.2 Expression des tenseurs d'influence

Au contraire du modèle de Eshelby-Kröner classique, on exprime cette fois les états mécaniques locaux à partir des états mécaniques dans la matrice (et non des états mécaniques macroscopiques). On définit donc les tenseurs d'influence relatifs  $\mathbf{T}^i$ ,  $\mathbf{t}^i$ ,  $\mathbf{W}^i$  et  $\mathbf{w}^i$  comme suit :

$${}_{\text{MT}} \boldsymbol{\varepsilon}^i = \mathbf{T}^i : \boldsymbol{\varepsilon}^m + \mathbf{t}^i . \Delta P \quad (\text{I-61})$$

$${}_{\text{MT}} \boldsymbol{\sigma}^i = \mathbf{W}^i : \boldsymbol{\sigma}^m + \mathbf{w}^i . \Delta P \quad (\text{I-62})$$

Une conséquence directe de cette écriture est que les tenseurs d'influence relatifs s'écrivent très simplement pour la phase choisie comme matrice (indépendamment de sa morphologie) :

$$\mathbf{T}^m = \mathbf{W}^m = \mathbf{I}^{(4)} \quad (\text{I-63})$$

$$\mathbf{t}^m = \mathbf{w}^m = \mathbf{0}^{(2)} \quad (\text{I-64})$$

Un raisonnement analogue à celui développé pour le modèle de Eshelby-Kröner classique, permet d'obtenir les expressions des tenseurs d'influence relatifs ; il suffit pour cela de reprendre les expressions (I-52) à (I-55) en remplaçant les exposants I (milieu effectif) par m (matrice) :

$${}_{\text{MT}} \mathbf{T}^i = \left( \mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^i \right)^{-1} : \left( \mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^m \right) = \left[ \mathbf{I}^{(4)} + \mathbf{E}^i : \left( \mathbf{L}^i - \mathbf{L}^m \right) \right]^{-1} \quad (\text{I-65})$$

$${}_{\text{MT}} \mathbf{t}^i = \left( \mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^i \right)^{-1} : \left( \mathbf{I}^m - \mathbf{I}^i \right) = \left( \mathbf{E}^{i-1} + \mathbf{L}^i - \mathbf{L}^m \right)^{-1} : \left( \mathbf{I}^m - \mathbf{I}^i \right) \quad (\text{I-66})$$

$${}_{\text{MT}} \mathbf{W}^i = \left( \mathbf{M}^{*i} + \mathbf{M}^i \right)^{-1} : \left( \mathbf{M}^{*i} + \mathbf{M}^m \right) = \left[ \left( \mathbf{E}^{i-1} - \mathbf{M}^{m-1} \right)^{-1} + \mathbf{M}^i \right]^{-1} : \left[ \left( \mathbf{E}^{i-1} - \mathbf{M}^{m-1} \right)^{-1} + \mathbf{M}^m \right] \quad (\text{I-67})$$

$${}_{\text{MT}} \mathbf{w}^i = \left( \mathbf{M}^{*i} + \mathbf{M}^i \right)^{-1} : \left( \mathbf{m}^m - \mathbf{m}^i \right) = \left[ \left( \mathbf{E}^{i-1} - \mathbf{M}^{m-1} \right)^{-1} + \mathbf{M}^i \right]^{-1} : \left( \mathbf{m}^m - \mathbf{m}^i \right) \quad (\text{I-68})$$

D'autre part, il faut remarquer que ces tenseurs d'influence relatifs ne sont pas soumis aux lois sur les moyennes que satisfont les tenseurs d'influence absolus. Afin de compléter la transition

d'échelles, il faut exprimer les états mécaniques dans la matrice à partir des états mécaniques macroscopiques. Cela est fait en injectant la définition des tenseurs d'influence relatifs dans les principes de Hill ; pour le cas des déformations, par exemple, on écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^I = \langle \boldsymbol{\varepsilon}^i \rangle = \langle \mathbf{T}^i : \boldsymbol{\varepsilon}^m + \mathbf{t}^i \cdot \Delta \mathbf{T} \rangle = \langle \mathbf{T}^i \rangle : \boldsymbol{\varepsilon}^m + \langle \mathbf{t}^i \rangle \cdot \Delta \mathbf{P} \quad (\text{I-69})$$

d'où 
$$\boldsymbol{\varepsilon}^m = \langle \mathbf{T}^i \rangle^{-1} : (\boldsymbol{\varepsilon}^I - \langle \mathbf{t}^i \rangle \cdot \Delta \mathbf{P}) \quad (\text{I-70})$$

et enfin 
$$\boldsymbol{\varepsilon}^i = \mathbf{T}^i : \boldsymbol{\varepsilon}^m + \mathbf{t}^i \cdot \Delta \mathbf{T} = \mathbf{T}^i : \langle \mathbf{T}^i \rangle^{-1} : \boldsymbol{\varepsilon}^I + (\mathbf{t}^i - \mathbf{T}^i : \langle \mathbf{T}^i \rangle^{-1} : \langle \mathbf{t}^i \rangle) \Delta \mathbf{P} \quad (\text{I-71})$$

Les tenseurs d'influence absolus s'écrivent donc en fonction des tenseurs d'influence relatifs comme suit (en supposant un raisonnement analogue pour les contraintes):

$$\mathbf{A}^i = \mathbf{T}^i : \langle \mathbf{T}^i \rangle^{-1} \quad (\text{I-72}) \quad \mathbf{a}^i = \mathbf{t}^i - \mathbf{T}^i : \langle \mathbf{T}^i \rangle^{-1} : \langle \mathbf{t}^i \rangle = \mathbf{t}^i - \mathbf{A}^i : \langle \mathbf{t}^i \rangle \quad (\text{I-73})$$

$$\mathbf{B}^i = \mathbf{W}^i : \langle \mathbf{W}^i \rangle^{-1} \quad (\text{I-74}) \quad \mathbf{b}^i = \mathbf{w}^i - \mathbf{W}^i : \langle \mathbf{W}^i \rangle^{-1} : \langle \mathbf{w}^i \rangle = \mathbf{w}^i - \mathbf{B}^i : \langle \mathbf{w}^i \rangle \quad (\text{I-75})$$

Ces résultats correspondent à ceux donnés dans [Benveniste et al., 1991]. L'écriture de ces tenseurs utilise donc l'une des relations de cohérence des états mécaniques.

### 3.2.3.3 Expression des propriétés effectives

Les propriétés effectives sont calculées à partir des équations (I-22), (I-23), (I-26), (I-27) qui utilisent, rappelons-le, une deuxième relation de cohérence. Les deux relations de cohérence sont utilisées, le modèle de Mori-Tanaka est donc autocohérent par définition. D'autre part, il est intéressant d'exprimer les propriétés macroscopiques à partir des tenseurs d'influence relatifs :

$${}_{\text{HG}} \mathbf{L}^I = \langle \mathbf{L}^i : \mathbf{A}^i \rangle = \langle \mathbf{L}^i : \mathbf{T}^i \rangle : \langle \mathbf{T}^i \rangle^{-1} \quad (\text{I-76})$$

$${}_{\text{HG}} \mathbf{I}^I = -\mathbf{L}^I : \mathbf{m}^I = \langle \mathbf{I}^i + \mathbf{L}^i : \mathbf{a}^i \rangle = \langle \mathbf{I}^i + (\mathbf{L}^i - \mathbf{L}^I) : \mathbf{t}^i \rangle \quad (\text{I-77})$$

$${}_{\text{HE}} \mathbf{M}^I = \mathbf{L}^{I-1} = \langle \mathbf{M}^i : \mathbf{B}^i \rangle = \langle \mathbf{M}^i : \mathbf{W}^i \rangle : \langle \mathbf{W}^i \rangle^{-1} \quad (\text{I-78})$$

$${}_{\text{HE}} \mathbf{m}^I = \langle \mathbf{m}^i + \mathbf{M}^i : \mathbf{b}^i \rangle = \langle \mathbf{m}^i + (\mathbf{M}^i - \mathbf{M}^I) : \mathbf{w}^i \rangle \quad (\text{I-79})$$

Pour le modèle de Mori-Tanaka, les propriétés effectives s'écrivent alors de manière explicite :

$${}_{\text{MTHG}} \mathbf{L}^I = \left\langle \mathbf{L}^i : (\mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^i)^{-1} : (\mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^m) \right\rangle : \left\langle (\mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^i)^{-1} : (\mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^m) \right\rangle^{-1} \quad (\text{I-80})$$

$${}_{\text{MTHG}} \mathbf{I}^I = \langle \mathbf{I}^i \rangle + \left\langle (\mathbf{L}^i - \mathbf{L}^I) : (\mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^i)^{-1} : (\mathbf{I}^m - \mathbf{I}^i) \right\rangle \quad (\text{I-81})$$

$${}_{\text{MTHE}} \mathbf{M}^I = \mathbf{L}^{I-1} = \left\langle \mathbf{M}^i : (\mathbf{M}^{*i} + \mathbf{M}^i)^{-1} : (\mathbf{M}^{*i} + \mathbf{M}^m) \right\rangle : \left\langle (\mathbf{M}^{*i} + \mathbf{M}^i)^{-1} : (\mathbf{M}^{*i} + \mathbf{M}^m) \right\rangle^{-1} \quad (\text{I-82})$$

$${}_{\text{MTHE}} \mathbf{m}^I = \langle \mathbf{m}^i \rangle + \left\langle (\mathbf{M}^i - \mathbf{M}^I) : (\mathbf{M}^{*i} + \mathbf{M}^i)^{-1} : (\mathbf{m}^m - \mathbf{m}^i) \right\rangle \quad (\text{I-83})$$

### 3.2.4 Le modèle de Eshelby-Kröner généralisé (EKG)

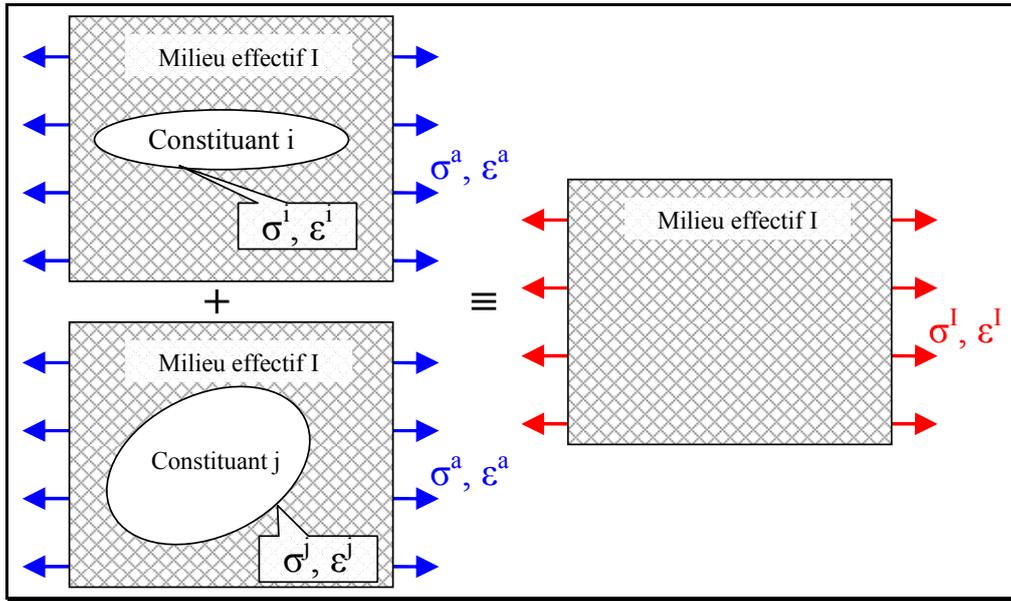
Les deux modèles présentés plus haut offrent une certaine forme de complémentarité : d'un côté, le modèle de Eshelby-Kröner offre une prise en compte forte des interactions entre les inclusions, mais souffre parfois d'un défaut d'autocohérence ; de l'autre, le modèle de Mori-Tanaka ne prend

pas en compte (ou faiblement) ces interactions mais ne présente pas ces problèmes d'autocoherence. On sait également que le choix des propriétés données au milieu ambiant influe fortement sur les propriétés effectives et surtout sur les états mécaniques locaux. Il serait donc judicieux de combiner ces deux modèles.

Li (1999) a proposé une approche qui reprend les équations de Mori-Tanaka, en supposant cette fois que le milieu ambiant (noté avec l'exposant <sup>a</sup>) a les propriétés du milieu effectif. Celui-ci est chargé à l'infini avec une déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}^a$  ou une contrainte  $\boldsymbol{\sigma}^a$  quelconque (souvent choisie comme celle de la matrice). Contrairement au modèle autocohérent classique, on suppose que ces contraintes et déformations sont distinctes des états mécaniques macroscopiques. On écrit alors :

$$\boldsymbol{\sigma}^a - \boldsymbol{\sigma}^i = -\mathbf{L}^{*i} : (\boldsymbol{\varepsilon}^a - \boldsymbol{\varepsilon}^i) \text{ avec } \mathbf{L}^{*i} = \mathbf{L}^i : (\mathbf{S}_{esh}^{i-1} - \mathbf{I}^{(4)}) \quad (\text{I-84})$$

Figure I-6 : Représentation de la microstructure pour le modèle de Eshelby-Kröner généralisé



Les équations constitutives sont alors identiques à celles du modèle de Mori-Tanaka, en remplaçant les exposants « m » par « a » pour les états mécaniques, et « I » pour les propriétés. En reprenant les équations précédentes, les propriétés effectives s'écrivent alors de manière implicite, comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{KEGH\sigma}^I &= \mathbf{L}_{KEGH\sigma}^I : \langle \mathbf{A}^i \rangle^{-1} \\ &= \langle \mathbf{L}^i : (\mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^i)^{-1} : (\mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^i) \rangle : \langle (\mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^i)^{-1} : (\mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^i) \rangle^{-1} \end{aligned} \quad (\text{I-85})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{KEGH\sigma}^I &= \mathbf{L}_{KEGH\sigma}^I - \mathbf{L}_{KEGH\sigma}^I : \langle \mathbf{a}^i \rangle \\ &= \langle \mathbf{I}^i \rangle + \langle (\mathbf{L}^i - \mathbf{L}^I) : (\mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^i)^{-1} : (\mathbf{I}^i - \mathbf{I}^i) \rangle \\ &= \langle (\mathbf{L}^i - \mathbf{L}^I) : (\mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^i)^{-1} - \mathbf{I}^{(4)} \rangle^{-1} : \langle [(\mathbf{L}^i - \mathbf{L}^I) : (\mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^i)^{-1} - \mathbf{I}^{(4)}] : \mathbf{I}^i \rangle \\ &= \langle (\mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^i) : (\mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^i)^{-1} \rangle^{-1} : \langle (\mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^i) : (\mathbf{L}^{*i} + \mathbf{L}^i)^{-1} : \mathbf{I}^i \rangle \end{aligned} \quad (\text{I-86})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{KEGHE}^I &= \mathbf{M}_{KEGHE}^I : \langle \mathbf{B}^i \rangle^{-1} \\ &= \langle \mathbf{M}^i : (\mathbf{M}^{*i} + \mathbf{M}^i)^{-1} : (\mathbf{M}^{*i} + \mathbf{M}^i) \rangle : \langle (\mathbf{M}^{*i} + \mathbf{M}^i)^{-1} : (\mathbf{M}^{*i} + \mathbf{M}^i) \rangle^{-1} \end{aligned} \quad (\text{I-87})$$

$$\begin{aligned}
{}_{KEGH\epsilon} \mathbf{m}^I &= {}_{KEH\epsilon} \mathbf{m}^I - {}_{KEGH\epsilon} \mathbf{M}^I : \langle {}_{KEH\epsilon} \mathbf{b}^i \rangle \\
&= \langle \mathbf{m}^i \rangle + \langle (\mathbf{M}^i - \mathbf{M}^I) : (\mathbf{M}^{*i} + \mathbf{M}^i)^{-1} : (\mathbf{m}^I - \mathbf{m}^i) \rangle \\
&= \langle (\mathbf{M}^i - \mathbf{M}^I) : (\mathbf{M}^{*i} + \mathbf{M}^i)^{-1} - \mathbf{I}^{(4)} \rangle^{-1} : \langle [(\mathbf{M}^i - \mathbf{M}^I) : (\mathbf{M}^{*i} + \mathbf{M}^i)^{-1} - \mathbf{I}^{(4)}] : \mathbf{m}^i \rangle \quad (I-88) \\
&= \langle (\mathbf{M}^{*i} + \mathbf{M}^I) : (\mathbf{M}^{*i} + \mathbf{M}^i)^{-1} \rangle^{-1} : \langle (\mathbf{M}^{*i} + \mathbf{M}^I) : (\mathbf{M}^{*i} + \mathbf{M}^i)^{-1} : \mathbf{m}^i \rangle
\end{aligned}$$

où quelques manipulations algébriques simples permettent de mettre les propriétés anélastiques ( $\mathbf{I}^I$  et  $\mathbf{m}^I$ ) sous une forme simple et explicite. Notons que les équations d'élasticité correspondent à celles proposées par Li, mais pas celles décrivant la thermo-élasticité.

On retrouve donc les expressions du modèle autocohérent classique, mais avec une correction des propriétés par les moyennes des tenseurs d'influence relatifs. Pour la formulation en contraintes par exemple, la rigidité est normalisée par un facteur  $\langle {}_{KE} \mathbf{A}^i \rangle^{-1}$  et le coefficient des contraintes

anélastiques est corrigé par un terme supplémentaire  $-\mathbf{L}^I : \langle {}_{KE} \mathbf{a}^i \rangle$ . L'idée de normaliser la rigidité n'est pas nouvelle puisque [Walpole, 1969] l'avait déjà proposée ; quand à la correction des coefficients de contraintes ou déformations anélastiques, elle est apparue avec le modèle de Mori-Tanaka. L'originalité réside ici dans l'application des hypothèses du modèle autocohérent aux équations du modèle de Mori-Tanaka. A notre connaissance, ceci n'a jamais été explicitement proposé dans la littérature pour une loi de comportement anélastique.

L'avantage de ce modèle (qu'on appellera « modèle EKG ») est qu'il est applicable à des matériaux hétérogènes renforcés par des inclusions de formes ou d'orientations différentes, tout comme le modèle de Mori-Tanaka ; avec en plus la possibilité de considérer des matériaux avec de forts taux de renforts. En outre, la vitesse de convergence du calcul de la rigidité est généralement plus grande qu'avec le modèle EK classique. Citons comme applications possibles : les mats de verre ou de carbone, les nanocomposites, certains types de polycristaux (Ti-17 par exemple, qui présente des grains sphériques ou en forme de platelets), ou les plis unidirectionnels poreux (avec des porosités sphériques). Quelques tests effectués en marge de ces travaux ont montré des résultats prometteurs, mais il subsiste certaines difficultés : le problème de symétrie du tenseur de rigidité effectif notamment, et des résultats qui peuvent être irréalistes lorsque les formes des inclusions sont extrêmement différentes (cas des plis UD avec porosités sphériques). Un travail de validation et de fiabilisation reste donc à mener sur ce modèle.

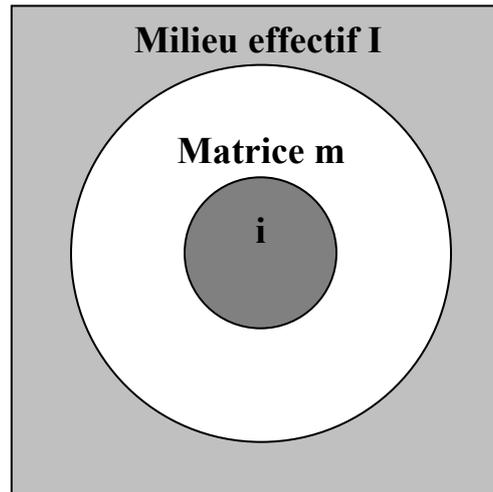
### 3.2.5 Quelques considérations sur les modèles à champs moyens

Plusieurs remarques importantes doivent être faites à propos des modèles présentés ci-dessus.

- Définition du modèle de Eshelby-Kröner généralisé :

Notons tout d'abord que le modèle de Eshelby-Kröner généralisé, présenté ci-haut, doit être distingué du « modèle autocohérent généralisé » tel que l'on trouve couramment dans la littérature. Celui-ci, originellement proposé par [Christensen et Lo, 1979], repose sur une représentation de la microstructure via trois phases concentriques : une phase « inclusion », une phase « matrice » de même morphologie et concentrique à l'inclusion, et enfin une phase de milieu effectif (ou « milieu de comparaison ») de dimensions infinies. Ce modèle est très utilisé pour modéliser, notamment, les milieux renforcés par les fibres ou des inclusions sphériques ; il améliore les prédictions des modèle de Eshelby-Kröner et Mori-Tanaka, notamment en ce qui concerne le coefficient de cisaillement. Une discussion extensive de ce modèle est proposée par [Benveniste, 2008], mais également [Jiang et al., 2001; Dai et al. 1999].

Figure I-7 : Représentation de la microstructure pour le modèle de Eshelby-Kröner généralisé



- Sens physique des modèles à « milieu ambiant » :

Le modèle de Eshelby-Kröner généralisé proposé ici répond à la nécessité d'étendre les hypothèses du modèle autocohérent au cas où plusieurs morphologies d'inclusions coexistent au sein du V.E.R. Cela a été fait via les équations du modèle de Mori-Tanaka, en figurant un milieu ambiant chargé de faire l'interface entre le milieu effectif et les inclusions.

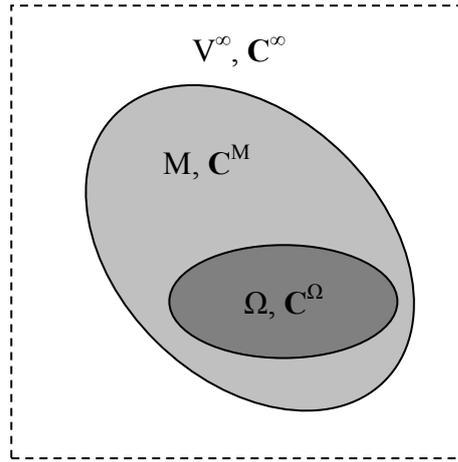
La signification physique de ce « milieu ambiant » reste cependant à définir, dans la mesure où ni sa morphologie ni son étendue n'ont été précisées. Les contraintes et déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}^a$  et  $\boldsymbol{\sigma}^a$  appliquées à l'infini doivent également être précisées. Ce problème est partagé par les modèles MT et EKG, le deuxième étant une extension du premier. En effet, si l'on s'en tient à la définition de la relation de Hill,  $\boldsymbol{\varepsilon}^a$  et  $\boldsymbol{\sigma}^a$  sont déterminées à partir des états mécaniques macroscopiques  $\boldsymbol{\varepsilon}^I$  et  $\boldsymbol{\sigma}^I$ , de sorte que les états mécaniques locaux satisfassent les relations de moyennes de Hill.

Dans le cadre du modèle MT, on comprend aisément que les états mécaniques subis par la matrice sont nécessairement différents des états mécaniques macroscopiques. Les choses sont moins claires pour le modèle EKG : si l'on considère une inclusion ayant les propriétés du milieu ambiant (i.e. celles du milieu effectif), alors les propriétés sont homogènes dans et hors de l'inclusion ; les états mécaniques sont eux homogènes et égaux à ceux appliqués à l'infini soit  $\boldsymbol{\varepsilon}^a$  et  $\boldsymbol{\sigma}^a$ . Cependant, en vertu des relations de normalisation (I-72) à (I-75), ceux-ci sont distincts de  $\boldsymbol{\varepsilon}^I$  et  $\boldsymbol{\sigma}^I$ , ce qui est contradictoire. En outre, cette contradiction n'apparaît que si plusieurs morphologies d'inclusions coexistent au sein du VER ; dans le cas contraire, les tenseurs d'influence relatifs et absolus se confondent.

- Modèle à double inclusion :

Les travaux de Hori et Nemat-Nasser sur le modèle à double inclusion [Nemat-Nasser et Hori, 1993 ; Hori et Nemat-Nasser, 1994] donnent des éléments de réponse aux questions soulevées plus haut. Ce modèle est basé, non plus sur une inclusion noyée dans le milieu ambiant, mais deux inclusions imbriquées l'une dans l'autre et noyées dans le milieu ambiant. Le volume délimité par l'inclusion « externe » définit un *volume élémentaire représentatif (VER)*.

Figure I-8 : Modèle à double inclusion de Hori et Nemat-Nasser



Dans le modèle « mono-inclusion » homogène d'Eshelby, on considère une seule inclusion  $\Omega$  de rigidité  $C$ , noyée dans un milieu infini  $V^\infty$  de même rigidité (Fig. 1a). Si on soumet l'inclusion à une déformation libre  $\varepsilon^*$ , la déformation finale  $\varepsilon$  dans l'inclusion s'écrit en fonction du tenseur d'Eshelby  $S_{esh}(\Omega)$ , lui-même dépendant de la forme et l'orientation de l'ellipsoïde délimitant  $\Omega$  :

$$\varepsilon_\Omega = S_{esh}^\Omega : \varepsilon_\Omega^* \quad (I-89)$$

Dans le modèle à double inclusion homogène de Hori et Nemat-Nasser, la déformation dans l'inclusion  $\Omega$  s'écrit de la même façon, et la déformation *moyenne* dans la zone annulaire  $\Gamma=(M-\Omega)$  s'écrit :

$$\langle \varepsilon \rangle_{M-\Omega} = f \times \left( S_{esh}^\Gamma - S_{esh}^\Omega \right) : \varepsilon_\Omega^* \quad \text{avec } f = \frac{\Omega}{M} \quad (I-90)$$

On prêtera attention au fait qu'il s'agit bien ici de déformation moyenne car les champs de contrainte et déformation dans cette zone ne sont pas constants. Ces équations ont été élargies dans [Nemat-Nasser, 2000] au cas où plusieurs inclusions  $\Omega^a$  distinctes cohabitent au sein du VER (modèle multi-inclusions), et au cas où les trois phases sont de rigidités différentes ( $C^\infty$ ,  $C^M$  et  $C^\Omega$ ). [Hu et Weng, 2000] proposent une comparaison extensive des modèles de Mori-Tanaka, Eshelby-Kröner et Kuster-Toksoz avec le modèle à double inclusion. Ils montrent notamment que les modèles de Mori-Tanaka et de Eshelby-Kröner classique sont des cas particuliers du modèle à double inclusion. En supposant que  $C^\infty = C^I$  et que les deux inclusions  $M$  et  $\Omega$  sont de forme et orientation identiques, on retombe sur les expressions du modèle autocohérent classique. En supposant que  $C^\infty = C^M$  et, toujours, que les deux inclusions  $M$  et  $\Omega$  sont de forme et orientation identiques, on retombe sur les expressions du modèle de Mori-Tanaka. Le modèle à double inclusion est donc bien une représentation exacte de ces deux modèles, dans le cas où les inclusions ont toutes la même morphologie.

D'autre part, l'équation (I-90) implique que la déformation moyenne dans le VER est nulle si et seulement si les deux tenseurs d'Eshelby sont identiques, i.e. les deux inclusions ont la même forme et la même orientation. Autrement dit, le fait d'avoir des inclusions de morphologie différentes au sein du VER, ou même une seule inclusion de morphologie différente de celle du VER, induit une « perturbation » par rapport aux résultats du modèle d'Eshelby classique : les états mécaniques locaux diffèrent et, en outre, dépendent de la morphologie du VER, ce qui est un non-sens physique. Cette perturbation est à même d'expliquer les résultats « contradictoires » évoqués dans la remarque précédente. Les interprétations de différents auteurs convergent vers cette conclusion : pour Hu et Weng, cela proviendrait de termes négligés par Hori et Nemat-Nasser lors des opérations de moyenne. Pour [Shen et Yi, 2000], cette dépendance à la forme serait due à l'hypothèse de non-

interaction entre les inclusions  $\Omega^a$  : les termes dépendants de  $S_{esh}(\Omega)$  devraient être contrebalancés par la résultante des interactions entre inclusions. Cette idée semble corroborée par l'équation (I-90) qui traduit cette résultante. [Aboutajeddine et Neal, 2005] arrivent à la même conclusion mais ajoutent que ces interactions entre inclusions peuvent également jouer un rôle, si les rigidités  $C^\infty$  et  $C^M$  sont différentes (ce qui est le cas du modèle autocohérent généralisé de Christensen et Lo, mais pas du modèle EKG défini ici).

Pour conclure, le modèle à double inclusion de Hori et Nemat-Nasser propose une autre représentation des modèles MT et EK classiques. Il peut également être relié au modèle autocohérent généralisé proposé par Christensen et Lo. En revanche, dans le cas où plusieurs morphologies d'inclusions coexistent au sein du VER (tel que pour le modèle EKG), il apparaît que le modèle mérite un traitement particulier afin, notamment, de supprimer la dépendance des résultats à la morphologie du VER. La représentation physique exacte du modèle EKG, notamment du VER (ou « milieu ambiant ») reste donc à préciser.

### **3.3 Mise en application des modèles**

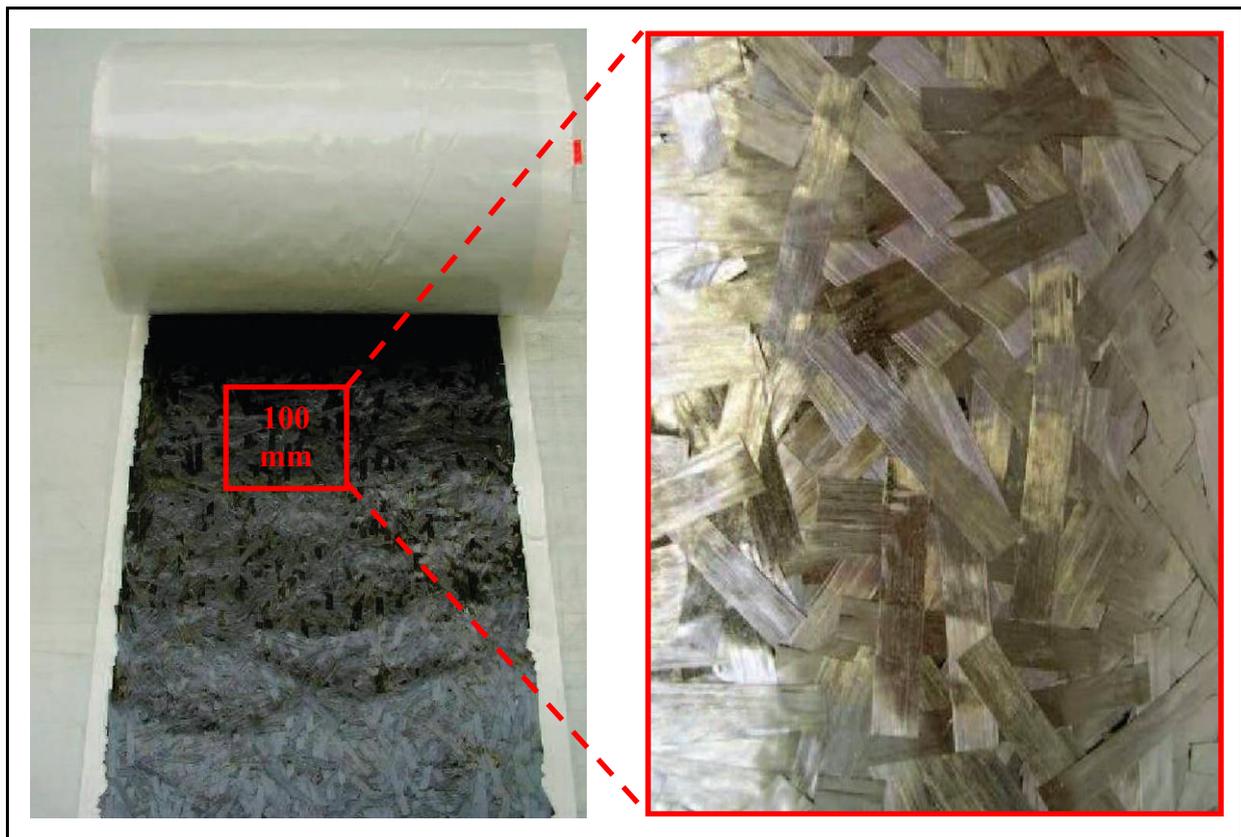
L'état de l'art décrit ci-dessus a permis de décrire brièvement les possibilités offertes par les différents modèles de transition d'échelles "à champs moyens", en matière d'homogénéisation des matériaux hétérogènes. Dans le cadre de ces travaux, ces modèles seront utilisés afin de décrire le comportement thermo-élastique d'un composite à microstructure complexe. On s'intéressera notamment au modèle de Mori-Tanaka et au modèle autocohérent de Eshelby-Kröner. Les limites de ce dernier, lorsque le VER contient plusieurs inclusions ayant des morphologies différentes, seront détaillées en s'appuyant sur le cas du matériau sus-cité. Le modèle de Eshelby-Kröner Généralisé décrit ici sera également appliqué, et on montrera comment il permet de dépasser les limites du modèle autocohérent classique.

## 4 PROCEDURE DE TRANSITION D'ECHELLES POUR LE HEXTOOL

### 4.1 Description de la structure du composite étudié

Le Hextool® [Hexcel HUG, 2007] est un matériau conçu et fabriqué par Hexcel Composites pour la création de pièces composites complexes (grandes, épaisses, et à faibles tolérances dimensionnelles). On s'intéresse notamment à son utilisation en tant que moule pour la fabrication de pièces composites, ce pour lequel il présente un certain nombre d'avantages, notamment : de bonnes propriétés mécaniques associés à une quasi-isotropie plane, un faible CET (proche de celui des plis composites classiques), et une faible inertie thermique. Il se cuit par bache à vide et autoclave, à des températures de l'ordre de 190°C ; après post-cuisson à 220°C, il présente une haute température de transition vitreuse (275°C). Le Hextool bénéficie d'une inertie thermique faible par rapport aux métaux, ce qui permet des gains énergétiques lors de la chauffe. Son coefficient d'expansion thermique est proche de celui des pièces à mouler (environ  $5.10^{-6}/K$ , contre  $12.10^{-6}/K$  pour l'acier), ce qui limite les contraintes moule/pièce et les distorsions associées. Le Hextool est aisément usinable et surfacable, et l'on peut atteindre des tolérances dimensionnelles proches de celles obtenues avec les pièces métalliques. Enfin, il bénéficie d'une grande espérance de vie (plusieurs centaines de cycles de chauffe à 200°C), et il est réparable par usinage et rechargement des zones endommagées.

Figure I-9 : Aspect extérieur du préimprégné Hextool [Hexcel HUG, 2007]



Concernant la microstructure, le composite est formé par des renforts unidirectionnels de forme rectangulaire (60\*8\*0,15 mm) et orientées aléatoirement dans le plan, formant ainsi un patchwork de bandes qui se recouvrent les unes les autres (figure I-9). Ces renforts sont eux-mêmes composés de fibre AS4 et de matrice (ou résine) bismaléimide M61, arrangées en un pli unidirectionnel. Lors de la fabrication, la résine présente en excès dans les bandes de renforts s'infiltrer en-dehors, et vient combler les vides laissés dans l'arrangement aléatoire. L'ensemble se présente alors comme un pli quasi-isotrope dans le plan, d'épaisseur environ 1,3 mm, à surface très irrégulière avant usinage.

La fraction volumique totale de fibre après fabrication vaut  $V^{\text{ftot}} = 53 \%$ , celle de matrice vaut donc  $V^{\text{mtot}} = 1 - V^{\text{ftot}} = 47 \%$ , la porosité du composite étant supposée négligeable. A l'intérieur d'une bande renforçante, on définit la fraction  $V^{\text{mir}}$  (Matrice Intra-Renforts) de matrice et la fraction  $V^f$  de fibre, rapportées au volume d'une bande de renfort ; à l'échelle macroscopique, on définit la fraction  $V^{\text{mer}}$  (Matrice Extra-Renforts) de matrice entre les bandes assurant la cohésion du matériau, ainsi que son complémentaire, la fraction volumique  $V^r$  des bandes de renforts.

La répartition exacte de la résine entre l'intérieur et l'extérieur des bandes n'est pas connue, et est aléatoire par nature : on peut, au mieux, estimer que la fraction de matrice extra-renforts est comprise en 0 % et 10 % (on considérera 5 % par défaut). L'ensemble des fractions volumiques est donc déterminé par deux paramètres, à savoir  $V^{\text{ftot}}$  qui est connu, et  $V^{\text{mer}}$  qui est estimé.

$$\begin{aligned} V^{\text{ftot}} &= V^r \times V^f \\ V^r + V^{\text{mer}} &= 1 \\ V^f + V^{\text{mir}} &= 1 \end{aligned} \quad (\text{I-91})$$

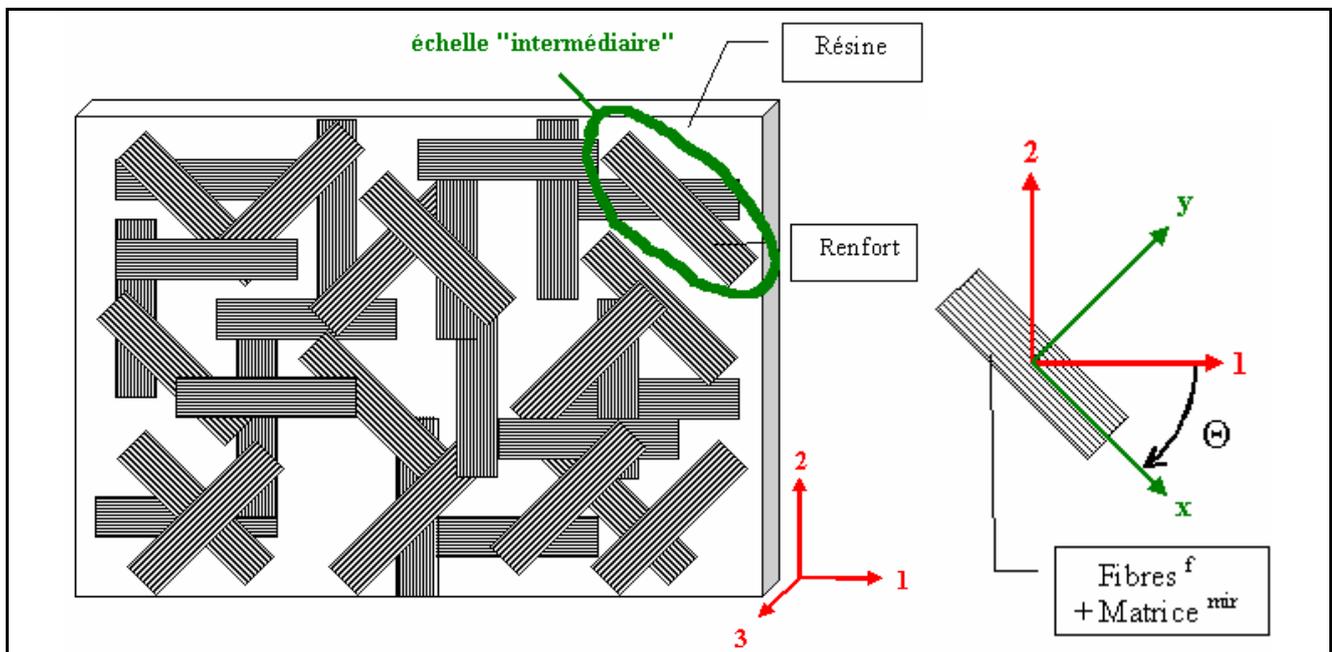
En conséquence, pour conserver des taux volumiques admissibles ( $V^f < 1$  et  $V^r < 1$ ), le taux de matrice extra-renforts est compris en 0 % et 47 %.

## 4.2 Procédure d'homogénéisation : la double transition d'échelles

Afin de développer un modèle de transition d'échelles depuis les constituants (fibres et matrice) vers le composite, on définit trois échelles caractéristiques du matériau (figure I-10) :

- l'échelle « microscopique » où l'on observe le comportement d'une fibre (notée  $f$ ) et de la matrice intra-renfort (notée  $\text{mir}$ ) qui l'entoure ;
- l'échelle intermédiaire (ou « mésoscopique ») où l'on observe le comportement d'une bande de renfort (notée  $r$ , et composée de  $f$  et  $\text{mir}$ ) et de la matrice extra-renforts (notée  $\text{mer}$ ).
- l'échelle « macroscopique » où l'on observe le comportement du composite, considéré homogène et isotrope plan.

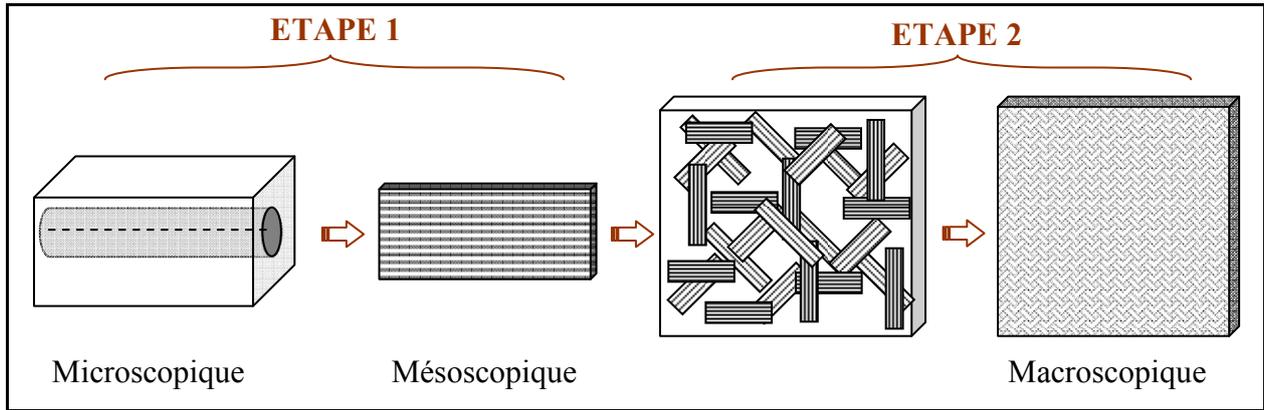
Figure I-10 : Représentation de la structure du composite



On établit alors une transition d'échelles en deux étapes (figure I-11) : dans un premier temps, on calcule les propriétés effectives d'une bande de renfort, à partir de celles de la matrice intra-renforts et des fibres de carbone. On calcule ensuite les propriétés effectives du mat, à partir des propriétés

de la matrice extra-renforts et des propriétés effectives des bandes de renforts calculées précédemment.

Figure I-11 : Procédure d'homogénéisation en deux étapes



On s'attachera notamment à décrire les résultats des différents modèles proposés plus haut (EK, EKG, MT) en termes de propriétés effectives. Pour les modèles EK et EKG, la rigidité s'exprime de façon implicite et on la résout de manière itérative, avec un critère de convergence basé sur les termes du tenseur de rigidité et une précision relative de  $10^{-3}$ . Différentes valeurs d'initialisations ont été testées et aboutissent toutes à la même valeur finale du tenseur de rigidité ; cependant une initialisation par le modèle de Mori-Tanaka permet une convergence plus rapide qu'en initialisant avec les approches de Reuss, Voigt ou Hill ; c'est pourquoi elle a été adoptée par la suite comme valeur d'initialisation.

Pour clarifier les notations, on définit un repère « local »  $R_{xyz}$  orienté selon l'axe des fibres d'une bande de renfort. Ce repère est obtenu par rotation d'un angle  $\Theta$  autour de l'axe 3 du repère « global »  $R_{123}$  associé au composite effectif. Les indices u-v-w seront utilisés pour désigner les termes de cisaillement dans les tenseurs 6x6 contractés, en remplacement des indices 4-5-6 (respectifs) utilisés en projection dans le repère global. La matrice de passage du repère  $R_{xyz}$  vers le repère  $R_{123}$  s'écrit :

$${}_{ii} \mathbf{m}(\Theta) = \begin{bmatrix} \cos \Theta & -\sin \Theta & 0 \\ \sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (I-92)$$

La matrice de passage indiquée ci-dessus correspond à la convention introduite dans [Roe, 1965], qui s'applique de la façon suivante pour des tenseurs d'ordre 2 et 4, respectivement :

$${}_{RI} \mathbf{L}_{ab}^i = \sum_{e=1}^3 \sum_{f=1}^3 {}_{ii} \mathbf{m}_{ac} \times {}_{ii} \mathbf{m}_{bf} \times {}_{Ri} \mathbf{l}_{ef}^i = ({}_{ii} \mathbf{m} \cdot \mathbf{l} \cdot {}_{ii} \mathbf{m}^T)_{ab} \quad (I-93)$$

$${}_{RI} \mathbf{L}_{abcd}^i = \sum_{e=1}^3 \sum_{f=1}^3 \sum_{g=1}^3 \sum_{h=1}^3 {}_{ii} \mathbf{m}_{ac} \times {}_{ii} \mathbf{m}_{bf} \times {}_{ii} \mathbf{m}_{cg} \times {}_{ii} \mathbf{m}_{dh} \times {}_{Ri} \mathbf{L}_{efgh}^i \quad (I-94)$$

## 4.3 Ecriture des lois de comportement anélastiques

### 4.3.1 Ecriture des tenseurs d'élasticité

Rappelons tout d'abord que les tenseurs d'élasticité, d'ordre 4, sont souvent écrits en notation contractée d'ordre 2 pour améliorer la lisibilité des écritures. Une loi de comportement élastique linéaire s'écrit donc ([Berthelot, 1999]) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 = \sigma_{11} \\ \sigma_2 = \sigma_{22} \\ \sigma_3 = \sigma_{33} \\ \sigma_4 = \sigma_{23} \\ \sigma_5 = \sigma_{13} \\ \sigma_6 = \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 = \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_3 = \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_4 = 2\varepsilon_{23} \\ \varepsilon_5 = 2\varepsilon_{13} \\ \varepsilon_6 = 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{I-95})$$

Cependant, avec cette notation, le tenseur de souplesse contracté n'est pas exactement l'inverse du tenseur de rigidité contracté... Lors de l'inversion de  $\mathbf{M} = \mathbf{L}^{-1}$  vers  $\mathbf{L}$ , les termes de cisaillement (44, 55 et 66) doivent être divisés par quatre. Pour éviter des désagréments dans les calculs numériques, lors des opérations tensorielles (inversion, changement de repère, produits tensoriels), on a écrit celles-ci avec les tenseurs non contractés, via des procédures adaptées.

Rappelons également quelques notations ayant trait aux comportements élastiques anisotropes. Dans le cas d'un matériau isotrope, le tenseur de souplesse (inverse de la rigidité) s'écrit en fonction du module de Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$ , de la façon suivante :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4G \end{bmatrix}, \quad (\text{I-96})$$

avec  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  le module de cisaillement.

Dans le cas d'un matériau isotrope transverse par rapport à l'axe 1 (tel que les bandes renforçantes), le tenseur de souplesse s'écrit en fonction de cinq modules ingénieurs indépendants :

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & -\nu_{12}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4G_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4G_{12} \end{bmatrix} \quad \text{avec } \nu_{23} = \frac{E_2}{2G_{23}} - 1 \quad (\text{I-97})$$

Enfin, dans le cas d'un matériau isotrope dans le plan 1-2 (tel que le Hextool), le tenseur de souplesse s'écrit:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -v_{12}/E_1 & -v_{13}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_{12}/E_1 & 1/E_1 & -v_{13}/E_1 & 0 & 0 & 0 \\ -v_{13}/E_1 & -v_{13}/E_1 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4G_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4G_{12} \end{bmatrix} \quad \text{où } v_{13} = \frac{E_1}{2G_{13}} - 1 \quad (\text{I-98})$$

### 4.3.2 Lois de comportement anélastiques

Les matériaux composites utilisant une matrice organique, comme le Hextool, sont sensibles à un certain nombre de paramètres environnementaux, notamment la température et l'humidité, génératrices de dilatations libres de contraintes. Lors de la fabrication des pièces composites, la résine (et donc le composite) peut également subir un retrait chimique dû à la formation de liaisons covalentes entre les chaînes polymères, et à la libération de gaz. Ces comportements anélastiques sont traités par le même formalisme que celui développé précédemment (voir équation I-1 notamment), avec quelques modifications de forme à répercuter dans les équations ci-haut. On notera qu'ils peuvent aisément être combinés en cumulant les déformations anélastiques dues aux différents phénomènes.

#### 4.3.2.1 Comportement thermo-élastique

La loi de comportement thermo-élastique linéaire s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}^k = \mathbf{L}^k : (\boldsymbol{\varepsilon}^k - \boldsymbol{\alpha}^k \Delta T), \quad (\text{I-99})$$

où  $\boldsymbol{\alpha}^k$  est le coefficient d'expansion thermique (CET) du matériau et remplace  $\mathbf{m}^k$  dans les équations ;  $\Delta T$  est la variation de température et remplace le changement de phase  $\Delta P$ .

#### 4.3.2.2 Comportement chimio-élastique

La loi de comportement chimio-élastique linéaire s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}^k = \mathbf{L}^k : (\boldsymbol{\varepsilon}^k - \boldsymbol{\eta}^k \chi) \quad (\text{I-100})$$

où  $\boldsymbol{\eta}^k$  est le coefficient d'expansion chimique (CEC, négatif) du matériau et remplace  $\mathbf{m}^k$  dans les équations ;  $\chi$  est l'avancement de cuisson du matériau, et remplace le changement de phase  $\Delta P$ . Elle est définie de manière énergétique comme le rapport de la variation d'enthalpie par la variation totale d'enthalpie de réaction, et évolue donc entre 0 (matériau cru) et 1 (matériau totalement cuit). Notons que cet avancement de cuisson n'est en réalité défini que pour la résine, mais on élargi ce concept à tout le matériau afin de simplifier les écritures.

#### 4.3.2.3 Comportement hygro-élastique

La loi de comportement hygro-élastique linéaire s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}^k = \mathbf{L}^k : (\boldsymbol{\varepsilon}^k - \boldsymbol{\beta}^k \Delta C^k) \quad (\text{I-101})$$

où  $\boldsymbol{\beta}^k$  est le coefficient d'expansion hygroscopique (CEH) du matériau et  $\Delta C^k$  est la teneur volumique en eau dans le matériau. Cette loi a été établie par analogie avec le comportement thermo-élastique, par [Delasi et Whiteside, 1978] et [Browning, 1976]. Cette analogie thermique-hygroscopique se retrouve également dans les lois de Fick et de Fourier.

On notera que le comportement hygro-élastique se distingue des précédents par le fait que la variation d'humidité est susceptible de varier, au sein du composite, d'un constituant à l'autre (contrairement aux variations de température et de cuisson qui sont homogènes au sein du VER). Par exemple, les fibres de carbone sont généralement considérées comme non-absorbantes, alors que les résines (époxy notamment) peuvent absorber jusqu'à 6 % en masse d'eau. Ce fait doit donc être pris en compte dans les équations d'homogénéisation et de localisation. Pour ce faire, on introduit des rapports de teneur en eau dans chaque constituant, qui sont définis par  $\Delta C^k/\Delta C^I$ . Les coefficients  $\mathbf{m}^k$  des équations du chapitre précédent, sont donc remplacés par le terme  $\beta^k \cdot \Delta C^k/\Delta C^I$  et le changement de phase  $\Delta P$  par  $\Delta C^I$ .

Dans le cas des matériaux composites du type matrice polymère – renforts, on peut apporter une simplification importante au modèle puisque les renforts fibreux (carbone notamment) sont souvent non-absorbants, ce qui entraîne  $\Delta C^r = 0$ . L'humidité ambiante étant alors contenue en totalité dans la matrice, on peut écrire la relation suivante donnée par [Loos et Springer, 1981] :

$$\Delta C^I = \Delta C^m \cdot W^m \quad (\text{I-102})$$

où  $W^m$  est la fraction massique de matrice. A partir des masses volumiques de la résine ( $\rho^m$ ) et du matériau ( $\rho^I = V^m \rho^m + V^r \rho^r$ ), cette fraction s'écrit  $W^m = V^m \rho^m / \rho^I$  d'où l'on exprime le rapport des teneurs en eau dans la matrice et le composite :

$$\frac{\Delta C^m}{\Delta C^I} = \frac{1}{W^m} = \frac{\rho^I}{V^m \rho^m} \quad (\text{I-103})$$

Cette formulation a été utilisée dans deux articles récents, [Fréour et al., 2006] et [Jacquemin et al., 2005], pour un uni-directionnel T300/5208 avec différents taux de renfort. Pour le Hextool, un traitement légèrement différent est nécessaire en raison de sa microstructure particulière. Notamment, pour la deuxième étape de la transition d'échelles, les bandes renforçantes ne peuvent être considérées comme non-absorbantes puisqu'elles contiennent de la résine. On détermine donc les rapports de teneur en eau en supposant que l'eau se répartit uniformément entre la matrice intra-renforts et la matrice extra-renforts, *i.e.* :

$$\frac{\Delta C^{\text{mer}}}{\Delta C^I} = \frac{\Delta C^{\text{mir}}}{\Delta C^I} = \frac{1}{W^{\text{mtot}}} \quad (\text{I-104})$$

De cette hypothèse, on déduit les rapports de teneur en eau dans les composants du Hextool, relatifs à la teneur en eau macroscopique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta C^{\text{mer}}}{\Delta C^I} = \frac{1}{W^{\text{mtot}}} = \frac{\rho^I}{V^{\text{mtot}} \rho^m} \\ \frac{\Delta C^r}{\Delta C^I} = \frac{\Delta C^r}{\Delta C^{\text{mir}}} \times \frac{\Delta C^{\text{mir}}}{\Delta C^I} = \frac{W^{\text{mir}}}{W^{\text{mtot}}} = \frac{V^{\text{mir}} \rho^m}{\rho^r} \times \frac{\rho^I}{V^{\text{mtot}} \rho^m} = \frac{V^{\text{mir}}}{V^{\text{mtot}}} \times \frac{\rho^I}{\rho^r} \end{array} \right. \quad (\text{I-105})$$

On calcule également les rapports de teneur en eau dans les fibres et la résine intra-renforts, relatifs à la teneur en eau dans les bandes renforçantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta C^{\text{mir}}}{\Delta C^r} = \frac{\Delta C^{\text{mir}}}{\Delta C^I} \times \frac{\Delta C^I}{\Delta C^r} = \frac{1}{W^{\text{mtot}}} \times \frac{W^{\text{mtot}}}{W^{\text{mir}}} = \frac{1}{W^{\text{mir}}} = \frac{\rho^r}{V^{\text{mir}} \rho^r} = 1 + \frac{V^f \rho^f}{V^{\text{mir}} \rho^{\text{mir}}} \\ \frac{\Delta C^f}{\Delta C^r} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{I-106})$$

## 5 PROPRIETES EFFECTIVES DU COMPOSITE A L'ETAT CUIT

On souhaite calculer les propriétés des bandes renforçantes unidirectionnelles et d'un composite semblable au Hextool, à l'état cuit et à température ambiante. Dans cette partie, on considérera un taux de matrice entre les bandes de 5 %, et un taux global de fibres de 53 %. On se limitera également à un comportement thermo-élastique, les comportements hygro-élastiques et chimio-élastiques étant analogues. Différents modèles seront testés, notamment les modèles MT, EK et EKG présentés plus haut, ainsi que les modèles de Voigt et Reuss qui permettent de « borner » certaines propriétés élastiques.

### 5.1 Propriétés thermo-élastiques des constituants

Les propriétés thermo-élastiques utilisées pour les constituants du composite sont données dans le tableau I-1 ci-dessus. On notera que la résine se caractérise par une faible rigidité mais un fort coefficient d'expansion thermique (CET), alors que les fibres ont une très forte rigidité et un très faible CET, notamment dans la direction longitudinale. Les propriétés mécaniques des fibres AS4 sont issues de la littérature [White et Kim, 1998], et les CET nous ont été communiqués par Hexcel Composites [Hexcel coms, 2008]. Pour la matrice, le module de Young retenu est celui mesuré par Svetlana Terekhina [LTDS/ECL coms, 2010a] par Dynamic Mechanical Analysis (DMA), à température ambiante et avec une fréquence de 10 Hz ; le coefficient de Poisson est celui classiquement utilisé pour les résines organiques ; et le CET est celui mesuré par Hexcel entre 20 et 70°C.

Tableau I-1 : Propriétés thermo-élastiques des constituants du composite

	Modules mécaniques						CET	
	$E_x$ [GPa]	$E_y, E_z$ [GPa]	$G_{xy}, G_{xz}$ [GPa]	$G_{yz}$ [GPa]	$\nu_{xy}, \nu_{xz}$	$\nu_{yz}$	$\alpha_x$ [10 <sup>-6</sup> /K]	$\alpha_y, \alpha_z$ [10 <sup>-6</sup> /K]
matrice M61	3,5	3,5	1,25	1,25	0,40	0,40	41,4	41,4
fibres AS4	207	20,7	27,6	6,9	0,20	0,50	-0,35	11,8

### 5.2 Homogénéisation des renforts unidirectionnels

Les bandes renforçantes ont ici la microstructure d'un pli uni-directionnel renforcé par des fibres (avec un taux de fibres  $V^f = 56\%$ ). Cette configuration a été très largement étudiée dans la littérature et sera donc traitée brièvement. La morphologie des fibres, orientées selon l'axe x, est caractérisée par les rapports de forme  $\{a_x \rightarrow \infty, a_y = 1, a_z = 1\}$ . Dans le cadre des modèles EK et EKG, la morphologie de la matrice est supposée identique ; par ailleurs, on vérifie que les deux formulations ( $H\sigma$  et  $H\varepsilon$ ) du modèle EK, ainsi que le modèle EKG, aboutissent toutes au même résultat. On montre en outre ([Fréour et al., 2005]) que, pour cette morphologie infiniment étirée, et pour un matériau isotrope transverse par rapport à l'axe 1, le tenseur de Morris ne comporte que 7 termes non nuls :

$$\begin{aligned}
 E_{yy}^I(\mathbf{L}) = E_{zz}^I(\mathbf{L}) &= \frac{3}{8L_{yy}} + \frac{1}{4(L_{yy} - L_{yz})} & E_{xy}^I(\mathbf{L}) = E_{yx}^I(\mathbf{L}) &= \frac{L_{yy} + L_{yz}}{8(L_{yy}L_{yz} - L_{yy}^2)} \\
 E_{uu}^I(\mathbf{L}) &= \frac{1}{8L_{yy}} + \frac{1}{4(L_{yy} - L_{yz})} & E_{vv}^I(\mathbf{L}) = E_{ww}^I(\mathbf{L}) &= \frac{1}{8L_{vv}}
 \end{aligned} \tag{I-107}$$

Les autres termes tendent vers une valeur nulle lorsque le rapport de forme  $a_x$  tend vers l'infini ; on leur donnera une valeur très faible pour garder la possibilité d'inverser  $\mathbf{E}^I$ , et éviter certaines singularités dans les expressions des propriétés effectives. Cette formule analytique permet un calcul efficace de la rigidité, dans la mesure où elle améliore le temps de calcul de plusieurs ordres

de grandeur et évite en outre certains problèmes de convergence numérique. L'écart avec les propriétés obtenues en calculant le tenseur de Morris de façon numérique, est inférieur à  $10^{-3}$  (en relatif). Les propriétés thermo-élastiques des bandes renforçantes, obtenues avec les différents modèles, sont récapitulées dans le tableau I-2 suivant :

**Tableau I-2 : Propriétés thermo-élastiques des bandes renforçantes selon les modèles MT et EK**

Modèle	Modules mécaniques						CET	
	$E_x$ [GPa]	$E_y, E_z$ [GPa]	$G_{xy}, G_{xz}$ [GPa]	$G_{yz}$ [GPa]	$\nu_{xy}, \nu_{xz}$	$\nu_{yz}$	$\alpha_x$ [ $10^{-6}/K$ ]	$\alpha_y, \alpha_z$ [ $10^{-6}/K$ ]
MT	<b>117,0</b>	8,6	<b>3,8</b>	2,7	0,28	0,59	<b>0,29</b>	<b>30,7</b>
EK	<b>117,0</b>	9,5	<b>7,6</b>	3,0	0,28	0,56	<b>0,38</b>	<b>29,1</b>
Voigt	<b>117,4</b>	13,4	<b>16,0</b>	4,4	X	X	X	X
Reuss	<b>7,8</b>	6,5	<b>2,7</b>	2,3	X	X	X	X

On observe, tout d'abord, que les modèles de Eshelby-Kröner et de Mori-Tanaka aboutissent à des propriétés très semblables. Seul le module de cisaillement transverse  $G_{yz}$  diffère significativement pour les deux modèles : le modèle MT sous-estime ce module par rapport au modèle EK. Pour les deux modèles, les propriétés effectives vérifient les bornes de Voigt et Reuss, du moins pour les modules de Young et de cisaillement (les approches de Voigt et Reuss ne sont pas des « bornes » pour les autres modules thermo-élastiques). Les propriétés longitudinales sont principalement pilotées par la fibre, ce qui se traduit par une grande rigidité et une faible dilatation thermique. Le module de Young longitudinal est d'ailleurs très bien estimé par le modèle de Voigt. En revanche, dans la direction transverse, les modèles de Voigt et de Reuss donnent des résultats qui diffèrent beaucoup des modèles MT et EK.

Une discussion plus extensive de ces propriétés effectives est proposée dans la partie II de ce rapport. Celles-ci sont comparées aux propriétés obtenues par une approche d'homogénéisation périodique, utilisant les éléments finis.

Comme expliqué plus tôt, le modèle de Eshelby-Kröner est autocohérent pour cette configuration, les inclusions (fibres) étant alignées et de même dimensions. Plus clairement, qu'on homogénéise en contraintes ( $H\sigma$ ) ou en déformations ( $H\epsilon$ ), on aboutira aux mêmes propriétés effectives ; en outre, la cohérence des contraintes et des déformations sont assurées simultanément, ce qui se vérifie par le calcul des moyennes des tenseurs d'influence (Equations I-20, I-21, I-24, I-25). Le tableau I-3 ci-dessous montre, en effet, que les propriétés thermo-élastiques sont indépendantes de la formulation utilisée, aux erreurs numériques près.

**Tableau I-3 : Propriétés thermo-élastiques des bandes renforçantes, selon les modèles EKH $\sigma$ , EKH $\epsilon$  et EKG**

Modèle	Modules mécaniques						CET	
	$E_x$ [GPa]	$E_y, E_z$ [GPa]	$G_{xy}, G_{xz}$ [GPa]	$G_{yz}$ [GPa]	$\nu_{xy}, \nu_{xz}$	$\nu_{yz}$	$\alpha_x$ [ $10^{-6}/K$ ]	$\alpha_y, \alpha_z$ [ $10^{-6}/K$ ]
EKH $\sigma$	117,0	9,4	7,6	3,0	0,28	0,56	0,38	29,1
EKH $\epsilon$	117,0	9,4	7,6	3,0	0,28	0,56	0,37	29,2
EKG	117,0	9,4	7,6	3,0	0,28	0,56	0,38	29,2

De même, les relations d'autocohérence sur les tenseurs d'influence sont assez bien respectées, à  $3.10^{-3}$  près en valeurs absolues (voir Tableau I-4). En outre, la moyenne des tenseurs d'influence satisfait une symétrie orthotrope d'axe x. Les termes transverses des tenseurs d'ordre 4 ( $A_{12}$ ,  $A_{13}$ ,  $A_{23}$ ...) ont été négligés ici pour la clarté du tableau. Leur valeur est inférieure à  $10^{-3}$ .

**Tableau I-4 : Moyenne des tenseurs d'influence des bandes renforçantes selon les modèles EKH $\sigma$ , EKH $\varepsilon$  et EKG**

Modèle	Mécanique				Thermique	
	$A_{xx}$	$A_{yy} = A_{zz}$	$A_{uu}$	$A_{vv} = A_{ww}$	$X_x$	$X_y = X_z$
$\langle \varepsilon^i \rangle$						
EKH $\sigma$	1,000000	0,997565	0,499724	0,499562	-0,000037	0,003131
EKH $\varepsilon$	1,000000	0,998406	0,499690	0,499532	0,000000	0,000000
EKG	1	1	1/2	1/2	0	0
$\langle \sigma^i \rangle$						
	$B_{xx}$	$B_{yy} = B_{zz}$	$B_{uu}$	$B_{vv} = B_{ww}$	$Y_x$	$Y_y = Y_z$
EKH $\sigma$	1,000013	1,00099	0,500178	0,500438	0,000000	0,000000
EKH $\varepsilon$	1,00034	1,00097	0,5002	0,500468	-0,0024234	0,000106
EKG	1	1	1/2	1/2	0	0
Attendu	1	1	1/2	1/2	0	0

On notera que les tenseurs  $X^i$  et  $Y^i$  introduits ici pour qualifier l'autocohérence thermique, sont des versions adimensionnelles des tenseurs de polarisation thermique  $a^i$  et  $b^i$  :

$$\begin{aligned} X^i &= a^i \cdot \alpha^{I^{-1}} \\ Y^i &= b^i \cdot (-L^I : \alpha^{I^{-1}}) \end{aligned} \quad (I-108)$$

### 5.3 Homogénéisation du composite

On s'intéresse maintenant aux propriétés effectives du pli composite de type Hextool. On considère que celui-ci est constitué de matrice (5 % en volume) et de bandes renforçantes, de forme ellipsoïdale (et non rectangulaires), ayant des rapports de forme  $\{a_x = 60, a_y = 8, a_z = 0,15\}$ . Pour tenir compte de leur orientation aléatoire, on considère une distribution uniforme de 10 angles sur 180° (en évitant le doublon 0°-180° !), ce qui suffit à assurer l'isotropie plane du composite. En raison de la mésostructure particulière du composite, on peut observer une perte de symétrie du tenseur de rigidité effectif, pour tous les modèles utilisés. Ce phénomène a été rapporté dans la littérature par Benveniste notamment. Pour éviter ce problème, cette symétrie a été forcée.

#### 5.3.1 Modèle MT

Le modèle de Mori-Tanaka est utilisé en première approche afin de déterminer les propriétés thermo-élastiques du composite. On doit pour cela, fixer une phase prédominante qui servira de milieu ambiant. On supposera que la matrice (extra-renforts) joue ce rôle, en dépit de sa faible fraction volumique (5 %) par rapport au matériau. En effet, les bandes renforçantes sont prédominantes dans le composite en termes de fraction volumique, mais leur rigidité, en projection dans le repère macroscopique, évolue selon leur orientation géométrique. Ce problème ne se pose pas avec la matrice, qui est isotrope. Deux modèles seront proposés dans le tableau I-5 suivant : dans l'un, on utilise les propriétés des bandes renforçantes obtenues par le modèle de Mori-Tanaka (MT- MT), et dans l'autre on utilise celles obtenues par le modèle autocohérent (EK-MT).

**Tableau I-5 : Propriétés thermo-élastiques du composite, pour le modèle MT**

Modèle	Modules mécaniques						CET	
	$E_1, E_2$ [GPa]	$E_3$ [GPa]	$G_{12}$ [GPa]	$G_{13}, G_{23}$ [GPa]	$\nu_{12}$	$\nu_{13}, \nu_{23}$	$\alpha_1, \alpha_2$ [10 <sup>-6</sup> /K]	$\alpha_3$ [10 <sup>-6</sup> /K]
MT-MT	42,3	11,6	16,1	2,9	0,31	0,35	3,24	48,0
EK-MT	46,0	12,2	18,2	3,8	0,26	0,36	3,41	45,0

On notera les deux approches proposées (MT-MT et EK-MT) aboutissent à des propriétés comparables, qui se traduisent par une bonne rigidité dans le plan 1-2, quoique bien inférieure à celle de l'acier ou d'un unidirectionnel carbone-époxy. La rigidité dans la direction 3 est faible, comme on pouvait s'y attendre en raison de la microstructure particulière du composite (assez semblable à celle d'un stratifié). Concernant le comportement thermo-élastique, on note un faible CET dans le plan 1-2, supérieur à celui des unidirectionnels carbone-époxy mais bien inférieur à celui des métaux ( $12.10^{-6}/K$  pour l'acier,  $24.10^{-6}/K$  pour l'aluminium). Quant au CET dans la direction 3, il est légèrement supérieur à celui de la résine.

### 5.3.2 Modèle EK

On utilisera ici les propriétés des bandes de renforts obtenues avec le modèle  $EKH\sigma$  (EK classique). Les propriétés du composite sont alors calculées à l'aide des équations (I-56) à (I-59).

#### 5.3.2.1 Formulations en contraintes et en déformations

- Propriétés effectives :

Le modèle de Eshelby-Kröner (classique ou généralisé) est, a priori, plus applicable au composite que celui de Mori-Tanaka. En effet, il ne nécessite pas de déterminer une phase prédominante sur les autres, ce qui est problématique comme on l'a vu plus tôt. L'inconvénient du modèle EK classique, est qu'il souffre d'un défaut d'autocoherence pour ce type de microstructure. Afin de qualifier ce défaut, les deux formulations ( $H\sigma$ ,  $H\epsilon$ ) ont été testées. On utilisera pour les propriétés des bandes renforçantes, celles obtenues précédemment avec le modèle autocohérent classique (EK). Les propriétés thermo-élastiques correspondantes sont résumées dans le tableau I-6 suivant.

**Tableau I-6 : Propriétés thermo-élastiques du composite, pour les modèles  $EKH\sigma$  et  $EKH\epsilon$**

Modèle	Modules mécaniques						CET	
	$E_1, E_2$ [GPa]	$E_3$ [GPa]	$G_{12}$ [GPa]	$G_{13}, G_{23}$ [GPa]	$\nu_{12}$	$\nu_{13}, \nu_{23}$	$\alpha_1, \alpha_2$ [ $10^{-6}/K$ ]	$\alpha_3$ [ $10^{-6}/K$ ]
$EKH\sigma$	46,2	12,2	18,2	3,3	0,270	0,371	3,18	52,0
$EKH\epsilon$	15,6	9,5	7,1	3,8	0,09	0,47	18,01	30,2
Voigt	46,2	12,4	18,2	5,1	X	X	X	X
Reuss	14,3	8,7	6,3	3,8	X	X	X	X

On observe en effet que ces deux formulations aboutissent à des propriétés radicalement différentes. Ainsi, la formulation en contraintes donne des résultats similaires à ceux du modèle de Mori-Tanaka. La formulation en déformation, quant à elle, se caractérise par une rigidité trois fois plus faible dans le plan 1-2, et un CET  $\alpha_1$  six fois plus important. Le CET hors-plan, cependant, est plus faible. On notera néanmoins que les deux formulations respectent, aux erreurs numériques près, les bornes de Voigt et Reuss.

- Autocoherence du modèle :

Afin de qualifier la pertinence de l'une ou l'autre méthode, on calcule les moyennes des tenseurs d'influence sur les deux constituants et l'ensemble des orientations. Ces moyennes sont reportées dans le tableau I-7 suivant. Ceci suppose, bien sûr, de calculer les propriétés homogénéisées du composite, cependant ces résultats seront montrés plus loin (chapitre 6). On notera qu'on a cette fois fait figurer les termes transverses ( $A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{31}$ ) qui jouent un rôle significatif. En outre, on s'aperçoit que les tenseurs de localisation (et leurs moyennes) ne sont pas totalement symétriques : les termes  $A_{13}$  et  $A_{31}$ , notamment, diffèrent. Ce problème d'asymétrie des tenseurs d'influence et de rigidité a été reporté notamment par [Benveniste, 1987] ; il survient même si l'on

force la symétrie du tenseur de rigidité macroscopique dans la boucle de calcul (ce qui a été fait ici). Hormis cela, la *moyenne* des tenseurs d'influence possède la même symétrie que le tenseur rigidité (symétrie isotrope dans le plan 1-2).

Les valeurs reportées dans le tableau suivant montrent qu'aucune des deux formulations proposées n'assure l'autocohérence des états mécaniques. La formulation en contraintes (EKH $\sigma$ ) assure logiquement la cohérence des contraintes, aux erreurs numériques près, mais n'assure pas celle des déformations. Inversement, la formulation en déformations (EKH $\epsilon$ ) assure la cohérence des déformations mais pas celle des contraintes.

**Tableau I-7 : Moyenne des tenseurs d'influence pour le composite, selon les modèles EKH $\sigma$  et EKH $\epsilon$**

Modèle	Mécanique								Thermique	
	$\mathbf{A}_{11}$	$\mathbf{A}_{33}$	$\mathbf{A}_{44}$	$\mathbf{A}_{66}$	$\mathbf{A}_{12}$	$\mathbf{A}_{21}$	$\mathbf{A}_{13}$	$\mathbf{A}_{31}$	$\mathbf{X}_1$	$\mathbf{X}_3$
$\langle \epsilon^i \rangle$										
EKH $\sigma$	1,029	1,002	0,420	0,511	0,007	0,007	-0,001	-0,025	0,029	-0,129
EKH $\epsilon$	1,001	1,001	0,500	0,500	0,000	0,000	-0,001	0,001	0,000	0,000
$\langle \sigma^i \rangle$										
EKH $\sigma$	1,000	1,000	0,499	0,500	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
EKH $\epsilon$	3,073	1,001	0,500	1,260	0,579	0,579	-1,364	-0,001	-1,429	0,000
Attendu	1	1	½	½	0	0	0	0	0	0

- Influence de la morphologie sur l'autocohérence du modèle :

Une étude complémentaire a été effectuée afin d'évaluer l'influence de la morphologie sur l'autocohérence du modèle, et vérifier que les erreurs démontrées plus haut ne sont pas d'origine purement numérique (erreur dans l'intégration numérique pour le calcul du tenseur de Morris, mauvaise convergence du calcul itératif de la rigidité). On s'est donc attaché à faire varier la largeur ( $a_y$ ) et l'épaisseur ( $a_z$ ) des bandes renforçantes, en effectuant quatre séries de calcul :

- La série 1, pour des rapports de forme  $\{60, a_y, 0.15\}$  où  $a_y$  varie de 2 à 60,
- La série 2, pour des rapports de forme  $\{60, a_y, 1.5\}$  où  $a_y$  varie de 2 à 60,
- La série 3, pour des rapports de forme  $\{60, 8, a_z\}$  où  $a_z$  varie de 0.02 à 2,
- La série 4, pour des rapports de forme  $\{60, 60, a_3\}$  où  $a_z$  varie de 0.02 à 2.

La morphologie réelle des bandes (60 x 8 x 0,15) sera figurée par une marque noire sur les figures suivantes. Ces quatre séries de calculs ont été effectuées pour l'homogénéisation en déformation et l'homogénéisation en contraintes. Les résultats en termes de moyennes des tenseurs d'influence, présentés dans les figures suivantes, permettront de qualifier les erreurs et de délimiter plus précisément le domaine de validité du modèle. Pour la formulation en contraintes (EKH $\sigma$ ), l'erreur d'autocohérence est traduite par la moyenne des  $\mathbf{A}^i$  et  $\mathbf{X}^i$ , qui est récapitulée dans la figure I-12. Pour la formulation en déformations (EKH $\epsilon$ ), on calcule plutôt la moyenne des  $\mathbf{B}^i$  et  $\mathbf{Y}^i$ , qui est récapitulée dans la figure I-13. Seuls les termes d'indices 11 et 33 des tenseurs sont donnés ici, car ils sont bien représentatifs du comportement « dans le plan » et « hors-plan » du composite.

Les figures, bien qu'entachées d'erreurs numériques ponctuelles, permettent de dégager quelques résultats dont la validité est générale. Ainsi, on notera que l'erreur sur la moyenne des tenseurs d'influence augmente quand la forme des bandes renforçantes tend vers celle d'une fibre, i.e. quand les rapports de forme  $a_x/a_y$  et  $a_x/a_z$  tendent vers une grande valeur.

Les séries 1 et 2 montrent clairement que l'erreur est importante lorsque la largeur  $a_y$  est faible, mais qu'elle s'annule lorsque  $a_y$  tend vers 60, c'est à dire une forme de platelet. La série 4 confirme cette propriété (erreur très faible) hormis aux faibles épaisseurs. La forme apparente de l'inclusion (dans le repère RI) est alors identique quelle que soit son orientation, ce qui est la condition de validité du modèle autocohérent classique.

Figure I-12 : Moyenne des tenseurs d'influence sur les déformations pour le composite, avec la formulation EKHσ

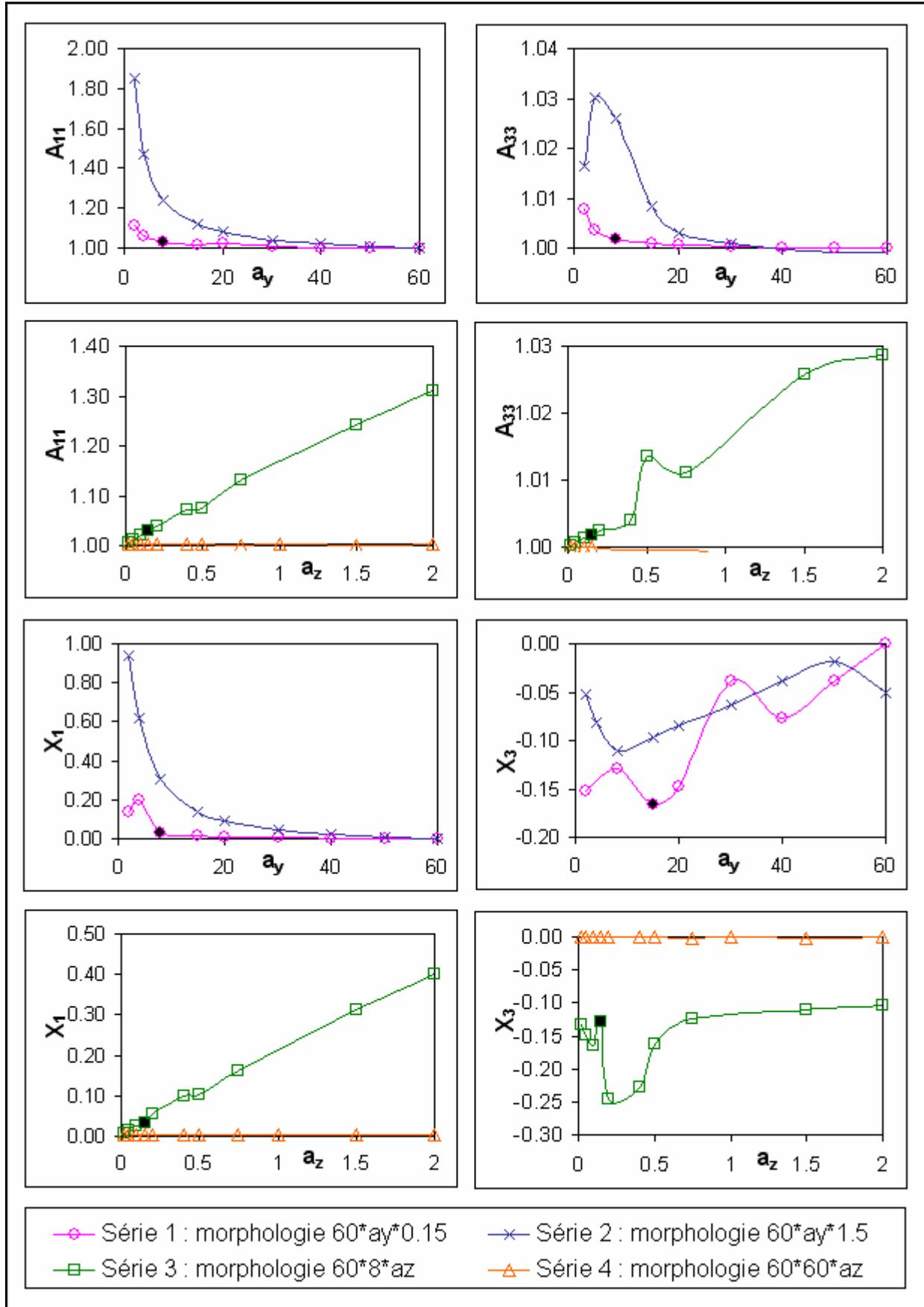
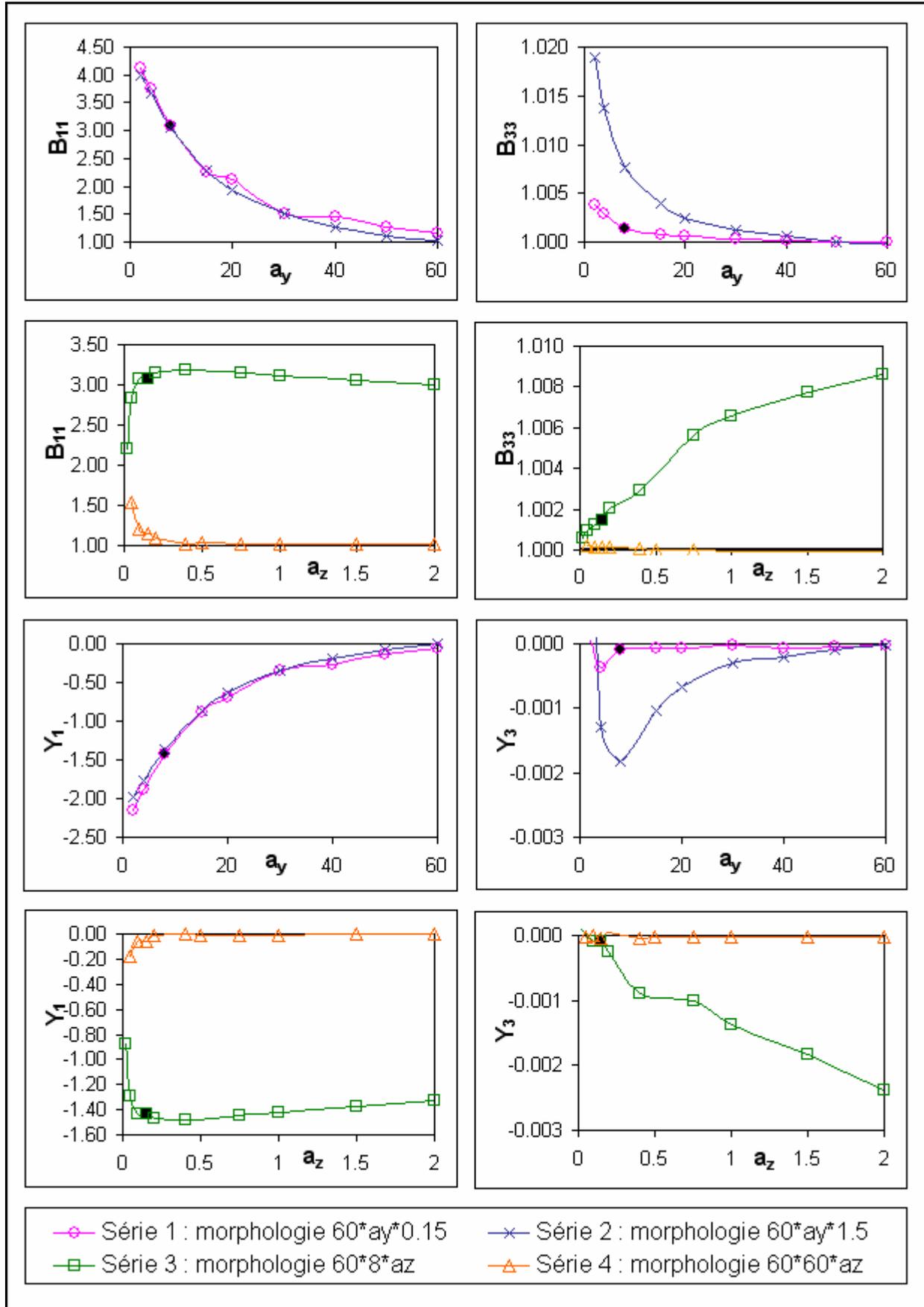


Figure I-13 : Moyenne des tenseurs d'influence sur les contraintes pour le composite, avec la formulation EKHε



Les séries 2 et 3 montrent également que l'erreur tend à augmenter avec l'épaisseur des bandes renforçantes. Ceci est particulièrement sensible pour l'approche en contraintes. Pour l'approche en déformations, des difficultés de convergence et de calcul du tenseur de Hill (intégration numérique), notamment aux faibles épaisseurs, compliquent l'interprétation des résultats. Ceci impacte également l'erreur pour la série 4, qui devrait être nulle (forme de soucoupe) mais ne l'est pas pour  $a_z < 0,5$ . La morphologie choisie pour les bandes renforçantes est comprise dans cet intervalle.

On note aussi le fait important, que l'erreur se concentre principalement sur les termes 1-1 traduisant le comportement dans le plan ; pour les termes 3-3 traduisant le comportement hors-plan du composite, l'erreur reste inférieure à 15 % (à une exception près). On note que l'écart entre les deux formulations est plus faible pour les propriétés hors-plan ( $E_3$  et  $\alpha_3$ ) que pour les propriétés dans le plan. Ceci est en partie dû au fait que l'hétérogénéité de comportement des constituants est plus faible dans la direction transverse aux fibres que dans la direction longitudinale (qui impacte les directions 1 et 2).

Parallèlement, on constate que leurs erreurs commises sur les états mécaniques dans le plan (directions 1 et 2) sont plus faibles avec la formulation en contraintes qu'avec la formulation en déformations. Pour le comportement mécanique par exemple (termes  $A_{11}$  et  $B_{11}$ ), la formulation  $H\sigma$  aboutit à une erreur inférieure à 80 %, contre 300 % environ pour la formulation  $H\epsilon$ .

Pour le comportement hors plan, il est plus difficile de distinguer la meilleure formulation parmi les deux, dans la mesure où les erreurs sont faibles et souvent d'origine numérique. Néanmoins, il apparaît que la formulation en déformations  $H\epsilon$  aboutit à des erreurs généralement plus faibles, notamment pour les contraintes thermiques.

### 5.3.2.2 Formulation mixte

L'étude d'influence de la morphologie menée dans le paragraphe précédent a permis de mettre en évidence l'incapacité des deux formulations à prédire de façon fiable le comportement hygrothermo-mécanique du composite dans sa globalité. Elle a néanmoins ouvert une piste pour aboutir à une formulation acceptable. En effet, on a constaté que la formulation en déformations permettait de prédire relativement correctement le comportement dans la direction normale au plan (*i.e.*, les modules mécaniques  $E_3$  et  $G_{13}$  ainsi que le CET hors-plan  $\alpha_3$ ), et satisfaisait les relations d'autocohérence dans la direction 3. Inversement, la formulation en contraintes est assez fiable pour le comportement dans le plan (*i.e.*, les modules mécaniques  $E_1$  et  $G_{12}$  ainsi que CET dans le plan  $\alpha_1$ ), et aboutit à une plus faible erreur sur les relations d'autocohérence dans les directions 1 et 2.

L'idée est donc d'utiliser une homogénéisation « mixte » avec une formulation du problème en contraintes dans le plan, et en déformations dans la direction normale au plan. Ce modèle se justifie si on effectue une analogie entre l'homogénéisation du mat et l'homogénéisation des stratifiés. Pour de telles structures, il est courant d'estimer les propriétés dans le plan par le modèle de Voigt et les propriétés hors-plan par le modèle de Reuss. Or la mésostructure du matériau, avec son arrangement de bandes minces orientées aléatoirement dans le plan, s'apparente bien à un stratifié multi-couches avec des plis d'orientations multiples.

- Propriétés effectives et autocohérence du modèle :

Cette homogénéisation mixte, direction-dépendante, sera nommée «  $H_m$  ». Les propriétés effectives s'écriront à partir de celles obtenues par les formulations  $H\sigma$  et  $H\epsilon$ , avec la convention suivante :

$${}^{Hmixte} \mathbf{L}^I = \begin{bmatrix} {}^{H\sigma} L_{11}^I & {}^{H\sigma} L_{12}^I & {}^{H\varepsilon} L_{13}^I & 0 & 0 & 0 \\ {}^{H\sigma} L_{12}^I & {}^{H\sigma} L_{22}^I & {}^{H\varepsilon} L_{23}^I & 0 & 0 & 0 \\ {}^{H\varepsilon} L_{31}^I & {}^{H\varepsilon} L_{32}^I & {}^{H\varepsilon} L_{33}^I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^{H\varepsilon} L_{44}^I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{H\varepsilon} L_{44}^I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^{H\sigma} L_{66}^I \end{bmatrix} \quad (I-109)$$

$${}^{Hmixte} \boldsymbol{\alpha}^I = \begin{bmatrix} {}^{H\sigma} \alpha_{11}^I & & \\ & {}^{H\sigma} \alpha_{22}^I & \\ & & {}^{H\varepsilon} \alpha_{33}^I \end{bmatrix} \quad (I-110)$$

Les propriétés thermo-élastiques résultant de cette formulation sont résumées dans le tableau I-8 ci-dessous. Les propriétés issues des deux précédentes formulations y sont également rappelées. On voit ainsi que la formulation mixte donne des résultats très proches de la formulation en contraintes  $K\sigma$ . Seuls le module de cisaillement hors-plan  $G_{13}$  et le CET hors-plan  $\alpha_3$  évoluent, en se rapprochant de ceux obtenus par la formulation en déformations. On notera également que ce dernier devient proche du CET de la résine, tout comme celui obtenu par le modèle de Mori-Tanaka.

**Tableau I-8 : Propriétés thermo-élastiques du composite, pour les modèles EKH $\sigma$ , EKH $\varepsilon$  et EKHm**

Modèle	Modules mécaniques						CET	
	$E_1, E_2$ [GPa]	$E_3$ [GPa]	$G_{12}$ [GPa]	$G_{13}, G_{23}$ [GPa]	$\nu_{12}$	$\nu_{13}, \nu_{23}$	$\alpha_1, \alpha_2$ [ $10^{-6}/K$ ]	$\alpha_3$ [ $10^{-6}/K$ ]
<b>EKHm</b>	<b>46,1</b>	<b>12,1</b>	<b>18,2</b>	<b>3,9</b>	<b>0,27</b>	<b>0,38</b>	<b>3,18</b>	<b>43,7</b>
EKH $\sigma$	46,2	12,2	18,2	3,3	0,270	0,371	3,18	52,0
EKH $\varepsilon$	15,6	9,5	7,1	3,8	0,09	0,47	18,01	30,2

Les moyennes des tenseurs d'influence ont également été calculées pour la morphologie (60x8x0,15). Les résultats des trois formulations sont donnés dans le tableau I-9.

**Tableau I-9 : Moyenne des tenseurs d'influence pour le composite, selon les modèles EKH $\sigma$ , EKH $\varepsilon$  et EKHm**

Modèle	Mécanique								Thermique	
	$\mathbf{A}_{11}$	$\mathbf{A}_{33}$	$\mathbf{A}_{44}$	$\mathbf{A}_{66}$	$\mathbf{A}_{12}$	$\mathbf{A}_{21}$	$\mathbf{A}_{13}$	$\mathbf{A}_{31}$	$\mathbf{X}_1$	$\mathbf{X}_3$
$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^i \rangle$										
EKH $\sigma$	1,029	1,002	0,420	0,511	0,007	0,007	-0,001	-0,025	0,029	-0,129
EKH $\varepsilon$	1,001	1,001	0,500	0,500	0,000	0,000	-0,001	0,001	0,000	0,000
<b>EKHm</b>	<b>1,027</b>	<b>1,000</b>	<b>0,500</b>	<b>0,510</b>	<b>0,006</b>	<b>0,006</b>	<b>0,000</b>	<b>-0,016</b>	<b>0,022</b>	<b>0,036</b>
$\langle \boldsymbol{\sigma}^i \rangle$										
EKH $\sigma$	1,000	1,000	0,499	0,500	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
EKH $\varepsilon$	3,073	1,001	0,500	1,260	0,579	0,579	-1,364	-0,001	-1,429	0,000
<b>EKHm</b>	<b>1,001</b>	<b>1,002</b>	<b>0,496</b>	<b>0,500</b>	<b>0,001</b>	<b>0,001</b>	<b>-0,009</b>	<b>-0,002</b>	<b>0,002</b>	<b>0,001</b>
Attendu	1	1	½	½	0	0	0	0	0	0

On observe ainsi que la formulation mixte définie ici est un bon compromis entre les deux formulations précédentes, et permet de diminuer l'erreur sur les contraintes et déformations

mécaniques et surtout thermiques. Elle aboutit ainsi à des erreurs inférieures à 4 % pour les contraintes et déformations thermiques et mécaniques.

- Influence de la morphologie sur l'autocohérence du modèle :

L'évolution des moyennes des tenseurs d'influence avec la morphologie a également été calculée pour la formulation mixte. Ces évolutions sont résumées dans les figures I-14 et I-15 ci-dessous. On calcule les moyennes des tenseurs d'influence, à la fois pour les contraintes et les déformations. Rappelons également que les erreurs inférieures à 1 % sont peu significatives, car essentiellement dues aux approximations numériques effectuées durant le calcul, ainsi qu'à la précision demandée sur le calcul de la rigidité.

On note que la formulation mixte ne règle pas le problème d'autocohérence du modèle, mais le limite significativement. Dans la direction 1, l'erreur se développe lorsque les rapports de forme  $a_x/a_y$  et  $a_x/a_z$  augmentent. Elle atteint 90 % pour la moyenne des  $\mathbf{A}^i$  et 75 % pour la moyenne des  $\mathbf{X}^i$ . Cette erreur reste cependant inférieure à celle de la formulation en contraintes. L'erreur dans la direction normale est aussi fortement diminuée. On notera aussi que cette formulation limite fortement les problèmes de convergence durant le calcul de la rigidité. Ceci impacte notamment le module de cisaillement transverse  $G_{13}$  et les termes transverses des moyennes de  $\mathbf{A}^i$  et  $\mathbf{B}^i$ .

Figure I-14 : Moyenne des tenseurs d'influence sur les déformations pour le composite, avec la formulation EKHm

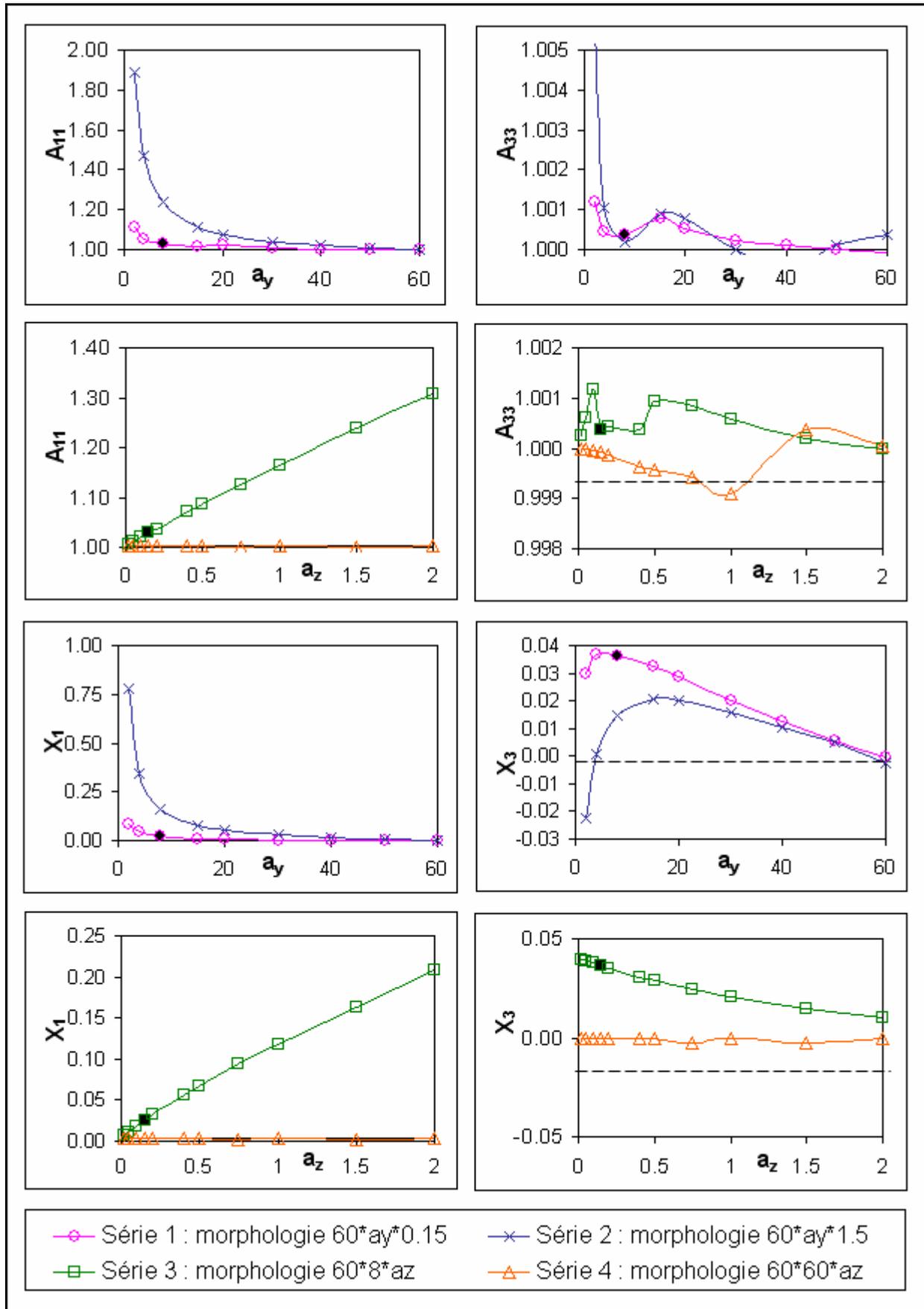
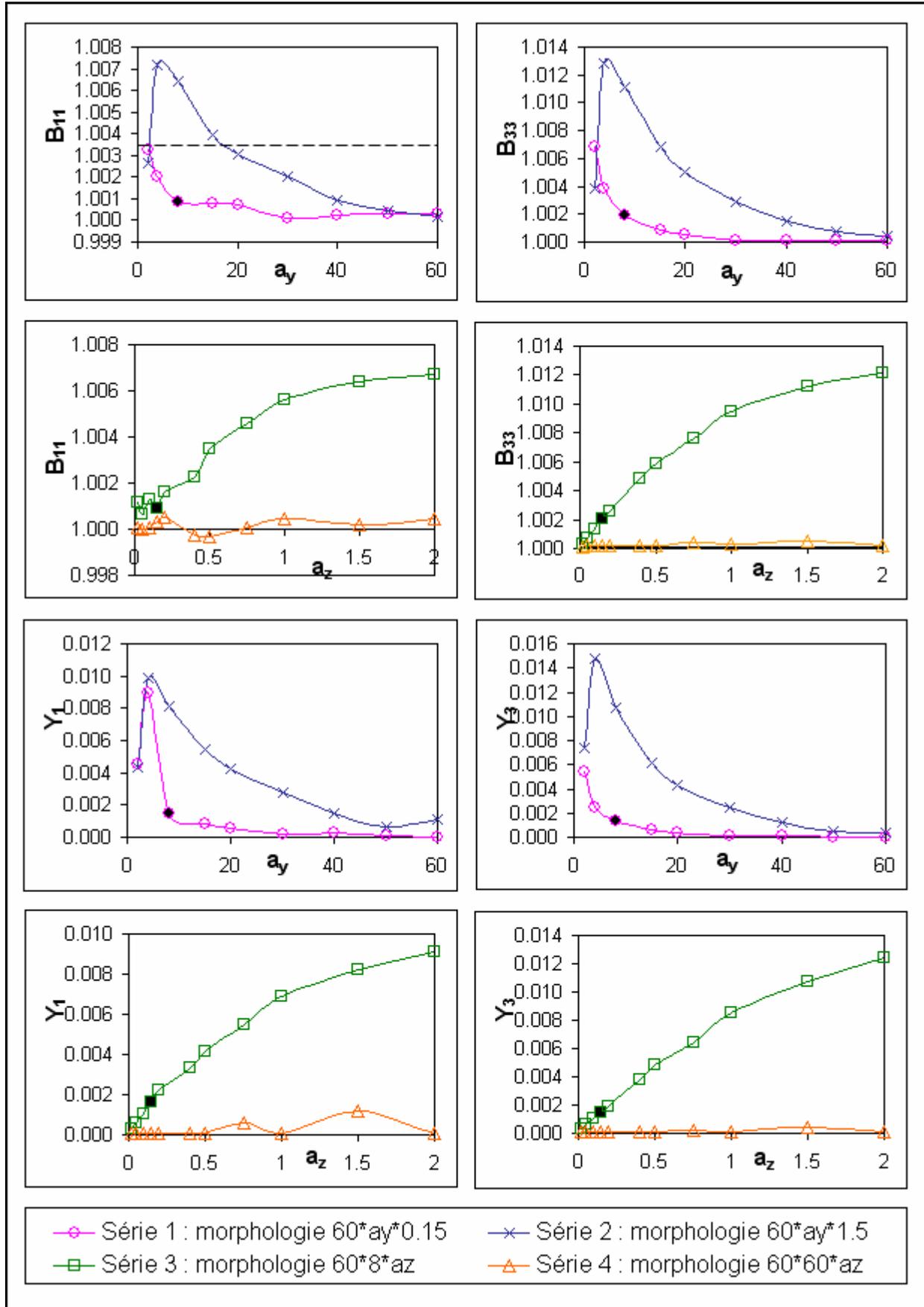


Figure I-15 : Moyenne des tenseurs d'influence sur les contraintes pour le composite, avec la formulation Hm



Le rapport de forme maximal testé ici est de 40, ce qui est comparable à ce qu'on peut trouver dans les matériaux renforcés par fibres courtes (mats de verre, nanocomposites) (voir par exemple [Thomason et Groenwoud, 1996 ; Coleman et al, 2006]...). On notera alors que les trois formulations proposées pour le modèle autocohérent classique, sont entachées d'une erreur très importante sur les relations de cohérence.

### 5.3.3 Modèle EKG

Le modèle de Eshelby-Kröner Généralisé est à même de fournir une comparaison fiable pour le modèle EK à formulation mixte, décrit plus haut. En effet, il utilise les mêmes hypothèses mais est conçu de sorte à s'affranchir des problèmes d'autocohérence rencontrés pour la microstructure du Hextool. Il a donc été implémenté, ce qui aboutit aux propriétés thermo-élastiques résumées dans le tableau I-10 ci-dessous. Ces propriétés se traduisent par une rigidité dans le plan ( $E_1$  et  $G_{12}$ ) légèrement plus faible pour le modèle EKG que pour le modèle EKHm. Quant aux CET, ils sont légèrement plus importants.

**Tableau I-10 : Propriétés thermo-élastiques du composite pour le modèle EKG**

Modèle	Modules mécaniques						CET	
	$E_1, E_2$ [GPa]	$E_3$ [GPa]	$G_{12}$ [GPa]	$G_{13}, G_{23}$ [GPa]	$\nu_{12}$	$\nu_{13}, \nu_{23}$	$\alpha_1, \alpha_2$ [ $10^{-6}/K$ ]	$\alpha_3$ [ $10^{-6}/K$ ]
EKG	<b>45,1</b>	12,1	<b>17,8</b>	3,9	0,26	0,38	<b>3,34</b>	<b>45,2</b>
EKHm	<b>46,1</b>	12,1	<b>18,2</b>	3,9	0,27	0,38	<b>3,18</b>	<b>43,7</b>

On notera en outre que le modèle EKG a été implémenté ici avec la formulation « en contraintes »  $H\sigma$  ; on vérifie cependant que la formulation « en déformations » aboutit à des propriétés identiques (à  $10^{-3}$  près). Le modèle EKG est donc un modèle pertinent pour décrire des matériaux dans lesquels le VER contient des inclusions de formes différentes et/ou orientées aléatoirement. Cependant, il a été mis en place tardivement dans la thèse et nécessiterait un travail de validation sur d'autres types de matériaux. Par exemple, sur des composites renforcés par des fibres courtes arrangées aléatoirement, ou encore sur des nanocomposites [Coleman et al 2006 ; Fidelus et al., 2005 ; Zhang et Sharma, 2005].

## 6 CORRECTIONS DU MODELE ET FINALISATION

### 6.1 Confrontation avec les résultats expérimentaux

Au cours du chapitre précédent, on a montré que la procédure de transition d'échelles pouvait être opérée à partir de différentes formulations : le modèle de Mori-Tanaka, le modèle de Eshelby-Kröner classique avec une formulation « mixte » direction-dépendante, et enfin le modèle de Eshelby-Kröner Généralisé tel que défini au chapitre 4. Tous ces modèles aboutissent à des propriétés effectives comparables pour le composite, néanmoins le choix de l'un ou l'autre n'est pas trivial.

Dans un premier temps, il est nécessaire de confronter les résultats de ces modèles aux propriétés mesurées expérimentalement sur le composite. Il faudra alors choisir parmi les différentes formulations, laquelle est la plus pertinente et s'en rapproche le plus. Enfin, il faudra, si possible, améliorer la modélisation du Hextool.

#### 6.1.1 Propriétés thermo-élastiques mesurées du Hextool

##### 6.1.1.1 Propriétés élastiques

Les propriétés disponibles sur le Hextool restent assez peu nombreuses d'une part, et très variables selon les sources d'autre part. Ainsi, pour les propriétés élastiques, seules la rigidité et la résistance du Hextool dans le plan ont été mesurées, pour des raisons de faisabilité notamment. Il est en effet difficile de fabriquer une éprouvette suffisamment épaisse pour effectuer des essais de traction hors-plan. En outre, la faible résistance du Hextool dans cette direction complique la mise en œuvre de l'essai. Le tableau suivant, issu du Hextool User Guide [Hexcel HUG, 2007], récapitule les résultats des essais effectués par Hexcel Composites (non certifiés). Il donne le module élastique dans le plan ( $E_1$ ) et la limite de rupture ( $\sigma^R$ ) du Hextool sec à température ambiante (RT) et à 180°C, pour différents essais normalisés.

Tableau I-11: Mesures du module de Young et de la limite à rupture du Hextool dans le plan

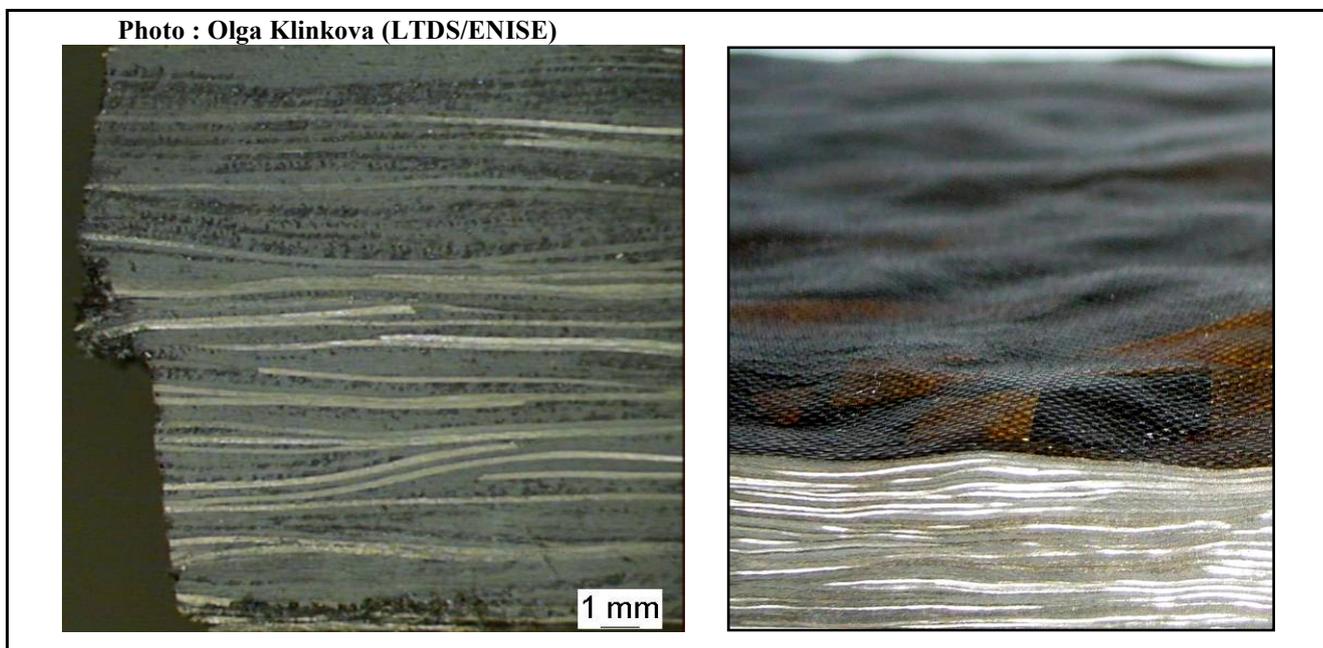
Essai (norme) Conditions expérimentales	Traction (EN 2561)		Compression (EN 2850 B)		Flexion (EN 2562)		Poutre courte (EN 2563)	
	$E_1$ [GPa]	$\sigma^R$ [MPa]	$E_1$ [GPa]	$\sigma^R$ [MPa]	$E_1$ [GPa]	$\sigma^R$ [MPa]	$E_1$ [GPa]	$\sigma^R$ [MPa]
Sec/RT	<b>41</b>	260	<b>32</b>	300	<b>38</b>	380	X	50
Sec/180°C	40	210	30	270	X	X	X	43

Plus récemment, un essai de traction a été mené par Hexcel Composites sur une machine Zwick 1484/A191, sur le matériau et sec à température ambiante. Une instrumentation par jauges extensométriques (de 20 mm), orientées à 0° et 90° par rapport à direction de sollicitation, a ainsi permis de déterminer le module de Young dans le plan ( $E_1 = 45,7 \pm 3,85$  GPa), la limite à rupture ( $\sigma^R = 154 \pm 3,5$  MPa), ainsi que le coefficient de Poisson dans le plan du matériau ( $\nu_{12} = 0,30 \pm 0,09$  GPa). Un essai de Iosipescu ([Odegard et Kumosa, 2000]) a également été mené dans les mêmes conditions afin de déterminer le comportement du matériau en cisaillement dans le plan ; le module de cisaillement  $G_{12}$  a ainsi été mesuré à  $14,4 \pm 1,8$  GPa, et la résistance en cisaillement à  $146 \pm 9$  MPa.

On notera la forte dispersion des résultats expérimentaux d'une éprouvette à l'autre, qui pourrait provenir du caractère local de la mesure (étant donné la taille des jauges par rapport à celle des bandes renforçantes), ou bien de variations du taux de fibre d'une éprouvette à l'autre. On remarquera également que le module de Young évolue fortement avec le type de sollicitation : entre 32 GPa (en compression) et 45 GPa (en traction), de même que la limite à rupture. Cette dispersion

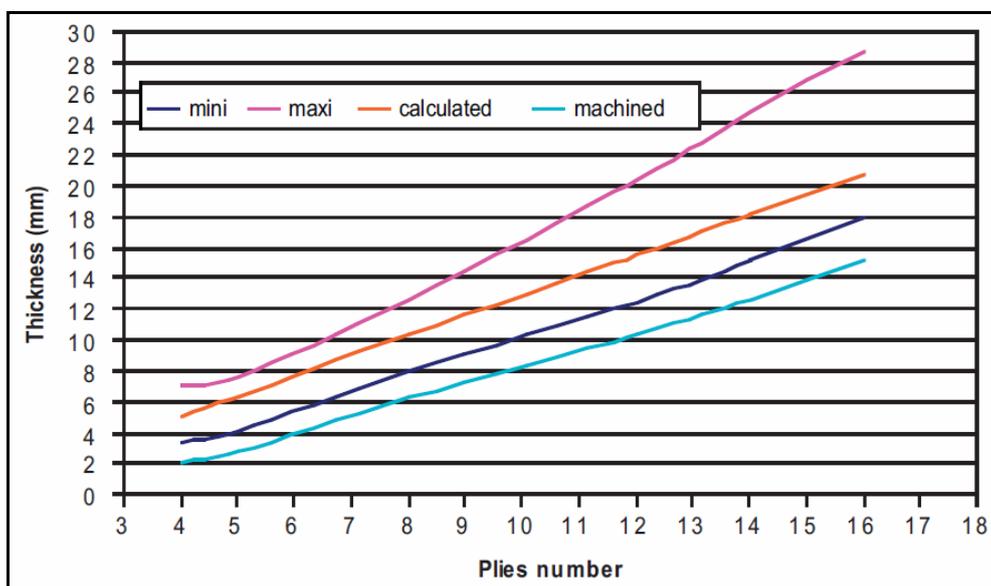
peut être due au fait que les bandes renforçantes ne sont pas exactement orientées dans le plan 1-2, mais présentent une ondulation naturelle. Cette ondulation naturelle est due aux multiples recouvrements entre elles, et est accentuée par le retrait thermo-chimique qui apparaît durant la fabrication (voir partie II). Ainsi, les sollicitations de traction tendent à « retendre » les bandes renforçantes et donc à augmenter la rigidité, alors que les sollicitations de compression ou de cisaillement génèrent un « post-flambement » des bandes, qui diminue la rigidité apparente.

Figure I-16 : Vues en coupe dans l'épaisseur du pli Hextool.



Sur la face de la pièce qui est posée contre le moule, les bandes sont parfaitement rectilignes ; sur la face coté bâche, aucune forme n'est imposée au Hextool et on a donc apparition d'une ondulation des bandes. Cet effet d'ondulation augmente avec l'épaisseur de l'échantillon, car les défauts de forme se cumulent à chaque nouveau pli Hextool empilé sur les autres. L'écart entre les épaisseurs maximale et minimale mesurées sur l'éprouvette, augmente donc avec le nombre de plis, comme en témoigne la figure suivante [Hexcel HUG, 2007]. On peut ainsi estimer l'épaisseur minimale, calculée et maximale d'un pli :  $e_{\min} = 1,25\text{mm}$ ,  $e_{\text{calc}} = 1,375 \text{ mm}$  et  $e_{\max} = 2,125\text{mm}$  (coefficient directeur des droites moyennes entre 8 et 16 plis).

Figure I-17 : Evolution des épaisseurs maxi et mini de l'éprouvette, en fonction du nombre de plis

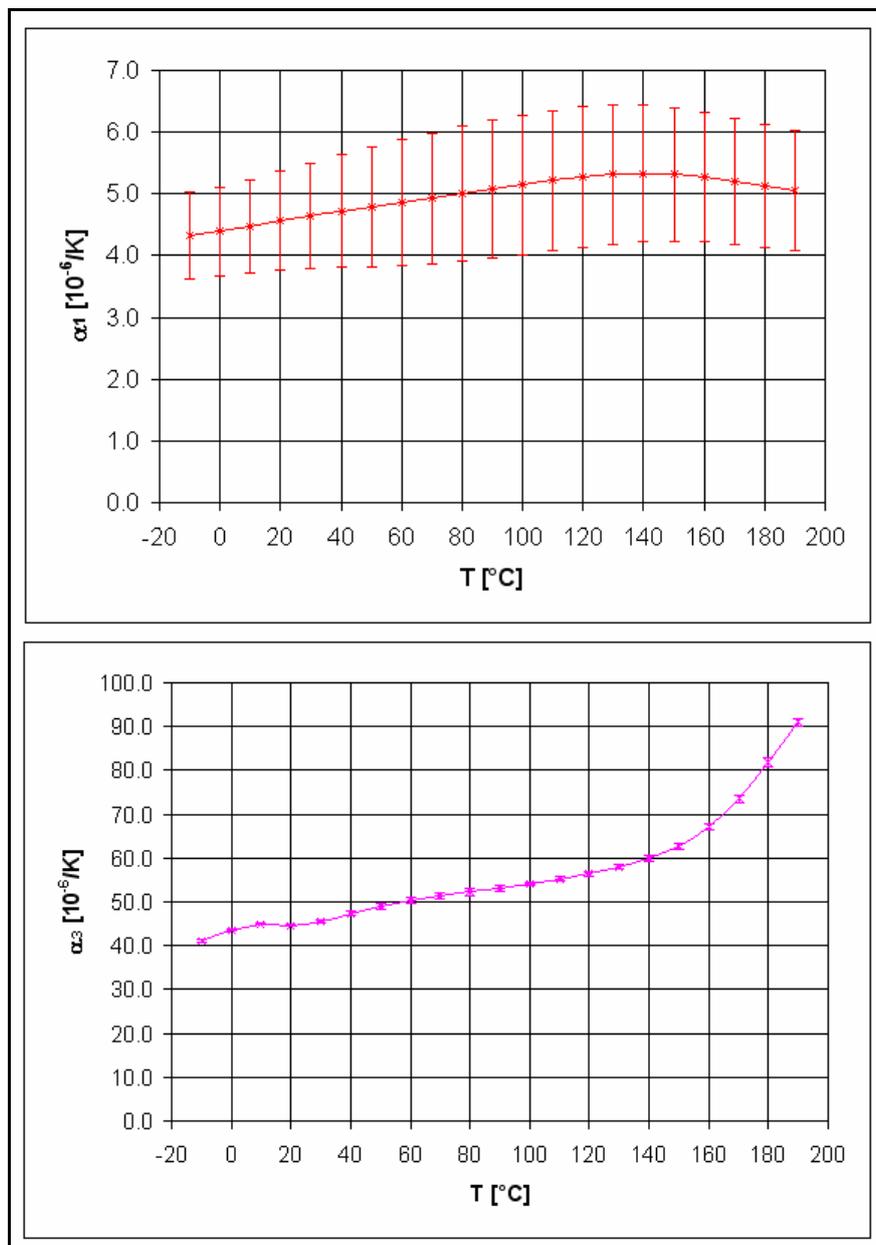


### 6.1.1.2 Propriétés thermiques

Concernant les CET, on note la même disparité de résultats d'une source à l'autre. Ainsi, si on prend le CET du Hextool dans le plan, les valeurs mesurées varient entre  $5.10^{-6}/K$  d'après le guide de l'utilisateur [Hexcel HUG, 2008] (essai ASTM E831), et  $3,5.10^{-6}/K$  d'après la DataSheet [Hexcel HDS, 2008] (essai ASTM E228). L'évolution des CET dans le plan et hors-plan avec la température, a également été mesurée par Hexcel [Hexcel coms, 2008] et est récapitulée dans la figure I-18. Les CET dans le plan et hors-plan, à température ambiante ( $20^{\circ}C$ ), sont respectivement égaux à  $4,5.10^{-6}/K$  et  $45.10^{-6}/K$ , mais avec un écart-type (sur 3 éprouvettes) non négligeable, de l'ordre de  $1.10^{-6}/K$ .

Notons que la température joue un rôle important sur ces mesures : on a une augmentation des CET (hors-plan notamment) entre  $-10^{\circ}C$  et  $140^{\circ}C$ , suivi d'une modification de l'évolution qui traduit l'apparition de phénomènes visqueux.

Figure I-18 : Evolution des CET du Hextool avec la température



## 6.1.2 Comparaison théorie - expérience

Le tableau I-12 récapitule les propriétés effectives obtenues par les différents modèles de transition d'échelles, ainsi que celles mesurées sur le Hextool. La notation A-B sera utilisée pour décrire les deux étapes de la transition d'échelles : homogénéisation des bandes renforçantes (modèle A) puis homogénéisation du composite (modèle B). Les différents modèles aboutissent tous à des propriétés analogues ; cependant, le modèle utilisé pour la première étape d'homogénéisation (bandes renforçantes) influence nettement les résultats. La procédure MT – MT aboutit à une rigidité dans le plan significativement plus basse et un CET hors-plan plus important que les autres procédures.

Pour ce qui est des résultats expérimentaux, ils se caractérisent par une rigidité (dans le plan) plus faible et des CET (dans le plan notamment) plus importants que ceux obtenus par les différents modèles micromécaniques. Les écarts restent néanmoins relativement faibles, surtout si on considère les incertitudes de mesure ( $10^{-6}/K$  pour le CET) et la représentation simpliste de la mésostructure. Les paramètres pouvant expliquer ces écarts sont : l'incertitude sur les propriétés des constituants tout d'abord, au vu de la disparité des données disponibles dans la littérature ; l'ondulation naturelle des bandes évoquée plus haut, qui dégrade les propriétés dans le plan ; et enfin, l'incertitude sur le taux volumique de résine et sa répartition, qui dépendent du procédé mis en œuvre, de la pression appliquée pendant la fabrication et du drainage de la résine. La porosité du matériau pourrait également jouer un rôle, cependant celle-ci est a priori faible (de l'ordre de 2 %), et sa prise en compte dans le modèle d'homogénéisation reste encore problématique.

**Tableau I-12 : Propriétés thermo-élastiques du composite pour les principaux modèles**

Modèle	Modules mécaniques						CET	
	$E_1, E_2$ [GPa]	$E_3$ [GPa]	$G_{12}$ [GPa]	$G_{13}, G_{23}$ [GPa]	$\nu_{12}$	$\nu_{13}, \nu_{23}$	$\alpha_1, \alpha_2$ [ $10^{-6}/K$ ]	$\alpha_3$ [ $10^{-6}/K$ ]
MT - MT	<b>42,3</b>	11,6	<b>16,1</b>	2,9	0,31	0,35	<b>3,24</b>	<b>48,0</b>
EK - EKHm	<b>46,1</b>	12,1	<b>18,2</b>	3,9	0,27	0,38	<b>3,18</b>	<b>43,7</b>
EK - EKG	<b>45,1</b>	12,1	<b>17,8</b>	3,9	0,26	0,38	<b>3,34</b>	<b>45,2</b>
Hextool	<b>32~45,7±3,8</b>	X	<b>14,4±1,8</b>	X	<b>0,30±0,09</b>	X	<b>3,5~5±1</b>	<b>45~52±1</b>

Un choix doit être opéré parmi les différentes approches, afin de retenir le ou les modèles pertinents pour la suite des travaux (calcul des contraintes internes notamment). Le modèle de Mori-Tanaka (MT-MT) est celui qui aboutit aux propriétés les plus proches de celles attendues et offre l'avantage d'être explicite. On verra cependant (partie II) qu'il sous-estime les contraintes locales par rapport au modèle autocohérent, et donc ne devrait pas être favorisé. On lui préférera les modèles de type Eshelby-Kröner, qui donnent plutôt une estimation par excès des contraintes locales.

Parmi les modèles de type EK, l'approche EK-EKHm donne des résultats acceptables mais souffre d'un défaut d'autocohérence et est difficile à implémenter. Le modèle EK-EKG résout ces deux problèmes, et est donc préférable si l'on souhaite garder la morphologie 60x8x0,15 pour les bandes renforçantes.

## 6.2 Influence de la morphologie des bandes renforçantes

Les études menées plus tôt sur la deuxième étape (étape B) de l'homogénéisation du composite ont révélé l'influence de la morphologie des bandes renforçantes sur les moyennes des tenseurs de localisation. Elles ont également permis de mettre en évidence la dépendance des propriétés effectives à cette morphologie, ce qui est une caractéristique des modèles MT et EK. On a donc calculé les propriétés effectives du composite selon les modèles MT-MT, EK-EKHm et EK-EKG, pour les quatre séries de morphologies évoquées plus haut. Les résultats sur les principales propriétés thermo-élastiques sont résumés dans les figures ci-dessous (I-19, I-20 et I-21).

Figure I-19 : Propriétés effectives du composite d'après le modèle MT-MT

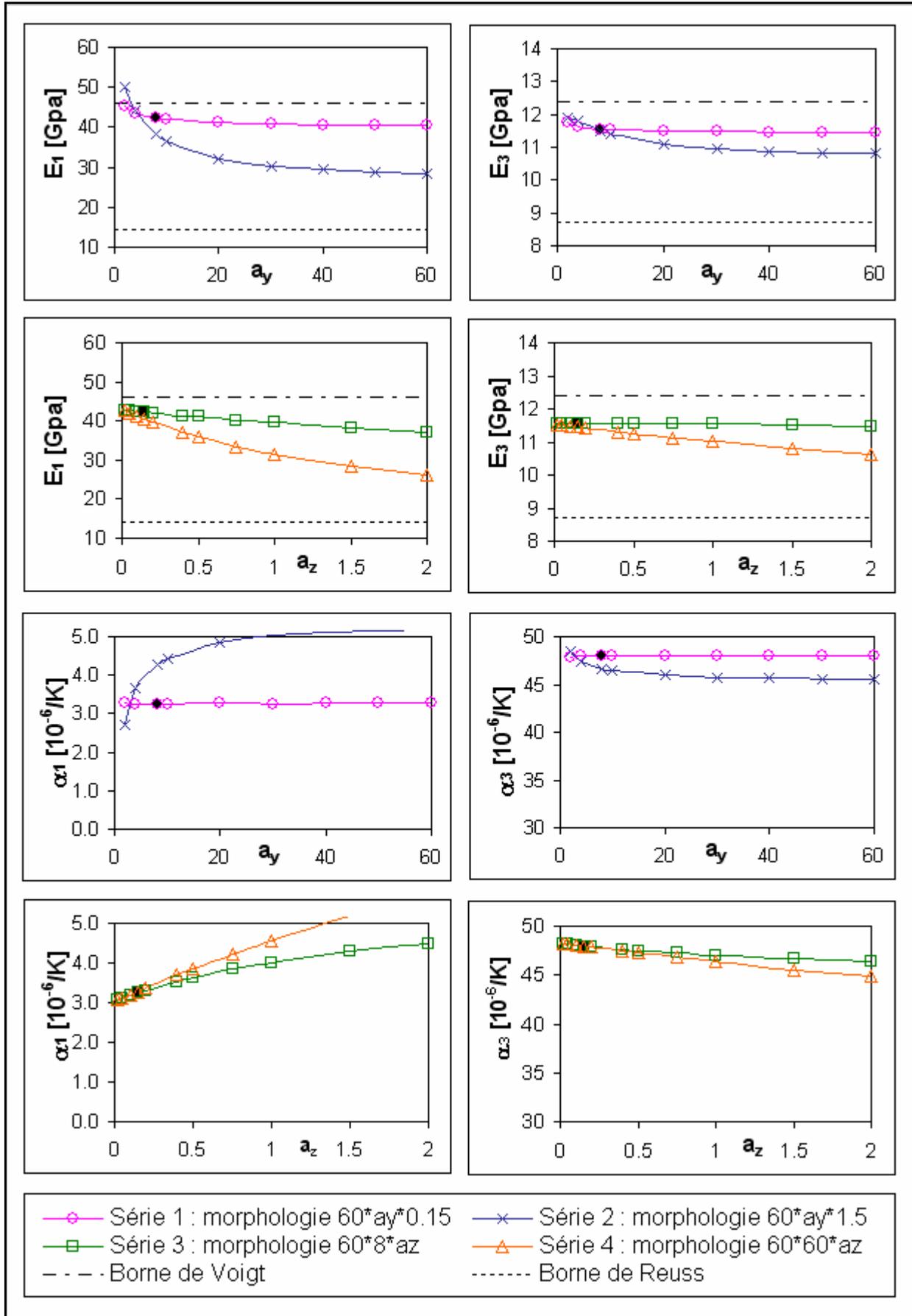


Figure I-20 : Propriétés effectives du composite d'après le modèle EK-EKHm

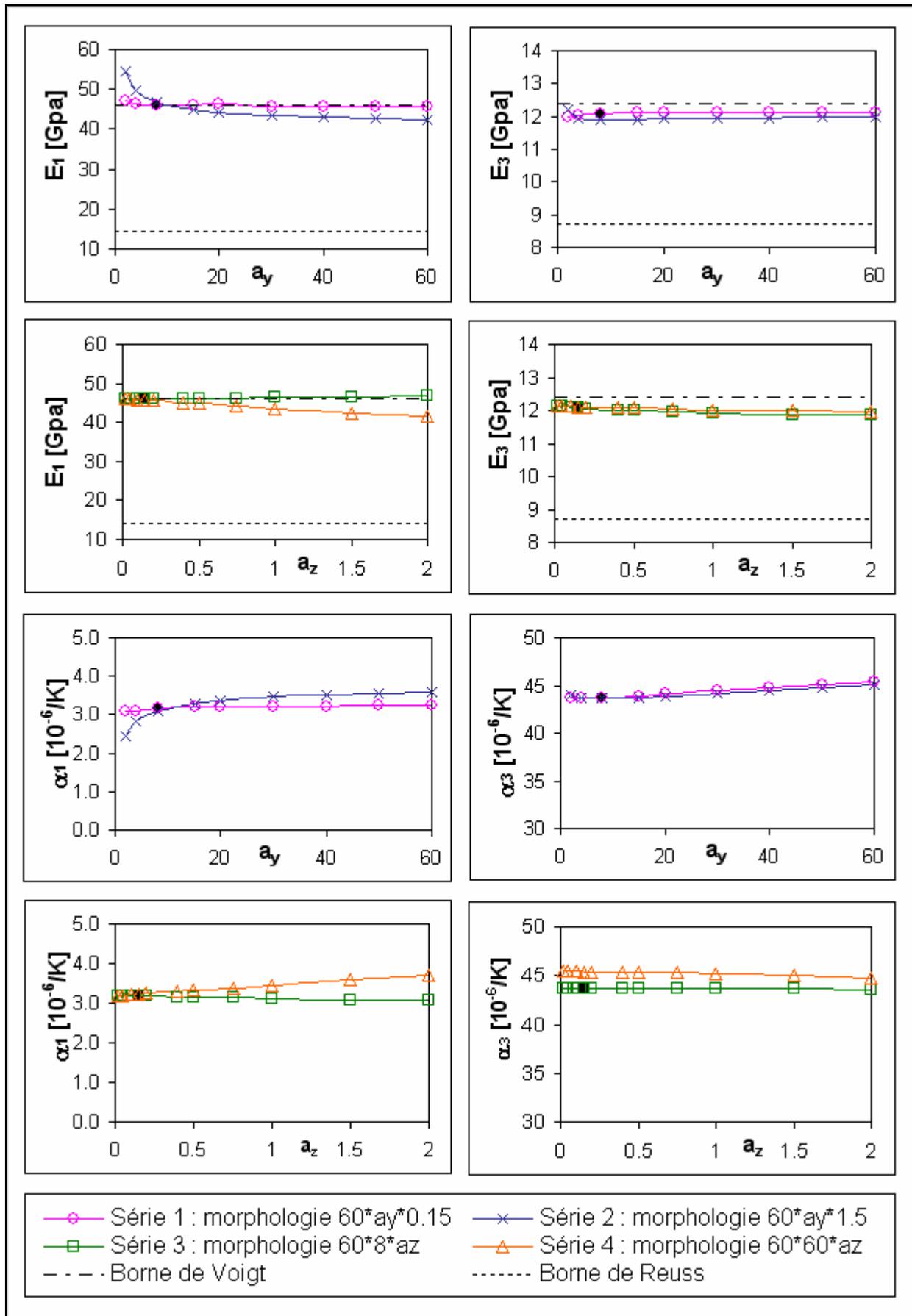
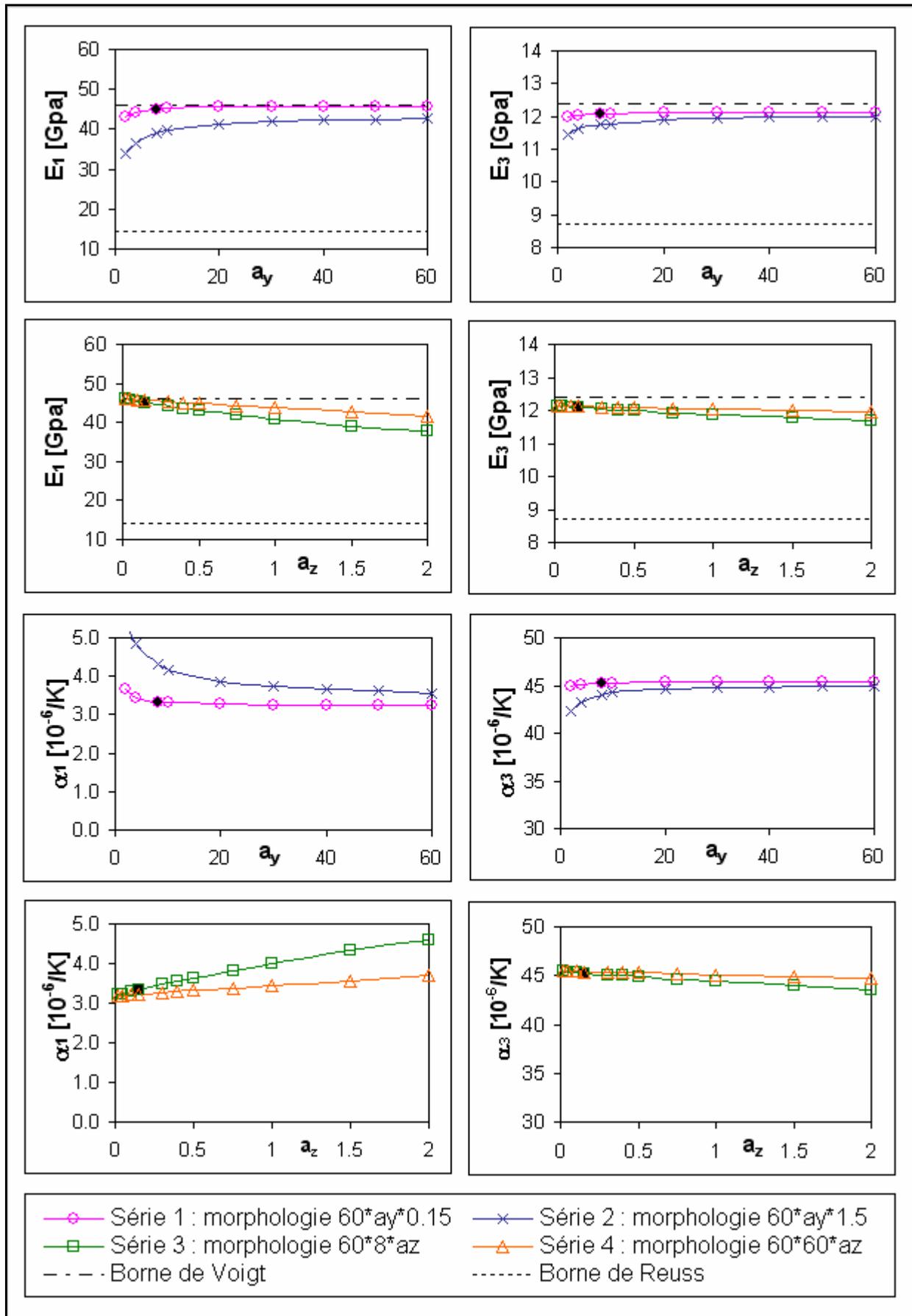


Figure I-21 : Propriétés effectives du composite d'après le modèle EK-EKG



Le modèle de Mori-Tanaka se distingue des deux autres par une rigidité plus faible et des évolutions des CET plus marquées, ce qui est également dû à l'utilisation de propriétés différentes pour les bandes renforçantes. D'autre part, les deux modèles de Eshelby-Kröner (EK-EKHm et EK-EKG) aboutissent à des propriétés proches et des évolutions très similaires en fonction de la morphologie. Les écarts sont principalement imputables au problème d'autocohérence du modèle EKHm, puisqu'on obtient des propriétés identiques avec les deux modèles, pour la morphologie 60 x 60 x  $a_z$  (courbe orange). En outre, contrairement au modèle EKHm, le modèle EKG ne viole pas la borne de Voigt (hormis lorsque  $a_z$  est faible, en raison d'erreurs numériques sur le calcul du tenseur de Morris).

Enfin et surtout, on remarque que la morphologie des bandes renforçantes peut être assimilée à un disque fin, avec un écart assez faible sur les propriétés effectives observées (et cela, quel que soit le modèle). Cette propriété est intéressante pour plusieurs raisons : tout d'abord, elle permet de s'affranchir des problèmes d'autocohérence du modèle EK. Cela facilite également l'implémentation du modèle EK, la formulation « Hmixte » devenant obsolète. Mais surtout, pour des inclusions ayant une morphologie de disque et noyées dans un milieu isotrope plan 1-2, on peut écrire le tenseur de Morris  $\mathbf{E}^I$  de façon analytique, ce qui permet un gain de temps de calcul très important (de l'ordre de 10 secondes par calcul). Les composantes non nulles de ce tenseur sont :

$$\mathbf{E}_{33}^I(\mathbf{L}) = \frac{1}{L_{33}^I} \quad \mathbf{E}_{44}^I(\mathbf{L}) = \mathbf{E}_{55}^I(\mathbf{L}) = \frac{1}{4L_{44}^I} \quad (\text{I-111})$$

Les autres composantes tendent vers 0 quand  $a_x \rightarrow a_y$  et quand  $a_z \rightarrow 0$ , on les fixera à une valeur très faible pour conserver l'inversibilité de  $\mathbf{E}^I$  ; notons que le tenseur de Hill reste néanmoins non inversible à cause de la composante 44. Cette singularité pose quelques problèmes pour les formulations He, mais qui peuvent être aisément résolus par quelques manipulations algébriques des équations. Notons également que les propriétés calculées avec la version analytique de  $\mathbf{E}^I$ , et la version numérique (morphologie 60 x 60 x  $a_z$ ) coïncident si  $a_z < 0,06$ .

**Tableau I-13 : Propriétés thermo-élastiques du composite, pour les deux morphologies (étirée et disque)**

Morphologie	Modèle	Modules mécaniques						CET	
		$E_1, E_2$ [GPa]	$E_3$ [GPa]	$G_{12}$ [GPa]	$G_{13}, G_{23}$ [GPa]	$\nu_{12}$	$\nu_{13}, \nu_{23}$	$\alpha_1, \alpha_2$ [ $10^{-6}/K$ ]	$\alpha_3$ [ $10^{-6}/K$ ]
Etirée (60 x 8 x 0,15)	MT-MT	42,3	11,6	16,1	2,9	0,31	0,35	3,24	48,0
	EK - EKHm	46,1	12,1	18,2	3,9	0,27	0,38	3,18	43,7
	EK - EKG	<b>45,1</b>	<b>12,1</b>	<b>17,8</b>	<b>3,9</b>	<b>0,26</b>	<b>0,38</b>	<b>3,34</b>	<b>45,2</b>
Disques fins (60 x 60 x 0)	MT - MT	42,9	11,5	16,3	2,9	0,31	0,36	3,03	48,2
	EK - EKHm	46,1	12,1	18,1	3,8	0,27	0,37	3,21	45,4
	EK - EKG	<b>46,1</b>	<b>12,1</b>	<b>18,1</b>	<b>3,8</b>	<b>0,27</b>	<b>0,37</b>	<b>3,19</b>	<b>45,4</b>

Le tableau I-13 récapitule les résultats des différents modèles, selon qu'on donne aux bandes renforçantes (et à la matrice extra-renforts) une morphologie étirée ou une morphologie de disque. On peut ainsi confirmer une très bonne correspondance entre les propriétés, pour ces deux morphologies, notamment pour le modèle de Mori-Tanaka et pour le modèle autocohérent classique EKHm. Il sera démontré dans la partie II que l'approximation qui est faite sur la morphologie, n'influence pas non plus les états mécaniques locaux de façon significative.

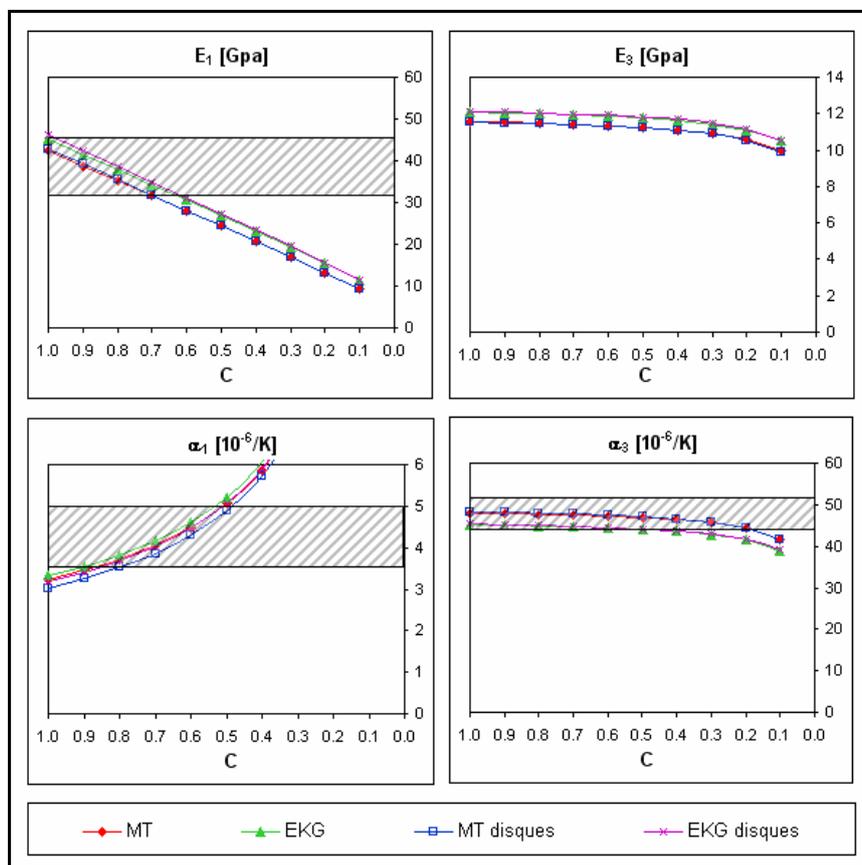
### 6.3 Influence de l'ondulation des bandes renforçantes

Le constat des sections précédentes est qu'il persiste un écart, léger mais néanmoins significatif, entre les propriétés effectives calculées par les méthodes de transition d'échelles, et celles mesurées sur le Hextool. Cet écart est, entre autres, imputable à l'ondulation naturelle des bandes renforçantes, qui génère en outre une différence de comportement entre la traction et la compression (par effet de micro-flambement des bandes). Un grand nombre de variations est possible autour du modèle à utiliser, et de la morphologie des constituants (épaisseur des bandes par exemple) ; cependant aucune de ces variations ne permet de combler totalement l'écart entre les propriétés calculées et mesurées. C'est pourquoi on se propose de prendre directement en compte l'ondulation des bandes dans le modèle. Une approche très simplifiée consiste à postuler que cette ondulation dégrade des propriétés des bandes renforçantes, et notamment le module de Young  $E_x$  dans la direction des fibres. [Goemmers et al., 1996] utilisent ainsi l'approche de Krenchel afin de calculer les propriétés de plis composites tissés. Cette approche d'homogénéisation simplifiée, très utilisée pour homogénéiser les composites à fibres courtes, suppose de corriger le module de Young des éléments rigides par un « facteur d'efficacité »  $\eta^f$  qui représente la capacité de ces éléments à reprendre les contraintes. [Hearle, 1980] a montré que, si  $\alpha$  est l'angle entre la direction de sollicitation et celui de la fibre, ce facteur s'exprime de façon très simple :

$$\eta^f = \cos^4(\alpha) \quad (I-112)$$

Dans le cas de composites renforcés par des particules orientées aléatoirement, on intègre ce facteur sur l'ensemble des orientations. Pour des plis composites tissés, Hearle et al. ont décomposé les torons en segments de longueur et d'orientation donnée, et intégré le facteur d'efficacité sur l'ensemble de ces longueurs et orientations. Cette approche simplifiée a été adaptée au cas du Hextool, en corrigeant, pour la deuxième étape de l'homogénéisation, le module de Young  $E_x$  des bandes par un facteur  $C$  compris entre 0 et 1. L'ondulation des bandes étant supposée intervenir surtout dans la direction des fibres, les autres propriétés sont laissées inchangées.

Figure I-22 : Propriétés effectives du composite avec correction d'ondulation



On observe que cette correction permet effectivement de diminuer le module de Young dans le plan, et d'augmenter le CET dans le plan. En outre, la correction nécessaire pour que les propriétés calculées correspondent à celles mesurées, est assez peu importante : il faut prendre  $C$  entre 0,85 et 0,5 pour  $E_1$ , et entre 0,85 et 0,5 pour  $\alpha_1$ . Cette méthode permettrait donc de prendre en compte l'ondulation des bandes renforçantes. Malheureusement, elle pose un certain nombre de problèmes dans le cadre de la transition d'échelles, notamment dans la manière de localiser les états mécaniques à l'intérieur de la bande renforçante. C'est pourquoi elle n'est pas utilisable en l'état.

Cependant, l'idée de départ reste une perspective intéressante. Il serait possible, notamment, de prendre en compte l'ondulation des bandes renforçantes en introduisant une légère désorientation des bandes renforçantes par rapport au plan 1-2, de telle sorte que la direction  $z$  (dirigée dans l'épaisseur de la bande) ne coïnciderait pas forcément avec la direction 3 (normale au plan du pli composite). Les modèles de transition d'échelles développés ici pourraient alors fournir une estimation beaucoup plus fiable que les modèles du type « Krenchel », et ne généreraient pas de problème pour la localisation des états mécaniques.

Cependant, cette idée se heurte à deux difficultés : d'une part, on ne dispose d'aucune donnée expérimentale sur la répartition des angles de désorientation (ou sur l'ondulation des bandes) ; cette répartition serait donc un paramètre d'ajustement. D'autre part, cette méthode nous obligerait à utiliser uniquement le modèle de Mori-Tanaka, dont les prédictions, en termes de propriétés effectives (module de cisaillement transverse notamment), et de contraintes internes, peuvent être irréalistes. En effet, le tenseur de Hill (et par suite, celui de Morris) doit être calculé à partir du tenseur de rigidité du milieu ambiant projeté dans le repère local de l'inclusion. Hors, si le milieu ambiant n'est pas isotrope, on observe une perte de symétrie de ce tenseur, avec l'apparition de nouveaux termes non nuls, qu'il faudrait inclure dans tous les calculs, ce qui est fastidieux. La meilleure solution pour éviter cela est donc de supposer que la résine (isotrope) assume le rôle de milieu ambiant, i.e. d'utiliser le modèle de Mori-Tanaka. Cette solution reste une possibilité intéressante, qui sera implémentée dans des travaux ultérieurs à la rédaction de ce mémoire.

## 6.4 Influence du taux volumique et de la répartition de la matrice

Le dernier facteur susceptible d'influencer les propriétés du composite est le taux global de fibres dans le composite, ainsi que la répartition de la résine (à l'extérieur ou à l'intérieur des bandes). Ces paramètres sont des valeurs d'entrée du modèle et on peut donc aisément les prendre en compte.

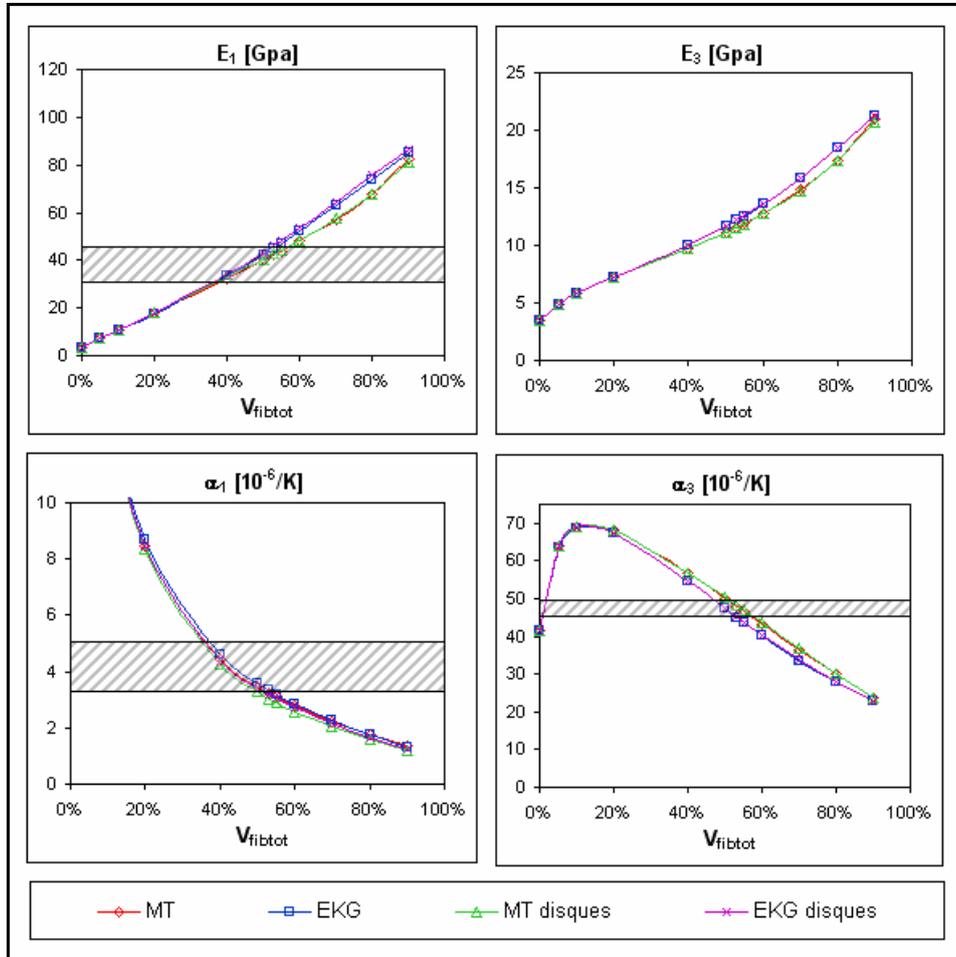
Le taux global de fibres dans le composite est difficile à connaître exactement, car elle dépend fortement des conditions de mise en œuvre, de l'épaisseur de la pièce, etc... La DataSheet du Hextool elle-même donne deux valeurs qui ne correspondent pas : une fraction volumique nominale de fibres de 60 %, et une fraction massique de résine de 38 % (soit  $V^{\text{tot}} = 53$  % si on suppose la porosité nulle). Le taux de fibres a également été mesuré par Katarzyna Szymanska [LTDS/ECL coms, 2010b], par attaque chimique à l'acétone : le résultat est un taux massique de fibre de  $62 \pm 2,96$  %, ce qui fait une variation non négligeable (environ 2,5 % en volume). En outre, dans les pièces épaisses, il peut arriver que le taux de résine varie de quelques pourcents entre la face « moule » et la face « bache à vide », qui est en contact avec le tissu de drainage.

Il est donc important de quantifier la variation des propriétés avec le taux de fibres. Cette variation est récapitulée dans la figure I-23 ci-dessous. Notons qu'il n'est pas possible d'atteindre 100 % de fibres en raison de la présence de la faible fraction de matrice entre les bandes (5 %).

Comme on pouvait s'y attendre, la tendance générale est une diminution de la rigidité du composite et une augmentation des coefficients d'expansion thermiques, lorsque le taux de fibres global diminue. Le module de Young  $E_1$  varie de presque 1 GPa par pourcent de fibre en volume. Il est donc possible d'expliquer les écarts observés expérience - modélisation, par un taux de fibres global plus faible dans le Hextool que la valeur retenue pour la modélisation (58 %).

Notons au passage le comportement un peu particulier du CET hors-plan  $\alpha_3$ , aux faibles de taux de fibres : lorsque  $V^{\text{fibtot}}$  diminue,  $\alpha_3$  augmente jusqu'à environ  $70.10^{-6}/K$  (soit un CET supérieur à celui de la matrice), avant de chuter à  $41,4.10^{-6}/K$  lorsque le taux de fibres s'annule. Cette évolution peut s'expliquer par la forte rigidité du composite dans le plan, qui restreint la dilatation de la matrice dans ces directions ; ceci génère, par effet transverse (coefficient de Poisson  $\nu_{13}$ ), une dilatation importante dans la direction 3.

Figure I-23 : Propriétés effectives du composite en fonction du taux global de fibres



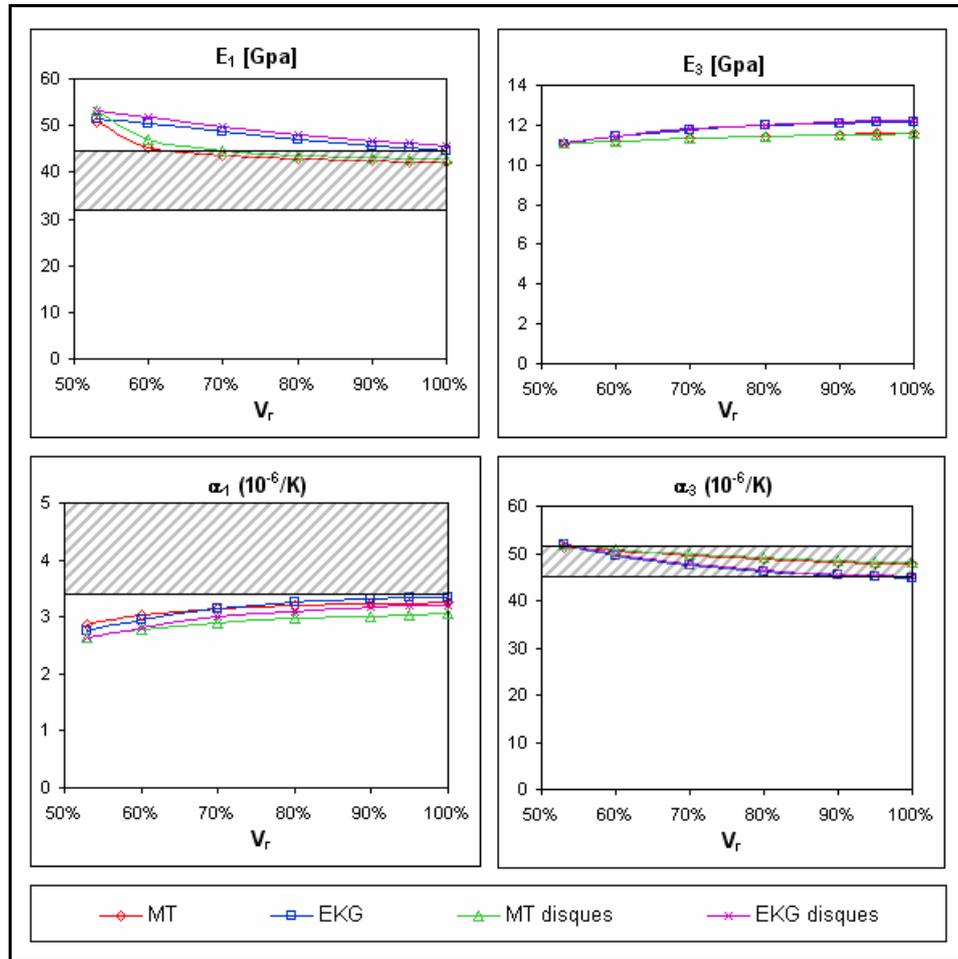
Une autre inconnue dans la composition du Hextool est la répartition de la résine aux différentes échelles. On a en effet supposé que 95 % de la matrice restait à l'intérieur des bandes renforçantes, le reste (5 %) assurant la cohésion des bandes. Cette répartition est totalement arbitraire, et n'a qu'une valeur statistique ; le comportement de cette fraction de matrice extra-renforts reste de toute façon très difficile à quantifier, en raison du caractère très irrégulier de la mésostructure. On s'est donc attaché à étudier l'évolution des propriétés du composite avec le taux de bandes renforçantes ( $V^f = 1 - V^{\text{mer}}$ ), le taux global de fibres restant fixé à 53 %. Les principaux résultats sont présentés sur la figure I-23.

Les évolutions observées ici sont assez peu prononcées, ce qui montre que la répartition de la résine n'est pas un paramètre très significatif pour le modèle. C'est un constat rassurant, dans la mesure où cette répartition reste très mal connue.

On notera que ces deux études d'influence permettent également de vérifier une condition de validité des modèles : pour des taux de fibre égaux à 0 % et à 100 %, les propriétés des bandes renforçantes UD sont égales, respectivement, à celles de la matrice et de la fibre. Ceci est vérifié par les modèles MT et EK. On note également que le composite a les propriétés de la résine si  $V^{\text{fibtot}} =$

0 % ; cependant, l'inverse n'est pas vrai : à  $V^{\text{tot}} = 100 \%$ , les propriétés du composite ne sont pas égales à celle de la fibre, en raison de l'orientation aléatoire dans le plan 1-2.

Figure I-23 : Propriétés effectives du composite en fonction du taux de bandes renforçantes



## 6.5 Conclusion

Ce qui ressort de cette comparaison théorie-expérience est qu'il existe un écart léger mais significatif au niveau des propriétés effectives du composite, particulièrement pour les propriétés « dans le plan ». Il est cependant possible de se rapprocher des propriétés mesurées en jouant sur les modèles d'homogénéisation utilisés, sur la représentation de la microstructure (morphologie des bandes renforçantes), ou sur le taux de fibres. Ces écarts s'expliquent également par l'aspect très irrégulier du Hextool à l'échelle mésoscopique, avec notamment une ondulation naturelle des bandes renforçantes. A ce jour, cette ondulation n'a pas pu être prise en compte de manière probante dans le cadre d'une étude multi-échelles.

Par ailleurs, les résultats des différentes études paramétriques indiquent qu'il est possible de définir un modèle simplifié (ou même analytique) pour calculer les propriétés du composite avec une précision correcte, en utilisant le modèle de Mori-Tanaka et en considérant que les bandes renforçantes ont une forme de disque. L'utilisation du modèle de Mori-Tanaka est également recommandée si l'on souhaite inclure dans le modèle une ondulation des bandes, ou même une répartition angulaire non-uniforme de celle-ci (anisotropie plane).

Ajoutons que la structure particulière du Hextool génère un certain nombre de problématiques liées aux essais expérimentaux, que l'on n'a pas développées ici. La forte dispersion des résultats expérimentaux suggère notamment les difficultés liées à la répétabilité des mesures, ou à la mise en oeuvre des essais (géométrie des éprouvettes, moyens de mesure)...

## 7 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Afin de décrire le comportement multi-échelles d'un matériau composite à renforts non-orientés, une procédure d'homogénéisation à double transition d'échelles a été développée. Cette procédure se base sur le formalisme de transition d'échelles mis en place par Hill, ainsi que sur l'inclusion d'Eshelby. Ces deux travaux ont permis de fonder les modèles de Mori-Tanaka et de Eshelby-Kröner (autocohérent), très utilisés pour l'homogénéisation des polycristaux et également des matériaux composites. Une première étape d'homogénéisation permet d'obtenir les propriétés des bandes renforçantes constituant le composite. Puis une seconde homogénéisation est opérée, des renforts vers le composite, en prenant en compte l'orientation aléatoire des bandes dans le pli composite. Cette seconde transition d'échelles s'effectue à l'aide d'un modèle de Eshelby-Kröner modifié pour prendre en compte l'orientation aléatoire des renforts dans le pli composite. Pour chacune des transitions d'échelles, les formules permettent de calculer les états locaux à partir de l'état mécanique macroscopique, ce qui rend notamment possible la vérification de la tenue des constituants sous divers chargements hygro-thermo-mécaniques (cf partie II).

Plusieurs modèles ont été testés pour ces deux étapes d'homogénéisation : notamment, celui de Mori-Tanaka et de Eshelby-Kröner, qui aboutissent à des résultats comparables. Les propriétés calculées ainsi sont relativement proches de celles attendues expérimentalement. Une étude d'influence montre que le taux global de fibres, ainsi que l'ondulation des bandes renforçantes, affectent fortement les propriétés du composite. En revanche, la forme des bandes renforçantes ne semble pas affecter énormément les résultats ; cette constatation permet d'ailleurs d'améliorer la rapidité de calcul, ce qui sera utile pour la suite des travaux.

La deuxième étape d'homogénéisation soulève une problématique particulière, car le VER contient des inclusions avec plusieurs morphologies. Les limites du modèle EK en terme d'autocohérence, pour ce type de microstructure (voir notamment [Benveniste, 1987]), ont été démontrées en se basant sur les moyennes des tenseurs d'influence (principes de Hill). Deux modèles ont été proposés pour résoudre ce problème. Tout d'abord, une formulation « mixte » direction-dépendante a été proposée, et a permis de limiter très fortement les erreurs pour la morphologie qui nous intéresse. Plus tardivement, un modèle de Eshelby-Kröner généralisé a été proposé, en se basant sur les équations du modèle de Mori-Tanaka. Ce modèle permet de s'affranchir des problèmes d'autocohérence, quelles que soient les morphologies présentes au sein du VER. Un travail de validation reste cependant à fournir sur ce modèle, qui semble assez original.

Une application intéressante de ces travaux est la prédiction du comportement multi-échelles des composites renforcés par des fibres courtes, ou encore des nanocomposites. Dans le cas des composites à fibres courtes, le modèle permet de calculer les propriétés mécaniques mais aussi thermiques, pour lesquelles on obtient souvent de grandes disparités entre les modèles. Dans le cas des nanocomposites, le modèle d'homogénéisation le plus couramment utilisé est celui de Krenchel ([Krenchel, 1964 ; Thostenson et Chou, 2003]), mais il s'apparente à une simple loi des mélanges donnant le module de Young du composite, sans donner d'information sur les états mécaniques locaux. En outre, la prise en compte de la géométrie des nanotubes est très pauvre. L'utilisation des modèles de Mori-Tanaka et de Eshelby-Kröner pour les nanocomposites se répand (voir [Zhang et Sharma, 2005] et [Fréour, 2009a]), mais reste limitée. Quelques travaux ont été menés, parallèlement au travail de thèse, sur l'utilisation des modèles MT et EKG pour ces matériaux, avec des résultats prometteurs. La comparaison avec les résultats expérimentaux reste cependant problématique, en raison de la grande disparité des résultats disponibles dans la littérature (voir notamment [Coleman et al., 2006]). La formation d'agglomérats de nanotubes dans le composite explique en partie cette disparité. Là aussi, il peut être intéressant d'utiliser le modèle EKG pour rendre compte de la présence de nanotubes mais aussi d'agglomérats sphériques, au sein du VER.



## **PARTIE II :**

# **MODELISATION DES CONTRAINTES HYGRO-THERMO-MECANIKES LOCALES ET DES CONTRAINTES RESIDUELLES DE FABRICATION**



# 1 INTRODUCTION

## 1.1 Avant-propos

Le formalisme mis en place dans la partie précédente a montré comment il était possible de calculer les propriétés effectives des matériaux composites à l'aide de différents modèles de transition d'échelles : Mori-Tanaka (MT), Eshelby-Kröner (EK) ou Eshelby-Kröner Généralisé (EKG). Une procédure de transition d'échelles en deux étapes a été établie pour rendre compte de la microstructure particulière du Hextool. Ceci a permis d'estimer par le calcul les propriétés effectives d'un composite de type Hextool, avec une assez bonne correspondance par rapport aux résultats expérimentaux (bien qu'il subsiste encore des écarts théorie-expérience non négligeables).

Outre cette application à la prédiction de propriétés effectives, la procédure de transition d'échelles permet de calculer la répartition des états mécaniques entre les constituants. On peut ainsi, connaissant le chargement macroscopique appliqué au composite, calculer les contraintes « locales » (microscopiques et mésoscopiques) subies par les différents constituants. Cette capacité va être mise à profit afin de caractériser le comportement multi-échelles du composite, pour plusieurs sollicitations typiques :

- Un chargement mécanique unidirectionnel,
- Une sollicitation thermique de refroidissement,
- Une sollicitation hygroscopique.

L'influence de certains paramètres, tels que les modèles de transition d'échelles utilisés, la morphologie des bandes renforçantes, ou la répartition de la matrice, sera précisée pour ces sollicitations typiques. Les résultats seront en partie comparés avec une approche à champ complet, en utilisant la méthode des éléments finis (MEF).

En se basant sur les premières conclusions de ces travaux, on s'intéressera au calcul des contraintes résiduelles qui apparaissent dans les constituants, lors de la fabrication d'un composite dont la microstructure est similaire à celle du Hextool. Un cycle simplifié de fabrication à 180 °C sera considéré, avec diverses contraintes appliquées au composite. Ceci permettra de mettre en évidence les états de contraintes subies par les constituants et de qualifier leur importance.

Enfin, ces contraintes résiduelles seront combinées aux sollicitations de service afin de qualifier les états finaux de contraintes dans le composite. On utilisera également le critère de rupture de Tsai-Wu afin de qualifier la tenue de la résine sous ces sollicitations combinées. Ceci permettra notamment d'appréhender les scénarii de dégradation ou de rupture du composite.

## 1.2 Définition des échelles et phénomènes associés

Comme on l'a montré dans la partie précédente, le comportement des matériaux composites est intrinsèquement multi-échelles. Il est donc nécessaire de bien distinguer quels phénomènes interviennent, et à quelles échelles. La série d'articles de Parlevliet et al. [Parlevliet et al., 2006, 2007a, 2007b] donne un bon aperçu de la littérature sur ce sujet. Pour les structures composites stratifiées, qui sont très utilisées dans l'aéronautique notamment, on peut distinguer au moins quatre niveaux (ou échelles) de description :

- L'échelle des constituants (microscopique) :

Les phénomènes entrant en jeu à ce niveau sont essentiellement dus aux hétérogénéités de comportement entre la matrice et la fibre. Notamment, les différences dans les coefficients de dilatation thermique ou de retrait chimique, qui sont importants pour la résine mais quasi nuls pour

la fibre. Le retrait thermo-chimique important de la résine durant la fabrication génère ainsi, dans la direction longitudinale, des contraintes de compression dans la fibre et des contraintes de traction dans la matrice. Ces contraintes microscopiques seront largement développées dans cette partie. L'hétérogénéité du composite à cette échelle apparaît également sur les résistances ultimes, qui sont singulièrement différentes d'un constituant à l'autre : les fibres de carbone ont une très bonne résistance en traction longitudinale (plusieurs GPa), mais résistent mal aux efforts de compression ; au contraire, les résines ont une résistance plus faible (une centaine de MPa au mieux) mais moins marquée par l'anisotropie ou le type de chargement [Tsai, 1987 ; Fiedler et al., 2001 ; Selzer & Friedrich, 1997].

- L'échelle des plis (mésoscopique) :

Les stratifiés sont généralement constitués par empilement de plis unidirectionnels, orientés selon des angles variables ( $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $\pm 45^\circ$ ,  $\pm 55^\circ$ ). Là encore, la compatibilité de déplacements entre des plis d'orientation différente et donc de comportements thermo-élastiques différents (dans le repère du stratifié), génère des contraintes à l'intérieur des plis [Wisnom et al., 2006 ; Kim et Hahn, 1989 ; White et Kim, 1998] mais aussi entre les plis (cisaillement inter-laminaire). Si on prend par exemple un stratifié  $0/90^\circ$  symétrique, le retrait thermique génère des contraintes de compression dans la direction des fibres et de traction dans la direction transverse. Il génère également un cisaillement de la matrice à proximité du contact entre les plis, qui initie fréquemment la rupture par délaminage du stratifié.

- L'échelle du stratifié (pseudo-macroscopique) :

D'autres phénomènes peuvent apparaître, à l'échelle que l'on nommera « pseudo-macroscopique » (dimensions de l'ordre de quelques millimètres). Dans le cas de stratifiés non-symétriques, les contraintes intra-laminaires peuvent ne pas être équilibrées et on assiste alors à une courbure du stratifié dans les plans xz et yz. La théorie des stratifiés est très utilisée pour prédire ces phénomènes, et donne d'assez bons résultats. Durant la cuisson, l'exothermie de la réaction de polymérisation de la résine peut générer des gradients de température et de cuisson dans les pièces présentant une forte épaisseur, avec des températures plus importantes à cœur qu'en surface [Kim et White, 1997 ; Bogetti et Gillespie, 1990, 1992]. De même, la distribution de température du matériau n'est pas homogène durant la phase de refroidissement, en raison de son inertie thermique. Ceci peut conduire à la formation de contraintes résiduelles distribuées à travers l'épaisseur. Enfin, si la pièce présente des zones courbées, l'anisotropie du matériau peut générer une variation de cet angle de courbure, qui peut être très gênant pour les pièces de grandes dimensions.

- L'échelle de la pièce (macroscopique) :

A cette échelle, on considère le matériau comme homogène et les phénomènes qui apparaissent sont essentiellement structuraux et traités de façon analogue aux matériaux classiques. Citons par exemple, dans le cadre de la mise en œuvre des pièces composites, les interactions moule-pièce qui peuvent apparaître avant le démoulage, toujours en raison des différences d'expansion thermo-chimique entre le moule (souvent en acier ou en aluminium) et la pièce composite.

L'ensemble de ces phénomènes aboutit donc à une distribution tridimensionnelle complexe des contraintes à l'intérieur des matériaux composites, et plus particulièrement pour le Hextool. Cependant, du fait qu'ils interviennent à des échelles différentes, il est parfois possible de les découpler. C'est l'approche qui sera utilisée dans cette partie, où l'on s'intéressera uniquement aux phénomènes intervenant aux échelles microscopique et mésoscopique. Les phénomènes pseudo-macroscopiques et macroscopiques ne seront pas abordés ici mais feront l'objet de la partie III.

## 2 CONTRAINTES LOCALES DE SERVICE

### 2.1 Rappel des principaux résultats antérieurs

On s'intéresse, dans un premier temps, aux contraintes locales dans un matériau composite, présentant une microstructure morphologique semblable à celle du Hextool, lorsqu'il est soumis à des sollicitations hygro-thermo-mécaniques macroscopiques. Les lois de comportement macroscopiques et locales seront donc écrites sous la forme suivante :

$$\sigma^k = \mathbf{L}^k : (\boldsymbol{\varepsilon}^k - \boldsymbol{\alpha}^k \Delta T - \boldsymbol{\beta}^k \Delta C^k), \quad k = \{i, I\} \quad (\text{II-1})$$

Les propriétés hygro-thermo-mécaniques du composite et de ses constituants sont calculées avec les procédures décrites la partie précédente. Elles seront utilisées afin de calculer les contraintes locales pour chaque type de sollicitation. Les tableaux II-1, II-2 et II-3 suivants, récapitulent les propriétés observées ou calculées aux différentes échelles (microscopique, mésoscopique et macroscopique). Notons que le coefficient d'expansion hygroscopique (CEH) de la résine a été choisi égal à 0,6, soit une valeur standard de la littérature, pour une résine époxy. Les masses volumiques des constituants sont issues de la documentation fournie par Hexcel Composites, et entrent en jeu dans le calcul des facteurs de concentration d'humidité (voir partie I).

**Tableau II-1 : Propriétés hygro-thermo-élastiques des constituants du composite (échelle microscopique)**

	Modules mécaniques						CET		CEH		
	$E_x$ [GPa]	$E_y, E_z$ [GPa]	$G_{xy}, G_{xz}$ [GPa]	$G_{yz}$ [GPa]	$\nu_{xy}, \nu_{xz}$ [s.u.]	$\nu_{yz}$ [s.u.]	$\alpha_x$ [ $10^{-6}/K$ ]	$\alpha_y, \alpha_z$ [ $10^{-6}/K$ ]	$\beta_x$ [s.u.]	$\beta_y, \beta_z$ [s.u.]	$\rho$ [ $kg/m^3$ ]
Matrice M61	3,5	3,5	1,25	1,25	0,400	0,400	41,4	41,4	0,60	0,60	1246
Fibres AS4	207	20,7	27,6	6,9	0,200	0,500	-0,35	11,8	0	0	1790

Rappelons que la procédure de transition d'échelles, mise en place dans la partie précédente, se fait en deux étapes : de l'échelle microscopique vers l'échelle mésoscopique (étape A), puis de l'échelle mésoscopique vers l'échelle macroscopique (étape B). Pour l'étape A, on s'est intéressé aux modèles de Mori-Tanaka (MT) et au modèle de Eshelby-Kröner (EK). Le modèle de Eshelby-Kröner généralisé (EKG) donne des résultats identiques au modèle EK, dans le cas considéré ici. Ajoutons que le modèle MT peut se décliner sous deux formes, selon le constituant choisi comme phase ambiante. Comme on le montrera, ce choix joue sur les propriétés effectives et les états mécaniques locaux, c'est pourquoi on définira les modèles MTres (la résine joue le rôle de phase ambiante, soit l'hypothèse utilisée dans la partie I) et MTfib (la fibre joue le rôle de phase ambiante). Les modules thermo-élastiques les plus impactés par ce choix sont le cisaillement plan  $G_{xy}$ , ainsi que les coefficients d'expansion longitudinaux et transverses. On remarquera, en outre, que les propriétés déterminées par les modèles MTres et MTfib encadrent celles données par le modèle EK.

**Tableau II-2 : Propriétés hygro-thermo-élastiques des bandes renforçantes (échelle mésoscopique)**

	Modules mécaniques						CET		CEH		
	$E_x$ [GPa]	$E_y, E_z$ [GPa]	$G_{xy}, G_{xz}$ [GPa]	$G_{yz}$ [GPa]	$\nu_{xy}, \nu_{xz}$ [s.u.]	$\nu_{yz}$ [s.u.]	$\alpha_x$ [ $10^{-6}/K$ ]	$\alpha_y, \alpha_z$ [ $10^{-6}/K$ ]	$\beta_x$ [s.u.]	$\beta_y, \beta_z$ [s.u.]	$\rho$ [ $kg/m^3$ ]
MTres	117,0	8,6	3,8	2,7	0,282	0,586	0,29	30,7	0,027	0,96	1550
MTfib	117,1	10,5	11,7	3,4	0,267	0,542	0,50	27,0	0,038	0,78	1550
EK	117,0	9,4	7,6	3,0	0,276	0,563	0,38	29,2	0,031	0,89	1550

Pour l'étape B, la partie I détaille les résultats obtenus avec les modèles MT (la résine jouant le rôle de la phase ambiante), EKHM (Eshelby-Kröner avec une formulation mixte direction-dépendante) et EKG. Ici, on se concentrera sur les résultats du modèle EKG, ainsi que sur ceux du modèle MT. Pour ce dernier, on supposera que la matrice extra-renforts joue le rôle de phase ambiante et on utilisera les propriétés des bandes renforçantes obtenues par MTres et par MTfib. Les propriétés obtenues par le modèle EK sont, à nouveau, encadrées par celles des modèles MTfib et MTres. On montrera en outre que le choix du modèle B joue peu sur les propriétés effectives du composite, comme sur les états de contraintes à l'échelle mésoscopique. A partir de ces propriétés effectives, la procédure de transition d'échelles permet de calculer les états de contraintes locaux, et notamment ceux subis par la matrice (aux échelles mésoscopique et microscopique).

**Tableau II-3 : Propriétés hygro-thermo-élastiques du composite (échelle macroscopique)**

	Modules mécaniques						CET		CEH		
	E <sub>1</sub> , E <sub>2</sub> [GPa]	E <sub>3</sub> [GPa]	G <sub>12</sub> [GPa]	G <sub>13</sub> , G <sub>23</sub> [GPa]	ν <sub>12</sub> [s.u.]	ν <sub>13</sub> , ν <sub>23</sub> [s.u.]	α <sub>1</sub> , α <sub>2</sub> [10 <sup>-6</sup> /K]	α <sub>3</sub> [10 <sup>-6</sup> /K]	β <sub>1</sub> , β <sub>2</sub> [s.u.]	β <sub>3</sub> [s.u.]	ρ [kg/m <sup>3</sup> ]
MTres	42,3	11,6	16,1	2,9	0,314	0,354	3,24	48,0	0,106	1,44	1534
MTfib	49,8	13,1	20,5	4,5	0,216	0,369	3,57	41,2	0,110	1,15	1534
EKG	45,0	12,1	17,8	3,9	0,265	0,378	3,32	45,1	0,113	1,31	1534

## 2.2 Critère de rupture de la résine

Comme on s'intéresse également à la tenue du composite, qui est fortement dépendante de celle de la matrice, on caractérise celle-ci par un critère de rupture de type Tsai-Wu, qui prend la forme suivante dans l'espace des contraintes [Tsai, 1987]:

$$\sum_{i,j,k,l} (F_{ijkl} \cdot \sigma_{ij} \cdot \sigma_{kl}) \times R^2 + \sum_{i,j} (F_{ij} \cdot \sigma_{ij}) \times R = 1 \quad (\text{II-2})$$

où la tenue de la matrice est définie par  $R > 1$ . Le terme R est communément appelée « facteur de résistance », et est compris entre un (rupture) et l'infini (contraintes nulles). Pour des raisons pratiques, on utilisera plutôt son inverse  $1/R$ , que l'on dénommera « facteur de rupture ». Les paramètres du critère de rupture, calculées à partir des contraintes ultimes en traction (X), compression (X') et cisaillement (S) d'une résine haute résistance, données dans [Fiedler et al., 2001], sont récapitulés dans le tableau II-4. Toutefois, ces contraintes de rupture n'ont pas été confrontées à celles de la résine M61 (non mesurées), ce choix est donc tout à fait discutable.

**Tableau II-4 : Paramètres du critère de rupture pour la résine**

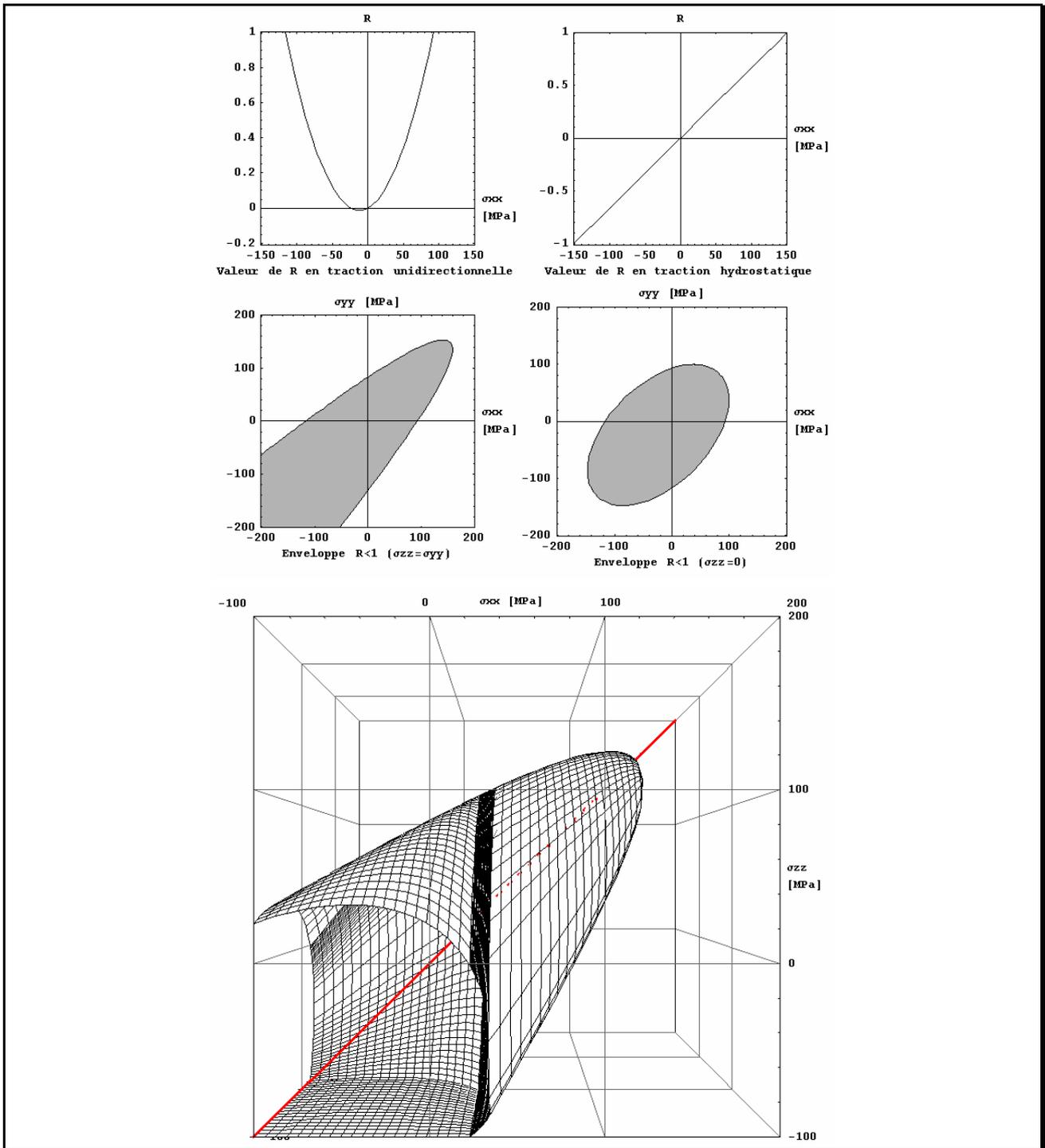
Résistances			Termes F <sub>ijkl</sub> et F <sub>ij</sub>				
X [MPa]	X' [MPa]	S [MPa]	F <sub>1111</sub> [MPa <sup>-2</sup> ]	F <sub>1212</sub> [MPa <sup>-2</sup> ]	F <sub>1122</sub> [MPa <sup>-2</sup> ]	F <sub>11</sub> [MPa <sup>-1</sup> ]	F <sub>12</sub> [MPa <sup>-1</sup> ]
93	117	71	91,9*10 <sup>-6</sup>	99,2*10 <sup>-6</sup>	-46,0*10 <sup>-6</sup>	2,206*10 <sup>-3</sup>	0

L'enveloppe du critère de résistance, dans le plan des contraintes principales, est donnée dans la figure II-1 suivante. Ce critère fait apparaître une dissymétrie traction-compression, en raison de la limite à rupture plus faible en traction qu'en compression. Dans l'espace des contraintes principales, il est représenté par une ellipsoïde orientée selon la trisectrice, et ouverte en compression hydrostatique ( $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$ ). Rappelons que, dans ce même espace, le critère de Von Mises est représenté par un cylindre, et le critère de Drucker-Prager par un cône. Le critère quadratique donné ici est une amélioration de ce dernier, dans la mesure où il évite une singularité en « pointe » lors d'une traction hydrostatique. Cependant tous ces critères sont ouverts en compression isobare, ce qui est contraire au sens physique ; ceci résulte du choix arbitraire  $F_{1122}/F_{1111} = -1/2$ , qui a été opéré

en raison d'un manque de données sur la rupture. Pour obtenir un critère de rupture fermé, il faut choisir un rapport  $F_{1122}/F_{1111}$  compris entre  $-1/2$  et  $0$ . En conséquence, la validité du critère de rupture est sujette à caution lorsque la matrice subit des contraintes de compression, et particulièrement si les trois contraintes principales sont proches.

Le critère de Tsai-Wu a été utilisé ici de manière arbitraire, car il est fréquemment utilisé dans le domaine de matériaux composites. Cependant, il existe un très grand nombre de critères de rupture dans la littérature, citons notamment : les critères basés sur les invariants du tenseur des contraintes (Von Mises et Drucker-Prager), ceux basés sur les contraintes principales (Tresca), ou même le critère de Christensen qui est basé sur l'énergie de déformation volumique [Asp et al, 1996].

**Figure II-1 : Description du critère de rupture quadratique de la résine M61**



Ajoutons que ces critères ne tiennent pas compte de possibles effets d'interface fibre-matrice, dont la résistance est généralement plus faible que celle de la matrice seule. [Jacquemin et Fréour, 2008] ont proposé une approche qu'il serait pertinent d'utiliser ici : il s'agit d'un modèle inverse permettant de calculer les paramètres de rupture de la matrice, à partir d'essais sur un unidirectionnel. L'avantage de cette méthode est qu'elle prend en compte, implicitement, l'influence des interfaces fibres-matrice sur la rupture, ainsi que les effets d'échelle sur la résistance d'une faible épaisseur de résine incluse dans un pli. Ces informations, nécessaire à l'application du modèle inverse, ont malheureusement fait défaut au moment de la rédaction de ce rapport.

## 2.3 Sollicitations mécaniques

On s'intéresse, dans un premier temps, à la réponse multi-échelles du composite lorsqu'il est sollicité mécaniquement à l'échelle macroscopique. Deux sollicitations seront donc considérées ici : une traction uniaxiale dans le plan, et une traction hors-plan. Les contraintes aux différentes échelles sont alors calculées d'après les différents modèles, ce qui permettra également de quantifier les différences entre ces modèles. Ajoutons que ces résultats permettent d'obtenir les contraintes internes pour toute sollicitation mécanique (traction plane équi-biaxiale, cisaillement, pression hydrostatique...), par superposition des états mécaniques.

### 2.3.1 Traction uniaxiale de 100 MPa dans le plan

On s'intéresse tout d'abord au comportement du composite lorsqu'on le soumet à une traction de 100 MPa dans la direction longitudinale. Les contraintes  $\{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}\}$  locales sont alors calculées, en projection dans le repère local (Rxyz) de chaque bande renforçante. Les résultats obtenus par le modèle EKG sont résumés sur la figure II-2. Les résultats obtenus par le modèle EKG, en supposant que les bandes renforçantes ont une morphologie de disque (modèle EKGd), sont également donnés sur la figure II-3. Comme on l'avait postulé dans la partie I, les écarts entre ces deux morphologies sont faibles : ils sont de l'ordre de 3 % pour les contraintes mécaniques.

Commençons par établir les résultats communs aux différents modèles, en se basant sur le modèle EKG. On observe tout d'abord une évolution sinusoïdale  $\pi$ -périodique des contraintes, selon l'orientation  $\Theta$  des bandes. Cette évolution est due au fait que le chargement ne respecte pas l'isotropie plane du composite ; ainsi, chaque bande renforçante « voit » un chargement différent, en fonction de son orientation. L'évolution des contraintes dans les constituants suit celle des contraintes macroscopiques, lesquelles sont extrémales à  $0^\circ$  et  $90^\circ$ , hormis pour le cisaillement qui est déphasé de  $45^\circ$ .

Dans la direction x, on observe une forte concentration de contraintes dans les éléments rigides, et particulièrement lorsque les bandes renforçantes sont alignées avec la direction de sollicitation ( $\Theta = 0^\circ$ ). On a alors une concentration de contraintes de l'ordre de 250 % pour les bandes renforçantes et de 435 % pour les fibres. Pour les bandes orientées à  $90^\circ$ , on a plutôt un état de compression, avec des contraintes atteignant -62 et -115 MPa (respectivement). Au contraire, la matrice reprend peu de contraintes dans cette direction (moins de 10 MPa), qu'elle soit entre les bandes ou à l'intérieur des bandes. Dans la direction y, les contraintes sont plus homogènes et plus modérées : de l'ordre de 20 MPa pour les éléments rigides et de 15 MPa pour la matrice, avec une légère augmentation des contraintes de l'échelle mésoscopique à l'échelle macroscopique. Ces contraintes restent beaucoup plus faibles que les contraintes macroscopiques, en raison de la faible rigidité des constituants dans la direction y. Dans la direction z, les contraintes sont inférieures à 2 MPa, ce qui est normal vu la structure du composite et en l'absence de sollicitation macroscopique. La matrice est mise en traction et les éléments rigides (fibres surtout) en compression. Enfin, pour le cisaillement, on a également des contraintes faibles dans la matrice (moins de 5 MPa) et modérées dans les éléments rigides (21 MPa pour les bandes et 33 MPa pour les fibres). Ces contraintes restent plus faibles que le cisaillement macroscopique.

Figure II-2 : Contraintes multi-échelles dans le composite sous chargement  $\sigma_{11} = 100$  MPa, d'après le modèle EKG

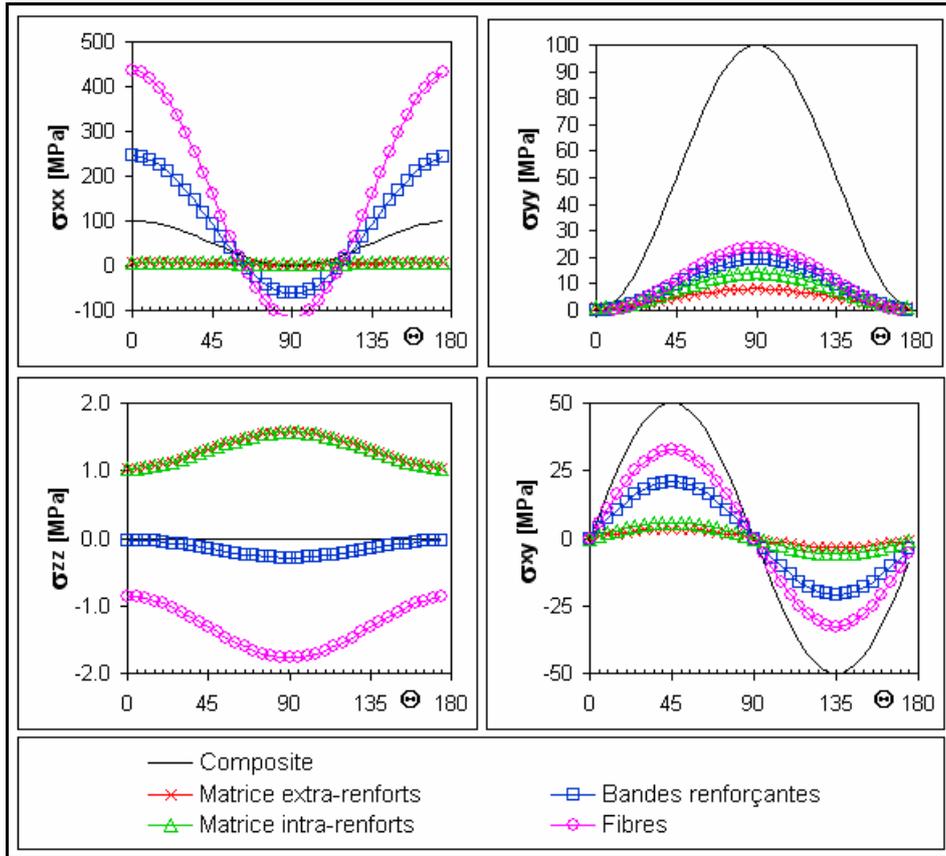


Figure II-3 : Contraintes multi-échelles dans le composite sous chargement  $\sigma_{11} = 100$  MPa, d'après le modèle EKGd

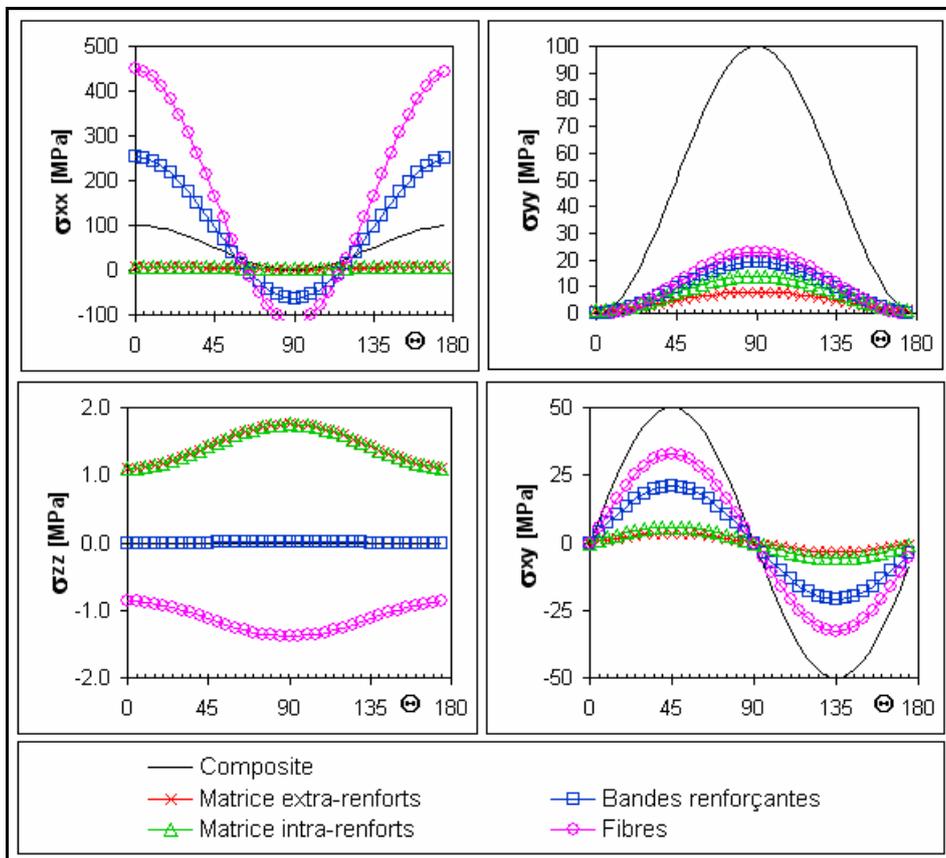


Figure II-4 : Contraintes multi-échelles dans le composite sous chargement  $\sigma_{11} = 100$  MPa, d'après le modèle MTres

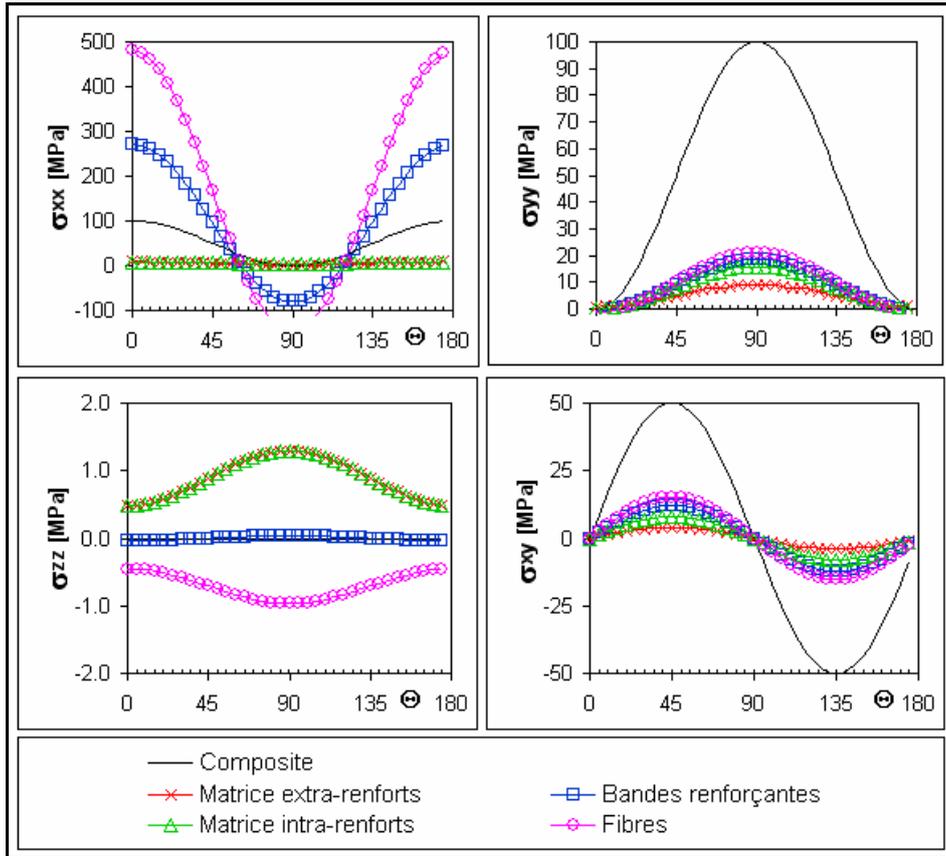
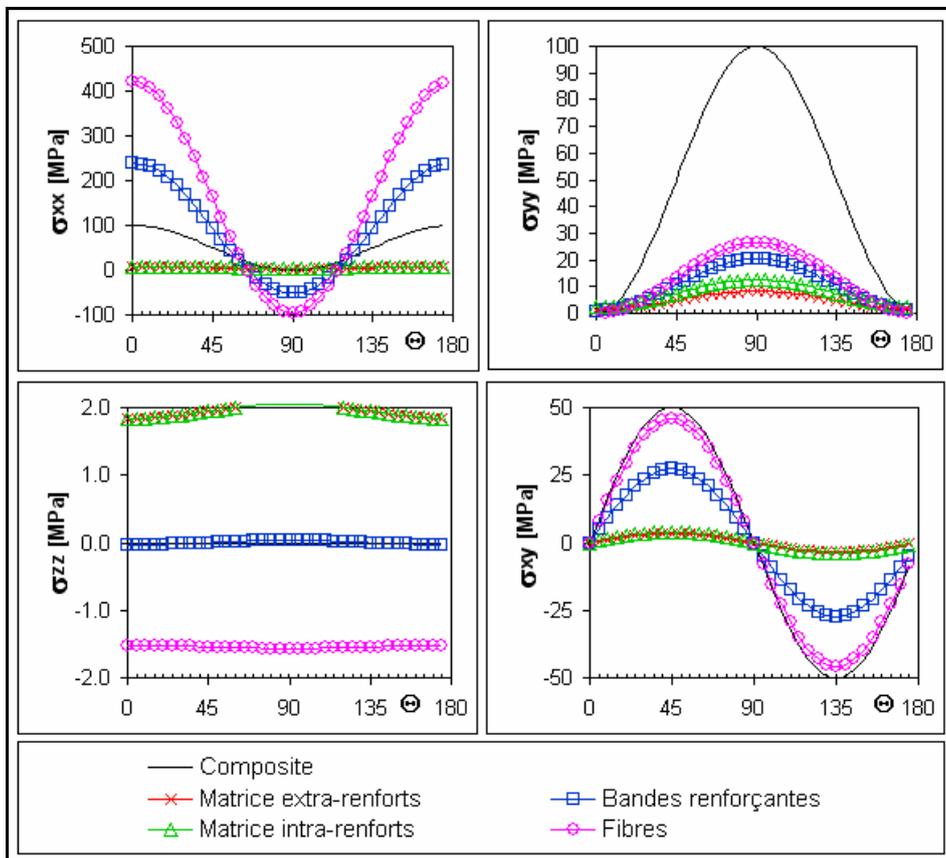


Figure II-5 : Contraintes multi-échelles dans le composite sous chargement  $\sigma_{11} = 100$  MPa, d'après le modèle MTfib



Les figures II-4 et II-5 ci-dessus permettent de comparer les résultats du modèle EKG avec ceux des modèles MTres et MTfib. On observe, en effet, que le choix du modèle influe significativement sur les états de contraintes locaux ; on a en fait un encadrement des résultats du modèle EKG par les modèles MTres et MTfib. Ainsi, le choix du modèle MTres se traduit par des contraintes plus faibles dans la direction y et en cisaillement xy, en raison de la rigidité plus faible du milieu ambiant (à l'échelle microscopique). Ceci est compensé par des contraintes plus importantes dans la direction x. Dans la direction z, le modèle aboutit à des contraintes plus faibles, toujours en raison d'une plus faible rigidité du milieu ambiant. Le choix du modèle MTfib aboutit aux évolutions inverses. Le choix du modèle a donc un impact important sur les états mécaniques locaux. On notera cependant que c'est principalement le modèle A (homogénéisation micro-méso) qui influe sur les résultats. Des tests menés sur l'influence du modèle B (homogénéisation méso-macro), qu'on ne détaillera pas, montrent que ce modèle influe assez peu sur les états mécaniques dans les bandes renforçantes (3,5 % d'écart maximum).

Les résultats de cette étude tendent donc à indiquer que le composite offre une assez bonne tenue lors d'une traction uniaxiale dans le plan du pli. D'après les calculs, le facteur de rupture est maximal pour la matrice intra-renforts et pour une orientation perpendiculaire à la direction de traction. Sa faible valeur (15,3 %) indique que le composite pourrait tenir jusqu'à 650 MPa, ce qui est bien supérieur à la limite à rupture constatée expérimentalement sur le Hextool ( $\sigma^R = 260$  MPa). De même, les contraintes subies par les fibres (à  $\Theta = 0^\circ$ ) au moment de la rupture en traction sont de l'ordre de 1,13 GPa, ce qui est important, mais néanmoins inférieur à la limite à rupture des fibres (4,4 GPa). En outre, on constate expérimentalement que le délaminage des bandes renforçantes est un mécanisme important lors de la rupture du Hextool. Les seules contraintes de service calculées ici ne suffisent donc pas à justifier la limite à rupture du Hextool, ni le mode de rupture.

### 2.3.2 Traction de 100 MPa hors-plan

Lors de son utilisation, le Hextool subit principalement des sollicitations mécaniques dans le plan du pli (en plus des sollicitations thermiques), de la part de la pièce moulée, par exemple. Comme pour la plupart des stratifiés composites, on ne s'attend pas à ce qu'il subisse des sollicitations mécaniques hors-plan. Tout au plus, il peut subir de faibles pressions de compactage durant la fabrication (inférieures à 10 bars soit 1 MPa). Il est néanmoins intéressant de qualifier son comportement multi-échelles en sollicitation mécanique hors-plan. Considérons donc pour cela, une traction de 100 MPa dans la direction normale au pli, en gardant en tête que cette valeur est très irréaliste. Cette sollicitation respecte la symétrie du matériau autour de l'axe z, les contraintes locales sont donc indépendantes de l'orientation des bandes et le cisaillement est nul. Ces contraintes sont résumées dans le tableau II-5 ci-dessous.

Les différents modèles donnent des contraintes très similaires à l'échelle mésoscopique, mais on observe des différences non négligeables à l'échelle microscopique (de l'ordre de 10 %). Comme pour le chargement dans le plan, les résultats donnés par les modèles MTres et MTfib encadrent ceux donnés par le modèle EKG. Les résultats du modèle EKG sont également donnés, ce qui démontre à nouveau la faible influence de la morphologie des bandes renforçantes sur les contraintes locales (4 % d'écart maximum).

Les contraintes dans la direction z sont relativement homogènes à l'échelle mésoscopique, mais pas à l'échelle microscopique : les contraintes sont de -130 MPa dans les fibres (pour le modèle EKG), et de 47 MPa pour la matrice intra-renforts. Dans la direction y, on observe des contraintes non-négligeables (de l'ordre de 50 MPa), et relativement homogènes. Seule la matrice extra-renforts semble sollicitée de manière plus importante, avec des contraintes supérieures à 60 MPa. Enfin,

dans la direction x, on a une forte variation des contraintes d'un constituant à l'autre. Les éléments rigides reprennent des contraintes de compression importantes, particulièrement les fibres, ce qui est susceptible de générer du micro-flambement. Au contraire, la matrice reprend plutôt des contraintes de traction, par ailleurs comparables aux contraintes dans la direction normale. Ceci est dû à l'isotropie de la matrice, par opposition aux éléments rigides qui sont très anisotropes.

**Tableau II-5 : Contraintes multi-échelles dans le composite sous chargement hors-plan  $\sigma_{33} = 100$  MPa**

Echelle	Constituants	Modèle	Contraintes [MPa]			Rupture
			$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$\sigma_{zz}$	1/R
Macro	Composite	Tous	0	0	100	X
Méso	Bandes renforçantes	<b>EKG</b>	<b>-51,9</b>	<b>47,1</b>	<b>100,2</b>	X
		EKGd	-54,0	47,4	100,0	X
		MTres	-56,9	50,5	100,1	X
		MTfib	-52,1	45,7	100,1	X
	Matrice extra-renforts	<b>EKG</b>	<b>61,7</b>	<b>61,5</b>	<b>99,8</b>	<b>68,7 %</b>
		EKGd	61,9	61,9	100,0	68,7 %
		MTres	60,6	60,6	98,9	68,3 %
		MTfib	61,0	61,0	98,8	68,0 %
Micro	Fibres	<b>EKG</b>	<b>-130,6</b>	<b>48,2</b>	<b>116,3</b>	X
		EKGd	-134,3	48,6	116,1	X
		MTres	-143,8	50,4	108,7	X
		MTfib	-125,6	49,9	125,3	X
	Matrice intra-renforts	<b>EKG</b>	<b>47,5</b>	<b>45,7</b>	<b>79,8</b>	<b>56,3 %</b>
		EKGd	47,4	45,9	79,7	56,1 %
		MTres	52,9	50,6	89,1	62,9 %
		MTfib	40,7	40,3	68,2	47,7 %

Contrairement au chargement dans le plan, le chargement hors-plan génère des contraintes importantes dans tous les éléments et dans toutes les directions. La matrice extra-renforts est particulièrement sollicitée, comme en atteste la valeur du facteur de rupture (~69 %). Les éléments rigides subissent également des états mécaniques significatifs, mais c'est plutôt le risque de micro-flambement qui est important. Les calculs suggèrent que la rupture surviendrait dans la matrice extra-renforts, pour une contrainte macroscopique de 150 MPa environ.

## 2.4 Sollicitation thermique

Afin de qualifier le comportement thermomécanique multi-échelles du composite, on s'est intéressé aux effets d'une variation de température de -100 °C. Ce mode de sollicitation est typique du refroidissement subit par le composite durant le processus de fabrication, mais également pendant son utilisation ; il est connu pour générer des contraintes résiduelles sévères [Parlevliet, 2006, 2007b ; Guemes, 1994 ; Ogi et al., 1999].

La sollicitation macroscopique respecte la symétrie autour de la direction normale, on n'a donc pas d'influence de l'orientation  $\Theta$  sur les états locaux, ni de cisaillement. Les contraintes multi-échelles calculées d'après les différents modèles, ainsi que les valeurs du facteur de rupture pour la matrice, sont résumées dans le tableau II-6 ci-dessous. Contrairement aux chargements étudiés plus haut, le

choix du modèle influe assez peu sur les contraintes locales, hormis peut-être à l'échelle microscopique, dans les directions transverses aux fibres. En outre, la morphologie des bandes renforçantes ne semble pas jouer de rôle prépondérant.

**Tableau II-6 : Contraintes multi-échelles dans le composite sous sollicitation thermique  $\Delta T = -100\text{ }^{\circ}\text{C}$**

Echelle	Constituants	Modèle	Contraintes [MPa]			Rupture
			$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$\sigma_{zz}$	1/R
Macro	Composite	Tous	0	0	0	X
Méso	Bandes renforçantes	<b>EKG</b>	<b>-26,0</b>	<b>23,6</b>	<b>0,0</b>	X
		EKGD	-26,3	23,9	0,0	X
		MTres	-25,2	22,8	0,0	X
		MTfib	-26,0	23,6	-0,1	X
	Matrice extra-renforts	<b>EKG</b>	<b>22,5</b>	<b>22,4</b>	<b>0,3</b>	<b>26,8 %</b>
		EKGD	22,3	22,3	0,0	26,8 %
		MTres	22,8	22,8	0,9	26,8 %
		MTfib	22,8	22,8	1,0	26,6 %
Micro	Fibres	<b>EKG</b>	<b>-70,9</b>	<b>19,1</b>	<b>-11,2</b>	X
		EKGD	-71,5	19,5	-11,2	X
		MTres	-66,0	21,0	-5,9	X
		MTfib	-75,5	14,7	-18,1	X
	Matrice intra-renforts	<b>EKG</b>	<b>30,7</b>	<b>29,2</b>	<b>14,0</b>	<b>25,5 %</b>
		EKGD	30,8	29,5	14,1	25,7 %
		MTres	26,4	25,0	7,3	25,3 %
		MTfib	36,4	34,9	22,7	26,6 %

Concrètement, le refroidissement se traduit par une mise en traction de la matrice et une mise en compression des éléments rigides dans la direction x. C'est ainsi que les fibres reprennent environ -70 MPa, et la matrice une trentaine de MPa. La matrice est sollicitée assez modérément, puisque le facteur de rupture reste de l'ordre de 27 %, ce qui indique que le composite résisterait à des variations de température supérieures à 370 °C (en supposant un comportement indépendant de la température). Cette valeur semble assez irréaliste, mais elle explique cependant, en première approximation, la grande durée de vie du Hextool sous sollicitations thermiques.

## 2.5 Sollicitation hygroscopique

L'exposition à l'humidité de l'air ambiant est une autre sollicitation fréquemment appliquée aux composites. La pénétration d'humidité entraîne un gonflement du matériau à l'échelle macroscopique et peut générer des contraintes très importantes dans les constituants, notamment la résine [Fréour et al., 2006]. Le phénomène est décrit avec des équations analogues à la thermo-élasticité, à quelques différences près.

Tout d'abord, il faut garder en tête que, contrairement aux températures, les teneurs en eau varient de façon importante d'un constituant à l'autre ; la matrice reprend généralement beaucoup plus d'eau que les fibres, notamment les fibres de carbone (quasi-imperméables). Ceci doit être pris en compte dans les équations en introduisant des facteurs de concentration d'humidité (voir partie I). Pour le composite étudié, le facteur de concentration en eau dans la résine vaut 300 %.

D'autre part, les constantes de temps sont radicalement différentes : il existe plusieurs ordres de grandeur de différence en celles de la diffusion d'humidité et celle du transfert thermique. Ces phénomènes transitoires sont générateurs de contraintes macroscopiques importantes dans les pièces composites, épaisses notamment [Jacquemin et al., 2005]. De plus, d'importants couplages hygromécaniques peuvent se produire lors de la diffusion d'humidité. En effet, la dilatation de la résine (la trace du tenseur des déformations) influe sur le coefficient de diffusion ainsi que sur la capacité maximale d'absorption de la matrice [Patel et al., 2002 ; Youssef et al., 2009b]. D'autre part, la teneur en eau peut modifier le comportement mécanique de la résine constituant les plis composites [Patel et al., 2002]. Ces deux phénomènes de couplage génèrent des gradients de propriétés hygro-mécaniques au cours du processus de diffusion, ce qui, par la suite, affecte la distribution des états mécaniques multi-échelles. Ces couplages hygro-mécaniques ont notamment été traités dans [Youssef et al., 2009a, 2009b].

La diffusion de l'eau dans la résine BMI (M61) et dans le composite a été étudiée dans la thèse de Katarzyna Szymanska, au Laboratoire de Tribologie et de Dynamique des Systèmes (LTDS, UMR CNRS 5513), dans le cadre du projet LCM-Smart. Des éprouvettes de dimensions 75×10×4 mm ont été soumises à différentes conditions hygrothermiques, et la teneur en eau a été mesurée jusqu'à la saturation. A titre d'exemple, les figures II-6 et II-7 ci-dessous donnent les courbes de reprise en eau du Hextool et de la résine BMI, dans l'air humide (85 %HR + agent NaCl) et en immersion dans l'eau liquide (« 100 %HR »), à température ambiante. Notons que cette dernière condition est assez irréaliste, dans la mesure où le composite étudié n'est jamais utilisé en immersion. En outre, dans ce dernier cas, on remarque une influence de l'état de surface sur la pénétration d'humidité : si la surface de l'échantillon est polie, on obtient un effet miroir qui protège le matériau contre la pénétration d'humidité. Au contraire, si les éprouvettes ne sont pas polies, on aboutit à une dégradation rapide du matériau, avec des arrachements de fibres et des pertes de masse importantes par lessivage.

Figure II-6 : Courbe de reprise en eau du Hextool sous atmosphère humide (85 %HR) [LTDS/ECL coms, 2010b]

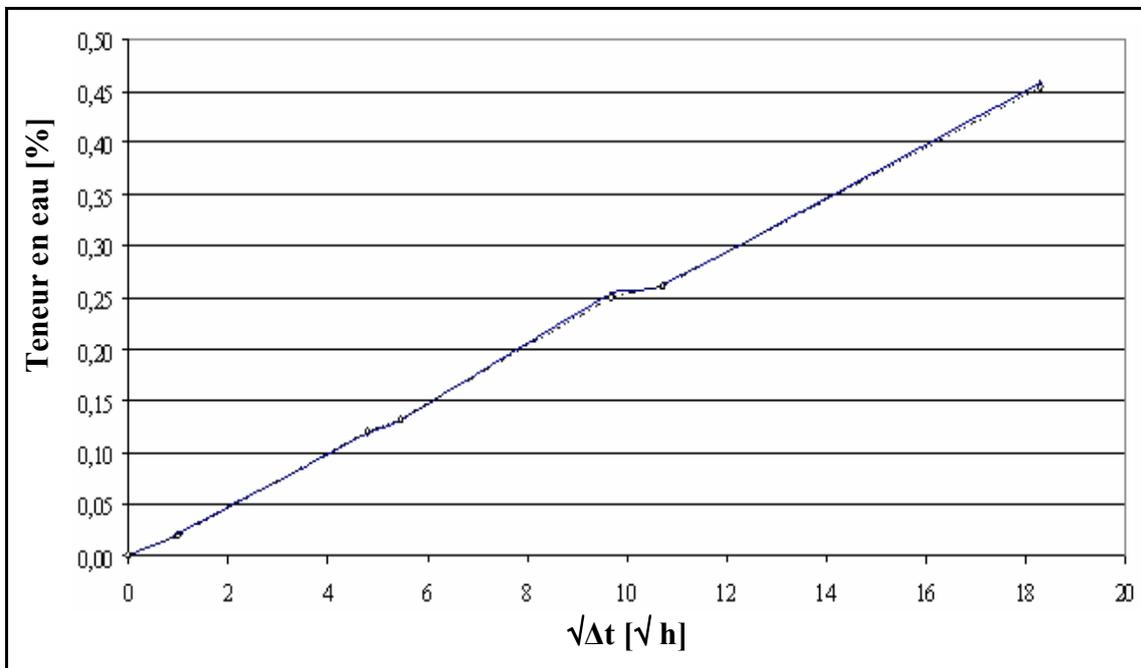


Figure II-7 : Courbes de reprise en eau du Hextool en immersion (« 100 %HR ») [LTDS/ECL coms, 2010b]

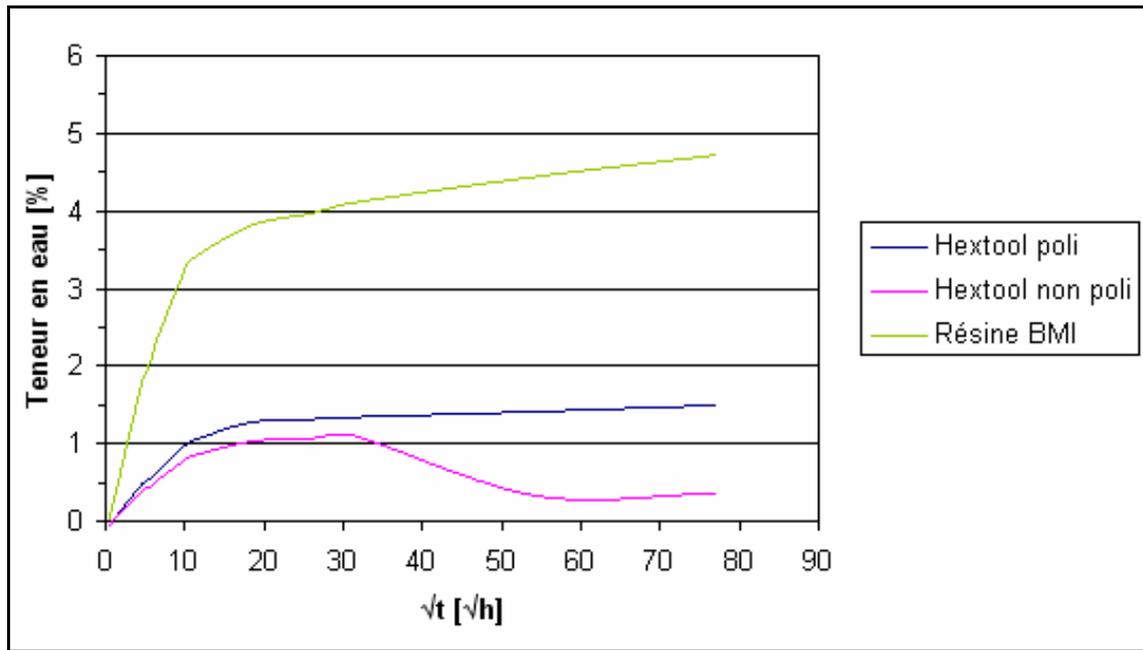
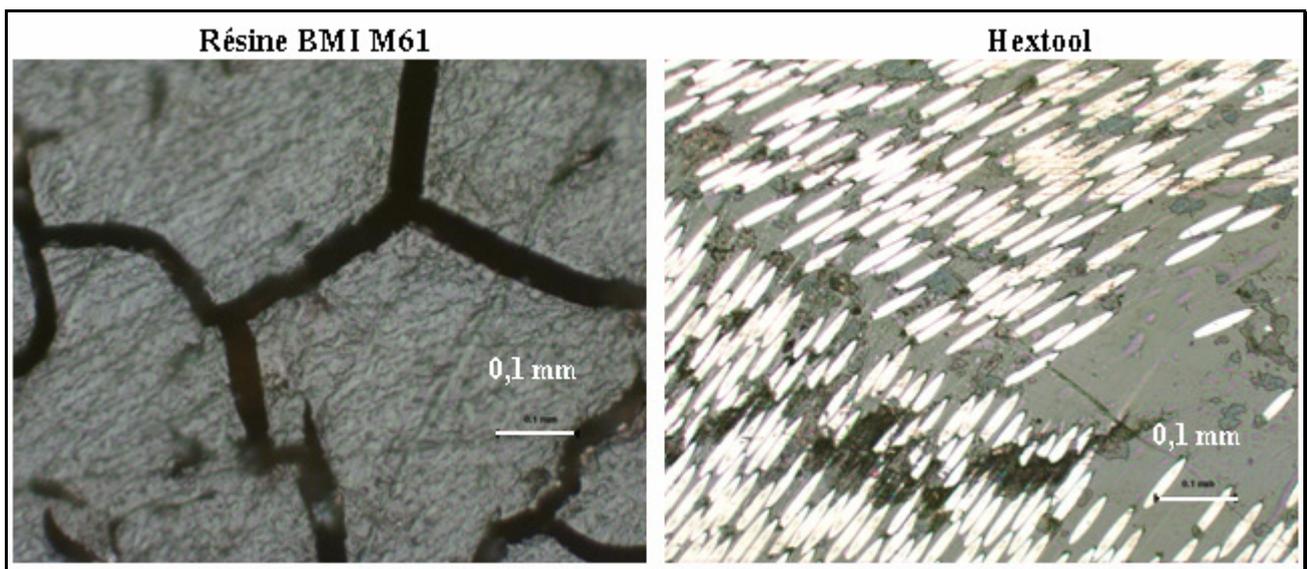


Figure II-8 : Fissures dans la résine et le Hextool après vieillissement hygro-thermique [LTDS/ECL coms, 2010b]



Afin de qualifier les contraintes locales dans les constituants sous sollicitation hygroscopique, on a soumis le composite à un chargement hygroscopique typique : on impose au composite une teneur en eau, uniforme, de 1 %. Compte tenu des facteurs de concentration en eau, cela correspond à une teneur en eau de 3 % dans la résine. Les essais menés par le LTDS/ECL montrent que de telles teneurs en eau sont obtenues après quelques jours en immersion dans l'eau, ou à saturation (plusieurs mois) dans l'air humide. Notons que d'après la documentation Hexcel [Hexcel M61DS, 2008], la teneur à saturation de la résine M61 est de 3,8 %.

Les contraintes multi-échelles calculées pour une teneur en eau de 1 % dans le composite, sont résumées dans le tableau II-7 ci-dessous.

**Tableau II-7 : Contraintes multi-échelles dans le composite sous chargement hygroscopique ( $\Delta C = 1 \%$ )**

Echelle	Constituants	Modèle	Contraintes [MPa]			Rupture
			$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$\sigma_{zz}$	1/R
Macro	Composite	Tous	0	0	0	X
Méso	Bandes renforçantes	<b>EKG</b>	<b>74,3</b>	<b>-65,1</b>	<b>0,1</b>	X
		EKGD	75,0	-66,0	0,0	X
		MTres	75,6	-66,3	0,2	X
		MTfib	72,0	-62,7	0,2	X
	Matrice extra-renforts	<b>EKG</b>	<b>-86,3</b>	<b>-86,2</b>	<b>-1,5</b>	<b>64,3 %</b>
		EKGD	-85,3	-85,3	0,0	65,2 %
		MTres	-87,8	-87,8	-4,1	62,8 %
		MTfib	-87,9	-87,9	-4,7	62,3 %
Micro	Fibres	<b>EKG</b>	<b>226,4</b>	<b>-34,4</b>	<b>49,3</b>	X
		EKGD	227,8	-35,5	49,2	X
		MTres	212,6	-52,9	25,5	X
		MTfib	244,8	-5,5	81,8	X
	Matrice intra-renforts	<b>EKG</b>	<b>-117,6</b>	<b>-103,9</b>	<b>-62,0</b>	<b>26,1 %</b>
		EKGD	-117,9	-104,6	-62,2	<b>26,2 %</b>
		MTres	-97,3	-83,3	-31,7	38,6 %
		MTfib	-146,2	-135,0	-102,7	14,2 %

Comme pour la sollicitation thermique, la reprise en eau sollicite fortement tous les constituants. Cependant, elle se traduit par des contraintes de signe opposé, dans la mesure où la prise de masse génère une dilatation du composite, et non un retrait. On a ainsi apparition de contraintes fortement négatives dans la résine, tandis qu'elles sont positives dans les éléments rigides (du moins, dans la direction x). Les contraintes sont plus importantes à l'échelle microscopique, mais relativement comparables dans les trois directions. En outre, les sollicitations de compression sont plutôt favorables à la tenue de la matrice. Cela se traduit par un facteur de rupture assez faible, bien que très dépendant du modèle, pour la matrice intra-renforts. En revanche, les contraintes mésoscopiques dans la matrice induisent un facteur de rupture important, de l'ordre de 65 %. On peut dès lors estimer que la rupture se produirait entre les bandes renforçantes et pour une teneur en eau d'environ 1,55 %. Cette prédiction n'a malheureusement pas pu être corroborée par l'observation, car des pertes de masse par lessivage se produisent sur les éprouvettes de Hextool non polies dès 1,1 % de reprise en eau.

Cette étude montre la forte sensibilité du composite à l'humidité ambiante. Les fortes dilatations hygroscopiques semblent générer des contraintes importantes dans la matrice BMI, qui pourraient amener une dégradation rapide du matériau. A ces phénomènes mécaniques peuvent s'ajouter des phénomènes physico-chimiques tels que le lessivage (en immersion surtout), ainsi que l'apparition de vides et de fissures dans la matrice, ce qui facilite la pénétration d'humidité. Enfin, une autre conséquence connue de la présence d'humidité dans la matrice est une diminution de sa température de transition vitreuse, qui peut dans certains cas atteindre 30 °C par pourcent de teneur en eau dans la matrice ; ce qui entraîne également une diminution de sa rigidité et de sa limite élastique [Patel et al., 2001].

## 2.6 Conclusion et perspectives

La procédure de transition d'échelles établie dans la partie précédente a été appliquée au calcul des contraintes mésoscopiques et microscopiques, lorsque le composite est soumis à divers chargements hygro-thermo-mécaniques. Ceci a permis de qualifier les sollicitations pouvant s'avérer critiques pour la santé matière, et de donner des indications sur les limites et les scénarii de dégradation du matériau, en considérant un matériau initialement vierge (sans contraintes de fabrication). La modélisation donne également une information assez rassurante sur la tenue du matériau lorsqu'il est soumis à des sollicitations thermiques : elle montre que les contraintes locales subies par les constituants restent assez modérées, si bien que le matériau peut subir un grand nombre de cycles thermiques avant de se dégrader.

Pour toutes les sollicitations testées, on a pu observer une influence du modèle de transition d'échelles utilisé sur les contraintes locales, et donc à l'échelle microscopique. Cette influence reste toutefois assez limitée, à l'exception des sollicitations hygroscopiques. Cette dernière montre également qu'un effort devrait être fait sur la caractérisation de la tenue de la résine : le critère de rupture choisi est mal adapté lorsque la résine subit des contraintes de compression hydrostatique.

Par ailleurs, on se doit de rester critique sur les contraintes locales prédites par cette approche de transition d'échelles. En effet, les informations données par celle-ci sont essentiellement de nature statistique (approche à champ moyen). Elles sont pertinentes en ce qui concerne les propriétés effectives, à condition de se placer à une échelle suffisamment grande pour pouvoir considérer le composite comme statistiquement homogène. En revanche, les états locaux sont fortement influencés par le caractère aléatoire de la microstructure.

Ceci est particulièrement vrai pour les contraintes mésoscopiques, au vu de la forte irrégularité du composite à cette échelle. Si on s'intéresse à la matrice extra-renfort, par exemple, les contraintes prédites ne tiennent pas compte du cisaillement induit entre deux bandes renforçantes d'orientations différentes. Or ce cisaillement « inter-laminaire » est le mécanisme de rupture dominant pour le Hextool (en traction plane notamment). Les calculs permettent cependant de relativiser ce cisaillement, dans la mesure où les déformations sont relativement homogènes à cette échelle (en projection dans le repère global). De même, à l'échelle microscopique, les contraintes locales (et même les propriétés locales) sont fortement influencées par la liaison fibre-matrice ; là encore, la rupture des bandes renforçantes est dominée par le cisaillement subit par la matrice à proximité des fibres. Cet effet reste à évaluer.

Ceci montre la nécessité d'une autre approche du problème ; les approches analytiques dites « à champ complet », utilisant la méthode des éléments finis (MEF), sont très souvent utilisées dans ce but. Cette approche est très lourde, en implémentation, en temps de calcul et en exploitation des résultats. Cependant, elle fournit des solutions de référence pour les propriétés et les états mécaniques locaux ; elle est donc complémentaire de l'approche adoptée ici.

### **3 COMPARAISON AVEC L'APPROCHE A CHAMP COMPLET PERIODIQUE**

#### **3.1 Avant-propos**

Nous venons de décrire et mettre en application plusieurs modèles de transition d'échelles liés à l'approche à champ moyen. Cette approche s'avère assez efficace pour ce qui est de la prédiction des propriétés effectives, et fournit également une estimation des champs mécaniques moyens à l'échelle locale. Cependant, l'information délivrée par cette approche reste limitée, si on s'intéresse au détail de ces champs locaux. En particulier, dans le cas des composites de type matrice-renfort fibreux, le comportement en rupture et en fatigue est dominé par le niveau des contraintes dans la matrice à proximité de la fibre (interface fibre-matrice). Les effets de taille pouvant apparaître à cette échelle ne sont pas représentés, pas plus que les interactions entre fibres. Les travaux d'Eshelby et leurs prolongations, ont permis de déterminer le champ extérieur à une inclusion, du moment que celle-ci soit noyée dans un milieu homogène. Cependant, les champs mécaniques dans la matrice sont calculés en considérant celle-ci comme une inclusion et non comme une phase continue. En outre, si plusieurs inclusions (fibres) sont présentes dans le milieu et qu'elles sont suffisamment proches pour que leur interaction devienne non négligeable, le champ extérieur ne peut plus être déterminé analytiquement (de manière générale) : il s'agit d'un problème « à plusieurs corps », un type de problèmes rencontré dans une multitude d'applications de la physique, et connu pour son insolubilité au-delà de deux corps. Dans ces conditions, lorsqu'il est nécessaire de connaître la totalité du champ mécanique à l'échelle microscopique, l'information délivrée par l'approche à champ moyen montre ses limites. La difficulté de l'analyse à champ complet provient donc essentiellement de la complexité géométrique à l'échelle locale. Cette complexité peut cependant être correctement traitée à l'aide de la méthode des éléments finis.

On doit tout d'abord distinguer les matériaux en fonction de leur microstructure. Certains matériaux, tels que les polycristaux ou les mousses, ont une microstructure très irrégulière ; l'approche utilisée repose alors sur le concept de volume élémentaire représentatif (VER). Ce volume, déterminé expérimentalement (par microtomographie par exemple) ou généré aléatoirement (voir [Chen et Papathanasiou, 2004], par exemple), est ensuite maillé et analysé par éléments finis afin de calculer les propriétés effectives et les contraintes locales dans le matériau. Afin d'obtenir des résultats statistiquement viables, il est nécessaire de définir et d'analyser un VER de grande taille ; cette approche se heurte donc rapidement aux limitations des moyens numériques, en terme de puissance CPU et de capacité mémoire. Ces problèmes de mémoire peuvent être contournés, en considérant plusieurs VERs de taille plus faible et en moyennant les résultats. Il reste que cette approche est très coûteuse en implémentation et en temps de calcul, c'est pourquoi on l'utilise surtout sur des microstructures très irrégulières. La structure du Hextool à l'échelle mésoscopique serait un bon exemple d'application de cette approche.

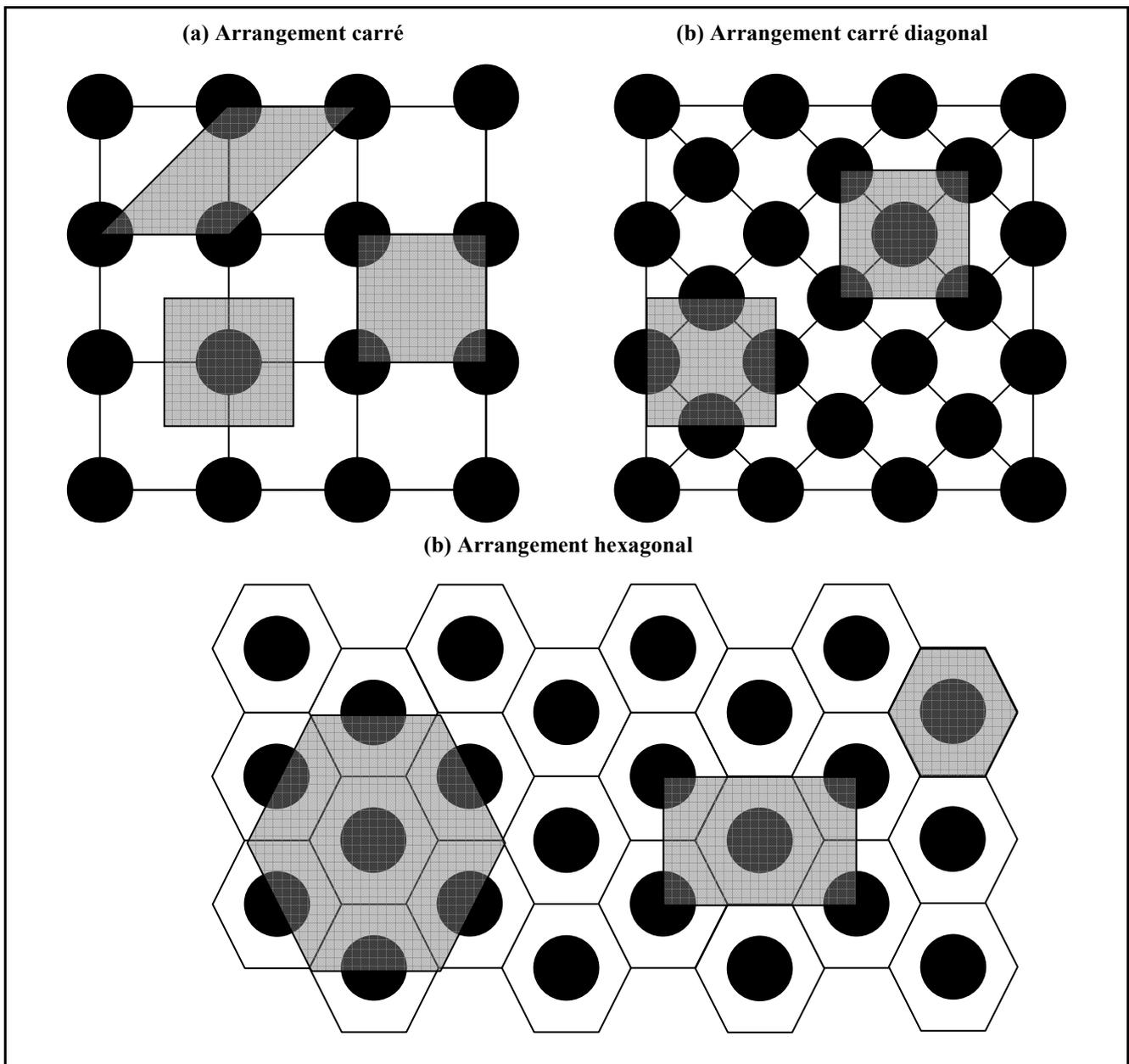
Pour les microstructures plus régulières, comme par exemple les plis composites unidirectionnels ou les tissés, on cherchera plutôt à assimiler la microstructure à un réseau périodique. Cette deuxième approche, dite périodique, se base sur le concept de la cellule élémentaire répétée (CER), ou cellule périodique. Une cellule périodique permet de décrire aisément l'ensemble du réseau, et simplifie considérablement l'implémentation et l'analyse. Les réseaux périodiques se prêtent bien aux calculs numériques, par éléments finis notamment, si les conditions aux limites sont correctement posées. La méthode dite « d'homogénéisation périodique », est décrite notamment dans [Suquet, 1987]. On s'attachera ici à appliquer cette méthode au calcul des propriétés effectives des bandes renforçantes UD, et au calcul des champs de contrainte complets à l'échelle microscopique, sous différents chargements typiques.

## 3.2 Revue bibliographique

### 3.2.1 Notion de réseau périodique

Un réseau périodique est défini par une cellule de base qui se répète indéfiniment par translation le long de trois vecteurs dits « de périodicité ». Pour les plis composites unidirectionnels, on peut distinguer trois réseaux périodiques différents [Asp et al., 1996] : carré, carré diagonal et hexagonal (Figure II-9), les deux premiers étant équivalents par rotation de  $45^\circ$  dans le plan. On fait généralement l'hypothèse d'une longueur infinie des fibres, ce qui permet de se ramener à un problème bidimensionnel et non tridimensionnel. Notons que le réseau hexagonal est plus compact que les deux autres réseaux : il permet d'atteindre un taux de fibres de 91 %, contre 79 % pour les réseaux carrés.

Figure II-9 : Différents réseaux périodiques possibles pour un pli unidirectionnel



Comme le montre la Figure II-9, le choix de la cellule de base n'est pas unique; il est même possible de proposer une infinité de variations autour de ces cellules unitaires répétées (CUR), en effectuant des translations ou des rotations dans le plan  $yz$ . Pour l'arrangement hexagonal, la forme la plus logique pour la cellule de base est un hexagone, mais on peut également proposer des

cellules de forme parallélépipédique, en losange, ou rectangulaire. L'avantage de cette dernière forme est qu'elle facilite l'application de conditions aux limites homogènes (voir sous-section suivante). Xia et al. (2006) ont montré que, pour un réseau périodique donné, le choix de la cellule périodique n'influençait pas les résultats, à condition de prescrire les conditions limites périodiques adéquates (voir sous-section 3.2.3).

La périodicité du réseau implique une périodicité des champs mécaniques d'un bord à l'autre de la cellule périodique. On peut ainsi écrire les déplacements dans la cellule sous la forme suivante, où  $\boldsymbol{\varepsilon}^I$  est la déformation macroscopique homogène,  $\mathbf{x}$  est le vecteur des coordonnées, et  $\mathbf{u}'$  est un déplacement périodique :

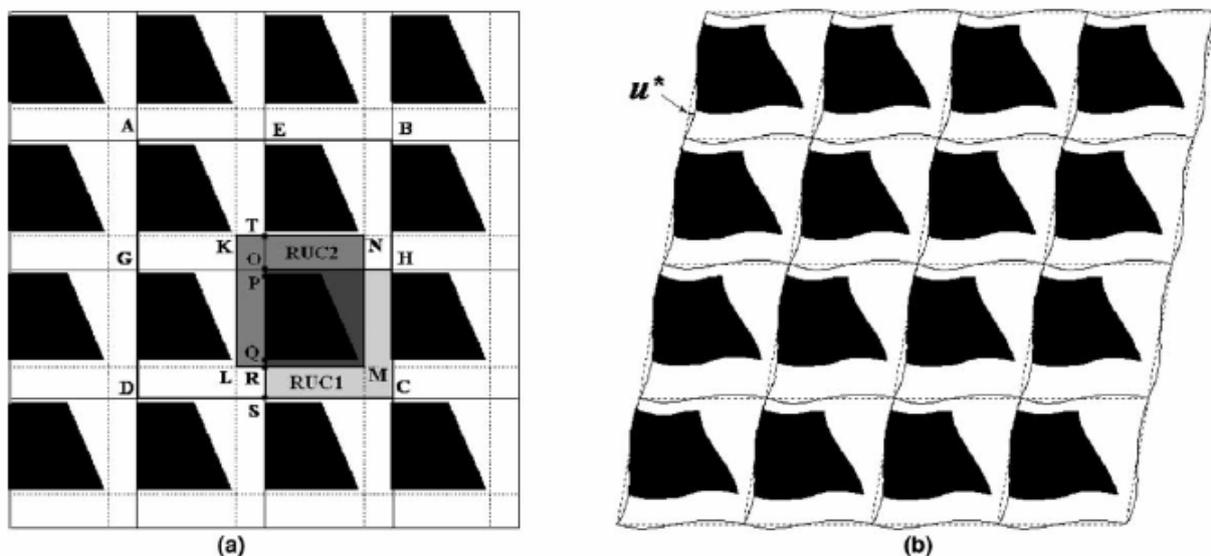
$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}^I \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}' \quad (\text{II-3})$$

En outre, on montre que les composantes périodiques des champs mécaniques sont de moyenne nulle sur les bords et à l'intérieur de la cellule, en vertu des conditions de périodicité. Les champs mécaniques fluctuent donc autour d'une valeur moyenne qui correspond à l'état mécanique à l'échelle macroscopique. En conséquence, les propriétés effectives de la cellule (qui relie les moyennes des états mécaniques), correspondent aux propriétés du VER à l'échelle macroscopique.

### 3.2.2 Influence des conditions aux limites

La difficulté du calcul des propriétés effectives, vient du fait que les contraintes et déplacements qui paraissent homogènes à l'échelle macroscopique, sont en réalité hétérogènes sur les bords de la cellule (à l'échelle locale). Dans certains cas, les conditions de compatibilité des déplacements entre cellules voisines permettent de déterminer directement ces conditions aux limites périodiques (Periodic Boundary Conditions, PBC), et on peut alors calculer facilement les propriétés effectives du pli composite. Ainsi, lorsque le pli ne subit pas de sollicitations de cisaillement et que la cellule est symétrique par rapport aux directions de sollicitation, il est courant de supposer que les faces planes de la cellule restent planes après déformations (*plane-remains-plane*). Cette hypothèse n'est cependant pas applicable aux sollicitations de cisaillement (voir figure 2), où elle aboutit à des conditions aux limites sur-contraintes [Xia et al., 2006].

**Figure II-10 : Aspect initial (a) et déformé (b) d'un réseau périodique sous sollicitation de cisaillement plan ; les traits pleins représentent la déformation réelle des arêtes, et les traits pointillés représentent la déformation supposée par l'hypothèse plane-remains-plane [Xia et al., 2006]**



Une méthode pour résoudre ce problème des conditions aux limites périodiques est présentée dans [Débordes et al., 1985]. Elle consiste à résoudre le problème aux éléments finis sur la cellule, mais

en utilisant six degrés de libertés (DDL) par nœuds : 3 DDL « macroscopiques » et 3 DDL « périodiques » supplémentaires, qui peuvent pris en compte par une méthode d'élimination. Une autre méthode numérique, utilisant directement des images de la microstructure sans recourir à un maillage du VER a également été proposée par Moulinec et Suquet (voir par exemple [Moulinec et Suquet, 1998]). Elle utilise notamment la Transformée de Fourier Rapide, et une partie du formalisme des méthodes à champ moyen (opérateur de Green notamment), pour résoudre numériquement le problème. Ces deux méthodes, bien que rigoureuses et efficaces, nécessitent cependant des implémentations spécifiques qui n'ont pu être mises en œuvre au cours de cette thèse.

Ainsi, de façon générale, il est difficile de déterminer et d'appliquer à la cellule des conditions aux limites appropriées. C'est pourquoi on aura plutôt tendance à appliquer des sollicitations homogènes sur les bords (Homogeneous Boundary Conditions). Ces conditions peuvent être définies en contrainte (Static Uniform Boundary Conditions, SUBC), ou en déformation (Kinematic Uniform Boundary Conditions, KUBC). Cependant, de manière générale, ces deux hypothèses sont fausses, et aboutissent (respectivement) à une sous-estimation ou à une sur-estimation de la rigidité [Suquet, 1987 ; Chaboche et al., 1998], de façon analogue aux modèles de Reuss et Voigt. La clé de ce dilemme est d'utiliser le principe de St-Venant, qui stipule que les champs mécaniques locaux sont indépendants du détail des conditions aux limites, à condition de se placer *suffisamment loin* des bords du domaine. Plus clairement, si le VER est de taille suffisamment importante par rapport aux dimensions de la cellule, les conditions aux limites appliquées à cette cellule devraient être bien périodiques. Si l'on prend un VER de taille macroscopique, en vertu du principe de séparation des échelles, la période des fluctuations locales devient négligeable, si bien qu'on peut considérer les conditions aux bords comme homogènes.

Partant de ce principe, la méthode d'homogénéisation périodique consiste à appliquer des conditions homogènes sur les bords d'un VER de taille croissante, et de calculer les propriétés effectives du VER jusqu'à ce que celles-ci n'évoluent plus, et que les deux formulations aboutissent à des résultats identiques. Considérons ainsi le rapport  $l/m$ , qui caractérise le ratio de la taille du VER par rapport à la taille de la cellule. Le volume de la zone influencée par les conditions aux limites est, grossièrement, proportionnel la surface du VER c'est à dire à  $(l/m)^2$ , alors que le volume total du VER est proportionnel à  $(l/m)^3$ . Ainsi, le rapport du volume affecté par les conditions aux limites, sur le volume total du VER, est inversement proportionnel à  $(l/m)$ , ce qui caractérise la convergence de la méthode.

### 3.2.3 Prise en compte des symétries

La méthode d'homogénéisation repose sur la méthode des éléments finis, et par conséquent, la qualité des résultats dépend également de la finesse du maillage. Or, les limites matérielles des moyens de calculs (capacité mémoire notamment), font qu'on ne peut pas toujours simuler le comportement d'un VER de grande taille avec une qualité de maillage importante. C'est pourquoi, il est important de simplifier au maximum le problème à résoudre.

Dans un grand nombre de cas, les cellules périodiques (et par suite, le VER), possèdent un ou plusieurs plans de symétrie, qu'il convient de prendre en compte afin de réduire la taille du modèle à la moitié, au quart, voir au huitième de sa taille initiale. Dans le cas des réseaux périodiques indiqués ci-dessus, on peut exploiter les deux plans de symétrie de normales  $y$  et  $z$ .

Les conditions de symétrie à appliquer découlent du caractère symétrique ou antisymétrique des composantes de contraintes et déplacement par rapport à chaque plan de symétrie. Une description rigoureuse de ces conditions de symétrie peut être trouvée dans [Li, 2008], on se contentera ici d'en énoncer les principaux points (voir également tableau II-9, plus bas) :

- Dans le cas d'un chargement en traction (dans les directions  $x$ ,  $y$  ou  $z$ ), les composantes du déplacement, de la déformation et de la contrainte sont toutes symétriques par rapport aux plan  $y$  et  $z$ . Les conditions de symétrie (sur les faces  $y = 0$  et  $z = 0$ ) correspondent alors à un appui plan.

- Dans le cas d'un cisaillement longitudinal à la fibre, par exemple en xy, toutes les composantes du déplacement, de la déformation et de la contrainte sont symétriques, à l'exception des composantes de cisaillement en xz et yz qui sont antisymétriques. Les conditions de symétrie correspondent également à un appui plan, auquel on doit ajouter, pour le plan  $y = 0$ , la condition de déplacement en x nul ( $u = 0$ ) qui permet d'assurer l'équilibre global du VER.
- Dans le cas d'un cisaillement dans le plan yz, les plans de symétrie ne restent pas droits après déformation. Les conditions de symétrie correspondent à un déplacement en z nul ( $w = 0$ ), pour le plan  $y = 0$ , et à un déplacement en y nul ( $v = 0$ ), pour le plan  $z = 0$ .

### 3.3 Préparation de la simulation

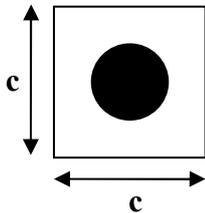
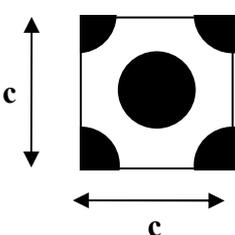
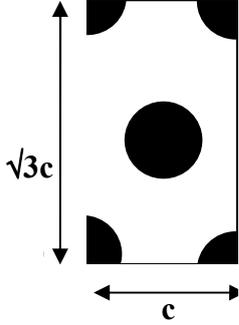
On souhaite étudier les propriétés thermo-élastiques effectives des bandes renforçantes, à l'aide des éléments finis, suivant la méthode d'homogénéisation périodique. On considèrera pour cela les trois réseaux périodiques définis plus haut. Conformément à la méthode classique de l'homogénéisation périodique, on soumettra des VER de taille croissante à plusieurs sollicitations thermo-élastiques typiques, appliquées comme des conditions aux limites homogènes en contraintes ou en déplacement. Ceci mettra en évidence la convergence des deux formulations du problème lorsque le VER est « suffisamment grand ». On montrera également la forte influence du maillage sur les résultats.

Cependant, contrairement à la méthode classique d'homogénéisation périodique, on ne calculera pas les propriétés effectives à partir de la moyenne des états mécaniques sur l'ensemble du VER. Au lieu de cela, on calculera les états mécaniques moyens seulement sur une cellule centrale, en considérant que les chargements imposés à celle-ci par les cellules voisines sont bien périodiques. Ceci permettra d'utiliser un maillage de meilleure qualité sur cette cellule, et devrait améliorer la convergence des deux formulations.

#### 3.3.1 Géométrie et maillage

Trois cellules périodiques, correspondant aux différents réseaux, ont été définies et sont montrées dans le tableau II-8 ci-dessous. On a supposé que les fibres avaient une forme cylindrique avec un diamètre  $d$  unitaire et une longueur égale à cent (dans la direction x), la taille  $c$  des cellules étant déterminée en fonction du taux de fibres (55,8 % en volume).

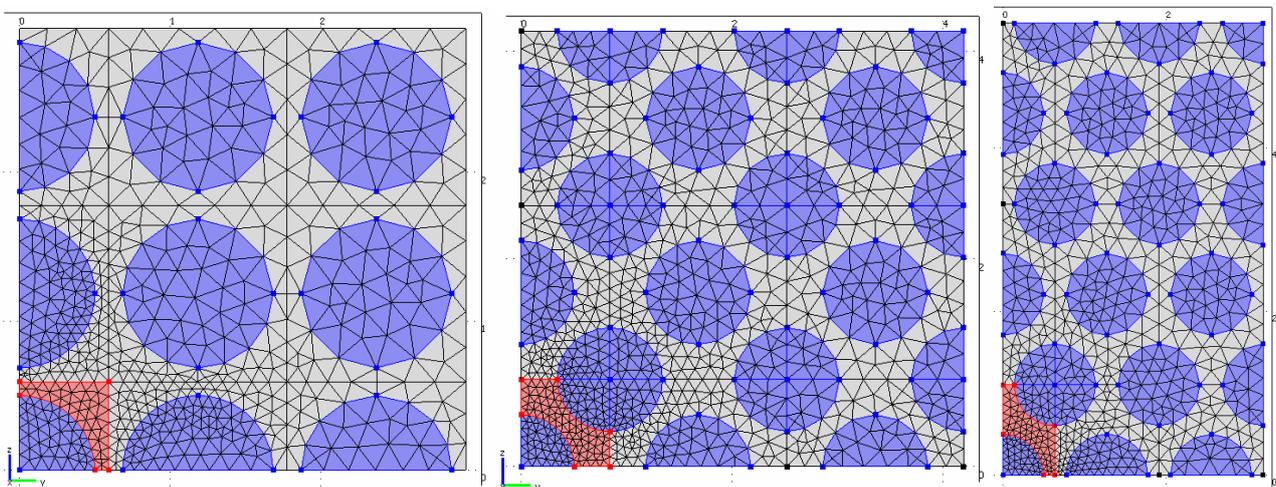
Tableau II-8 : Description des CUR pour les trois réseaux périodiques étudiés

Réseau carré	Réseau carré diagonal	Réseau hexagonal
		
$V_f = \frac{\frac{1}{4}\pi \cdot d^2}{c^2}$	$V_f = \frac{2 \times \frac{1}{4}\pi \cdot d^2}{c^2}$	$V_f = \frac{2 \times \frac{1}{4}\pi \cdot d^2}{\sqrt{3} \times c^2}$

En raison du fort rapport longueur - diamètre des fibres, il est courant de supposer que celles-ci sont de longueur infinie et par conséquent, que les états mécaniques sont constants le long de la fibre. Cette hypothèse permet alors de réduire le problème tridimensionnel à un problème en déformations planes généralisées (2D), ce qui réduit fortement la complexité du système. Malheureusement, les déformations planes généralisées ne sont pas implémentées sur Comsol multiphysics v3.5, il a donc fallu modéliser le problème en trois dimensions. Ceci est d'autant plus justifié qu'on s'intéresse également à des chargements tridimensionnels.

On a donc défini un maillage de surface TRI3 raffiné près de la cellule périodique centrale (voir figure II-11), qu'on a ensuite extrudé dans la direction x afin d'obtenir un maillage tridimensionnel. Cependant, comme on s'attend à observer des champs mécaniques relativement constants dans la direction x, on a défini un faible nombre de couches d'extrusion, entre 1 et 10. Le maillage de surface utilisé est relativement grossier, cependant les tests montrent que cette faible qualité influe moins sur les résultats que le nombre de couches d'extrusion. Le nombre maximal de degrés de liberté est d'environ 220.000, ce qui est la limite de calcul pour la machine utilisée (4 CPU @ 2,8 GHz et 3,25 Go RAM).

**Figure II-11 : Géométrie et maillage de surface pour les trois réseaux étudiés. On observe ici les quarts de pièce qui correspondent à des VER contenant 25 cellules périodiques ; la cellule centrale est en bas à gauche.**



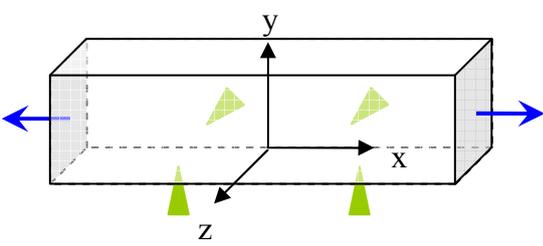
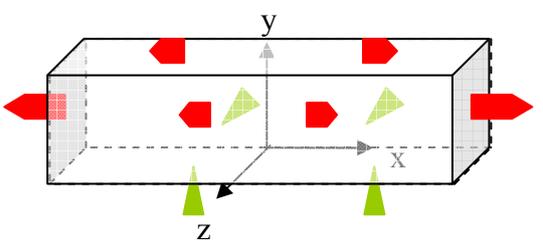
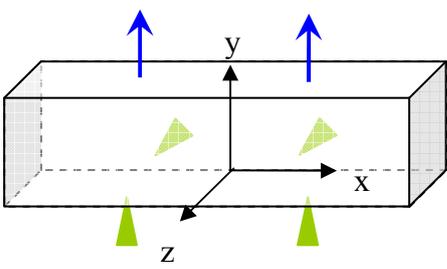
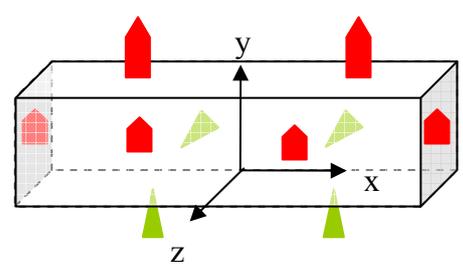
La figure II-11 montre les quarts de pièce correspondant à des VER contenant 25 cellules périodiques, la cellule centrale étant disposée en bas à gauche. L'exactitude des conditions de symétrie a été vérifiée en comparant avec les résultats obtenus sur un VER complet.

### 3.3.2 Description des chargements

En supposant que le pli unidirectionnel possède une isotropie transverse autour de l'axe x, ses propriétés effectives peuvent être déterminées à partir de 5 modules élastiques indépendants  $\{E_x, E_y, \nu_{yz} \text{ ou } G_{yz}, \nu_{xy}, G_{xy}\}$  et de deux coefficients d'expansion thermique  $\{\alpha_x, \alpha_y\}$ . Cependant, l'hypothèse d'un comportement isotrope transverse selon x n'est pas exactement vérifiée à l'échelle d'une cellule périodique. De fait, la périodicité du réseau induit une légère anisotropie transverse, qui n'existe pas dans un pli réel en raison du caractère aléatoire de la microstructure. Ainsi, pour les deux réseaux carrés, le comportement est orthotrope par rapports aux plans  $y = 0$  et  $z = 0$ . De même, le réseau hexagonal induit une symétrie du comportement par rapport aux plans inclinés à  $0^\circ$ ,  $60^\circ$  et  $120^\circ$ , mais les directions y et z ne sont pas tout à fait équivalentes. Dans tous les cas, le module de cisaillement transverse  $G_{yz}$  est indépendant des autres modules ( $E_y$  et  $\nu_{yz}$  notamment). Dès lors, cinq simulations différentes sont nécessaires pour déterminer l'ensemble des modules thermo-élastiques : une traction dans la direction x, une traction dans la direction y, un cisaillement dans le plan xy, un cisaillement dans le plan yz, et enfin une dilatation thermique. Dans le cas du réseau hexagonal, on simulera également une traction dans la direction z et un cisaillement dans le plan xz, afin de mettre en évidence les effets d'anisotropie transverse.

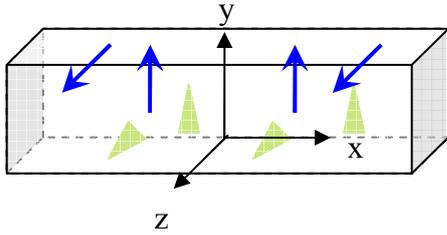
Afin d'étudier les deux formulations (SUBC et KUBC), on imposera sur les bords du VER un champ de contraintes unitaire et une déformation unitaire, respectivement. Les chargements correspondants sont décrits dans le tableau II-9 ci-dessous, ainsi que les modules thermo-élastiques déductibles de chaque simulation (dans le cas d'une isotropie transverse yz).

Tableau II-9 : Description des chargements pour les deux formulations (SUBC et KUBC)

Légende :	
▶	Déplacement nul (symétrie)
▶	Déplacement nul
▶	Déplacement non nul
→	Force surfacique
Les faces de symétrie sont en arrière-plan. Le repère est centré sur l'origine.	
Formulation SUBC	Formulation KUBC
<p style="text-align: center;"><b>Traction x : <math>\sigma_{xx} = 1</math> MPa</b></p> <p style="text-align: center;"><math>E_x = \sigma_{xx} / \epsilon_{xx}</math> et <math>\nu_{xy} = -\epsilon_{yy} / \epsilon_{xx}</math></p>  <p><i>Faces de normales <math>\pm x</math> : <math>f_x = \pm 1</math> MPa.</i>  <i>Symétrie <math>y = 0</math> : <math>v = 0</math>.</i>  <i>Symétrie <math>z = 0</math> : <math>w = 0</math>.</i></p>	<p style="text-align: center;"><b>Traction x : <math>\epsilon_{xx} = 1</math></b></p> <p style="text-align: center;"><math>E_x = \sigma_{xx} / \epsilon_{xx}</math> et <math>\nu_{xy} = -\epsilon_{yy} / \epsilon_{xx}</math></p>  <p><i>Faces de normales <math>\pm x, y</math> et <math>z</math> : <math>u = x</math>.</i>  <i>Symétrie <math>y = 0</math> : <math>v = 0</math> et <math>u = 0</math>.</i>  <i>Symétrie <math>z = 0</math> : <math>w = 0</math>.</i></p>
<p style="text-align: center;"><b>Traction y : <math>\sigma_{yy} = 1</math> MPa</b></p> <p style="text-align: center;"><math>E_y = \sigma_{yy} / \epsilon_{yy}</math> et <math>\nu_{yz} = -\epsilon_{zz} / \epsilon_{yy}</math></p>  <p><i>Face de normale <math>y</math> : <math>f_y = 1</math> MPa.</i>  <i>Symétrie <math>y = 0</math> : <math>v = 0</math>.</i>  <i>Symétrie <math>z = 0</math> : <math>w = 0</math>.</i></p>	<p style="text-align: center;"><b>Traction y : <math>\epsilon_{yy} = 1</math></b></p> <p style="text-align: center;"><math>E_y = \sigma_{yy} / \epsilon_{yy}</math> et <math>\nu_{yz} = -\epsilon_{zz} / \epsilon_{yy}</math></p>  <p><i>Faces de normales <math>\pm x, y</math> et <math>z</math> : <math>v = y</math>.</i>  <i>Symétrie <math>y = 0</math> : <math>v = 0</math> et <math>u = 0</math>.</i>  <i>Symétrie <math>z = 0</math> : <math>w = 0</math>.</i></p>

**Cisaillement yz :  $\sigma_{yz} = 1$  MPa**

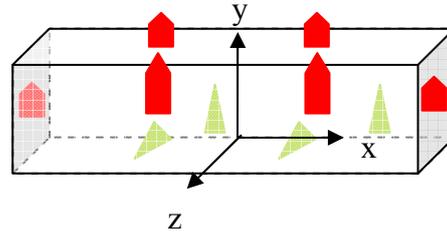
$$G_{yz} = \sigma_{yz} / 2 \varepsilon_{yz}$$



Face de normale y :  $f_z = 1$  MPa.  
 Face de normale z :  $f_y = 1$  MPa.  
 Symétrie y = 0 :  $w = 0$ .  
 Symétrie z = 0 :  $v = 0$ .

**Cisaillement yz :  $\varepsilon_{yz} = 1$**

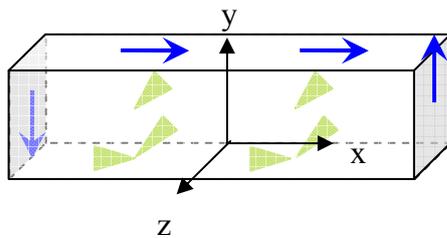
$$G_{yz} = \sigma_{yz} / 2 \varepsilon_{yz}$$



Faces de normales  $\pm x, y$  et  $z$  :  $v = 2z$ .  
 Symétrie y = 0 :  $w = 0$ .  
 Symétrie z = 0 :  $v = 0$ .

**Cisaillement xy :  $\sigma_{xy} = 1$  MPa**

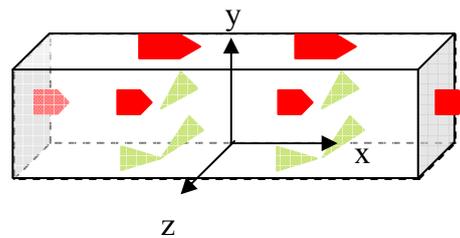
$$G_{xy} = \sigma_{xy} / 2 \varepsilon_{xy}$$



Faces de normale  $\pm x$  :  $f_y = \pm 1$  MPa.  
 Face de normale y :  $f_x = 1$  MPa.  
 Symétrie y = 0 :  $u = 0$  et  $v = 0$ .  
 Symétrie z = 0 :  $w = 0$ .

**Cisaillement xy :  $\varepsilon_{xy} = 1$**

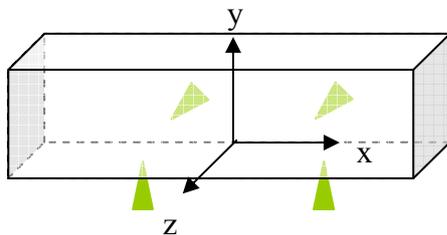
$$G_{xy} = \sigma_{xy} / 2 \varepsilon_{xy}$$



Faces de normales  $\pm x, y$  et  $z$  :  $u = 2y, v = w = 0$ .  
 Symétrie y = 0 :  $v = 0, w = 0$ .  
 Symétrie z = 0 :  $w = 0$ .

**Dilatation thermique :  $\Delta T = 1$  °C,  $\sigma = 0$**

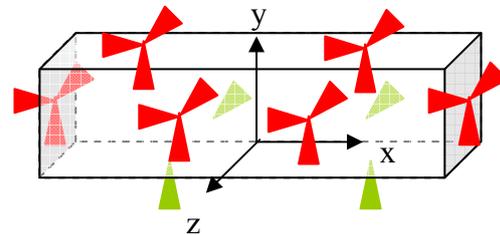
$$\alpha_x = \varepsilon_{xx} \text{ et } \alpha_y = \varepsilon_{yy}$$



Faces de normales  $\pm x, y$  et  $z$  :  $f_x = f_y = f_z = 0$   
 Symétrie y = 0 :  $v = 0$  et  $u = 0$ .  
 Symétrie z = 0 :  $w = 0$ .

**Dilatation thermique :  $\Delta T = 1$  °C,  $\varepsilon = 0$**

$$\alpha_x = \frac{-\sigma_{xx} + 2\nu_{xy}\sigma_{yy}}{E_x} \text{ et } \alpha_y = \frac{-\nu_{xy}\sigma_{xx}}{E_x} + \frac{(\nu_{xz}-1)\sigma_{yy}}{E_y}$$



Faces de normales  $\pm x, y$  et  $z$  :  $u = v = w = 0$ .  
 Symétrie y = 0 :  $v = 0$ .  
 Symétrie z = 0 :  $w = 0$ .

## 3.4 Discussion des résultats

### 3.4.1 Propriétés homogénéisées

Les propriétés thermo-élastiques effectives des différents réseaux périodiques ont été calculées, en fonction de la taille du réseau bidimensionnel et de la finesse du maillage longitudinal.

Dans un premier temps, on a considéré des VER de taille croissante, comportant  $N \times N$  cellules, afin de qualifier la convergence des méthodes KUBC et SUBC. On a utilisé un maillage très grossier dans la direction longitudinale (1 seule couche d'éléments), mais assez fin dans les directions  $y$  et  $z$  (environ deux fois plus fin que celui montré sur la figure II-11). Les propriétés effectives du VER ont été calculées en fonction de  $1/N$  et récapitulées sur la figure II-12 ci-dessous. On a également reporté les résultats des modèles à champ moyen (EK, MTres et MTfib), pour comparaison. Afin de faciliter la lecture, on ne montre que les résultats obtenus avec l'arrangement carré, la convergence étant similaire pour les autres réseaux étudiés. Les courbes montrent une tendance convergente des formulations en contraintes et en déformations lorsque le rapport  $1/N$  tend vers zéro. Les résultats des deux formulations se stabilisent à partir de  $N = 5$  (moins de 1 % de variation relative entre les résultats pour  $N = 5$  et  $N = 7$ ). Il persiste cependant un écart significatif entre ces deux formulations, notamment pour le coefficient de cisaillement plan  $G_{xy}$ . Cet écart est comparable aux écarts observés les différents modèles d'homogénéisation à champ moyen, ce qui laisse une marge d'interprétation importante.

Plusieurs tests ont été effectués afin de déterminer l'origine de cet écart. L'influence de la dimension du VER dans la direction des fibres a été trouvée négligeable, de même que la qualité du maillage de surface. En revanche, la faible qualité du maillage extrudé (dans la direction  $x$ ) est très probablement génératrice d'erreurs importantes, au moins en ce qui concerne le cisaillement dans le plan  $xy$ . C'est pourquoi on s'est attaché à calculer les propriétés effectives des différents réseaux périodiques, en fonction du nombre  $m$  de couches du maillage extrudé. On a simulé le comportement de VER contenant  $5 \times 5$  cellules, ce qui semble suffisant pour assurer des conditions périodiques au bord de la cellule centrale. Les résultats sont donnés sur la figure II-13, toujours pour le réseau carré-périodique, avec les mêmes échelles en ordonnée que sur la figure II-12. Le principal résultat observable est que les deux formulations KUBC et SUBC convergent lorsque le nombre de couches de maillage est suffisamment grand (dix étant le nombre maximum de couches permis par les capacités de calcul, bien que l'on observe encore des évolutions de modules supérieures à 1 %). Cette convergence est bien visible pour le module de cisaillement plan  $G_{xy}$ , mais elle apparaît également pour les autres modules. La seule exception à cette règle est le module de Young longitudinal  $E_x$ , pour lequel les résultats de la formulation SUBC semblent faussés par des erreurs numériques (voir également tableau II-10 plus bas); ce problème reste cependant anecdotique, le module  $E_x$  étant bien estimé par des lois des mélanges. Notons également que les résultats de la formulation SUBC (exception faite du module  $E_x$ ) évoluent beaucoup moins avec le maillage que ceux de la formulation KUBC, ce qui serait surtout révélateur de conditions aux limites mieux posées (moins sur-contraintes).

Le bilan de ces différents essais est que les propriétés effectives et contraintes locales sont correctement prédites par les deux formulations, si l'on utilise un VER contenant au moins  $5 \times 5$  cellules périodiques, et un nombre de couches d'extrusion de maillage supérieur ou égal à dix. De façon alternative, la formulation SUBC donne également d'assez bons résultats avec un faible nombre de couches de maillage, ce qui permet d'optimiser le temps de calcul. Dans les cas où l'on observe un écart significatif entre les deux formulations, celle en contraintes semble donc plus précise. Ces observations ont été vérifiées pour les trois types de réseaux périodiques.

Figure II-12 : Résultats des formulations KUBC et SUBC en fonction de la taille du VER, pour le réseau périodique carré.

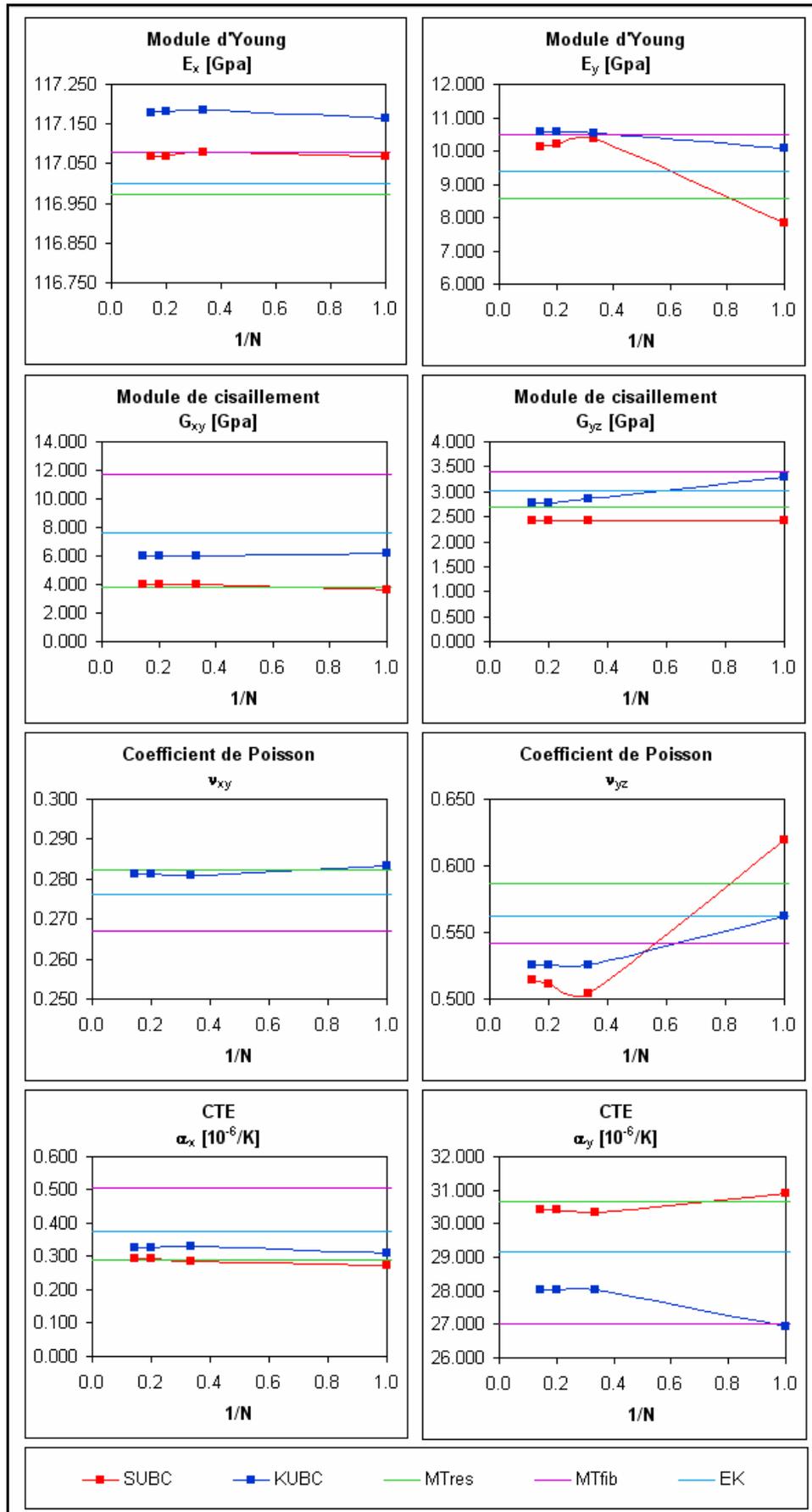
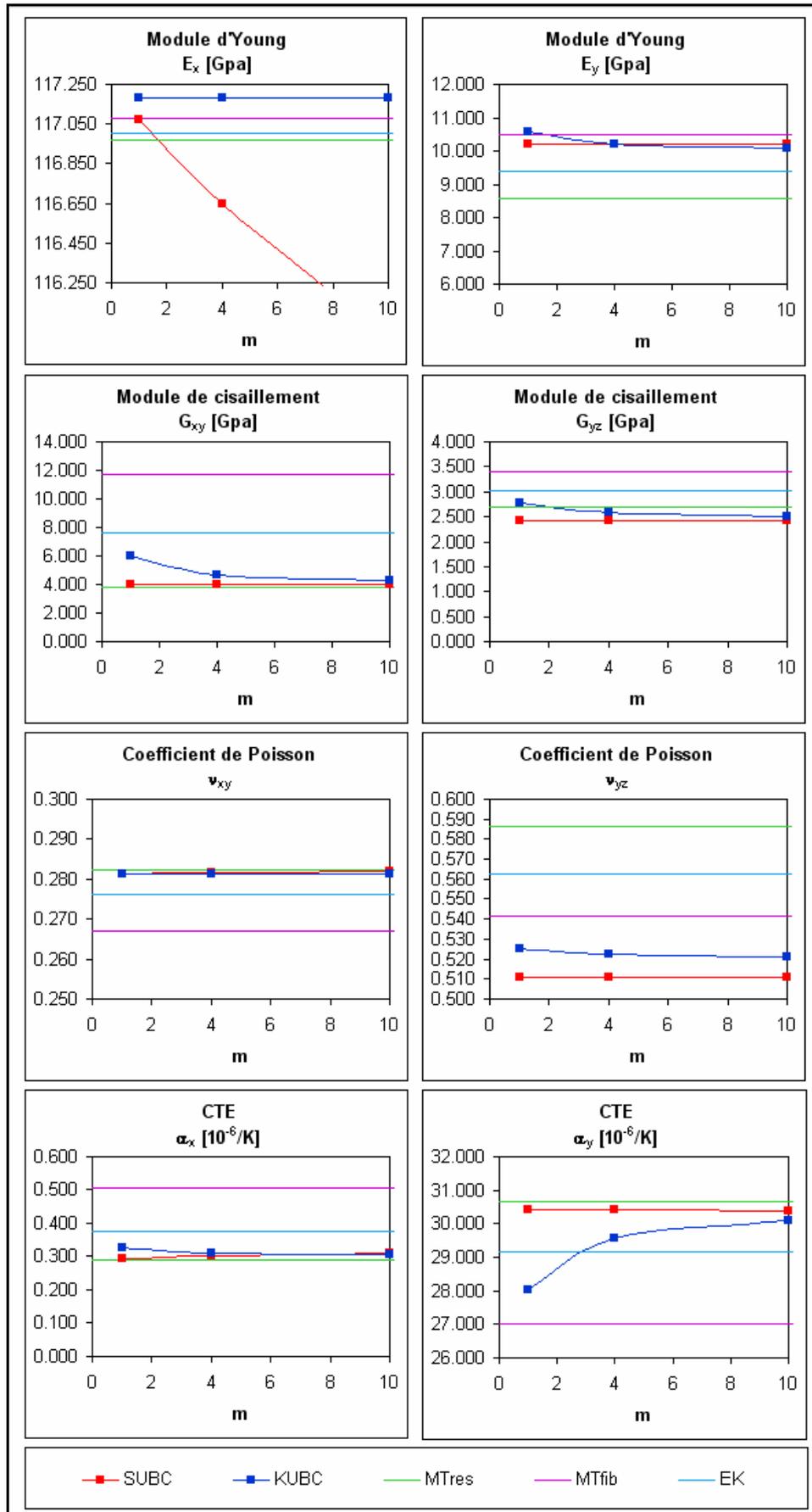


Figure II-13 : Résultats des formulations KUBC et SUBC en fonction du nombre de couches d'extrusion du maillage, pour le réseau périodique carré.



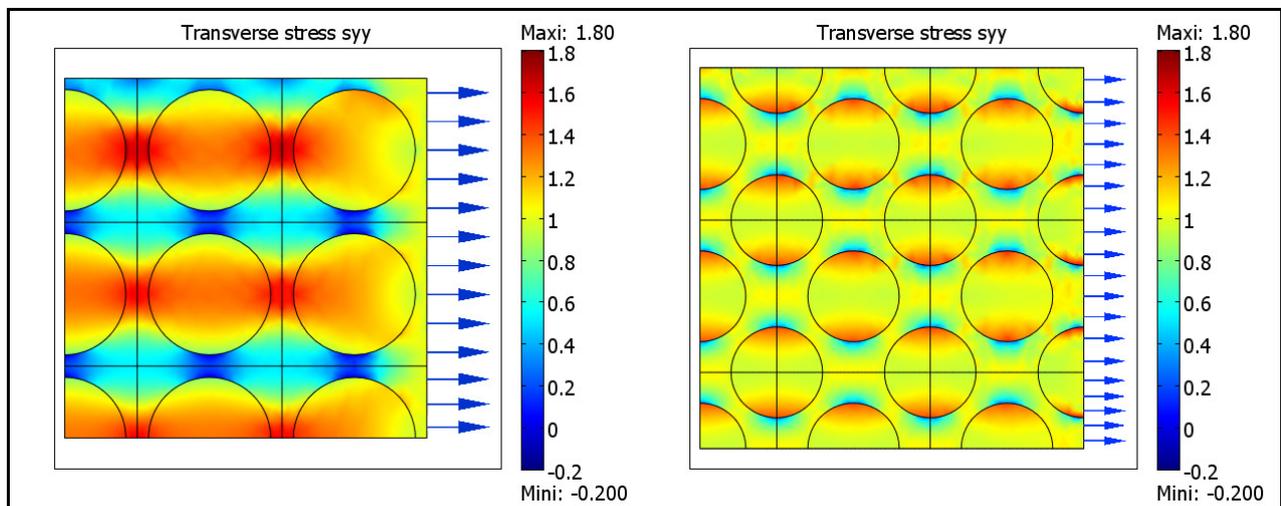
Le tableau II-10 ci-dessous récapitule les propriétés effectives obtenues pour les différents réseaux périodiques, afin de les comparer avec les résultats des différents modèles d'homogénéisation à champ moyen. Le réseau hexagonal montrant une très faible dissymétrie des propriétés dans les directions y et z, on a également effectué les calculs sur un réseau orienté à 90° dans le plan yz (inversion des directions y et z). Les résultats des deux formulations, KUBC et SUBC, ont été montrés afin de démontrer la convergence de la méthode (écarts assez faibles).

**Tableau II-10 : Propriétés effectives obtenues par homogénéisation périodique et à champ moyen**

	Modèle	Formulation	Modules mécaniques						CET	
			$E_x$ [GPa]	$E_y$ [GPa]	$G_{xy}$ [GPa]	$G_{yz}$ [GPa]	$\nu_{xy}$ [s.u.]	$\nu_{yz}$ [s.u.]	$\alpha_x$ [10 <sup>-6</sup> /K]	$\alpha_y$ [10 <sup>-6</sup> /K]
Champ complet	Carré	KUBC	<b>117,2</b>	10,1	4,3	2,5	0,28	0,52	0,30	30,1
		SUBC	116,0	<b>10,2</b>	<b>4,0</b>	<b>2,4</b>	<b>0,28</b>	<b>0,51</b>	<b>0,31</b>	<b>30,4</b>
	Carré diagonal	KUBC	<b>117,1</b>	8,0	4,3	3,3	0,28	0,62	0,30	30,1
		SUBC	115,9	<b>7,9</b>	<b>4,0</b>	<b>3,3</b>	<b>0,28</b>	<b>0,62</b>	<b>0,31</b>	<b>30,5</b>
	Hexagonal 0°	KUBC	<b>117,1</b>	9,0	4,2	2,9	0,28	0,57	0,29	30,3
		SUBC	116,1	<b>8,8</b>	<b>3,9</b>	<b>2,9</b>	<b>0,29</b>	<b>0,58</b>	<b>0,30</b>	<b>30,8</b>
	Hexagonal 90°	KUBC	<b>117,1</b>	9,0	4,2	2,9	0,28	0,57	0,29	30,2
		SUBC	116,1	<b>8,8</b>	<b>3,9</b>	<b>2,9</b>	<b>0,28</b>	<b>0,57</b>	<b>0,30</b>	<b>30,5</b>
	Moyenne		117,1	8,9	3,9	2,9	0,28	0,57	0,31	30,5
Champ moyen	MTres		117,0	<b>8,6</b>	<b>3,8</b>	<b>2,7</b>	0,28	0,59	<b>0,29</b>	<b>30,7</b>
	MTfib		117,1	10,5	11,7	3,4	0,27	0,54	0,50	27,0
	EK		117,0	9,4	7,6	<b>3,0</b>	0,28	<b>0,56</b>	0,38	29,2

On commencera par noter les différences non-négligeables entre les résultats obtenus pour les différents réseaux, particulièrement en ce qui concerne le module d'élasticité transverse  $E_y$ , les deux modules de cisaillement, ainsi que les coefficients d'expansion thermiques. Ces modules sont très dépendants de l'arrangement des fibres, et c'est également pour eux qu'on observe une variabilité marquée avec les modèles à champ moyen. Ces différences illustrent l'anisotropie transverse des différents réseaux, qui est très marquée pour les deux réseaux carrés, mais négligeable pour le réseau hexagonal.

**Figure II-14 : Contrainte  $\sigma_{yy}$  sous traction transverse normalisée, pour les arrangements carré et carré diagonal**



A titre d'exemple, si l'on s'intéresse à une sollicitation de traction transverse (direction  $y$ ), on peut observer que la configuration de chaque réseau peut être plus ou moins favorable à la reprise des efforts (voir figure II-14). La configuration carrée présente un alignement des fibres avec la direction de sollicitation, ce qui favorise la reprise des efforts, là où la configuration carrée diagonale (obtenue par rotation de  $45^\circ$ ) induit du cisaillement entre les fibres et des lignes d'efforts « ondulées », qui aboutissent à une plus faible rigidité. Ceci peut également être interprété comme un effet d'échelle, en considérant que l'épaisseur  $\Delta y$  de matrice entre deux fibres est plus importante pour le réseau carré diagonal que pour le réseau carré. En partant du principe que la différence de propriétés observée entre les deux arrangements carrés est due à l'anisotropie transverse, on pourrait alors tracer l'évolution des propriétés en fonction de l'orientation du réseau par rapport à la direction de sollicitation. Les courbes obtenues seraient alors des sinusoides de période  $\pi/2$ , dont les extrema seraient obtenus à  $0$  et  $\pi/4$ . Dans le cas du réseau hexagonal, un raisonnement similaire peut être établi, mais on aboutirait cette fois à une période de  $\pi/3$  (plus faible) et, assez logiquement, une amplitude plus faible également. Cette étude montre que le choix du réseau périodique et de son orientation influe assez significativement sur certaines des propriétés effectives obtenues. La méthode à champ complet utilisant des réseaux périodiques n'est donc pas une référence parfaite pour le calcul des propriétés, même si elle donne des résultats probants. Pour aboutir à des résultats plus fiables, il serait pertinent d'introduire le caractère aléatoire de la microstructure (taille et surtout répartition des fibres) dans la simulation, comme on peut le voir par exemple dans [Chen et Papathanasiou, 2004]. Ceci est cependant fait au détriment de la rapidité de calcul, qui est déjà mauvaise pour l'homogénéisation périodique, par rapport aux modèles à champ moyen. Moulinec et Suquet (1998) ont mené une analyse similaire en élastoplasticité sur un pli unidirectionnel, en utilisant des méthodes sans maillage. Ils ont montré des effets d'anisotropie transverse similaires à ceux que nous avons constatés. Ils ont également montré que l'arrangement aléatoire aboutissait à des résultats similaires à ceux de l'arrangement périodique, du moins en traction transverse.

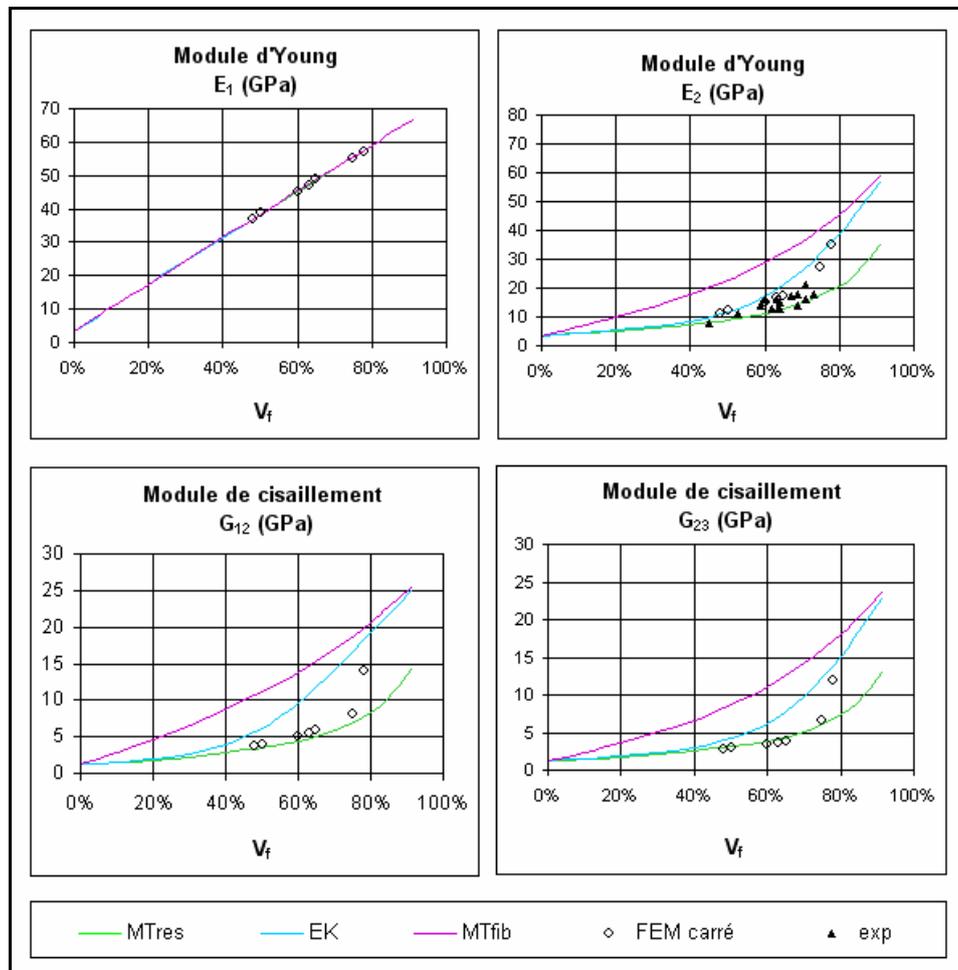
Les résultats de l'homogénéisation périodique restent donc suffisamment fiables pour permettre une comparaison avec ceux de l'approche à champ moyen et éventuellement avec des données expérimentales (si on fait abstraction des incertitudes sur les propriétés des constituants). Cependant, pour se livrer à une analyse correcte, il est nécessaire, d'une part, de ne considérer que la formulation SUBC (hormis pour le module de Young longitudinal) et d'autre part, de gommer les effets d'anisotropie transverse en prenant les valeurs moyennes des modules sur les 2 réseaux et orientation étudiées. Cela correspond à la ligne « moyenne » du tableau II-10. En procédant ainsi, on observe une bonne correspondance entre l'approche d'homogénéisation périodique et les modèles à champ moyen. Le modèle de Mori-Tanaka (MTres), en particulier, donne les meilleurs résultats pour tous les modules, à l'exception des modules transverses  $G_{yz}$  et  $\nu_{yz}$  qui sont mieux estimés par le modèle autocohérent (la différence est cependant très faible). Le modèle MTfib ne semble pas offrir d'intérêt particulier, il tend à surestimer significativement la rigidité (module de cisaillement longitudinal notamment), et ne donne d'estimations pertinentes que pour des configurations particulières (arrangement carré par exemple).

La comparaison entre les deux approches (champ moyen et champ complet) aboutit donc à des conclusions plutôt rassurantes, puisque la corrélation observée entre les différents ensembles de propriétés est excellente. Il faut cependant garder à l'esprit que ces résultats ne restent valables que pour un taux de fibres assez modéré (56 %). Une comparaison avec les résultats expérimentaux, et avec la littérature, est donc nécessaire. S'il est difficile de trouver dans la littérature une comparaison systématique de tous les modèles d'homogénéisation, on trouve néanmoins un certain nombre d'études sur des cas particuliers. Un travail très poussé sur l'homogénéisation périodique de plis composites peut être trouvé dans la série d'articles [Jin et al, 2008 ; Ha et al., 2008a, 2008b], qui montrent l'effet de l'arrangement des fibres (carré, hexagonal, aléatoire) sur les propriétés thermo-élastiques des plis composites, mais sans les comparer aux approches à champ moyen, ni

aux données expérimentales. Ces travaux montrent notamment que les modules thermo-élastiques calculés avec un arrangement aléatoire sont bornés par ceux calculés avec les arrangements périodiques, à l'exception des modules de cisaillement qui sont légèrement plus importants avec un arrangement périodique.

Dans [Sun et al., 2001], les résultats du modèle de Mori-Tanaka pour un unidirectionnel de type verre-époxy (constituants isotropes) sont comparés avec les résultats d'homogénéisation périodique, avec un arrangement carré, et sur une gamme complète de taux de fibres (0 % à 79 %, soit le taux de fibres maximal qu'on peut atteindre avec cet arrangement). Un travail identique a été effectué dans [Toledo et al., 2008], avec des fibres isotropes (verre E) et anisotropes (carbone). Notons que l'utilisation de fibres isotropes plutôt qu'anisotropes, induit un contraste de propriétés plus grand dans la direction transverse, ce qui tend à maximiser les écarts entre les modèles. La tendance générale observée est une augmentation progressive de la rigidité jusqu'à 60-70 % de fibres, suivie d'une brusque augmentation à partir de 75-80 % (avec de fortes divergences entre les modèles). Cette dernière traduit le fort raccourcissement des distances inter-fibres lorsque  $V_f$  est grand, ce qui n'est que rarement observé dans la réalité, dans la mesure où  $V_f$  dépasse rarement 70 % à l'échelle du pli. Les calculs d'homogénéisation à champ moyen faits par Toledo et al. sur les UD verre-époxy ont été repris (Figure II-15), afin d'y ajouter les modèles EK et MTfib.

**Figure II-15 : Modules élastiques obtenus pour un UD verre-époxy, obtenus par homogénéisation périodique [Toledo et al., 2008], par homogénéisation à champs moyens, et expérimentaux.**



Les résultats indiquent que le modèle de Mori-Tanaka reste bien adapté jusqu'à un taux de fibre de 50 à 60 %, au-delà duquel les estimations de l'homogénéisation périodique se rapprochent du modèle autocohérent. Toutefois, les résultats expérimentaux sur les plis verre-époxy et carbone-époxy, semblent indiquer que cette évolution n'est pas si brutale en réalité, du moins pour le module d'élasticité transverse. Par ailleurs, en ce qui concerne les modules de cisaillement, les données

issues de la littérature ne permettent pas de trancher en faveur du modèle autocohérent ou du modèle de Mori-Tanaka. Ces modules sont fortement influencés par le caractère aléatoire de l'arrangement des fibres, qui n'a été pris en compte ni dans la simulation par éléments finis, ni dans les modèles d'homogénéisation à champ moyen.

En conclusion, l'ensemble des données évoquées plus haut (expérimentales, simulation, littérature) semble indiquer une assez bonne corrélation entre l'approche à champ complet, l'approche à champ moyen, et les valeurs expérimentales. Le modèle de Mori-Tanaka (MTres) semble le plus réaliste pour le taux de fibre utilisé ici, bien que l'estimation du modèle autocohérent soit également acceptable. Les trois modèles d'homogénéisation à champ moyen restent intéressants car ils permettent d'estimer, dans une certaine mesure, la variabilité sur les résultats de l'homogénéisation périodique due à l'anisotropie transverse.

### 3.4.2 Contraintes locales

Ayant établi les propriétés effectives du pli, avec différentes méthodes, on s'intéresse maintenant aux contraintes internes dans les constituants. On cherchera à relier les contraintes moyennes calculées par les modèles à champ moyen, avec les champs de contraintes calculés par la MEF. Rappelons tout d'abord que dans le cadre de l'homogénéisation par champs moyens, les contraintes thermo-élastiques moyennes dans les constituants  $\sigma^i$  s'écrivent en fonction des contraintes macroscopiques de la façon suivante :

$$\sigma^i = \mathbf{B}^i : \sigma^I + \mathbf{b}^i \cdot \Delta T \quad (\text{II-4})$$

où les composantes des tenseurs de concentration des contraintes thermo-élastiques des constituants du pli UD, sont donnés dans le tableau II-11 suivant :

**Tableau II-11 : Tenseurs de concentration des contraintes thermoélastiques, selon l'approche à champ moyen**

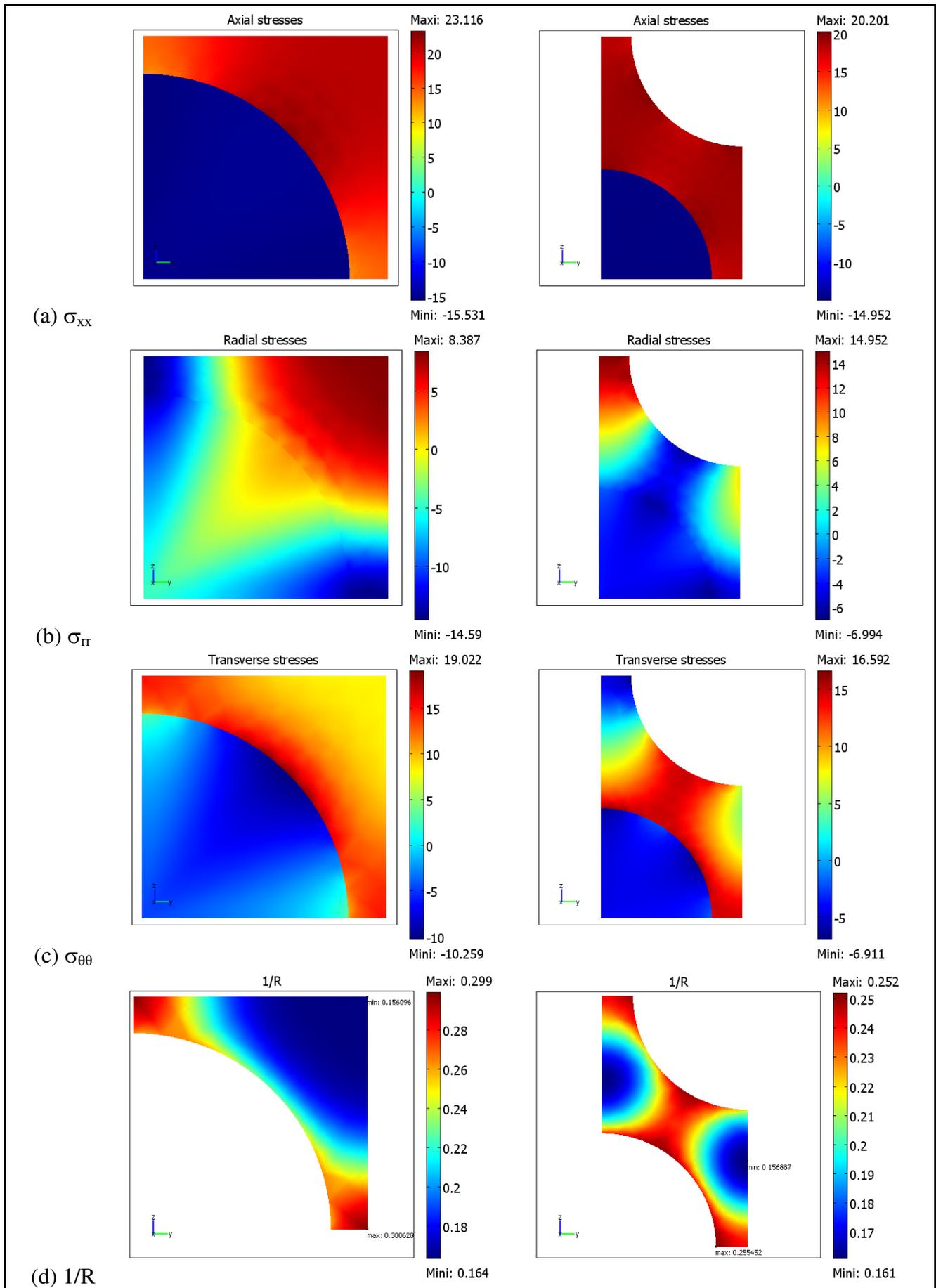
		$B_{ij}$							$b_{ij}$ [MPa/°C]	
		$B_{xx}$	$B_{yy} = B_{zz}$	$B_{uu}$	$B_{vv} = B_{ww}$	$B_{xy} = B_{xz}$	$B_{yx} = B_{zx}$	$B_{yz} = B_{zy}$	$b_{xx}$	$b_{yy} = b_{zz}$
Résine	MTres	0,032	0,853	0,388	0,331	0,363	0,002	0,077	-0,189	-0,057
	MTfib	0,036	0,631	0,257	0,073	0,292	0,007	0,118	-0,304	-0,202
	KE	0,033	0,750	0,322	0,142	0,334	0,004	0,106	-0,237	-0,116
Fibres	MTres	1,767	1,117	0,589	0,634	-0,288	-0,002	-0,288	0,150	0,045
	MTfib	1,764	1,292	0,693	0,839	-0,231	-0,006	-0,231	0,241	0,160
	KE	1,766	1,200	0,641	0,785	-0,265	-0,003	-0,265	0,188	0,092

Les contraintes locales obtenues par les différentes approches vont être détaillées pour trois sollicitations typiques appliquées au pli UD : une traction longitudinale, une traction transverse, et une dilatation thermique libre.

#### 3.4.2.1 Sollicitation thermique

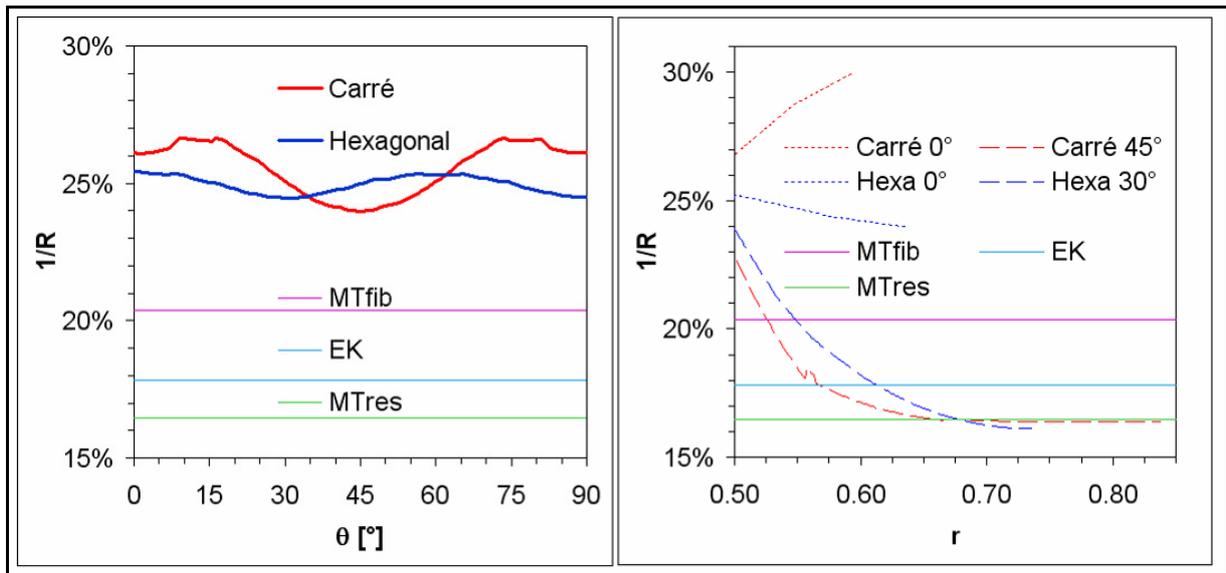
On s'intéresse ici aux contraintes locales dans le pli UD, lorsqu'il est soumis à une sollicitation thermique de -100 °C, libre de contraintes. Pour ce cas de chargement, qui respecte les symétries matérielles du pli, il est pertinent de représenter les contraintes dans un repère cylindrique (contraintes axiales, normales et tangentielles). Le facteur de rupture donne également des informations précieuses sur la tenue de la matrice. Tous ces paramètres sont représentés sur la figure II-16 ci-dessus (vue en coupe au centre du domaine), pour les arrangements carré et hexagonal. Les arrangements carré diagonal et hexagonal 90° ne seront pas représentés, toujours en raison de la symétrie y-z du chargement.

Figure II-16 : Contraintes orthoradiales et facteur de rupture, sous chargement thermique -100 °C



On remarquera que la proximité des fibres perturbe fortement le champ de contraintes dans la matrice (et également dans la fibre centrale). Ainsi, on observe un fort facteur de rupture dans les régions où l'épaisseur de matrice entre deux fibres est faible, là où l'interaction entre les fibres est la plus forte. Cela impacte fortement la tenue de la matrice, qui peut alors varier du simple au double. Les contraintes dépendent très fortement de l'angle  $\theta$  (mesuré par rapport à l'axe  $y$ ) et de la distance  $r$  au centre de la fibre. Les figures II-17a et II-17b résument cette influence, pour les deux arrangements étudiés. Les résultats donnés par les trois modèles d'homogénéisation à champ moyen sont également donnés, pour comparaison.

**Figure II-17 : Facteur de rupture en fonction de  $\theta$  et de  $r$ , sous chargement thermique  $-100\text{ }^\circ\text{C}$**   
**(a) Valeurs à l'interface fibre-matrice**      **(b) Evolution avec la distance au centre de la fibre**



Sur la figure II-17a, on observe que le facteur de rupture évolue de façon sinusoïdale avec l'angle  $\theta$  le long de l'interface fibre-matrice, avec une période  $90^\circ$  pour l'arrangement carré et de  $60^\circ$  pour l'arrangement hexagonal. En outre, l'amplitude de la sinusoïde est également plus faible pour l'arrangement hexagonal (1,0 % d'amplitude en valeur absolue pour  $1/R$ ), que pour l'arrangement carré (2,7 % d'amplitude), ce qui correspond aux observations faites sur les propriétés effectives (anisotropie  $yz$  très marquée pour le réseau carré). Sur la figure II-17b, on a reporté l'évolution du facteur de rupture en fonction de la distance au centre de la fibre, pour deux angles typiques des réseaux étudiés. Les courbes mettent en évidence le fait que les contraintes restent fortes dans les directions où l'épaisseur de la couche de résine est faible (à  $0^\circ$  par exemple), mais diminuent fortement dans les orientations où cette épaisseur est forte (respectivement à  $45^\circ$  et  $60^\circ$  pour les réseaux carré et hexagonal).

Pour ce chargement, on observe que les trois modèles d'homogénéisation à champ moyen mésestiment de façon importante les contraintes à l'interface fibre-matrice. En revanche, le modèle de Mori-Tanaka (MTres) donne une assez bonne estimation du facteur de rupture minimal dans la matrice (observé « loin » des fibres). Le tableau II-12 montre que ce modèle donne également une bonne estimation des contraintes moyennes dans les constituants. En revanche, leur estimation du critère de rupture est faussée par les fluctuations des contraintes à l'échelle microscopiques, dont la moyenne est nulle mais qui contribuent quand même à diminuer la résistance du matériau. Ces observations indiquent que les modèles à champ moyen ne rendent pas très bien compte des phénomènes mécaniques intervenant au niveau des interfaces fibre-matrice, qui sont souvent à l'origine des micro-fissures initiant la rupture. En revanche, ils peuvent rendre compte correctement des phénomènes apparaissant dans le volume de la matrice, qui apparaissent généralement lors de la rupture finale du pli. D'après les valeurs obtenues par les deux approches, les premières décohésions pourraient survenir à partir de  $-330\text{ }^\circ\text{C}$  d'incrément thermique, mais la dégradation du

pli ne serait totale qu'à environ -600 °C, en l'absence de micro-flambement des fibres ou de phénomènes non mécaniques... Ces valeurs sont bien sûr totalement irréalistes.

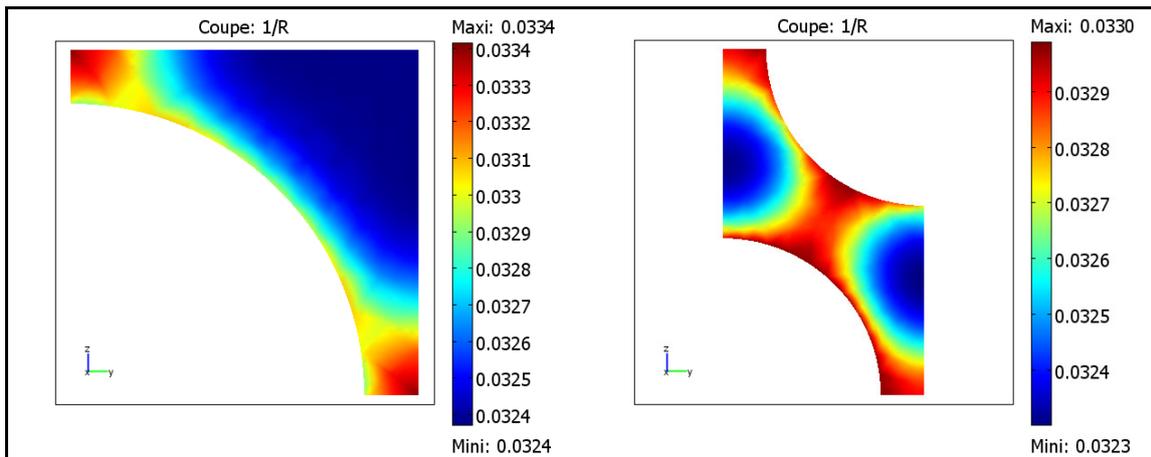
**Tableau II-12 : Contraintes moyennes (en MPa) et facteur de résistance, sous sollicitation thermique de -100 °C**

Formulation / Modèle		Résine				Fibres		
		$\langle\sigma_{xx}\rangle$	$\langle\sigma_{yy}\rangle$	$\langle\sigma_{zz}\rangle$	1/ $\langle R \rangle$	$\langle\sigma_{xx}\rangle$	$\langle\sigma_{yy}\rangle$	$\langle\sigma_{zz}\rangle$
Champ complet	Carré	19,5	6,4	6,4	19,6 %	-15,1	-4,7	-4,7
	Hexagonal	19,0	5,7	5,8	20,5 %	-14,9	-4,6	-4,3
Champ moyen	MTres	18,9	5,7	5,7	16,5 %	-15,0	-4,5	-4,5
	MTfib	30,4	20,2	20,2	20,4 %	-24,1	-16,0	-16,0
	KE	23,7	11,6	11,6	17,8 %	-18,8	-9,2	-9,2

### 3.4.2.2 Traction longitudinale

On s'intéresse maintenant aux contraintes microscopiques dans le pli UD, lorsque celui-ci est soumis à un chargement mécanique de 100 MPa dans la direction des fibres. Comme pour la sollicitation thermique, ce chargement respecte les symétries matérielles du pli et on retrouve la périodicité des contraintes orthoradiales évoquée plus haut. Comme précédemment, on tracera l'allure du facteur de rupture dans la résine, pour les deux réseaux périodiques (figure II-18).

**Figure II-18 : Facteur de rupture dans la résine, sous contrainte axiale de 100 MPa**



On retrouve ici l'allure de 1/R obtenue lors d'une sollicitation thermique, à la différence notable que le facteur de rupture est très homogène dans la matrice, avec des variations relatives inférieures à 1 %. En raison de sa faible rigidité par rapport aux fibres, la matrice est très peu sollicitée : si l'on se fie au facteur de résistance, le pli peut subir jusqu'à 3 GPa avant la rupture de la matrice. En réalité, la rupture du pli est plutôt initiée par la rupture des fibres, qui concentrent la plus grande partie des contraintes.

Sur le tableau II-13 ci-dessous, on remarque que les différents modèles et arrangements de fibres aboutissent tous à des états de contraintes moyens relativement identiques. Les modèles de Mori-Tanaka (MTres) et autocohérent (EK) sont ceux qui donnent les résultats les plus en accord avec l'homogénéisation périodique, cependant les écarts sont peu significatifs au vu des erreurs numériques liées à chaque technique d'homogénéisation.

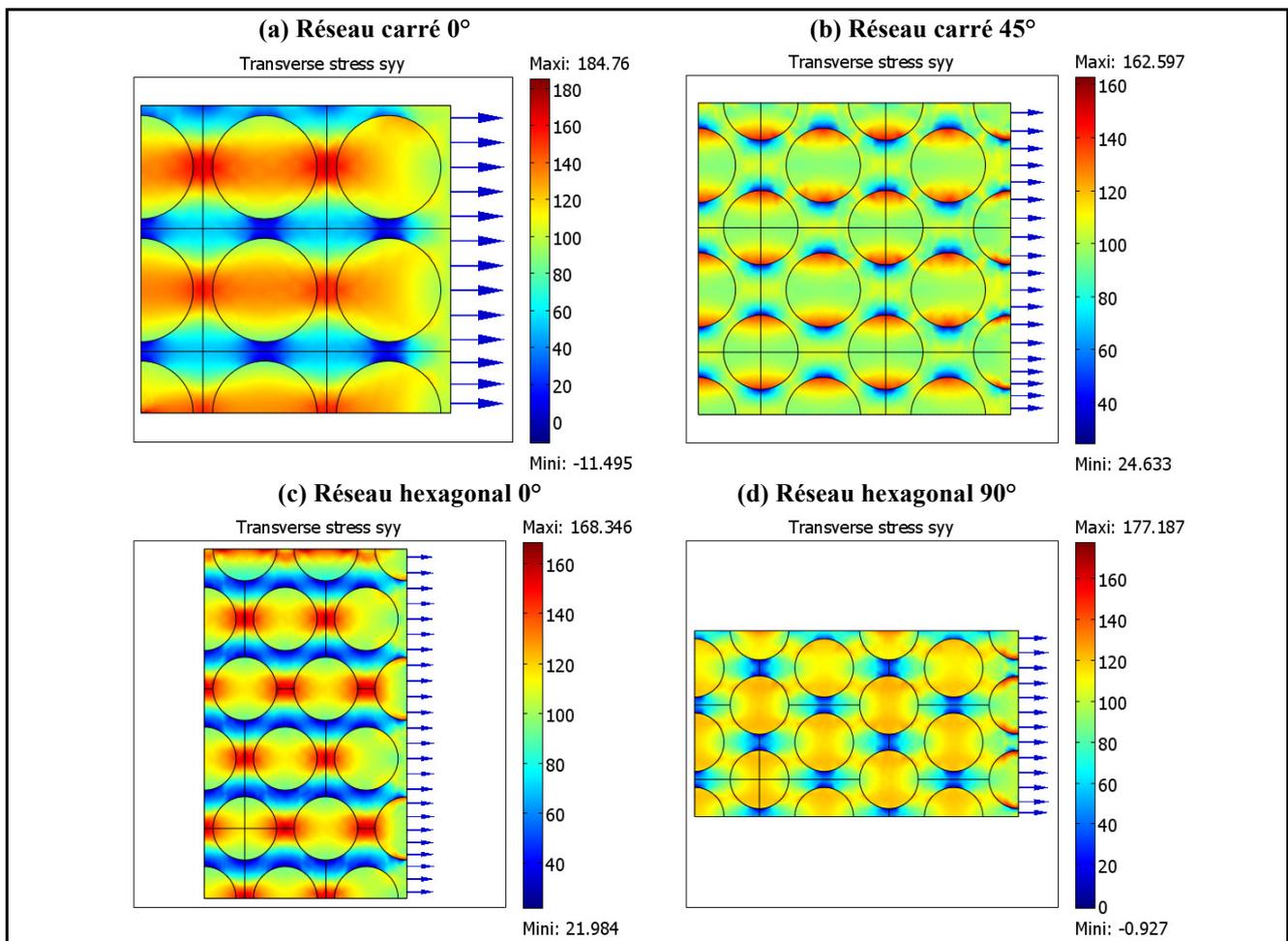
**Tableau II-13 : Contraintes moyennes (en MPa) et facteur de résistance, sous contrainte axiale de 100 MPa**

Formulation / Modèle		Résine				Fibres		
		$\langle \sigma_{xx} \rangle$	$\langle \sigma_{yy} \rangle$	$\langle \sigma_{zz} \rangle$	1/ $\langle R \rangle$	$\langle \sigma_{xx} \rangle$	$\langle \sigma_{yy} \rangle$	$\langle \sigma_{zz} \rangle$
Champ complet	Carré	3,26	0,25	0,25	3,43 %	176,4	-0,18	-0,18
	Hexagonal	3,26	0,22	0,22	3,41 %	176,6	-0,18	-0,17
Champ moyen	MTres	3,16	0,36	0,36	3,25 %	176,7	-0,16	-0,16
	MTfib	3,58	0,29	0,29	3,34 %	176,4	-0,59	-0,59
	KE	3,34	0,33	0,33	3,29 %	176,6	-0,34	-0,34

### 3.4.2.3 Traction transverse

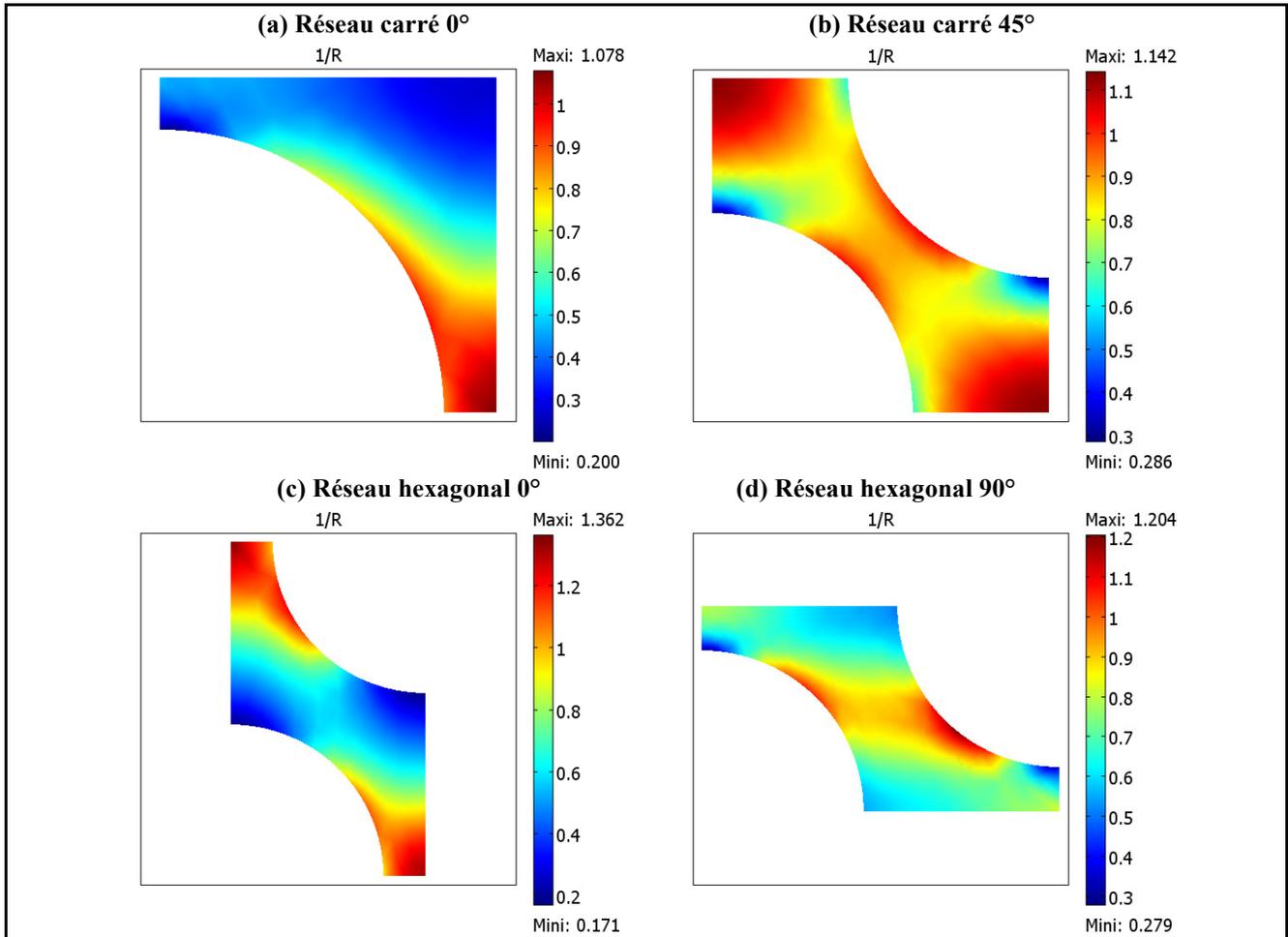
La traction transverse offre des perspectives plus intéressantes, dans la mesure où les propriétés de la matrice et la microstructure jouent un rôle important dans la reprise des efforts par le pli UD. Afin d'étudier ces effets, on s'est intéressé aux contraintes dans le pli lorsque celui-ci est soumis à une traction transverse (direction y) de 100 MPa. Contrairement aux cas étudiés plus tôt, ce chargement ne respecte pas les symétries matérielles du pli, et l'anisotropie à l'échelle microscopique joue un rôle important. C'est pourquoi on considèrera cette fois les 4 configurations évoquées plus tôt : carrée (0° et 45°) et hexagonale (0° et 90°).

**Figure II-19 : Contraintes transverses  $\sigma_{yy}$  dans le pli UD, sous traction transverse de 100 MPa**



Sur la figure II-19 ci-dessus, on a reporté l'allure des contraintes transverses  $\sigma_{yy}$  dans l'ensemble du pli UD. De manière générale, la transmission des efforts aux fibres à travers la matrice se fait essentiellement dans les zones de proximité des fibres, ce qui aboutit à des schémas très différents selon l'orientation du réseau par rapport à la direction de sollicitation  $y$ . Ainsi, pour les réseaux carré  $0^\circ$  et hexagonal  $0^\circ$ , le facteur de rupture de la résine (voir figure II-20) est important dans ces zones où l'écartement  $\Delta y$  entre deux fibres est faible, mais faible dans les zones où  $\Delta y$  est important. Le même schéma peut être observé pour les réseaux désorientés (carré  $45^\circ$  et hexagonal  $90^\circ$ ), cependant on observe également de fortes valeurs du facteur de rupture dans d'autres zones éloignées des fibres ( $\Delta y$  grand), en raison d'un fort contraste entre les contraintes principales (qui n'apparaît pas pour les deux réseaux précédents).

Figure II-20 : Facteur de rupture dans le pli UD, sous contrainte transverse de 100 MPa



Comme précédemment, on a reporté dans le tableau II-14 les moyennes des contraintes locales et l'inverse du facteur de résistance moyen. L'anisotropie transverse induit une forte variabilité des contraintes moyennes, notamment dans les directions transverses  $y$  et  $z$ . Les réseaux désorientés présentent un facteur de rupture (moyen et maximal) plus élevé que les réseaux bien alignés par rapport à la direction  $y$ , la matrice étant mise à contribution de façon plus importante dans la reprise de charge. Si l'on fait la moyenne des états mécaniques sur les 4 différents arrangements périodiques, c'est le modèle de Mori-Tanaka (MTres) qui donne les résultats les plus proches, hormis pour les contraintes transverses  $\sigma_{zz}$  (qui sont faibles et très variables) et pour le facteur de rupture moyen. Toutefois, on notera que le facteur de rupture moyen est peu représentatif des sollicitations subies par la matrice. En effet, l'approche à champ complet prédit l'apparition des premières microfissures dès 75 MPa ; alors que si l'on se fie au facteur de rupture moyen, le pli peut tenir jusqu'à 117 MPa au minimum.

**Tableau II-14 : Contraintes moyennes (en MPa) et facteur de résistance, sous contrainte transverse de 100 MPa**

Formulation / Modèle		Résine				Fibres		
		$\langle\sigma_{xx}\rangle$	$\langle\sigma_{yy}\rangle$	$\langle\sigma_{zz}\rangle$	1/<R>	$\langle\sigma_{xx}\rangle$	$\langle\sigma_{yy}\rangle$	$\langle\sigma_{zz}\rangle$
Champ complet	Carré 0°	37,1	72,4	22,6	47,5 %	-29,4	117,3	-13,7
	Carré 45°	36,0	92,0	0,2	85,4 %	-28,5	106,2	0,0
	Hexagonal 0°	35,9	82,5	9,5	61,3 %	-28,9	113,0	-8,5
	Hexagonal 45°	36,6	83,3	10,4	72,4 %	-28,7	113,9	-7,3
Champ moyen	MTres	36,3	85,3	7,7	81,0 %	-28,8	111,7	-28,8
	MTfib	29,2	63,1	11,8	56,0 %	-23,1	129,2	-23,1
	KE	33,4	75,0	10,6	68,9 %	-26,5	120,0	-26,5

### 3.5 Conclusion

Une comparaison extensive des approches à champ moyen (modèles de Mori-Tanaka et autocohérent) et à champ complet (homogénéisation périodique utilisant les éléments finis) a été menée. La méthode d'homogénéisation périodique a été implémentée, pour le cas d'un pli composite unidirectionnel, à l'aide de Comsol Multiphysics. Deux réseaux périodiques (carré et hexagonal) ont été étudiés, sous deux orientations typiques de chacun. Les simulations ont été faites en tridimensionnel et l'on a observé une influence significative du maillage longitudinal sur les résultats (pour la formulation KUBC notamment), malgré la grande longueur des fibres. Des optimisations du calcul restent possibles en utilisant par exemple les déformations planes généralisées et en optimisant la taille du maillage, mais cette méthode reste très coûteuse en temps de calcul par rapport aux méthodes à champ moyen (calculs 100 à 1000 fois plus longs). En outre, au vu des résultats, il serait pertinent de prendre en compte l'aspect aléatoire des microstructures réelles.

L'orientation du réseau par rapport à la direction de sollicitation a une forte influence sur les propriétés effectives (transverses notamment) et surtout sur les états mécaniques locaux. Ce constat témoigne d'un effet d'anisotropie transverse, très sensible avec le réseau carré, qui est dû à la périodicité du réseau et n'est donc pas observé sur les microstructures réelles, très aléatoires. De manière générale, les configurations présentant le plus faible écartement inter-fibres dans la direction de sollicitation sont les plus favorables à la reprise d'efforts par les fibres, ce qui se traduit par une meilleure rigidité et des contraintes plus faibles dans la matrice. Paradoxalement, ce sont ces zones de faible épaisseur de la matrice qui sont souvent le plus critiques pour l'initiation de la rupture ; cependant, lorsque le réseau est mal orienté par rapport à la direction de sollicitation, on peut également observer de forts risques de rupture loin des fibres.

Pour les configurations étudiées, on a mis en évidence la pertinence du modèle de Mori-Tanaka en termes de calcul des propriétés effectives et des contraintes moyennes dans les constituants. Ce constat n'est toutefois pas généralisable, a priori, aux plis présentant des taux de renforts plus importants, pour lesquels le modèle autocohérent semble plus adapté. Le gros avantage des méthodes à champ complet est qu'elles permettent de calculer la dispersion des états mécaniques à l'échelle microscopique, qui se révèle très importante. On constate en effet que l'utilisation de la moyenne sur les états mécaniques et les facteurs de résistance masque un certain nombre de phénomènes très locaux, dans la phase continue (résine) notamment, lesquels jouent un rôle important dans l'initiation de la rupture du pli. D'après les résultats, on peut établir (de façon très empirique et approximative) que les premières microfissures dans la matrice apparaissent deux fois plus tôt que ne le prévoit le modèle de Mori-Tanaka. Une exception notable est la traction longitudinale, pour laquelle les états de contraintes dans la matrice sont très homogènes et surtout, très faibles.

### 3.6 Perspectives : quelques mots-clés pour aller plus loin

Les travaux présentés dans ce mémoire se sont focalisés sur deux approches de modélisation multi-échelles: l'approche à champ moyen et l'approche à champ périodique, lesquelles ont chacune leurs avantages et inconvénients. Toutefois, il convient de donner au lecteur quelques éléments d'information sur les méthodes annexes, qui permettraient de pousser plus avant ces investigations.

Les méthodes "à champs moyens" ont montré leurs limites en termes de prédictions des contraintes locales, en particulier lorsqu'on s'intéresse à la résine, qui est la phase continue du matériau. Les variations locales du champ de contraintes dans cette phase ne peuvent pas être représentées par ces modèles, même en jouant sur le choix du milieu ambiant (i.e., du modèle). Ceci est dû principalement au fait que ces contraintes sont calculées en considérant la résine comme une inclusion, mais également aux interactions directes entre particules (qui sont négligées). Une amélioration importante de ce modèle serait donc de revenir au problème d'Eshelby inhomogène (inclusion diluée), afin de calculer cette fois le champ de contraintes *extérieure* à l'inclusion. Cette approche à champ extérieur est discutée dans [Chen et Papanthasiou, 2004], parmi d'autres. Elle peut être reliée à la méthode TFA (Transformation Field Analysis) développée notamment dans les travaux de Dvorak [Dvorak, 1992]. Cette dernière englobe aussi la classe des modèles "à n-sites" (évoquée dans [Chaboche et al, 1998 ; Molinari et El Mouden, 1996] notamment), pour lesquels on considère l'interaction directe entre plusieurs inclusions, mais qui sont néanmoins difficiles à résoudre analytiquement.

D'autre part, la méthode à champ périodique proposée ici peut être largement améliorée, en définissant directement des conditions périodiques aux bords d'une unique cellule périodique, ce qui permet un gain de temps très significatif. La méthode EF<sup>2</sup> présentée par [Débordes et al., 1985] permet également de résoudre directement ces problèmes, en définissant des éléments finis possédant des degrés de liberté macroscopiques et microscopiques (périodiques). La méthode des cellules permet également de résoudre ce type de problèmes périodiques (voir par exemple une application aux plis composites UD dans [Düster et al., 2008 ; Aboudi et al., 2003]).

Si l'on souhaite tenir compte du caractère aléatoire de la microstructure des matériaux composites, on utilisera plutôt une approche à champ complet. Cependant, [Moulinec et Suquet, 1998] ont également proposé une autre méthode, basée sur la transformée de Fourier rapide (FFT) et sur des éléments du formalisme de Green, qui permet de résoudre ce type de problèmes directement avec des images de la microstructure, sans maillage du VER.

## 4 CONTRAINTES LOCALES DE FABRICATION

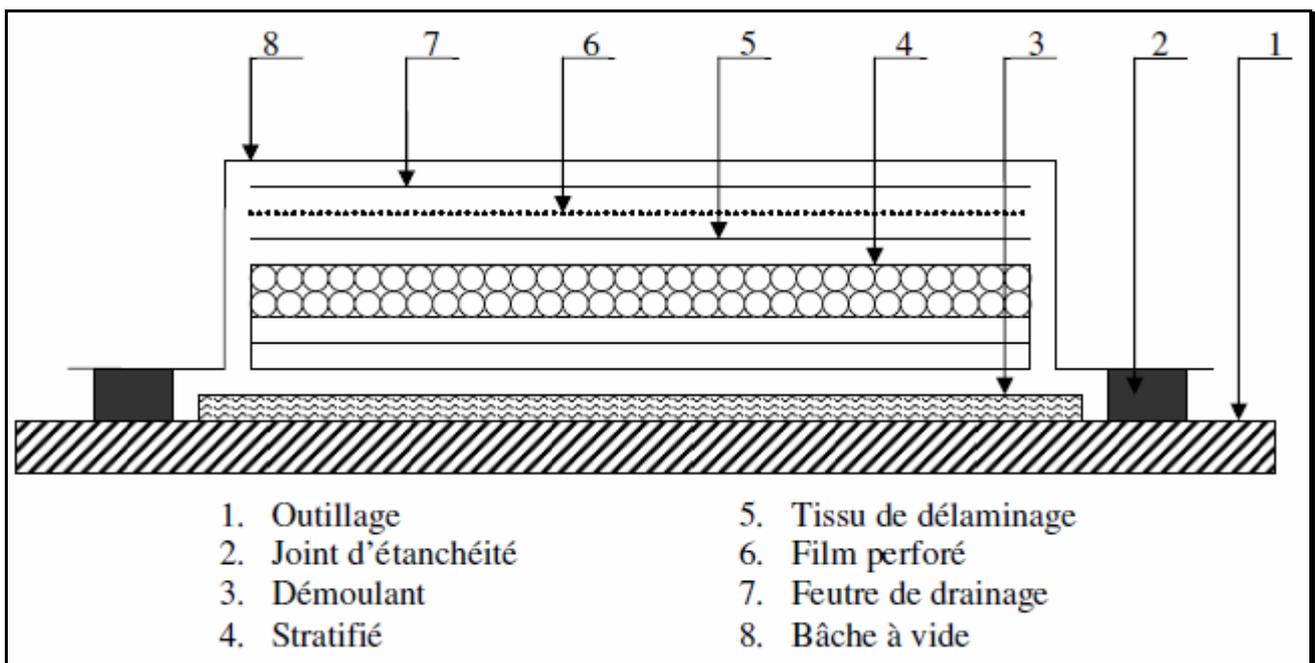
### 4.1 Positionnement de l'étude

Les chapitres précédents ont montré la pertinence des modèles de transition d'échelles (modèle de Mori-Tanaka et modèle autocohérent), pour prédire les états de contraintes *moyens* dans les constituants, sous sollicitation macroscopique connue. Il a été démontré que les différents modèles aboutissaient à des résultats proches (hormis peut-être, pour la pénétration d'humidité) et que le modèle autocohérent donnait une estimation fiable des contraintes *moyennes* subies par les constituants. En outre, il a été démontré que les calculs pouvaient être considérablement simplifiés (et donc accélérés), en considérant les bandes renforçantes comme des disques fins, sans que cela nuise de manière significative à la qualité des résultats. Ceci permet notamment d'utiliser le modèle autocohérent classique, qui est bien connu (contrairement au modèle « autocohérent généralisé » proposé dans la partie I). Ces simplifications rendent également possibles des calculs plus extensifs, et le suivi de l'évolution du composite pour des cycles de sollicitations complexes.

Dans ce chapitre, la procédure de transition d'échelles sera donc généralisée afin de modéliser le développement des contraintes résiduelles locales lors de la fabrication du composite. Ce phénomène est un sujet d'étude de premier plan lorsqu'on s'intéresse aux matériaux composites, comme peut en témoigner l'abondante littérature sur le sujet [Parlevliet et al., 2006, 2007a, 2007b ; Wisnom et al., 2006 ; Kim et Hahn, 1989 ; White et Kim, 1998]. Le constat général est que la fabrication des matériaux composites génère des contraintes résiduelles importantes pouvant amener à une dégradation de la santé matière. C'est pourquoi la recherche de conditions optimales de cuisson et de composition des stratifiés, permettant de minimiser ces contraintes résiduelles, est un enjeu industriel et scientifique de premier plan.

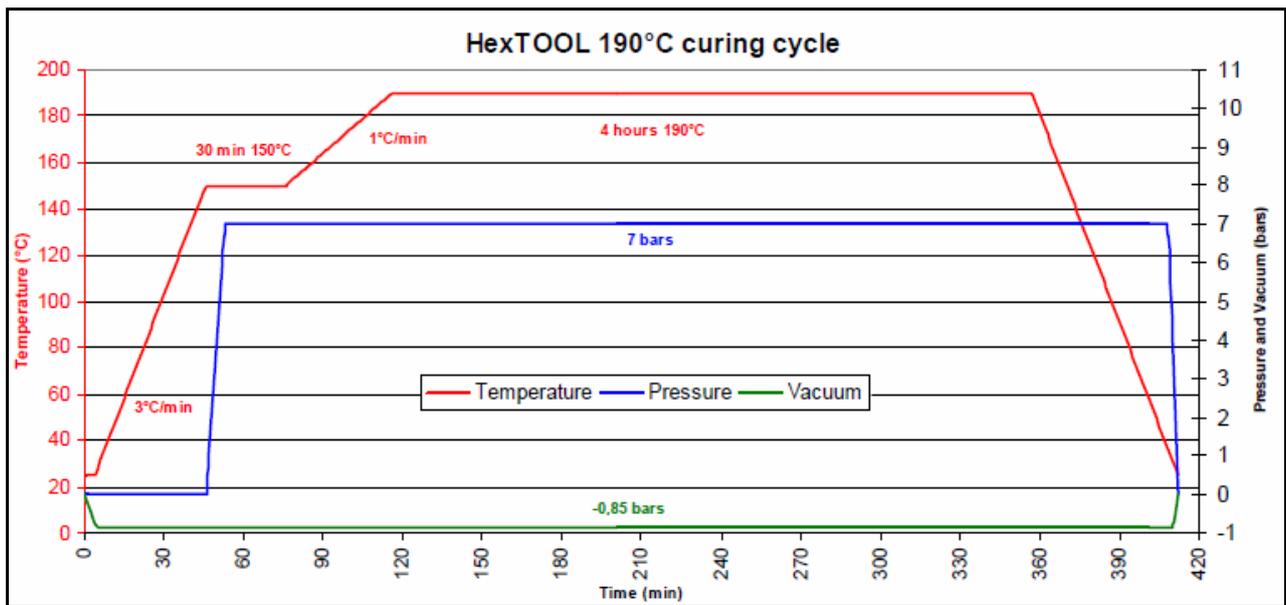
Rappelons tout d'abord les conditions de mise en œuvre des plis composites préimprégnés, et du Hextool en particulier. Comme leur nom l'indique, les préimprégnés sont constitués de tissus fibreux qu'on a imprégné de résine crue, et qui possèdent une grande souplesse avant la cuisson. Ils sont conservés à froid pour ne pas initier la réaction de polymérisation de la résine. Ces tissus sont cuits en étuve ou en autoclave.

Figure II-21 : Mise en œuvre de la cuisson par autoclave [Msallem, 2008]



Pour la cuisson en autoclave (figure II-21), les plis sont placés sur un moule sur lequel on a préalablement étalé un agent démoulant ou un tissu de démoulage. Plusieurs tissus sont ensuite ajoutés sur le stratifié, notamment afin de récupérer les excès de résine. Une bâche à vide est déposée sur le tout et scellée, puis l'ensemble est placé dans l'autoclave où il subira un cycle de température et de cuisson. Le cycle conseillé par Hexcel pour le Hextool est donné dans la figure II-22. La pression de consolidation (7 bars) permet le compactage des plis et limite la formation de porosités ; le vide appliqué sous la bâche (-0,85 bars) sert à évacuer les gaz de cuisson et favorise une bonne répartition de la résine. Après la cuisson, la pièce est démoulée puis subit une post-cuisson à haute température (220 °C pour le Hextool) afin d'améliorer sa  $T_g$ .

Figure II-22 : Cycle de cuisson recommandé pour le Hextool [Hexcel coms, 2008]



Notons que ce procédé se distingue des procédés de type RTM (Resin Transfer Molding), pour lequel les tissus secs sont imprégnés directement dans l'autoclave. Ces procédés permettent d'obtenir des pièces de meilleure qualité, mais nécessitent un outillage plus important (moule et contre-moule notamment).

Les recherches menées au cours des vingt dernières années, revues par [Parlevliet et al., 2006, 2007a, 2007b], ont permis de déterminer un certain nombre de processus jouant un rôle dans la création des contraintes résiduelles de fabrication :

- i) Le retrait thermique du matériau dû à son refroidissement à la fin de la fabrication,
- ii) Le retrait chimique de la résine au cours de la réaction de polymérisation,
- iii) L'évolution des propriétés thermo-mécaniques de la résine en fonction de la température et de l'avancement de la cuisson,
- iv) La cinétique de cuisson de la résine, en fonction du cycle de température appliqué,
- v) Les disparités de température au sein des structures épaisses dues à l'exothermie de la réaction de polymérisation, et les gradients de propriétés ainsi générés,
- vi) Le comportement visco-élastique de la résine aux premiers temps de la fabrication et à haute température, qui peut amener une relaxation partielle des contraintes,
- vii) La présence de porosités dans le matériau, qui dépend notamment de la pression de compactage appliquée.

L'effet du retrait thermique a été étudié dans le chapitre 2 avec des hypothèses très simplificatrices, ce qui a permis de noter la prédominance de ce phénomène sur la création des contraintes internes. Le retrait chimique, obéissant à des lois similaires, peut également être appréhendé assez facilement par le modèle mis en place. Cependant, la prise en compte de ces deux seuls processus ne permet pas de représenter fidèlement l'évolution du matériau au cours de la fabrication ; ils conduisent à

une surestimation des contraintes internes, puisque les propriétés mécaniques de la résine cuite et à température ambiante sont supérieures à celles observées durant la fabrication ( $T > T_{\text{ambiante}}$  et  $\chi < 1$ ).

La détermination des propriétés thermo-mécaniques de la résine est donc un point préalable à la modélisation, qui peut s'avérer fondamental pour la fiabilité des résultats. De même, la caractérisation de la cinétique de cuisson est nécessaire pour faire le lien entre les propriétés, les états mécaniques observés et le temps écoulé depuis le début du cycle de fabrication. A partir de ces propriétés, les états mécaniques subis par le composite et ses constituants ont pu être calculés. On s'est ici intéressé aux effets du retrait thermo-chimique sur les contraintes locales, en prenant en compte une évolution des propriétés de la résine au cours de la cuisson. Un cycle simplifié de cuisson à 180 °C a été choisi pour la démonstration, avec trois chargements macroscopiques typiques de la cuisson des composites. Les contraintes multi-échelles ont alors été calculées tout au long de la fabrication, ainsi qu'après le démoulage du composite (on relâche les contraintes macroscopiques).

## 4.2 Propriétés mécaniques et cinétique de cuisson de la résine

Un point-clé de cette étude est la modélisation fine du comportement de la résine tout au long de la fabrication. En effet, contrairement aux fibres qui sont relativement inertes (propriétés constantes, pas de retrait chimique), la résine subit de fortes transformations physicochimiques au cours de la fabrication. Une modélisation fine de la fabrication implique donc le suivi de la thermo-cinétique de cuisson, d'une part, et des propriétés mécaniques associées de la résine, d'autre part. La fiche de données de la résine Hexply® M61 [Hexcel M61DS, 2008] fournit quelques informations générales sur la résine. Cependant, sa caractérisation mécanique (essais DMA), et thermocinétique (essais DSC), ont été menées par Svetlana Terekhina et Katarzyna Szymanska, respectivement, dans le cadre du projet LCM-Smart [LTDS/ECL coms, 2010a, 2010b]. Les résultats présentés dans cette section sont essentiellement issus de ses travaux. Les premiers résultats obtenus sur la cinétique de cuisson sont décrits pour information, cependant on utilisera une cinétique et un cycle de cuisson différents de ceux de la résine BMI.

### 4.2.1 Thermo-cinétique de cuisson

#### 4.2.1.1 Modèles phénoménologiques

La résine M61 utilisée ici est une bismaléimide renforcée afin d'améliorer sa dureté. Rappelons que les bismaléimides (et les polyimides) sont des polymères de la classe des thermo-durcissables, caractérisés par de bonnes propriétés mécaniques (comparables à celles des époxydes) et une excellente tenue à la température (jusqu'à 260 °C en service) [Hexcel PT, 2010]. La température de transition vitreuse du Hextool sec, après post-cuisson, est ainsi de 275 °C.

Comme tous les thermo-durcissables, la résine est « cuite » à une température de l'ordre de 200 °C, processus au cours duquel elle polymérise. Cette réaction de polymérisation est généralement exothermique, si bien qu'il est possible de calculer une variation d'enthalpie du système. On peut dès lors définir l'avancement de cuisson  $\chi$  comme le rapport de l'enthalpie dégagée depuis le début de la cuisson, sur l'enthalpie totale de cuisson :

$$\chi = \frac{\Delta H}{\Delta H_{\text{tot}}} \quad (\text{II-5})$$

Cet avancement est une variable d'état, elle permet de paramétrer la cinétique de cuisson mais également les propriétés thermiques et mécaniques de la résine. La vitesse de réaction est dès lors définie comme une fonction de l'avancement et de la température :

$$\dot{\chi} = \frac{d\chi}{dt} = f(\chi, T) \quad (\text{II-6})$$

Cette cinétique de réaction est, le plus souvent, décrite de manière phénoménologique, bien que l'approche mécanistique soit parfois utilisée. La dépendance à la température est généralement représentée par une loi d'Arrhénius :

$$K = k \cdot \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right), \quad (\text{II-7})$$

avec  $E_a$  l'énergie d'activation de la réaction,  $R$  la constante des gaz parfaits et  $k$  une constante. La dépendance à l'avancement de cuisson est un peu plus complexe à représenter : naturellement, la vitesse de réaction tend vers 0 quand l'avancement tend vers 1. Cependant, du fait que la réaction est exothermique, elle tend à s'entretenir d'elle-même (réaction autocatalytique) ; à température  $T$  donnée, la courbe de  $f(\chi, T)$  a donc une allure sigmoïdale. Cette allure est le plus souvent représentée par le modèle de Kamal et Sourour [Kamal et Sourour, 1973] qui s'écrit de la façon suivante :

$$\dot{\chi} = (K_1 + K_2 \chi^m)(1 - \chi)^n, \quad (\text{II-8})$$

où  $n$  et  $m$  sont des paramètres d'ajustement (aussi appelées « constantes catalytiques »), et  $K_1$  et  $K_2$  des fonctions Arrhéniennes. L'ordre global de la réaction est alors  $m+n$ . Ce modèle a l'avantage d'être simple puisqu'il nécessite le calcul de seulement 6 constantes. Il est cependant possible d'approcher plus finement la cinétique de cuisson en utilisant le modèle de Bailleul et al. [Bailleul et al., 1997], qui suppose une séparation des variables  $\chi$  et  $T$  :

$$\dot{\chi} = K(T) \cdot G(\chi), \quad (\text{II-9})$$

avec cette fois  $G(\chi)$  un polynôme, et  $K(T)$  une fonction d'Arrhénius.

Une autre méthode pour estimer la cinétique de réaction a été proposée par Vyazovkin et al. ([Vyazovkin, 1997 ; Sbirrazzuoli et Vyazovkin, 2002]). Cette méthode « sans modèle » (Model-Free Kinetics, MFK) postule que l'énergie d'activation qui intervient dans la fonction Arrhénienne  $K(T)$  est dépendante du taux de conversion :

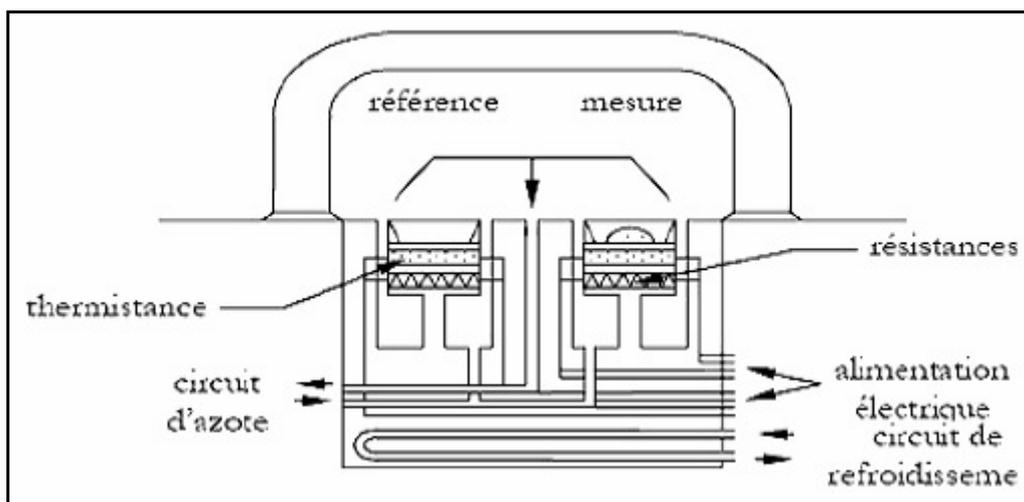
$$\dot{\chi} = \exp\left(-\frac{E_a(\chi)}{RT}\right) \cdot G(\chi) \quad (\text{II-10})$$

Cette dépendance permettrait, d'après les auteurs, de tenir compte des différents mécanismes d'activation moléculaire intervenant au cours de la réaction, et de décrire de façon physiquement cohérente la cinétique de polymérisation de la résine pour des essais isothermes et anisothermes. Elle donnerait également de bons résultats même en présence de phénomènes complexes tels que la vitrification de la résine. L'évolution de  $E_a(\chi)$  est calculée à partir d'essais isothermes ou anisothermes, la méthode dite « iso-conversionnelle » [Vyazovkin, 1997] permettant de lier les deux types d'essais.

#### 4.2.1.2 Détermination expérimentale de la cinétique de cuisson

La technique mise en œuvre pour déterminer la cinétique de cuisson de la résine M61 est la calorimétrie différentielle à balayage, plus communément appelée DSC (Differential Scanning Calorimetry). L'appareillage est constitué de deux coupelles identiques, l'une servant de référence et l'autre accueillant un échantillon de quelques milligrammes de résine (cf figure II-23). Les deux coupelles sont régulées en température à l'aide de deux résistances chauffantes, d'un circuit de refroidissement, et de deux thermo-couples. L'appareil mesure le différentiel de flux thermique à délivrer aux coupelles afin de maintenir une même température de consigne dans les deux coupelles. L'ensemble du circuit est mis sous azote afin d'évacuer les gaz de cuisson et d'éviter des phénomènes d'oxydation.

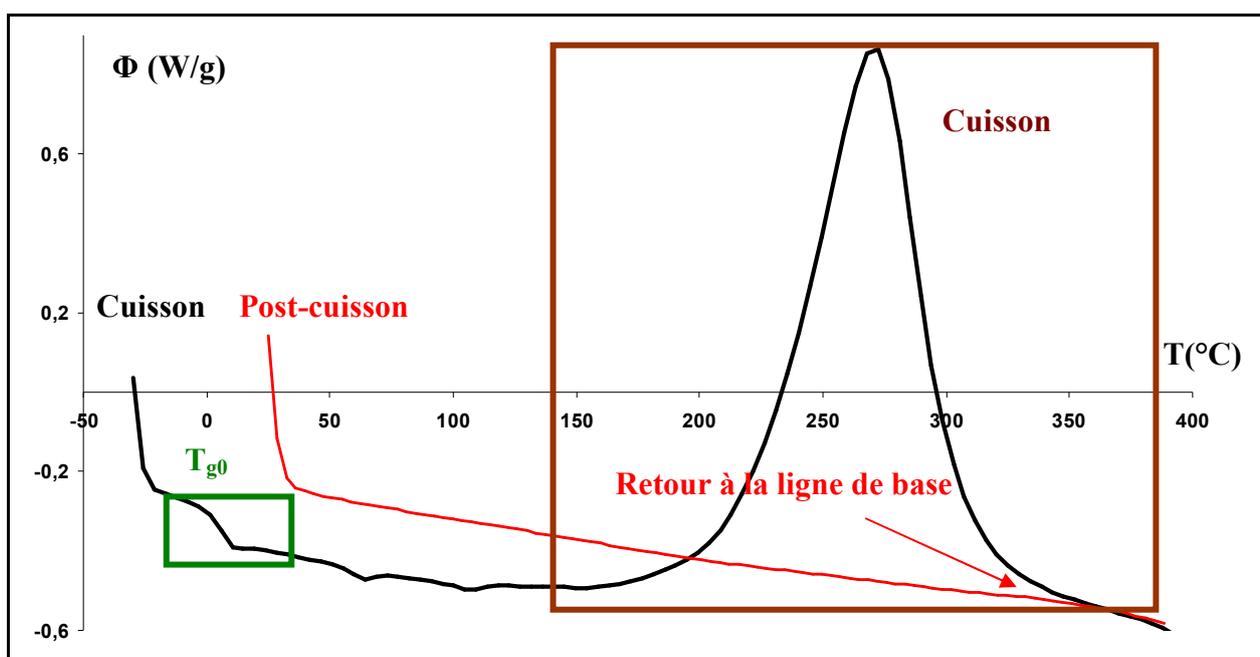
Figure II-23 : Principe du DSC [Msallem, 2008]



Le calorimètre est utilisé sous deux modes différents : un mode isotherme (différentes températures imposées), et un mode anisotherme (montées en température à différentes vitesses). Les courbes résultantes permettent de caler la cinétique de cuisson par fitting aux moindres carrés. Le calorimètre permet aussi de déterminer l'enthalpie de réaction et la chaleur spécifique de la résine.

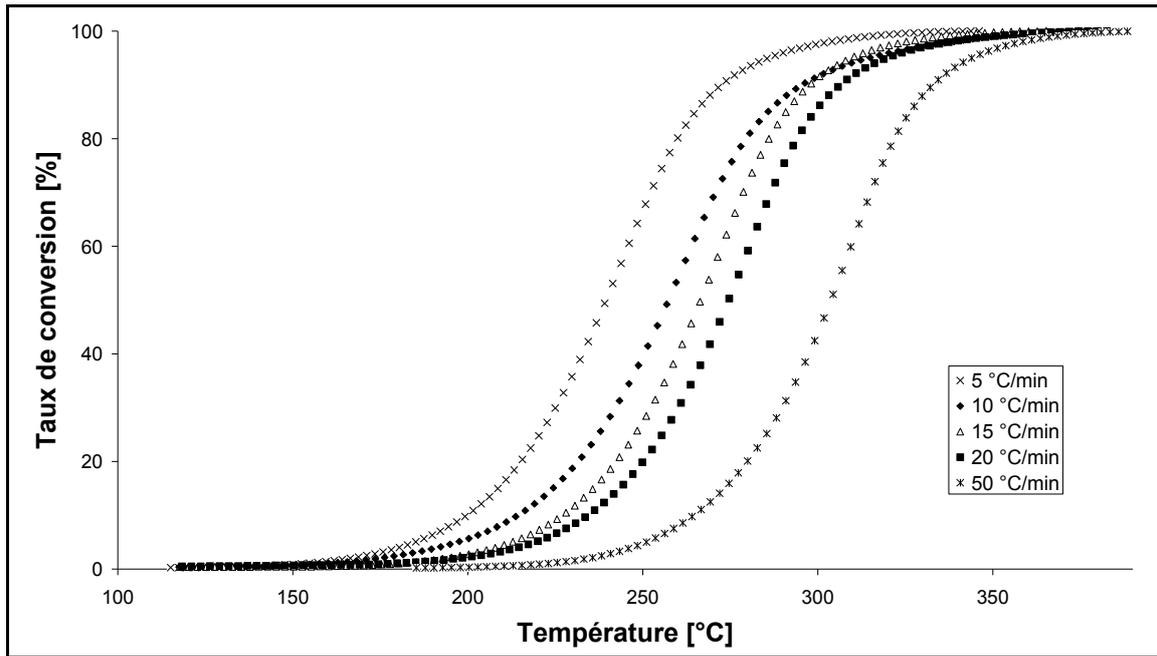
Le flux thermique différentiel mesuré par le calorimètre, pour une montée en température à 15 °C/min, est résumé sur la figure II-24 ci-dessous. Ce flux est négatif au début de la cuisson (puissance consommée par la montée en température), puis on observe un pic exothermique correspondant à la polymérisation de la résine. Le décrochement de la courbe aux premiers instants correspond à la transition vitreuse de la résine (voir sous-section suivante). Une deuxième montée en température (post-cuisson) a été opérée sur le même échantillon : on obtient cette fois une courbe bien lisse, sans pic exothermique, ce qui montre que l'échantillon est totalement cuit et donne également accès à la chaleur spécifique de la résine.

Figure II-24 : Flux différentiel mesuré par DSC en mode anisotherme (15 °C/min) pour la résine M61 [LTDS/ECL coms, 2010b]



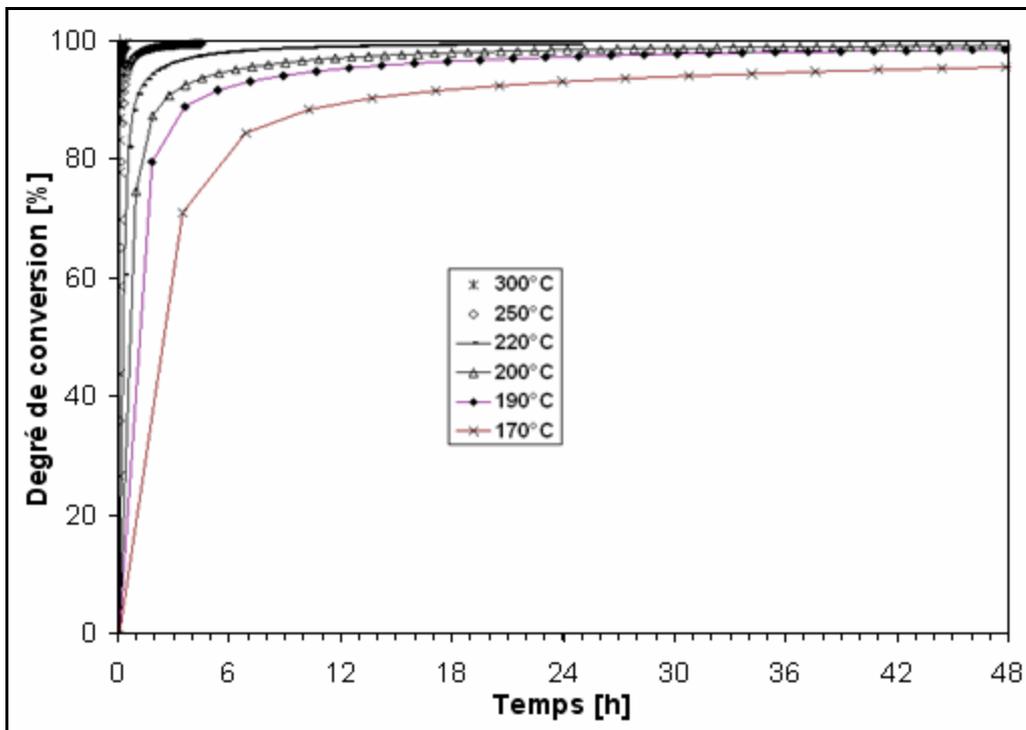
A partir de ces données, il est possible de calculer l'enthalpie dégagée par la réaction et, par suite, le taux de conversion de la réaction. Ce taux de conversion est donné sur la figure II-25 ci-dessous, pour différentes vitesses de montée en température.

Figure II-25 : Taux de conversion de la résine M61, mesuré par DSC en mode anisotherme [LTDS/ECL coms, 2010b]



Par ailleurs, à partir de ces essais anisothermes, la méthode MFK (méthode de Vyazovkin) permet d'estimer l'évolution du taux de conversion pour différentes isothermes, comme le montre la figure II-26 ci-dessous.

Figure II-26 : Cinétique de cuisson de la résine M61 à différentes isothermes, d'après la méthode de Vyazovkin [LTDS/ECL coms, 2010b]



Notons que d'après ces résultats, le cycle de cuisson recommandé par Hexcel (4h à 190 °C, avec court un palier à 150 °C) aboutit à une cuisson très incomplète, le taux de conversion étant de l'ordre de à 80 %. La résine bismaléimide M61 étant une résine « haute température », un cycle de post-cuisson à 220 °C est nécessaire pour compléter la réticulation.

Les résultats ci-dessus étaient encore incomplets et non consolidés au moment de la mise en place des calculs, et n'ont pas été utilisés. A la place, on a utilisé la cinétique de cuisson de la résine M21, déterminée par [Msallem et al., 2008], et résumée par l'équation et le tableau ci-dessous :

$$\dot{\chi} = K(T).G(\chi) = K_{ref} \cdot \exp\left(-A\left(\frac{T_{ref}}{T} - 1\right)\right) \times \sum_{i=0}^{i=8} b_i \cdot \chi^i \quad (II-11)$$

**Tableau II-15 : Paramètres de la cinétique de cuisson de la résine M21 (modèle de Bailleul) [Msallem et al., 2008]**

K(T)	T <sub>ref</sub> [K]	K <sub>ref</sub> [s <sup>-1</sup> ]	A						
	493,13	0,00156	15,44						
G(χ)	b <sub>0</sub>	b <sub>1</sub>	b <sub>2</sub>	b <sub>3</sub>	b <sub>4</sub>	b <sub>5</sub>	b <sub>6</sub>	b <sub>7</sub>	b <sub>8</sub>
	0,44	10,03	-80,35	364,46	-1041,60	1831,43	-1907,14	1076,45	-253,73

Notons que cette cinétique est beaucoup plus rapide que celle de la résine BMI, car elle correspond à une résine cuite à température moyenne (180°C) ; ainsi, le temps de gel à 180°C est de 55 minutes environ et le degré de conversion est de 99 % au bout de seulement 2h de cuisson. Ceci simplifie beaucoup la simulation de la fabrication, puisqu'il n'est plus nécessaire de considérer un cycle de post-cuisson. Toutefois, les simulations devront être réétudiées avec une cinétique plus adaptée, dans des travaux ultérieurs.

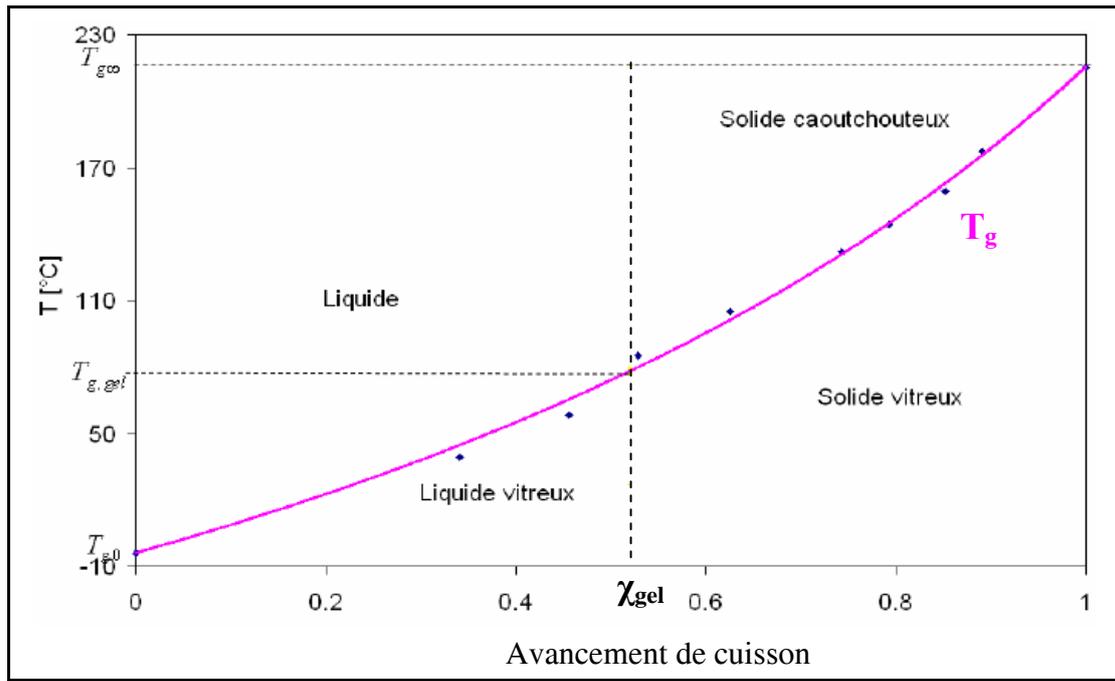
#### 4.2.2 Propriétés mécaniques de la résine

La résine subit de fortes variations d'état au cours de la fabrication, ce qui se traduit par des évolutions extrêmes de ses propriétés mécaniques. Notamment, le module de Young et le CET évoluent fortement en fonction des deux variables d'état que sont la température et l'avancement de la cuisson. Dans la mesure où ces propriétés influent directement sur les propriétés du composite, il est nécessaire de les caractériser au mieux.

A l'état « cru » (avant cuisson), les macromolécules ne sont liées entre elles que par des liaisons hydrogène, ce qui leur laisse une grande mobilité : la résine est liquide, son comportement est essentiellement visqueux. Durant la polymérisation, des liaisons covalentes se forment entre les sites actifs des macromolécules, ce qui a pour effet de limiter très fortement leurs mouvements. La résine passe alors dans un état de solide caoutchouteux, puis vitreux, ce qui se traduit par une brusque augmentation du module élastique. Le diagramme Conversion-Température-Transformation (CTT) présenté dans la figure II-27, résume ces différentes phases pour une résine époxy (Hexcel M21).

On définit le point de gel comme le point à partir duquel la résine devient solide et où les mouvements macromoléculaires sont bloqués. L'avancement de cuisson correspondant sera noté  $\chi_{gel}$ . Néanmoins, si on dépasse une certaine température, dite de transition vitreuse ( $T_g$ ), les mouvements macromoléculaires restent possibles (quoique de manière limitée). Une relaxation partielle des contraintes est alors possible (par visco-élasticité). Au cours de la cuisson, cette température passe de  $T_{g0}$  (inférieure à 0 °C) à  $T_{g\infty}$ , en passant par  $T_{g, gel}$ . Ainsi, il est communément admis que les contraintes résiduelles se forment à partir de ce point [Bogetti, 1992 ; Adolf et Chambers, 1997 ; Adolf et al., 2004] ; ou bien, de manière équivalente, que le seuil de plasticité de la résine est nul avant ce point [Msallem, 2008].

Figure II-27 : Diagramme CTT de la résine M21 [Msallem, 2008]



L'expression de la température de transition vitreuse  $T_g$  est communément reliée au degré de conversion, à l'aide de l'équation de Di Benedetto modifiée par Pascault et Williams [Pascault et Williams, 1990] :

$$\frac{T_g - T_{g0}}{T_{g\infty} - T_{g0}} = \frac{\lambda \cdot \chi}{(1 - (1 - \lambda)\chi)}, \quad (\text{II-12})$$

avec  $T_{g0}$  la température de transition vitreuse de la résine crue,  $T_{g\infty}$  celle de la résine totalement cuite et  $\lambda$  un paramètre adimensionnel. La température de transition vitreuse de la résine M61 crue est généralement inférieure à  $0^\circ\text{C}$ , tandis que celle de la résine M61 totalement cuite est de l'ordre de  $275^\circ\text{C}$  d'après la documentation Hexcel. Les essais de DSC menés par Katarzyna Szymanska devraient permettre d'estimer prochainement les paramètres de l'équation de Di Benedetto. Pour les simulations suivantes, on a considéré que la résine entrait dans un état solide vitreux dès le point de gel ( $T_{\text{cuisson}} < T_{\text{gel}}$ ).

#### 4.2.2.1 Module visco-élastique

La technique expérimentale utilisée pour caractériser le comportement visco-élastique de la résine est l'analyse mécanique dynamique (DMA : Dynamic Mechanical Analysis). Typiquement, en analyse statique, on soumet une éprouvette de section utile donnée, à une déformation statique donnée ; la relation contrainte-déformations donne alors directement le module de Young du matériau. Au contraire, pour la DMA, on soumet l'éprouvette à une déformation (ou un chargement) de cisaillement périodique :

$$\begin{aligned} \varepsilon^* &= \varepsilon_m \cdot \exp(i\omega t) \\ \sigma^* &= \sigma_m \cdot \exp(i(\omega t + \delta)) \end{aligned} \quad (\text{II-13})$$

Ce cisaillement est imposé par deux disques, l'un fixe et l'autre tournant, entre lesquels on place l'échantillon de résine. Ceci permet notamment de mesurer la rhéologie de la résine même lorsqu'elle est à l'état liquide, ce qui ne serait pas possible pour des sollicitations de traction. En raison des phénomènes visqueux agissant dans l'éprouvette, les contraintes sont déphasées d'un angle  $\delta$  par rapport aux déformations imposées. Le module de cisaillement complexe s'écrit alors :

$$G^* = \frac{\sigma^*}{\varepsilon^*} = G' + i.G'' = \frac{\sigma_m}{\varepsilon_m} (\cos\delta + i.\sin\delta), \quad (\text{II-14})$$

et le module de rigidité complexe se déduit simplement via la relation (II-15) en supposant un coefficient de poisson constant [Bogetti, 1992] :

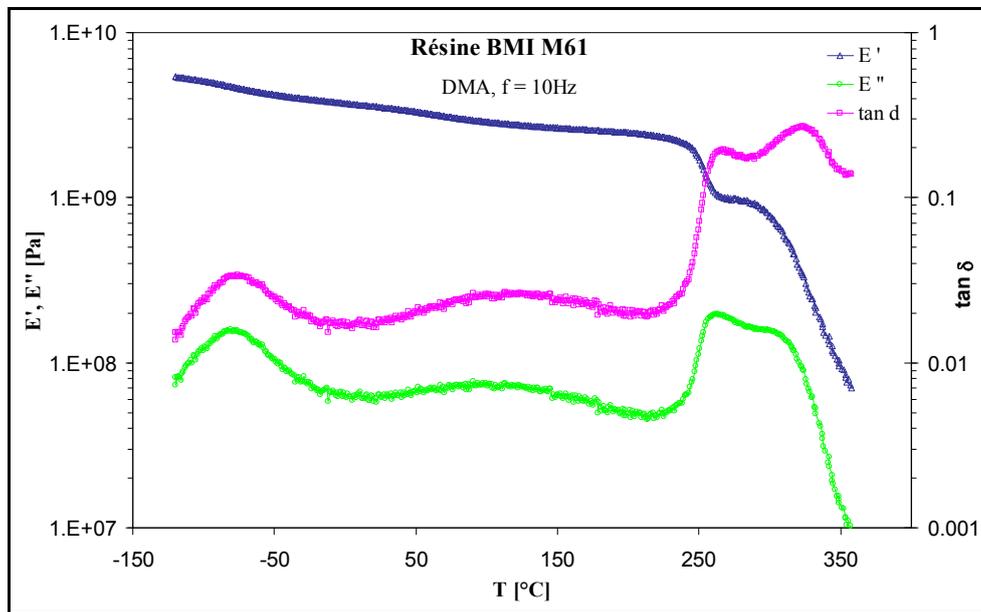
$$E^*(T, \chi) = G^*(T, \chi) \times 2(1 + \nu) \quad (\text{II-15})$$

La partie réelle correspond au module élastique instantané  $E'$  (storage modulus) qui caractérise l'énergie élastique stockée, et la partie imaginaire correspond au module de perte  $E''$  (loss modulus) qui caractérise l'énergie dissipée sous forme de chaleur. L'angle de déphasage se caractérise par la relation (II-13) ; il vaut  $0^\circ$  pour un matériau purement élastique et  $90^\circ$  pour un matériau visqueux.

$$\tan \delta = \frac{E''}{E'} \quad (\text{II-16})$$

La figure II-28 ci-dessous présente l'évolution des modules  $E'$ ,  $E''$  et de  $\tan \delta$  pour la résine cuite, en fonction de la température. Les faibles valeurs de  $\tan \delta$  (de l'ordre de  $10^{-2}$ ) montrent que les effets visqueux sont négligeables entre  $-100^\circ\text{C}$  et  $200^\circ\text{C}$ , malgré une vitesse de sollicitation assez importante (10 Hz). Cependant, la viscosité augmente fortement lorsqu'on s'approche de la température de transition vitreuse, à partir de  $225^\circ\text{C}$ . L'évolution des modules aux hautes températures, en deux phases, suggère la coexistence de deux phases dans la résine. On a dans un premier temps une légère diminution du module élastique et une augmentation du module visqueux (aux alentours de  $225^\circ\text{C}$ ), puis un palier, et enfin une forte chute des deux modules à partir de  $300^\circ\text{C}$  (soit  $T_{g\infty}$ ). Le palier confirme la bonne tenue de la résine bismaléimide aux hautes températures, malgré une rigidité sensiblement plus faible à partir de  $240^\circ\text{C}$ .

Figure II-28 : Propriétés visco-élastiques mesurées de la résine M61 cuite [LTDS/ECL coms, 2010a]



La courbe de DMA ci-dessus donne le module élastique de la résine cuite, en fonction de la température. Cette courbe a été interpolée entre  $0^\circ\text{C}$  et  $240^\circ\text{C}$ , par un polynôme d'ordre 5 dont les coefficients sont donnés dans le tableau II-16 ci-dessous ( $R^2 = 0,9997$ ).

Tableau II-16 : Coefficients du polynôme d'interpolation de  $E'(T, \chi = 100\%)$

$a_0$ [GPa]	$a_1$ [GPa/( $^\circ\text{C}$ )]	$a_2$ [GPa/( $^\circ\text{C}$ ) <sup>2</sup> ]	$a_3$ [GPa/( $^\circ\text{C}$ ) <sup>3</sup> ]	$a_4$ [GPa/( $^\circ\text{C}$ ) <sup>4</sup> ]	$a_5$ [GPa/( $^\circ\text{C}$ ) <sup>5</sup> ]
+3,713	-5,725.10 <sup>-3</sup>	-8,225.10 <sup>-5</sup>	+7,172.10 <sup>-7</sup>	-1,439.10 <sup>-9</sup>	-7,394.10 <sup>-13</sup>

L'évaluation du module instantané de la résine en fonction de l'avancement de cuisson est une affaire plus délicate. Plusieurs modèles ont été proposés dans la littérature afin de modéliser le durcissement de la résine en fonction de l'avancement. Le modèle le plus couramment utilisé suppose une évolution linéaire du module de rigidité en fonction de l'avancement (à température donnée). De manière alternative, on peut supposer un module de Young nul avant le point de gel, puis évoluant linéairement après ce point. Bogetti et Gillespie (1990, 1992) utilisent une version améliorée de ce modèle linéaire, où un terme supplémentaire permet de tenir compte du phénomène de compétition entre la relaxation visqueuse et le durcissement de la résine [Dillman et Seferis, 1987]. Le module instantané de la résine s'écrit en fonction de l'avancement  $\chi$  comme suit :

$$E' = (1 - \chi_{\text{mod}}) \cdot E'_0 + \chi_{\text{mod}} \cdot E'_\infty + \gamma \chi_{\text{mod}} (1 - \chi_{\text{mod}}) (E'_\infty - E'_0), \quad (\text{II-17})$$

avec

$$\chi_{\text{mod}} = \frac{\chi - \chi_{\text{gel}}}{\chi_{\text{max}} - \chi_{\text{gel}}}.$$

$E'_0$  et  $E'_\infty$  sont les modules instantanés de la résine crue et cuite,  $\chi_{\text{gel}}$  et  $\chi_{\text{max}}$  les avancements au point de gel et à la fin de la cuisson, et  $\gamma$  est un coefficient de pondération compris entre -1 et 1.

Une autre approche performante pour modéliser le durcissement de la résine, est basée sur la théorie de la percolation [Stauffer, 1985]. Plusieurs études [Adolf et Chambers, 1997 ; Msallem et al., 2010] ont montré que cette théorie statistique donnait une bonne évaluation des mouvements macromoléculaires dans les polymères thermo-durcissables. L'un des corollaires de cette théorie est que le module élastique à l'équilibre peut s'écrire :

$$E \propto (p - p_{\text{gel}})^{8/3}, \quad (\text{II-18})$$

où  $p$  est la probabilité de percolation, i.e. la probabilité qu'un lien existe entre deux macromolécules, et  $p_{\text{gel}}$  sa valeur au point de gel. Cette probabilité est égale au carré de l'avancement de cuisson [Krajcinovic et Mallick, 1995]. En conséquence, le module élastique à l'équilibre peut s'écrire :

$$E(T, \chi) = E_\infty(T) \left( \frac{\chi^2 - \chi_{\text{gel}}^2}{1 - \chi_{\text{gel}}^2} \right)^{8/3}, \quad (\text{II-19})$$

avec  $E_\infty(T)$  le module élastique à l'équilibre de la résine totalement cuite. On suppose que ce module à l'équilibre est équivalent au module instantané, approximation qui se vérifie au moins pour la résine cuite (les temps de relaxation sont très longs). Aux premiers temps après le point de gel, cette approximation peut être erronée ; d'autant plus que la température de cuisson peut alors être proche ou supérieure à la température de transition vitreuse  $T_g$ . Ainsi, lorsque l'écart entre  $T$  et  $T_g$  est trop faible ( $T_g - T < 20$  °C), il existe un écart non négligeable entre  $E'$  et  $E$  et l'on ne peut plus utiliser la théorie de percolation. Il faut corriger le module de Young par une fonction  $f(T_g)$ , comme le fait par exemple Msallem [Msallem et al., 2010]. Ce modèle ne sera pas proposé ici, en l'absence de données sur la température de transition vitreuse ; les premières données disponibles sur la résine M61 indiquent que cette hypothèse sera probablement à revoir ultérieurement.

Si on suppose que le module élastique de la résine crue est nul, tous ces modèles ne sont déterminés que par deux paramètres : le module élastique cuit  $E_\infty(T)$ , et l'avancement au point de gel  $\chi_{\text{gel}}$ . Pour les résines thermo-durcissables, la littérature donne une valeur typique de 50 % pour les résines époxy ; ici, on a utilisé la valeur déterminée par Msallem pour une résine M21, soit 52 %. Les résultats de ces différents modèles en termes de module élastique de la matrice, sont résumés sur la figure II-29. Les contraintes dues au retrait chimique de la résine seront, grossièrement, proportionnelles à l'aire sous chaque courbe (soit l'intégrale de  $E'(\chi) \cdot d\chi$  entre 0 et 1). On note ainsi des différences très significatives entre ces modèles ; le modèle linéaire aboutissant à la rigidité la

plus forte, et le modèle issu de la théorie de percolation donne la plus faible rigidité. Le modèle de Dillman et Seferis est intermédiaire au modèle bilinéaire et à la théorie de percolation ; il est confondu avec ce premier si  $\gamma = 0$ . [Msallem et al., 2008] ont calculé les contraintes internes dues aux gradients de cuisson dans une plaque UD épaisse, laissée libre. Ils montrent ainsi que le modèle linéaire surestime les contraintes transverses de plus de 15 % par rapport au modèle issu de la théorie de percolation.

Figure II-29 : Propriétés élastiques calculées de la résine M61 à température ambiante

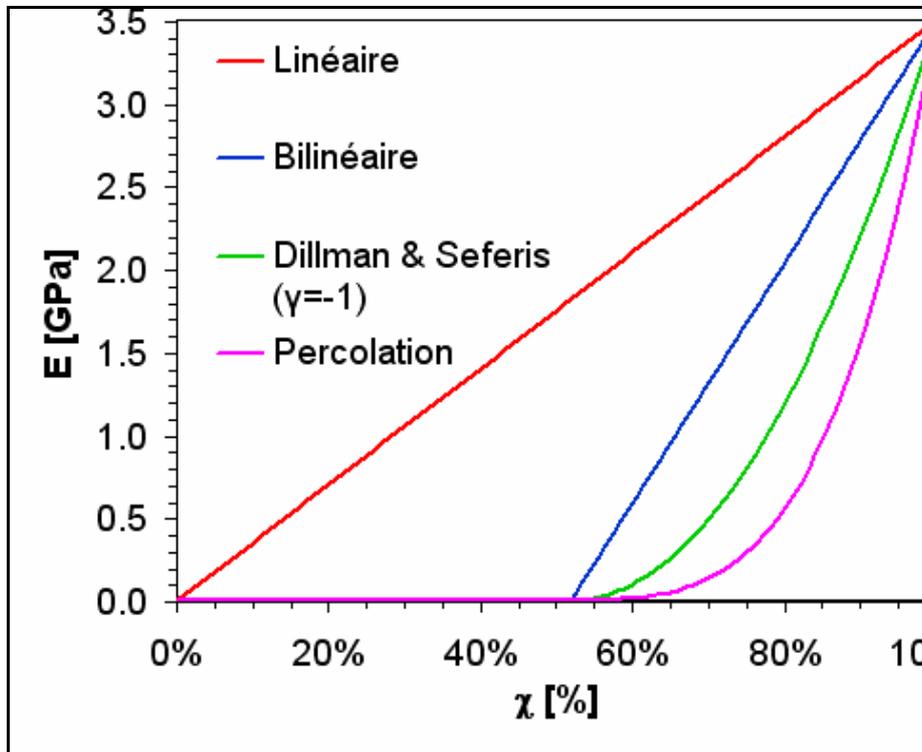
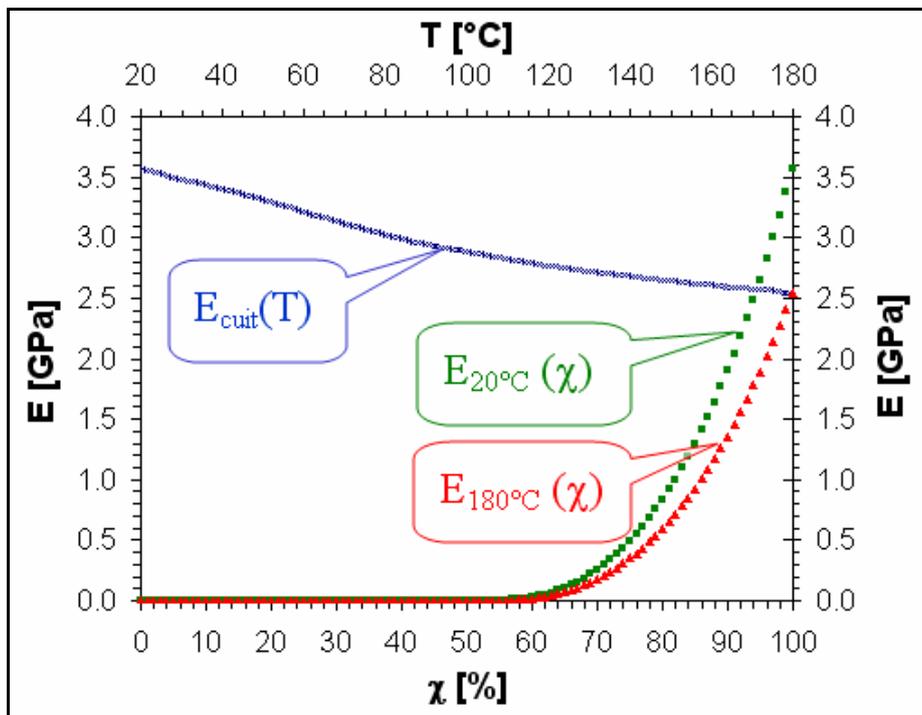


Figure II-30 : Propriétés élastiques calculées de la résine M61 à température ambiante



On retiendra finalement que c'est le modèle issu de la théorie de percolation (équation II-16) qui aboutit aux modules élastiques et aux contraintes internes les plus faibles. La figure II-30 ci-dessus synthétise l'allure des courbes  $E'(\chi, T)$  pour la résine bismaléimide.

#### 4.2.2.2 Coefficient d'expansion thermique

Comme on le montrera, les contraintes résiduelles dans le composite après la fabrication sont essentiellement d'origine thermique. Or, le coefficient d'expansion thermique de la résine évolue également durant la fabrication, avec la température et avec le changement d'état du polymère. Les données disponibles sur la dilatation thermique sont malheureusement assez limitées. Hexcel a fourni les valeurs du CET de la résine cuite, sur trois gammes de température ; une interpolation quadratique a été opérée à partir des centres des gammes (voir Tableau II-17). Cette interpolation reste néanmoins assez discutable, en raison du faible nombre de points et également du fait qu'une interpolation linéaire donne aussi des résultats satisfaisants ( $R^2 = 0,9971$ ). En outre, l'allure de la courbe expérimentale de  $\alpha_3(T)$  pour le Hextool (voir figure I-18), suggère une évolution linéaire du CET de la résine entre 20 °C et 120 °C, puis une forte augmentation à partir de 120 °C.

Tableau II-17 : Coefficient d'expansion thermique de la résine M61 [Hexcel coms, 2010] et interpolation

20 < T < 70 °C	70 < T < 120 °C	120 < T < 170 °C	Interpolation
41,4 .10 <sup>-6</sup> /°C	49,3 .10 <sup>-6</sup> /°C	58,8.10 <sup>-6</sup> /°C	$\alpha_{\text{cuit}}(T) = 35,465 + 0,1191*T + 0,0003*T^2$

La dilatation thermique de la résine non cuite a été modélisée en supposant une évolution linéaire du CET ; il s'agit en fait d'une simple loi des mélanges entre l'état cru et l'état cuit :

$$\alpha(T) = \chi \cdot \alpha_{\text{cuite}}(T) + (1 - \chi) \cdot \alpha_{\text{cru}}(T) \quad (\text{II-20})$$

Comme le CET de la résine à l'état cru n'a pas été déterminé, on l'a estimé de façon arbitraire à 4 fois la valeur du CET à l'état cuit. Cependant ceci n'impacte pas les contraintes et déformations locales : en effet, durant la phase de chauffe, la résine est à l'état liquide ( $\chi < \chi_{\text{gel}}$ ) et ne stocke pas de contraintes ; et durant la phase de refroidissement, elle est totalement cuite. En conséquence, seul le CET à l'état cuit influe sur les contraintes locales. Toutefois, ce constat n'est valable que pour la cinétique qui a été choisie ici, et est probablement faux pour la cinétique de cuisson réelle de la résine BMI.

#### 4.2.2.3 Coefficient de retrait chimique

La transformation de phase subie par la résine au cours de la cuisson, correspondant à la formation de liaison covalentes et un resserrement des macromolécules, entraîne une diminution de son volume. Cette diminution de volume est supposée linéaire en fonction du taux de cuisson  $\chi$ . On peut dès lors définir un Coefficient de Retrait Chimique (CRC) volumique ou linéaire pour la résine. Ce retrait volumique évolue entre 1 à 3 % pour les époxydes, et jusqu'à 6 % pour les polyesters [Bogetti et Gillespie, 1992 ; Zarrelia et al., 2006]. A partir du retrait volumique, on obtient le retrait linéaire en divisant simplement par trois, en raison de l'isotropie de la matrice. En outre, on préférera parler de Coefficient d'Expansion Chimique, à valeur négative, afin de garder la convention utilisée pour la dilatation thermique. On notera ce coefficient  $\eta$ .

N'ayant pas de données expérimentales pour la résine BMI, on utilisera les valeurs déterminées par Msallem et al. sur la résine M21, c'est à dire  $\eta = -1,9$  % (soit 5,7 % de retrait volumique). Notons que même si ce coefficient est pris constant pour la résine, il sera susceptible d'évoluer pour le composite, en raison du durcissement de celle-ci. Ajoutons que le retrait chimique ne joue pas un rôle très important dans la création de contraintes résiduelles, mais qu'il impacte très significativement les diminutions d'épaisseur de la pièce durant la fabrication (retrait dans la direction normale).

## 4.3 Implémentation du modèle

### 4.3.1 Hypothèses de départ

Les propriétés cinétiques et mécaniques de la résine M61 étant déterminées, de même que celles des fibres AS4, on peut les injecter dans le calcul des contraintes locales de fabrication. Précisons tout d'abord le cadre dans lequel cette étude sera menée. On s'intéresse aux contraintes multi-échelles dans un matériau composite doté d'une microstructure morphologique semblable au Hextool, lors d'un cycle de cuisson simple et sous sollicitations (macroscopiques ou pseudo-macroscopiques) uniformes. Notamment, on s'affranchira ici des gradients de température et de degré de cuisson en considérant une pièce fine (épaisseur inférieure à 5 mm). On ne s'intéressera pas non plus aux possibles effets structuraux, qui font l'objet de la troisième partie de ce mémoire.

D'autre part, on supposera que le composite et ses constituants ont un comportement thermo-chimio-élastique non-linéaire, que l'on décrit via l'équation différentielle suivante :

$$\dot{\sigma}^k = \mathbf{L}^k : (\dot{\varepsilon}^k - \alpha^k \dot{T} - \eta^k \dot{\chi}), k = \{i, I\} \quad (\text{II-21})$$

La température et l'avancement seront considérés homogènes dans le composite. De plus, on ne s'intéressera pas ici à la reprise en eau du composite, puisque celle-ci est très lente et que l'humidité ambiante est nulle durant tout le cycle de cuisson (cuisson sous vide ou atmosphère neutre).

Notons qu'on ne s'intéressera pas aux effets de visco-élasticité et de fluage du matériau, bien que ces effets puissent avoir un effet significatif sur les contraintes résiduelles [Kim et White, 1997, 1998 ; Kim et Hahn, 1989]. Notamment, ils peuvent conduire à une relaxation des contraintes locales, durant la cuisson, mais également pendant la phase de refroidissement, si celle-ci est suffisamment lente, ou au cours de la post-cuisson ( $T$  proche de  $T_g$ ). On se contentera ici de considérer que toutes les contraintes créées après le point de gel sont stockées et non relaxées, ce qui aboutit à une estimation par excès de ces contraintes.

### 4.3.2 Implémentation

Les deux figures ci-dessous (II-31 et II-32) synthétisent le programme de calcul des états locaux, dans le cas où les variables d'états et les champs mécaniques sont macroscopiquement uniformes.

Figure II-31 : Architecture du programme

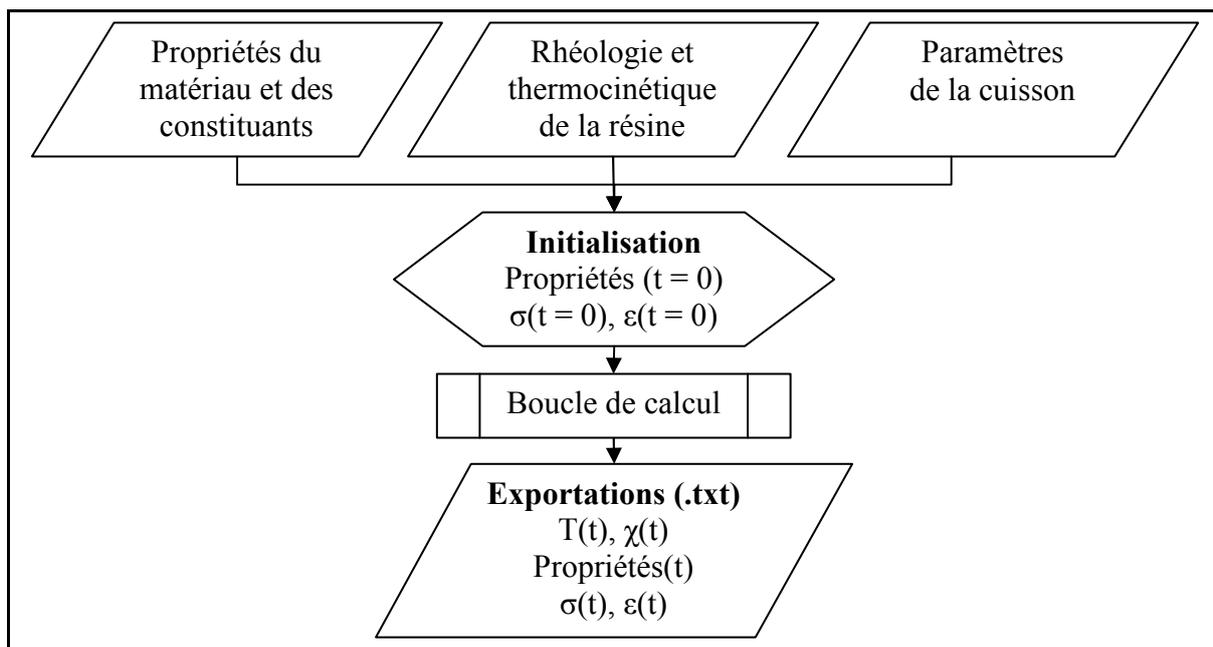
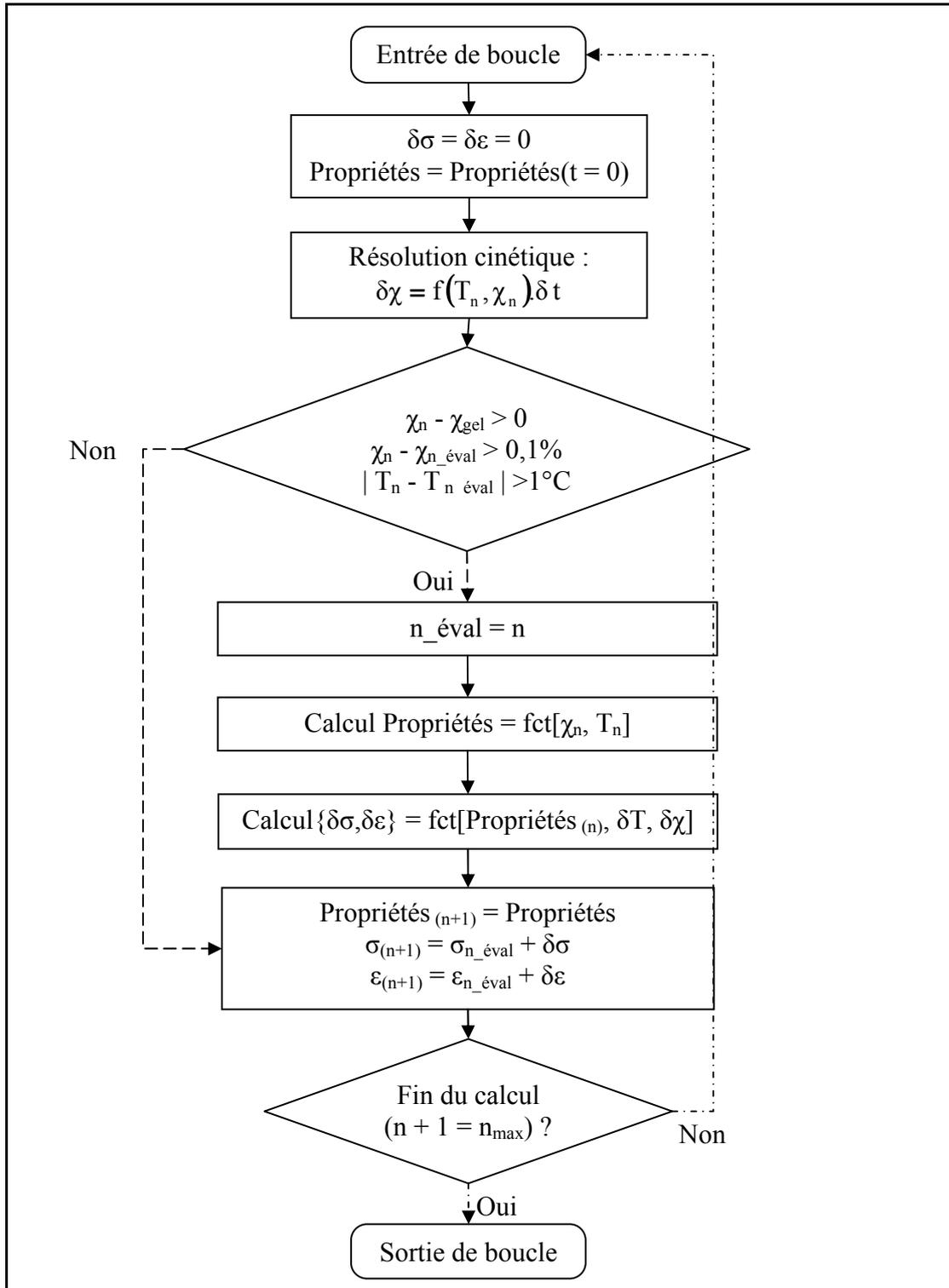


Figure II-32 : Détail de la boucle de calcul



A l'intérieur de la boucle de calcul, on a donc 3 étapes : la résolution de la cinétique de cuisson tout d'abord, les calculs d'homogénéisation ensuite, et enfin le calcul des contraintes locales. Comme les propriétés matériau évoluent tout au long de la fabrication, on utilise les équations II-6 et II-21 sous forme incrémentale, de même que pour la localisation des états mécaniques.

$$\begin{cases} T_{n+1} = T_n + \delta T \\ \chi_{n+1} = \chi_n + \delta \chi \end{cases} \text{ et } \delta \chi = K(T_n) G(\chi_n) \delta t \quad (\text{II-22})$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^k = \boldsymbol{\varepsilon}_n^k + \delta\boldsymbol{\varepsilon}^k \\ \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k = \boldsymbol{\sigma}_n^k + \delta\boldsymbol{\sigma}^k \end{cases} \text{ et } \delta\boldsymbol{\sigma}^k = \mathbf{L}_n^k : (\delta\boldsymbol{\varepsilon}^k - \boldsymbol{\alpha}_n^k \delta T - \boldsymbol{\eta}_n^k \delta\chi), k = i, I \quad (\text{II-23})$$

$$\delta\boldsymbol{\sigma}^i = \mathbf{B}^i : \delta\boldsymbol{\sigma}^I + \mathbf{b}^{\text{thermo},i} \delta T + \mathbf{b}^{\text{chimio},i} \delta\chi \quad (\text{II-24})$$

La convention utilisée ici est de calculer les propriétés et les états mécaniques à partir de l'état n. Une alternative est d'utiliser les propriétés évaluées à l'étape n + 1, ce qui mène à des résultats a priori différents. En définissant un nombre important de pas de temps, on réduit cet écart de façon très importante si bien qu'il devient négligeable, mais cela se fait au détriment de la rapidité de calcul.

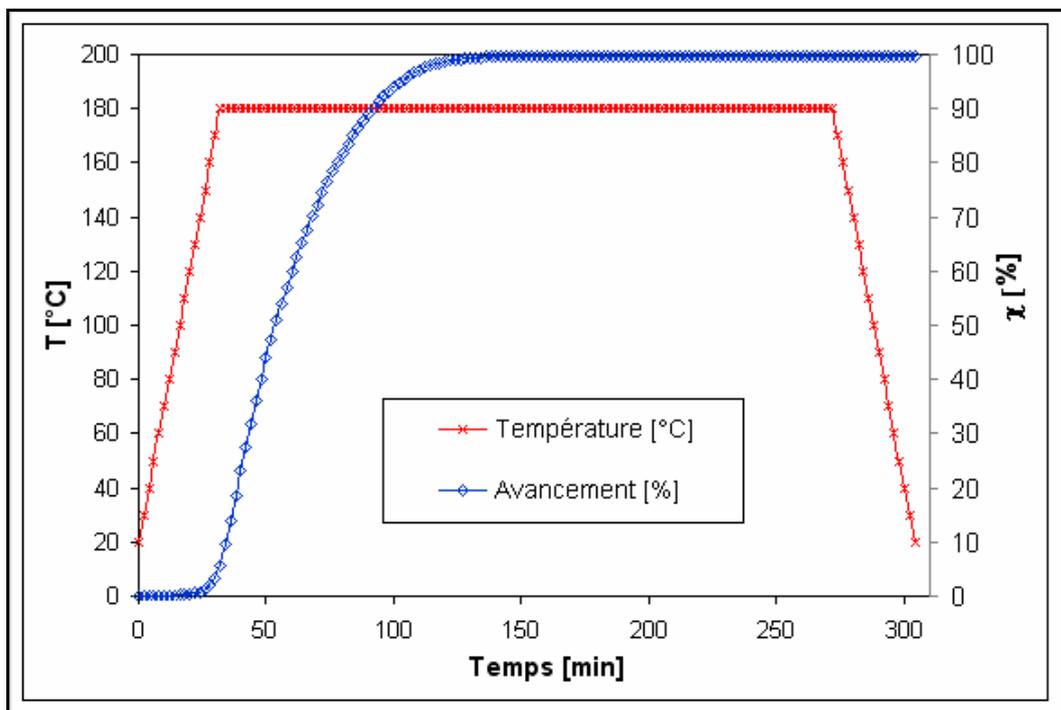
Il est possible d'optimiser le temps de calcul, en n'évaluant les propriétés et les contraintes que lorsque les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- le degré de cuisson est supérieur au degré de gel de la matrice, qui est généralement retenu comme le point de formation des contraintes ;
- la variation de température est supérieure à 1 °C ;
- la variation du degré de cuisson est supérieure à 0,1 %.

Ces conditions permettent de réduire de plus de 2/3 le temps de calcul, en négligeant notamment le début et la fin de la cuisson (avant refroidissement), lorsque le degré d'avancement est statique ou inférieur à l'avancement de gel. Le point de gel est donc considéré comme l'initiation des contraintes et déformations.

Le cycle de cuisson est défini préalablement au calcul. Ici, on s'est intéressé à un cycle simplifié de cuisson à 180 °C, avec des montées et descentes en température à 5 °C/min et sans post-cuisson. Les évolutions de la température et de l'avancement pour ce cycle sont résumées par la figure II-33 ci-dessous. Le temps de gel est d'environ 55 minutes, la résine est donc liquide ( $\chi < \chi_{\text{gel}}$ ) jusqu'à la fin de la montée en température. En outre, elle est totalement cuite ( $\chi = 100\%$ ) au moment du refroidissement.

Figure II-33 : Cycle de cuisson à 180 °C



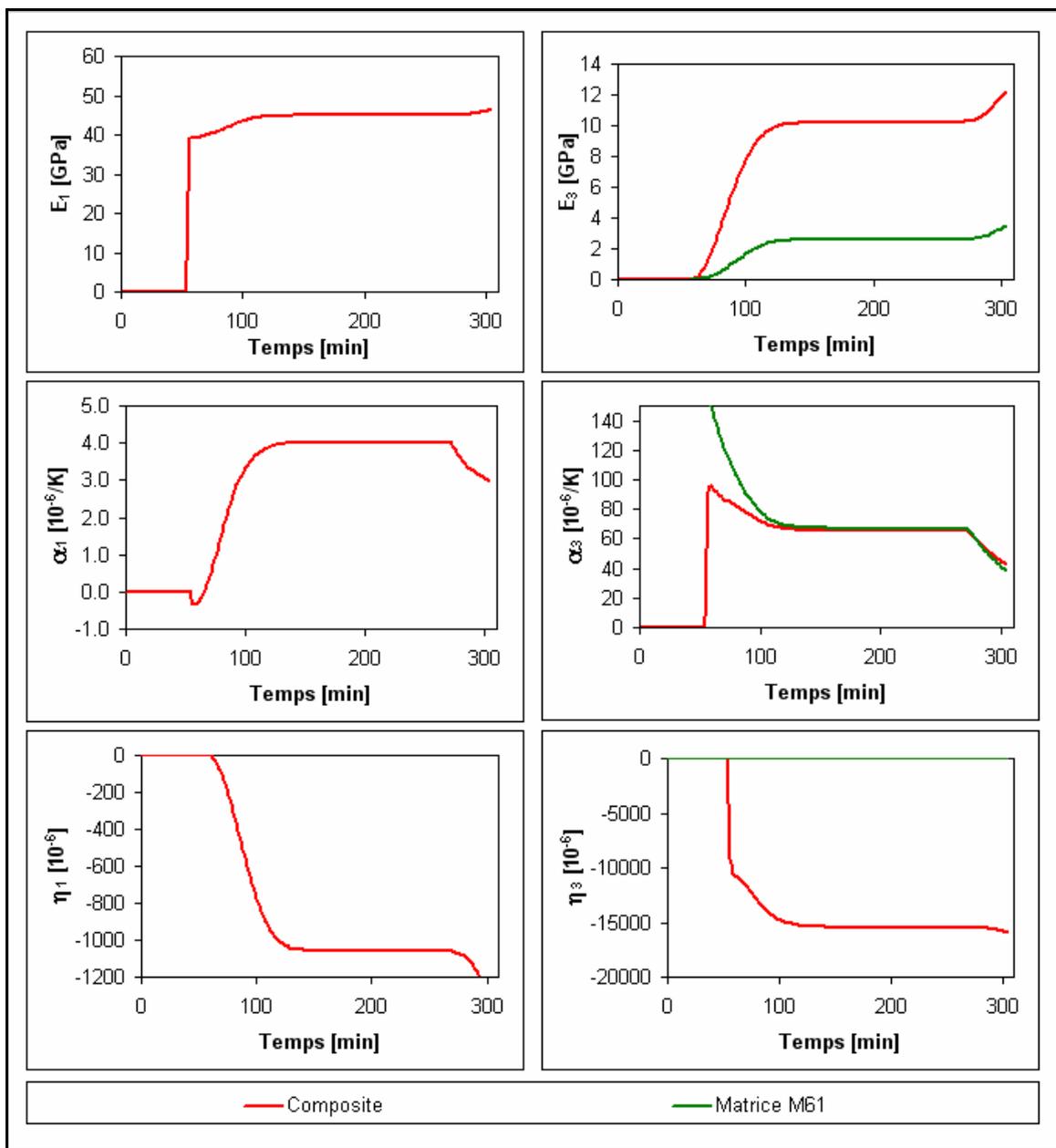
La cinétique de cuisson étant établie, les contraintes et déformations macroscopiques sont résolues à partir de l'équation II-23 et des contraintes appliquées au composite. Préalablement à ces calculs, il

faut évaluer les propriétés effectives du composite et de ces constituants, à l'aide des méthodes d'homogénéisation.

#### 4.4 Evolutions des propriétés effectives du composite

La procédure d'homogénéisation basée sur le modèle autocohérent (EK-EK), décrite dans la partie précédente, a été utilisée afin de calculer les propriétés effectives. Cette homogénéisation est l'étape la plus coûteuse en temps de calcul. Comme le programme nécessite le calcul d'une bonne centaine de propriétés effectives, il est nécessaire d'optimiser cette homogénéisation au maximum. Ainsi, on a considéré que les bandes renforçantes avaient une forme circulaire et non une forme étirée. On peut ainsi calculer analytiquement le tenseur de Morris (équation I-111), ce qui permet un gain de temps important (plus de 20 secondes par itération) et permet aussi d'utiliser le modèle autocohérent classique, qui est bien connu, au lieu du modèle généralisé. Le temps de calcul est alors d'environ 10 secondes par itération, soit quelques minutes seulement pour tout le programme.

Figure II-34 : Evolutions des propriétés du composite au cours de la fabrication



La figure II-34 ci-dessus résume l'évolution des principaux modules thermo-chimio-élastiques du composite, tout au long de la fabrication. Rappelons que les coefficients d'expansion thermo-chimiques affichés ici sont instantanés, si bien que les déformations libres sont obtenues en intégrant ces coefficients sur la variation de température et le degré de conversion. Les propriétés avant le point de gel ne sont pas calculées, mais fixées à zéro ; de ce fait, on observe un saut brutal de certains modules au point de gel, alors que les autres évoluent régulièrement à partir de zéro. Ceci concerne notamment les modules de rigidité dans le plan ( $E_1$  et  $G_{12}$ ), les coefficients de Poisson, ainsi que les coefficients d'expansion hors-plan ( $\alpha_3$  et  $\eta_3$ ).

Le calcul a également été fait en utilisant le modèle de Mori-Tanaka (MTres-MT). On aboutit alors à des évolutions de propriétés similaires, sauf pour les coefficients d'expansion hors-plan, qui suivent l'évolution de ceux de la matrice dès le point de gel. Cette question du comportement juste après le point de gel reste donc très discutable, mais elle joue assez peu sur les résultats car la matrice a alors une rigidité très faible (peu de contraintes créées) et un comportement essentiellement visco-élastique (relaxation rapide des contraintes).

Notons que la boucle de calcul peut également être utilisée afin de construire un tableau de propriétés, en fonction de la température et de l'avancement de cuisson. Ce tableau peut être réutilisé par un autre programme afin de calculer rapidement des états mécaniques locaux, sans refaire les calculs d'homogénéisation qui sont très longs. Il peut aussi être utilisé pour alimenter des calculs par éléments finis, sur des pièces présentant des gradients de température ou de cuisson.

## 4.5 Contraintes résiduelles locales de fabrication

On s'est intéressé au calcul des contraintes de fabrication pour trois contraintes macroscopiques typiques appliquées au composite :

- Cas 1 : Le composite peut se déformer librement, sans contraintes macroscopiques appliquées (cuisson libre). Cette condition correspondrait à celle subie par une plaque cuite dans un moule infiniment souple (polymère par exemple).
- Cas 2 : Les déformations du composite sont libres dans la direction 3, mais totalement bloquées dans le plan du pli (plan 1-2). Cette condition correspondrait à celle d'une plaque cuite dans un moule infiniment rigide et non thermo-dilatant, comme de l'invar par exemple.
- Cas 3 : Les déformations du composite sont libres dans la direction 3, mais dépendent linéairement de la température dans le plan du pli. Cette condition correspondrait à celle d'une plaque cuite dans un moule infiniment rigide et thermo-dilatant, comme de l'acier par exemple.

Dans tous les cas, on a supposé une symétrie des chargements dans les directions 1 et 2, pour obtenir des états mécaniques indépendants de l'orientation  $\Theta$  des bandes (cf. section 2.2), ce qui simplifie l'analyse des résultats. L'effet du vide sous bache et de la pression de compactage (7 bars + 0,85 bars de vide, soit -0,785 MPa), appliqués surtout dans la direction 3, ont été négligés.

Le démoulage de la pièce a également été considéré (pour les deux derniers cas), en ajoutant un dernier incrément de temps. Le démoulage est simplement une libération des contraintes macroscopiques, il suffit donc de définir le dernier incrément de contrainte macroscopique comme :

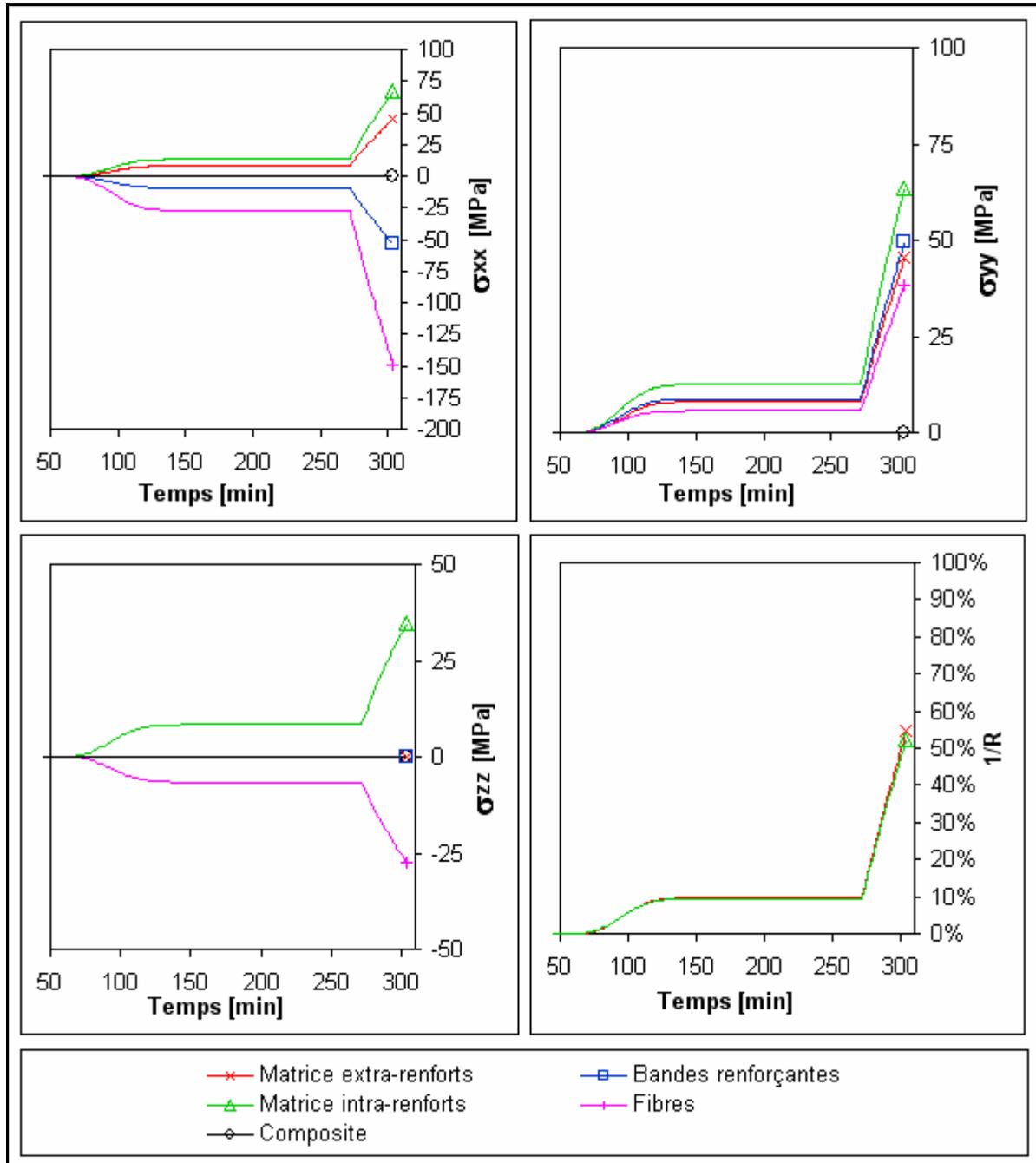
$$\delta\sigma^{\text{démoulage}} = -\sigma^{\text{avant démoulage}} = - \int_{t=0}^{t_{\text{final}}} \dot{\sigma} \cdot dt = - \sum_{n=1}^{(n_{\text{final}} - 1)} \delta\sigma_n \quad (\text{II-25})$$

### 4.5.1 Cas de fabrication 1

Pour ce premier cas de fabrication, on considère que les contraintes macroscopiques sont nulles. L'évolution des contraintes locales est alors donnée dans la figure II-35 ci-dessous. Les contraintes

et déformations résiduelles finales, ainsi que les valeurs du facteur de rupture, sont également données dans le tableau II-18. Les échelles de valeurs utilisées sur ces graphiques seront conservées pour les cas suivants, afin de faciliter la comparaison des résultats.

Figure II-35 : Contraintes résiduelles de fabrication dans le composite, pour le cas de fabrication 1



**Tableau II-18 : Contraintes résiduelles de fabrication dans le composite, pour le cas de fabrication 1**

Echelle	Constituants	Déformations [ $10^{-6}$ ]			Contraintes [MPa]			Rupture
		$\epsilon_{xx}$	$\epsilon_{yy}$	$\epsilon_{zz}$	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$\sigma_{zz}$	1/R
Macro	Composite	-677	-677	-14354	0,0	0,0	0,0	X
Méso	Bandes renforçantes	-676	-678	-13016	-53,9	49,4	0,0	X
	Matrice extra-renforts	-678	-678	-39792	45,3	45,3	0,0	55 %
Micro	Fibres	-676	771	-3997	-149,4	38,3	-27,4	X
	Matrice intra-renforts	-677	-2541	-24476	66,6	63,7	34,9	53 %

Les courbes montrent une claire décomposition des contraintes entre une partie due au retrait chimique et une partie due au retrait thermique. La partie thermique, qui génère environ 3 fois plus de contraintes, prédomine nettement sur la partie chimique. Ajoutons que ces contraintes chimiques sont fortement susceptibles de se relaxer, partiellement ou totalement. Le retrait chimique ne doit cependant pas être négligé, car il joue un rôle important dans la variation d'épaisseur de la pièce (le retrait dans la direction normale est de 1,4 %). En outre, les contraintes dues au retrait chimique restent présentes même si le composite est utilisé à haute température.

A propos des contraintes locales, on peut réitérer certaines des remarques faites sur le comportement multi-échelles du composite lors d'un retrait thermique.

Les constituants microscopiques (fibre et matrice intra-renforts) supportent des contraintes plus importantes, mais plus équilibrées que les constituants mésoscopiques. Ainsi, la matrice intra-renforts supporte des contraintes plus importantes (jusqu'à 67 MPa dans les directions x et y) que la matrice extra-renforts (45 MPa), mais la valeur du facteur de rupture 1/R est comparable aux deux échelles. Cette valeur (55 %) est importante, ce qui montre que les contraintes de cuisson peuvent jouer de façon significative sur la rupture ; tout particulièrement à l'échelle mésoscopique, en raison de la forte irrégularité de la mésostructure.

D'autre part, les éléments rigides subissent des contraintes de compression dans la direction x ; les contraintes sont de -54 MPa pour les bandes renforçantes et de -150 MPa pour les fibres. Ceci pourrait générer des micro- ou méso-flambements. De fait, l'aspect très irrégulier des surfaces observées sur les pièces Hextool, du côté bache à vide, suggèrent qu'il se produit effectivement des méso-flambements durant la fabrication, en plus des défauts initiaux observés sur le préimprégné cru.

Ajoutons que les contraintes de traction subies par les bandes renforçantes dans la direction transverse y, peuvent également s'avérer critiques. En effet, on a considéré ici que les interfaces fibres-matrice étaient parfaites, ce qui n'est pas le cas en réalité. La contrainte à rupture de l'interface fibre-matrice, sous sollicitation transverse, est, le plus souvent, plus faible que celle de la matrice pure ; cette contrainte à la rupture dépend notamment du couple fibre-matrice utilisé (certains couples sont peu compatibles) et du traitement appliqué (fonctionnalisation de surface).

Il est important de rappeler que l'approche utilisée ici permet de calculer les contraintes moyennes dans les constituants, mais ne rend pas compte des variations locales de la micro- ou méso-structure. C'est particulièrement critique pour la mésostructure qui a un aspect très irrégulier, avec présence de « poches résineuses » et de zones de proximité entre bandes d'orientations différentes. Ainsi, les contraintes de cisaillement subies par la résine entre deux bandes orientées différemment,

qui sont aléatoires par nature, ne peuvent être quantifiées par cette approche. Or ces variations aléatoires de contraintes sont fortement susceptibles d'initier des fissures locales, aboutissant à une dégradation des propriétés du composite en service, voire à sa rupture prématurée.

#### 4.5.2 Cas de fabrication 2

Pour ce deuxième cas de fabrication, on considère que les déformations du composite dans le plan sont bloquées (nulles), les déformations hors-plan étant laissées libres. Les incréments de déformation macroscopique sont alors donnés par :

$$\begin{cases} \delta\varepsilon_{11}^I = \delta\varepsilon_{22}^I = 0 \\ \delta\varepsilon_{33}^I = (\alpha_3^I \cdot \delta T + \eta_3^I \cdot \delta\chi) + (\alpha_1^I \cdot \delta T + \eta_1^I \cdot \delta\chi) \times 2 L_{13}^I / L_{33}^I \end{cases} \quad (\text{II-26})$$

Les contraintes locales correspondantes sont présentées sur la figure II-36 ci-dessous. Les contraintes avant démoulage sont représentées par des lignes continues, et les contraintes après démoulage par des marques. Toutes ces contraintes et déformations sont également résumées par le tableau II-19 ci-dessous. Les états mécaniques après démoulage sont en caractères gras.

**Tableau II-19 : Contraintes résiduelles de fabrication dans le composite (avant / après démoulage), pour le cas de fabrication 2**

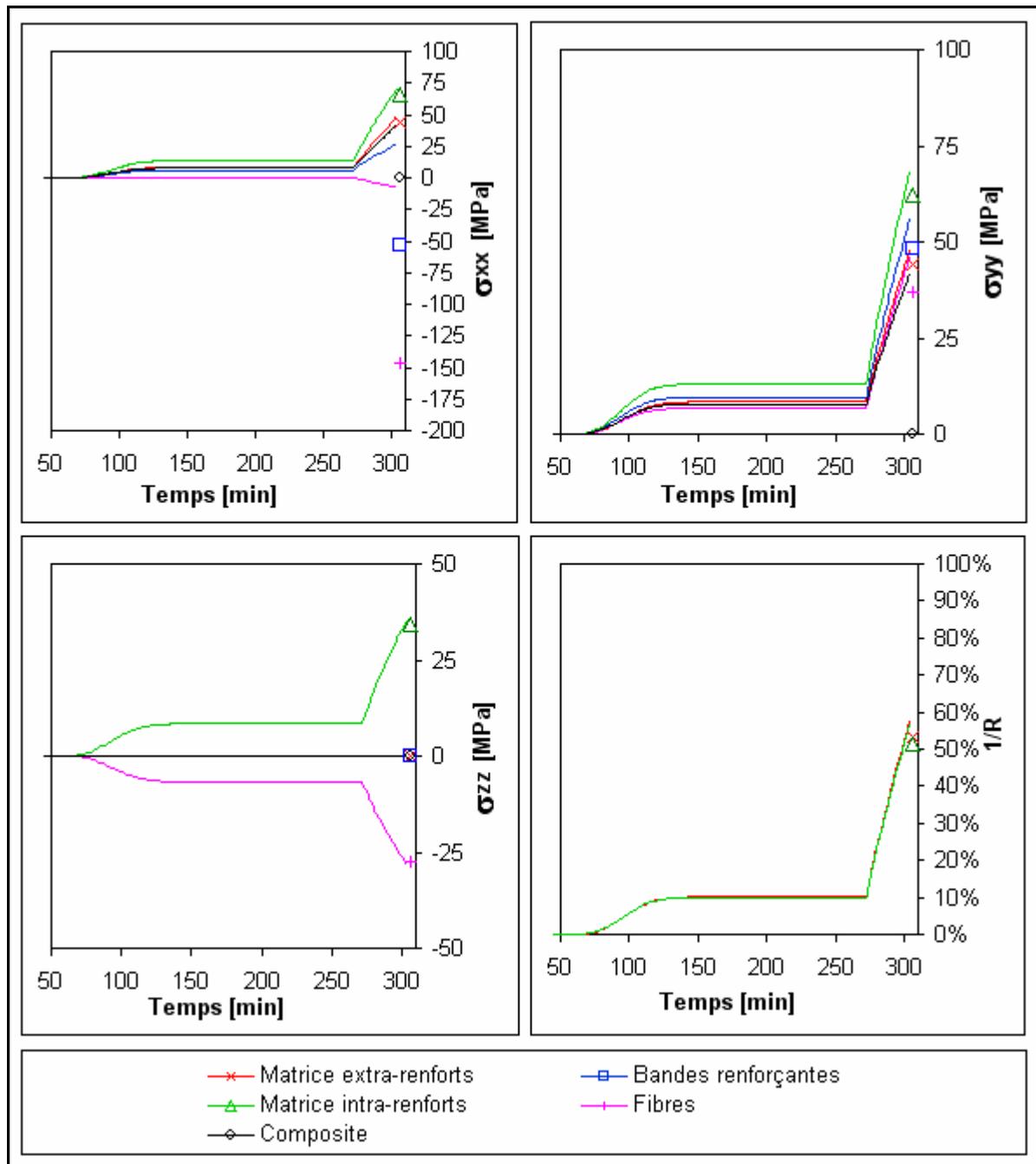
Echelle	Constituants	Déformations [ $10^{-6}$ ]			Contraintes [MPa]			Rupture
		$\varepsilon_{xx}$	$\varepsilon_{yy}$	$\varepsilon_{zz}$	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$\sigma_{zz}$	1/R
Macro	Composite	0	0	-15284	41,8	41,8	0,0	X
		<b>-662</b>	<b>-662</b>	<b>-14607</b>	<b>0,0</b>	<b>0,0</b>	<b>0,0</b>	
Méso	Bandes renforçantes	0	0	-13947	26,8	56,3	0,0	X
	Matrice extra-renforts	0	0	-40695	48,2	48,2	0,0	58 %
		<b>-662</b>	<b>-662</b>	<b>-39812</b>	<b>44,3</b>	<b>44,3</b>	<b>0,0</b>	<b>53 %</b>
Micro	Fibres	0	1053	-4380	-8,0	46,5	-28,4	X
	Matrice intra-renforts	0	-1307	-25949	70,6	68,6	35,6	57 %
		<b>-662</b>	<b>-2373</b>	<b>-24955</b>	<b>65,3</b>	<b>62,3</b>	<b>34,4</b>	<b>51 %</b>

On observe que les contraintes supportées par la matrice sont très proches de celles calculées dans le cas de la fabrication libre, ce qui s'explique par la faible rigidité de la matrice. Les contraintes dans le plan sont essentiellement transmises aux éléments rigides, dans la direction x. Ceci se traduit par des compressions plus faibles que dans le cas de la fabrication libre : l'ensemble des contraintes est décalé vers la traction.

On peut *quasiment* estimer les états mécaniques locaux à l'aide du principe de superposition des états mécaniques, en prenant ceux de la fabrication libre et en ajoutant ceux correspondant à une sollicitation mécanique dans le plan (à partir des résultats de la section 2.3.1 sur le composite totalement cuit). Ceci est possible car les propriétés élastiques dans le plan évoluent assez peu au cours de la fabrication, dès lors que la résine est solide.

D'autre part, on observe que les états mécaniques après démoulage sont assez proches (à quelques pourcents près) de ceux observés après une fabrication libre (cf. tableau II-19). Ceci confirme la faible influence des évolutions du module de Young longitudinal  $E_1$  sur les états mécaniques.

Figure II-36 : Contraintes résiduelles de fabrication dans le matériau, pour le cas de fabrication 2



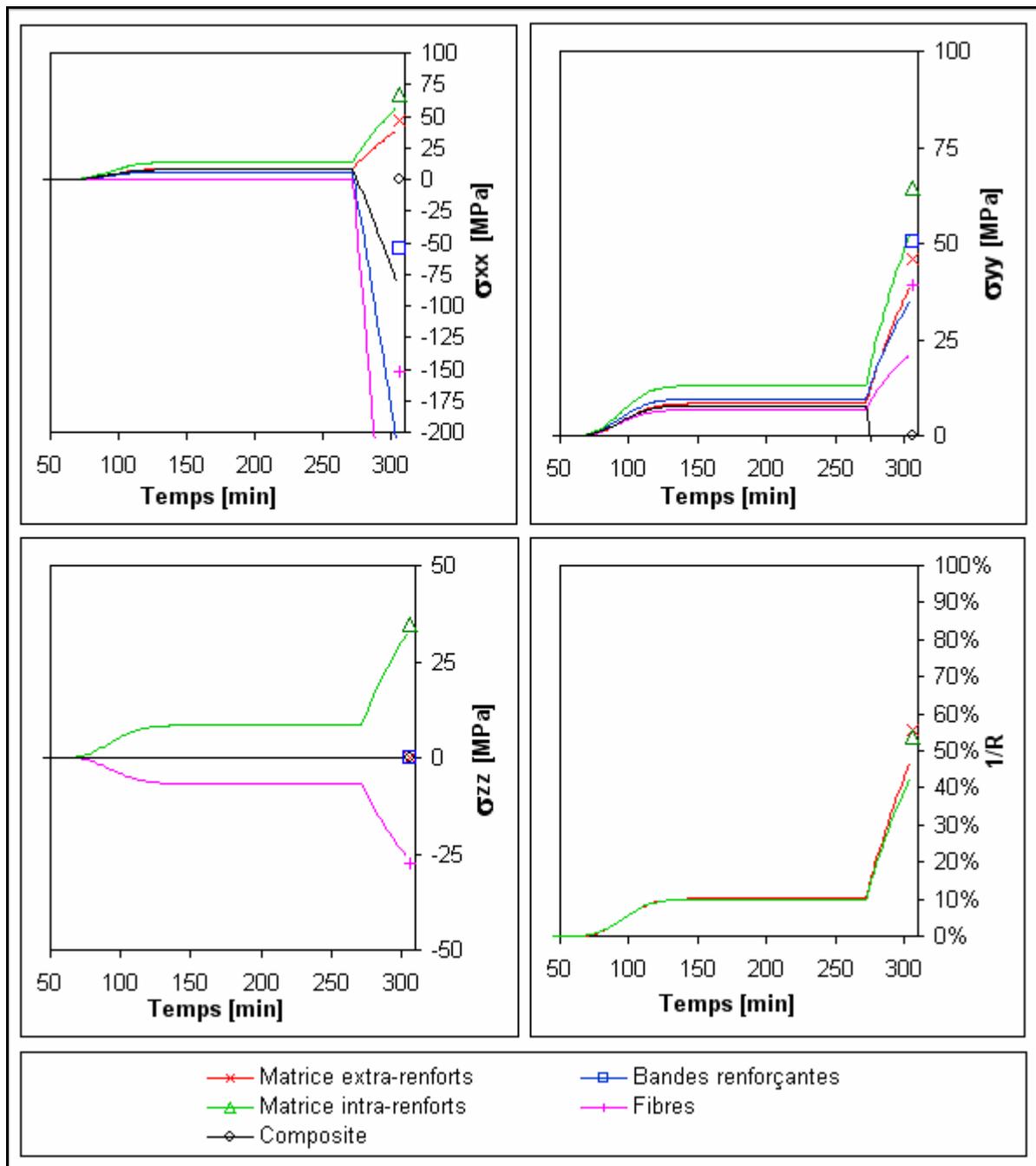
#### 4.5.3 Cas de fabrication 3

Le cas du moule thermo-dilatant s'apparente au précédent, à la différence près qu'on impose cette fois au composite une déformation, non pas nulle, mais proportionnelle aux variations de température. Ce type de condition pourrait correspondre à celle subie par une pièce cuite dans un moule rigide ayant un coefficient d'expansion thermique non nul. Ce coefficient est pris égal à celui de l'acier, soit  $12,3 \times 10^{-6}/^{\circ}\text{C}$ , une valeur supposée constante au cours de la fabrication. Les incréments de déformation macroscopiques s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \delta \varepsilon_{11}^I = \delta \varepsilon_{22}^I = \alpha^{\text{moule}} \cdot \delta T \\ \delta \varepsilon_{33}^I = (\alpha_3^I \cdot \delta T + \eta_3^I \cdot \delta \chi) + ((\alpha_1^I - \alpha^{\text{moule}}) \cdot \delta T + \eta_1^I \cdot \delta \chi) \times 2 L_{13}^I / L_{33}^I \end{cases} \quad (\text{II-27})$$

Les contraintes locales correspondantes sont présentées sur la figure II-37, ainsi que sur le tableau II-20 (états mécaniques avant et après démoulage) ci-dessous.

**Figure II-37 : Contraintes résiduelles de fabrication dans le composite, pour le cas de fabrication 3**



Cette condition aux limites génère des états mécaniques identiques au cas précédent (encastrement) durant la phase de cuisson, mais pas durant le retrait thermique. Le CET du moule étant supérieur à celui du composite, la pièce subit des efforts de compression importants durant le refroidissement. Les contraintes imposées au composite avant le démoulage sont de 80 MPa, ce qui est probablement une surestimation des contraintes réelles. En effet, les contraintes maximales transmissibles à la pièces sont limitées par la qualité de l'adhésion moule-pièce, qui dépend (entre autres) du film démoulant placé entre les deux éléments [Navabpour et al., 2006 ; Gibbons et Hansell, 2008].

Comme dans le cas précédent, les contraintes dans la matrice sont assez peu affectées par les interactions moule-pièce. Ces interactions sont, de toute façon, plutôt bénéfiques pour la matrice, car elles décalent les contraintes vers la compression. Les contraintes résiduelles après démoulage

restent très proches de celles observées pour une fabrication libre, de même que la valeur du facteur de rupture qui reste tout à fait acceptable.

En revanche, pour les éléments rigides, les efforts macroscopiques génèrent de très fortes contraintes dans la direction x, avant le démoulage : -210 MPa pour les bandes renforçantes et -420 MPa pour les fibres, ce qui est probablement excessivement sévère. Avec de tels niveaux de compression, on pourrait s'attendre à des phénomènes de flambement des éléments rigides.

**Tableau II-20 : Contraintes résiduelles de fabrication dans le composite (avant / après démoulage), pour le cas de fabrication 3**

Echelle	Constituants	Déformations [ $10^{-6}$ ]			Contraintes [MPa]			Rupture
		$\epsilon_{xx}$	$\epsilon_{yy}$	$\epsilon_{zz}$	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$\sigma_{zz}$	1/R
Macro	Composite	-1968	-1968	-13289	-80,7	-80,7	0,0	X
		<b>-690</b>	<b>-690</b>	<b>-14597</b>	<b>0,0</b>	<b>0,0</b>	<b>0,0</b>	
Méso	Bandes renforçantes	-1966	-1970	-11987	-208,6	350,0	0,0	X
		<b>-689</b>	<b>-691</b>	<b>-13273</b>	<b>-55,0</b>	<b>50,4</b>	<b>0,0</b>	
Méso	Matrice extra-renforts	-1969	-1969	-38071	38,7	38,7	0,0	47 %
		<b>-691</b>	<b>-691</b>	<b>-39775</b>	<b>46,2</b>	<b>46,2</b>	<b>0,0</b>	<b>56 %</b>
Micro	Fibres	-1965	162	-3242	-419,2	21,1	-25,8	X
		<b>-689</b>	<b>819</b>	<b>-4025</b>	<b>-151,9</b>	<b>39,1</b>	<b>-27,6</b>	
Micro	Matrice intra-renforts	-1968	-4628	-22955	57,1	52,3	32,3	42 %
		<b>-690</b>	<b>-2571</b>	<b>-24873</b>	<b>67,4</b>	<b>64,6</b>	<b>34,6</b>	<b>54 %</b>

[Rosen, 1965] a donné une estimation très simple de la charge critique de microflambement pour les plis unidirectionnels, en comparant la charge critique de compression dans les fibres avec le module de cisaillement de la matrice :

$$\sigma_{\text{critique}}^f = \frac{1}{V^f V^m} G_{13}^m \approx 6500 \text{ MPa} \quad (\text{II-28})$$

Cette estimation, assez rassurante, est néanmoins considérée comme excessive par la plupart des auteurs [Niu et Talreja, 2000 ; Schultheisz et Waas, 1996a, 1996b], dans la mesure où elle ne tient compte ni de l'ondulation initiale des fibres, ni de la limite d'élasticité de la matrice. Ce sujet est assez largement traité dans la littérature, mais n'est malheureusement pas applicable à la mésostructure particulière du Hextool. On peut seulement rappeler, que la limite à la rupture du Hextool en compression (330 MPa), est bien supérieure aux chargements macroscopiques considérés ici.

## 4.6 Conclusion et perspectives

Les méthodes de transition d'échelles développées précédemment, couplées à la caractérisation de la résine M61 menée par le LTDS, ont permis d'évaluer l'évolution des propriétés du composite au cours de la fabrication. On a également pu évaluer les contraintes résiduelles de fabrication dans les différents constituants, pour différentes conditions aux limites appliquées à la pièce.

On montre ainsi que, même en l'absence de contraintes macroscopiques, le composite développe des contraintes locales importantes au cours de la fabrication : les fibres subissent des contraintes de compression de l'ordre de 150 MPa, alors que la matrice est mise en traction à hauteur de 55 % environ de sa limite à rupture. Les contraintes sont plus importantes à l'échelle microscopique qu'à l'échelle mésoscopique. On remarque, en outre, que le retrait chimique ne génère qu'environ 25 %

des contraintes résiduelles totales, une valeur qui est probablement surévaluée car elle ne tient pas compte du fluage de la résine à haute température. En revanche, le retrait chimique joue un rôle significatif sur le retrait hors-plan du composite. Une autre perspective de ces travaux serait de prendre en compte le caractère viscoélastique de la résine dans la loi de comportement, et par suite dans celle du composite lui-même, dans le calcul des propriétés effectives et des contraintes internes [Weng, 1993 ; Li et Weng, 1998 ; Sabar et al., 2002 ; Zhao et al., 2007]. Les premières données montrent en effet que la température de transition vitreuse est inférieure à la température de cuisson, quasiment jusqu'au début du refroidissement. La cinétique et le cycle de cuisson de la résine méritent d'être revues puisque la résine n'est que partiellement cuite (80 à 90 % de conversion) après le cycle de cuisson. Des premiers essais menés avec une cinétique et cycle de cuisson (et post-cuisson) plus réalistes, montre que les contraintes dues au retrait thermochimique sont principalement développées durant la post-cuisson (dix derniers pourcents de conversion) ; cependant, ceci est compensé par des contraintes thermoélastiques plus importantes, si bien que les contraintes finales sont assez proches.

Dans le cas où l'on applique des conditions aux limites contraignantes à la pièce, on voit se développer des contraintes mécaniques supplémentaires, notamment dans les éléments rigides (la matrice est très peu affectée). Ces contraintes disparaissent presque totalement lors de la phase de démoulage, de sorte que les contraintes et déformations après démoulage sont relativement indépendantes des conditions aux limites appliquées durant la fabrication. Cependant, on peut s'attendre à ce qu'elles jouent un rôle significatif sur la durée de vie du composite sous cycles thermo-mécaniques répétés. Notamment, les contraintes de compression induites par interaction avec un matériau ayant un CET plus important que celui du composite (soit la grande majorité des matériaux), pourraient générer des dégradations du composite par flambement des éléments rigides.

## **5 PREDICTION DE LA RUPTURE DU COMPOSITE SOUS SOLLICITATIONS COMBINEES DE FABRICATION ET DE SERVICE**

### **5.1 Avant-propos**

Dans les chapitres précédents, on a estimé les contraintes locales de fabrication et de service dans un composite de microstructure semblable au Hextool, initialement libre de contraintes, en utilisant une méthode de transition d'échelles à champ moyen. Les sollicitations de service, dans un pli unidirectionnel semblable aux bandes renforçantes composant le Hextool, ont également été estimées selon une approche à champs complets périodiques, grâce à la méthode des éléments finis. Pour les différents cas, on a pu estimer le risque de rupture moyen de la matrice via un critère de rupture de Tsai-Wu, déterminé à partir des résultats d'essais sur un bloc de résine pure haute résistance pure. En utilisant le principe de superposition des états mécaniques, il est dès lors possible de combiner les contraintes résiduelles issues du processus de fabrication et celles générées par les sollicitations de service, afin d'estimer le risque de rupture pour ces différents sollicitations. L'étude menée dans le chapitre précédent montre que les contraintes résiduelles dépendent assez peu des chargements macroscopiques appliquées au matériau durant le cycle de fabrication. On a donc utilisé les contraintes résiduelles calculées pour le cas de fabrication 1 (cuisson libre du matériau). Pour les contraintes de service, on a réutilisé les résultats établis dans le chapitre 2 pour le composite totalement cuit, d'une part, et à température ambiante, d'autre part, ce qui permet de simplifier l'implémentation et l'analyse des résultats.

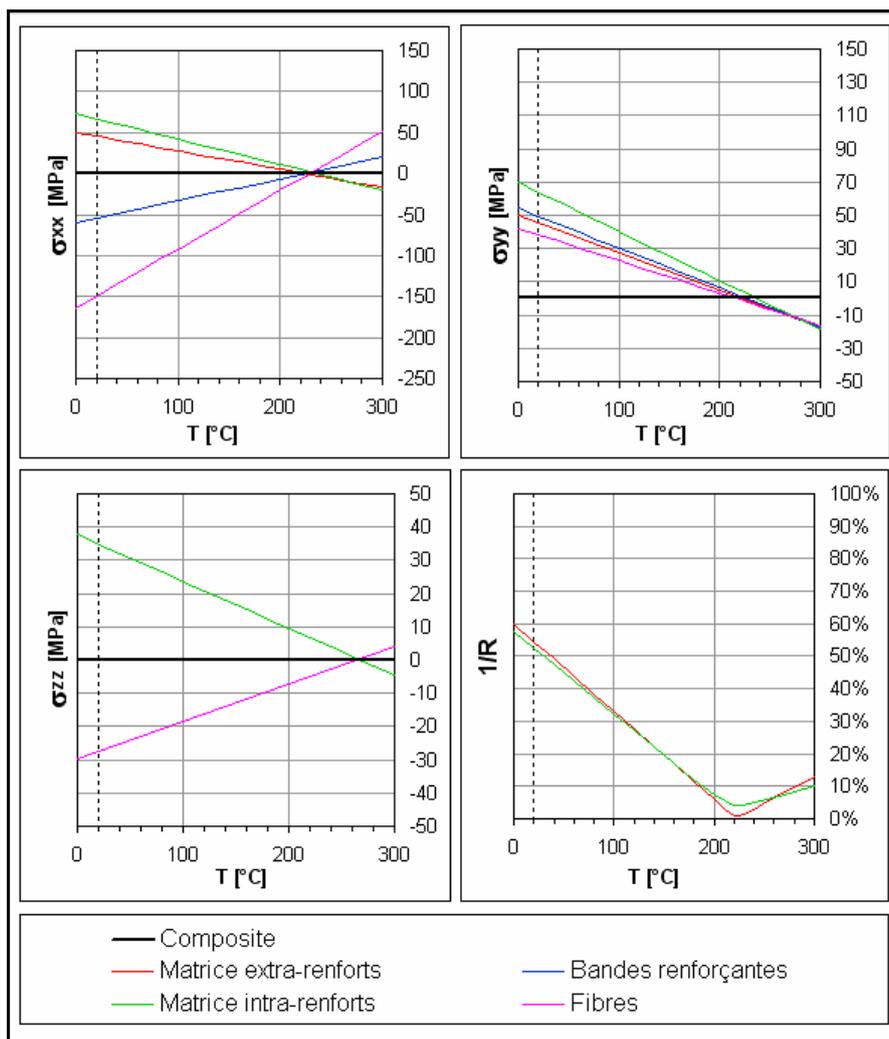
### **5.2 Résultats et discussion**

#### **5.2.1 Sollicitation thermique**

Sur la figure II-38 ci-dessous, on a tracé l'évolution des contraintes locales dans le composite en fonction de la température. Notons tout d'abord que l'hypothèse de propriétés thermomécaniques constantes est erronée dans l'absolu, car les propriétés de la résine évoluent avec la température. Cependant, l'évolution des contraintes résiduelles durant le refroidissement du matériau après cuisson (figure II-35) indique que les contraintes locales se développent quasiment linéairement sur la gamme 0 °C – 180 °C. Les résultats indiquent une bonne tenue de la résine sur les gammes de températures testées.

Le facteur de rupture de la résine diminue lorsque la température augmente, passe par un minimum (voire par zéro), puis augmente à nouveau. Ce minimum correspond à la « température libre de contraintes » qui est de l'ordre de 220 °C. Cette température n'est pas égale à la température de cuisson, en raison du retrait chimique, qui induit des contraintes supplémentaires. Ainsi, à l'échelle mésoscopique (bandes renforçantes et matrice extra-renforts), les contraintes sont nulles à 220 °C ; ce résultat est particulièrement intéressant, puisqu'il permet de réduire les contraintes résiduelles de fabrication dans les bandes renforçantes aux contraintes thermiques liées à un refroidissement de -200 °C. A l'échelle microscopique, on ne peut pas annuler les contraintes, mais on obtient un facteur de rupture minimal de 4,3 % à 220 °C.

Figure II-38 : Contraintes résiduelles et de service dans le composite, sous sollicitation thermique

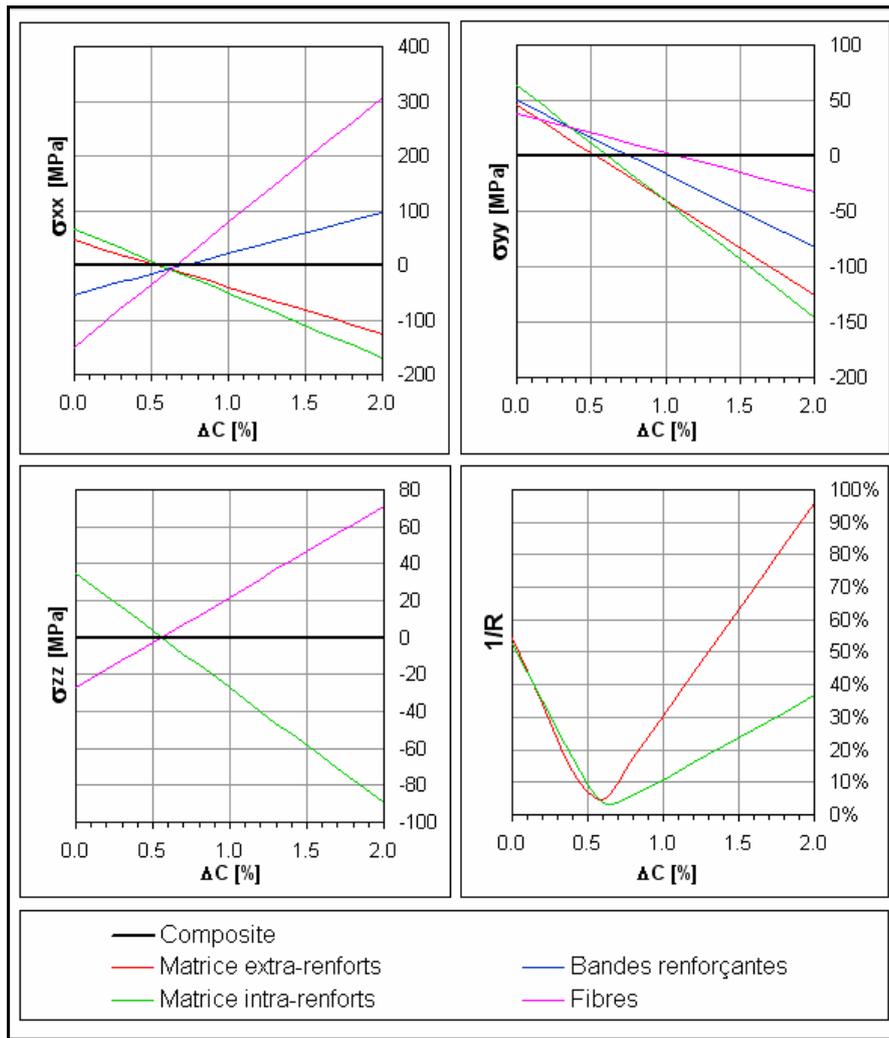


### 5.2.2 Sollicitation hygroscopique

Afin d'éviter la pénétration d'humidité ainsi que les phénomènes d'oxydation durant la fabrication des matériaux composites, ceux-ci sont généralement cuits sous vide ou dans une atmosphère neutre. On peut donc considérer que le Hextool est sec à la sortie de l'autoclave. Cependant, durant son utilisation de service, le matériau peut être exposé à l'air ambiant ou à des atmosphères humides. Il convient donc de prendre en compte la tenue hygroscopique du matériau. Sur la figure II-39 ci-dessous, on a reporté l'évolution des contraintes dans le composite et ses constituants, en fonction de la teneur en eau macroscopique. Les courbes montrent qu'une reprise en eau modérée est plutôt favorable à la tenue du matériau, puisque les contraintes dans la résine sont quasiment nulles pour une teneur en eau de 0,6 % ; cependant, des teneurs en eau importantes (1,5 % ou plus) sont très néfastes pour la résine, en particulier extra-renforts. Le modèle prévoit une rupture de celle-ci pour une teneur en eau de 2,2 %.

En réalité, lorsque le matériau est placé en immersion, on observe une dégradation du celui-ci bien plus tôt, dès 1 % de reprise en eau (pour des éprouvettes non polies). Cependant, on constate expérimentalement que la dégradation du matériau est accélérée par la présence de micro-fissures qui captent l'humidité, si bien que la teneur en eau peut être localement beaucoup plus importante que ne le laisse penser la prise de masse globale de l'éprouvette. Ajoutons que la condition d'immersion en eau est excessivement sévère par rapport aux conditions d'emploi du matériau, qui sont normalement limitées à de l'exposition à l'humidité ambiante de l'air.

Figure II-39 : Contraintes résiduelles et de service dans le composite, sous sollicitation hygroscopique



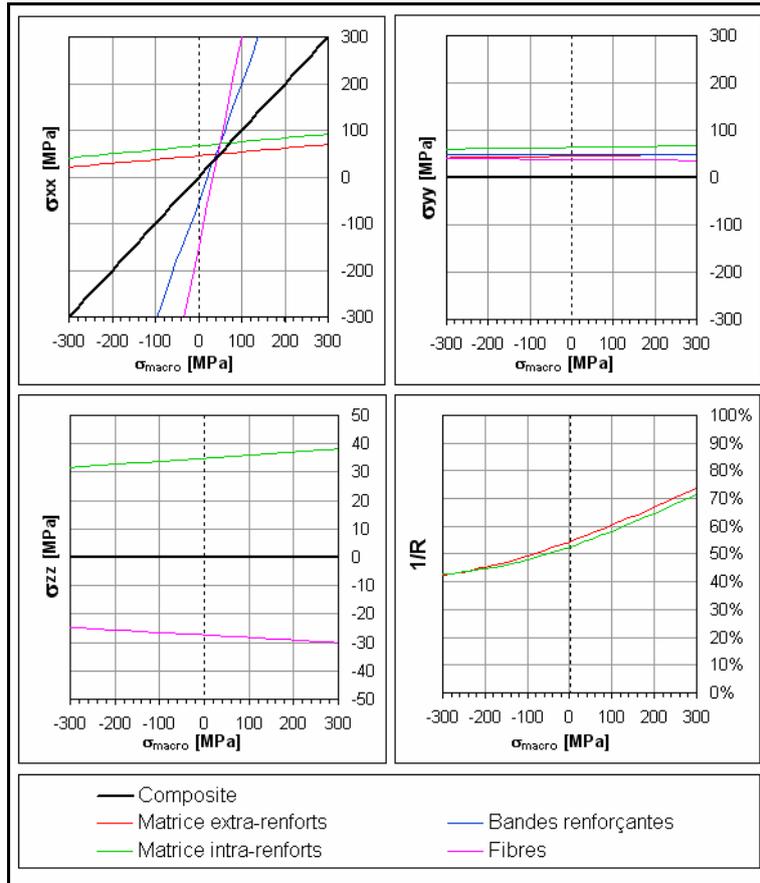
### 5.2.3 Sollicitation mécanique : traction uniaxiale dans le plan du pli

On s'intéresse maintenant à la tenue mécanique du composite, sous un chargement mécanique uniaxial dans le plan du pli. Ce chargement ne respecte pas l'isotropie plane du Hextool, les contraintes locales dans les bandes renforçantes dépendent donc de leur orientation  $\Theta$  par rapport à la direction de sollicitation. Sur les figures II-40a et II-40b suivantes, on a tracé l'allure des contraintes dans les constituants (dans le repère local Rxyz), orientés respectivement à  $0^\circ$  et à  $90^\circ$ , ce qui correspond aux orientations les plus critiques pour la tenue du matériau.

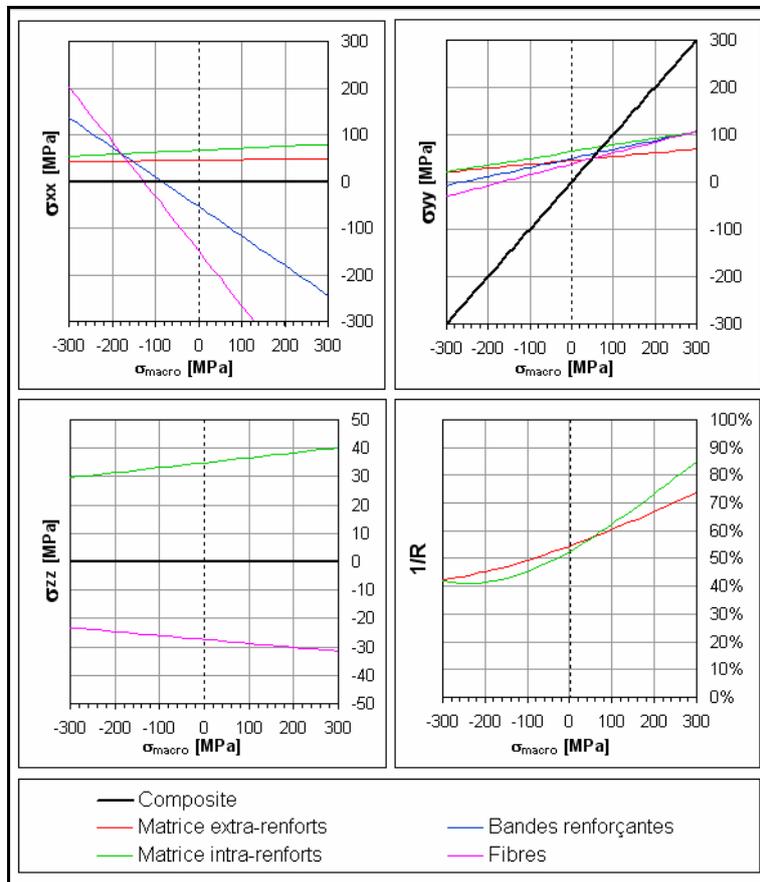
Tout comme on l'avait constaté précédemment, le chargement mécanique affecte assez peu la résine, les contraintes étant principalement dues à la fabrication. La traction est plus défavorable que la compression pour la résine ; le facteur de rupture est alors maximal dans la résine intra-renfort pour une orientation à  $90^\circ$ , mais il reste en-deçà du seuil de rupture jusqu'à 400 MPa environ.

En revanche, les éléments rigides sont fortement sollicités, particulièrement dans la direction des fibres. Ils peuvent subir des contraintes de traction importantes, quoique non critiques a priori étant donnée la grande résistance des fibres en traction. En revanche, le risque de flambement pourrait être sévère. En effet, on observe de fortes contraintes de compression dans les bandes orientées à  $0^\circ$ , lorsque le composite est soumis à des efforts de compression ; au contraire, lorsqu'il subit des efforts de traction, c'est plutôt les bandes à  $90^\circ$  qui sont sollicitées en compression, quoique de façon moins prononcée. Ajoutons que dans ce dernier cas, on observe des contraintes transverses de l'ordre de 100 MPa dans les bandes à  $90^\circ$  ; ce niveau de contraintes pourrait initier des décohésions fibre-résine, d'après les résultats de l'approche à champ complet périodique (cf titre 3.4.2.3).

Figure II-40 : Contraintes résiduelles et de service dans le composite, sous chargement plan uniaxial  
 (a) constituants orientés à 0° par rapport à la direction de sollicitation



(b) constituants orientés à 90° par rapport à la direction de sollicitation



Les contraintes à rupture du Hextool obtenues expérimentalement sont de 300 MPa en compression et de 260 MPa en traction. Les contraintes moyennes calculées dans la résine par la méthode à champ moyen ne permettent pas d'expliquer ces valeurs ; cependant, comme on l'a vu dans le chapitre 3, le calcul d'états mécaniques moyens ne permet pas de rendre compte de façon fiable des phénomènes très locaux tels que les décohésions fibre-matrice, ni même des interactions directes entre bandes orientées différemment. En revanche, la méthode fournit des éléments explicatifs sur le mécanisme de rupture du matériau par le flambement des éléments, bien que ce risque reste à quantifier.

### **5.3 Conclusion et perspectives**

Les méthodes de transition d'échelles à champ moyen ont permis d'estimer les contraintes dans les constituants d'un composite de microstructure semblable au Hextool. Les contraintes de fabrication ont été ajoutées aux contraintes générées par les sollicitations de service du matériau. Les résultats montrent que ces contraintes résiduelles sont très significatives pour la tenue de la résine, en particulier pour des sollicitations non mécaniques (thermique ou hygroscopique). En revanche, pour les sollicitations mécaniques dans le plan, les contraintes sont essentiellement reprises par les éléments rigides, si bien que les modèles indiquent plutôt une dégradation du matériau en raison de micro-flambements, plutôt que par une rupture de la résine.

Par ailleurs, il convient de rester critique sur les contraintes calculées via l'approche à champ moyen, notamment pour la phase continue (matrice). En effet, l'approche à champ complet utilisée dans la section 3 sur les bandes renforçantes, montre que les contraintes réelles dans la matrice peuvent varier du simple au double, en raison des interactions entre les éléments rigides. L'utilisation de valeurs moyennes masque donc un certain nombre de phénomènes qui jouent un rôle important dans la rupture du matériau, tels que les contraintes inter-laminaires et les flambements locaux à l'échelle mésoscopique, et qui ne peuvent être représentés qu'en utilisant une approche à champ complet. Ceci peut s'avérer délicat en ce qui concerne la méso-structure : son caractère très aléatoire complique la génération du VER et l'assignation des propriétés ; en outre, celui-ci devra être de taille importante pour être représentatif, ce qui risque d'entraîner des problèmes de capacités de calcul. L'utilisation d'éléments coques épaisses pour représenter les bandes renforçantes, permettrait peut-être de limiter ce problème.

Par ailleurs, une utilisation couplée des approches à champ complet et à champ moyen est envisageable, si l'on s'intéresse aux contraintes microscopiques. On peut en effet calculer les contraintes moyennes dans les bandes à l'aide du modèle autocohérent, puis « localiser » ces contraintes à l'aide des éléments finis (approche périodique). Cette méthode, bien qu'imparfaite, permettrait néanmoins une meilleure appréhension des phénomènes de décohésion à proximité des fibres. On pourra également se reporter aux méthodes présentées dans le chapitre 3.6 de cette partie.

## **PARTIE III :**

### **DEFORMATION RESIDUELLE DES PIECES COMPOSITES**



# 1 INTRODUCTION ET REVUE BIBLIOGRAPHIQUE

## 1.1 Avant-propos

Dans les parties précédentes, les modèles de transition d'échelles à champ moyen ont été mis en application afin de calculer les propriétés effectives d'un matériau composite semblable au Hextool. Ils ont également permis d'estimer les contraintes apparaissant aux échelles microscopique et mésoscopique, lors d'un cycle de cuisson et/ou sous les sollicitations de service du composite. Les phénomènes structuraux, intervenant aux échelles macroscopique et pseudo-macroscopique, n'ont pas été étudiés. Dans cette troisième partie, on a utilisé les propriétés effectives du composite, calculées précédemment, afin d'étudier certains phénomènes structuraux typiques des matériaux composites, tels que la déformation résiduelle des pièces résultant de leur fabrication. Cette déformation résiduelle peut avoir plusieurs origines : dissymétrie de la stratification, gradients de cuisson dans les pièces épaisses, interactions moule-pièce, libération des contraintes lors de l'usinage, et surtout anisotropie du matériau pour les pièces courbées [Parlevliet et al., 2006, 2007a, 2007b]. Ainsi, sur des pièces simples telles que les équerres en L ou en C, souvent utilisées comme raidisseurs, on observe (d'après la littérature, notamment dans [Radford et Diefendorf, 1993]) une fermeture des angles de l'équerre à l'issue du processus de fabrication. Ces effets peuvent s'avérer très problématiques sur des pièces de grandes dimensions, telles que les structures primaires d'avion, où ils peuvent conduire à des écartements entre les pièces, qui peuvent causer une gêne à l'assemblage de la structure voire même un rejet de la pièce [Zeng et Raghavan, 2010]. Cette question des déformations résiduelles de cuisson constitue donc un enjeu industriel important.

Afin de simuler correctement ces phénomènes structuraux, il est nécessaire de décrire finement les évolutions des propriétés du composite au cours de la cuisson, difficulté qui a été levée grâce aux modèles de transition d'échelles développés précédemment. Cependant, ces phénomènes sont également pilotés par les interactions se produisant entre le moule et la pièce moulée, tout au long du processus de fabrication. Celles-ci dépendent des conditions de mise en œuvre, et notamment de propriétés relatives de la pièce et du moule. Classiquement, on utilise des moules en acier ou en aluminium, dont le CET est plus important que celui de la pièce [Kaushik et Raghavan, 2010]. Cette différence de CET est génératrice de contraintes (interactions moule-pièce) non triviales, qui compliquent singulièrement la simulation, mais qui peuvent également dégrader la santé matière en surface de la pièce [Kaushik et Raghavan, 2010].

Dans cette optique, l'utilisation du Hextool comme matériau pour la fabrication de moules composites, offre l'avantage d'un CET plus faible que les matériaux « standards » (à l'exception de l'Invar) donc plus proche a priori de celui des pièces moulées, ce qui devrait réduire les contraintes résultant des incompatibilités de déformations moule-pièce. Le Hextool offre également d'autres avantages pour ce type d'applications : une faible inertie thermique, une bonne usinabilité et réparabilité, une excellente tenue en température, une grande durée de vie... Il reste que les moules sont généralement des pièces complexes, qui peuvent présenter de fortes épaisseurs ou gradients d'épaisseurs, et de faibles rayons de courbure. En outre, le moule Hextool étant lui-même en matériau composite, il est également sujet aux déformations résiduelles de cuisson.

Dans cette partie, on s'intéressera aux déformations de fabrication de pièces composites, et notamment d'équerres en L, qui mettent en évidence ces effets. On se concentrera uniquement sur les phénomènes liés à l'anisotropie du composite, et l'on mettra en évidence l'influence des conditions aux limites (CL) appliquées durant la fabrication, sur la variation d'angle de ces équerres. Dans un premier temps, on s'intéressera à une équerre en composite de type Hextool, dont on simulera la déformée résiduelle en utilisant la méthode des éléments finis (MEF) sous Comsol Multiphysics. Les résultats seront comparés à une formule analytique simplifiée, issue de la

littérature. Dans un second temps, on s'intéressera à des plis composites unidirectionnels, plus classiques, et l'on montrera la pertinence de l'utilisation du Hextool comme matériau d'outillage, en remplacement des matériaux classiques (acier et aluminium).

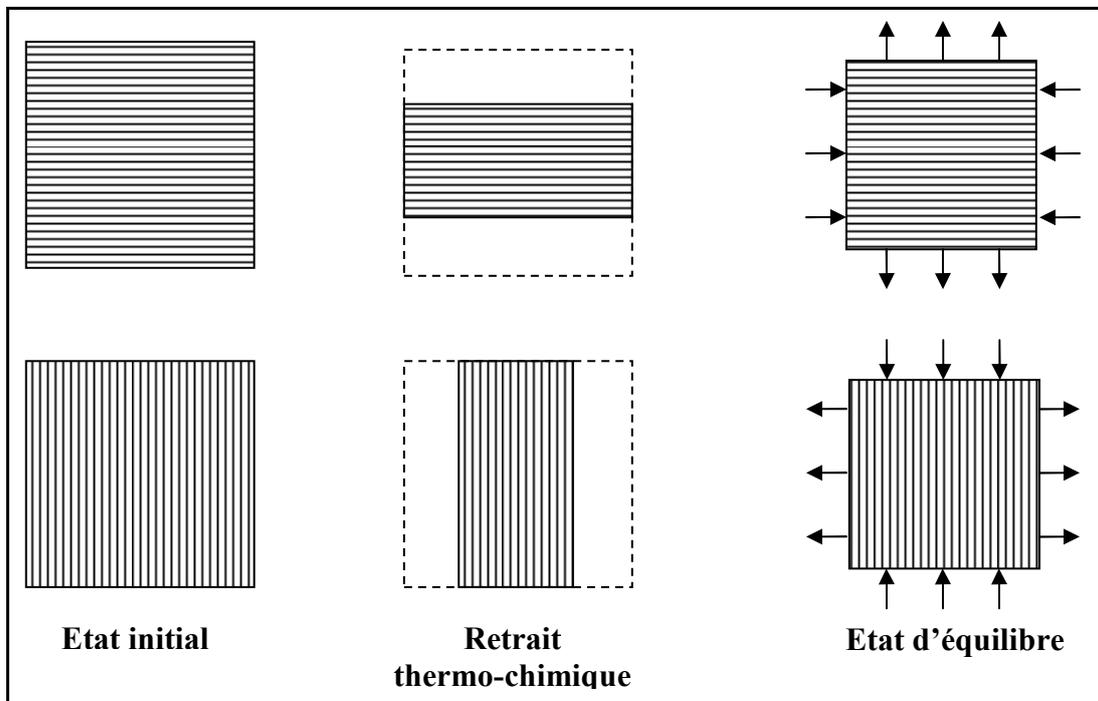
## 1.2 Déformation résiduelle des pièces composites : revue bibliographique

Les contraintes résiduelles sont omniprésentes dans les matériaux composites à matrice organique, du fait du procédé de fabrication qui nécessite souvent des montées en température importantes (plus de 150 °C) pour la cuisson, et des nombreux phénomènes multiphysiques qui s'y produisent. Il est difficile de tenir compte simultanément de tous les phénomènes pouvant intervenir, en raison du caractère fortement multi-échelles des structures composites. Ceci explique pourquoi les problèmes de stabilité dimensionnelle (déformation thermique et résiduelle) et temporelle (fluage, vieillissement) des matériaux composites à matrice organique, sont toujours un champ d'investigation ouvert à l'heure actuelle. Les phénomènes pouvant intervenir à l'échelle microscopique ont été extensivement étudiés dans les deux parties précédentes, et ne seront pas rappelés ici. Dans cette partie, on se focalisera plutôt sur les phénomènes intervenant aux échelles mésoscopiques (échelle du pli), pseudo-macroscopique (échelle du stratifié) et macroscopique (échelle de la structure).

### 1.2.1 Phénomènes intervenant à l'échelle mésoscopique

A l'échelle mésoscopique, les contraintes résiduelles sont générées par le retrait thermo-chimique des plis et leur anisotropie. Ces contraintes interviennent notamment dans les stratifiés composites, constitués par empilement de plis unidirectionnels orientés selon des angles variables ( $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $\pm 45^\circ$ ,  $\pm 55^\circ \dots$ ). La différence de retrait entre les plis orientés à  $0^\circ$  et  $90^\circ$  (par exemple), et la compatibilité des déplacements d'un pli à l'autre, génèrent des contraintes intra-laminaires (Figure III-1) et du cisaillement inter-laminaire [Parlevliet et al., 2006, 2007a, 2007b].

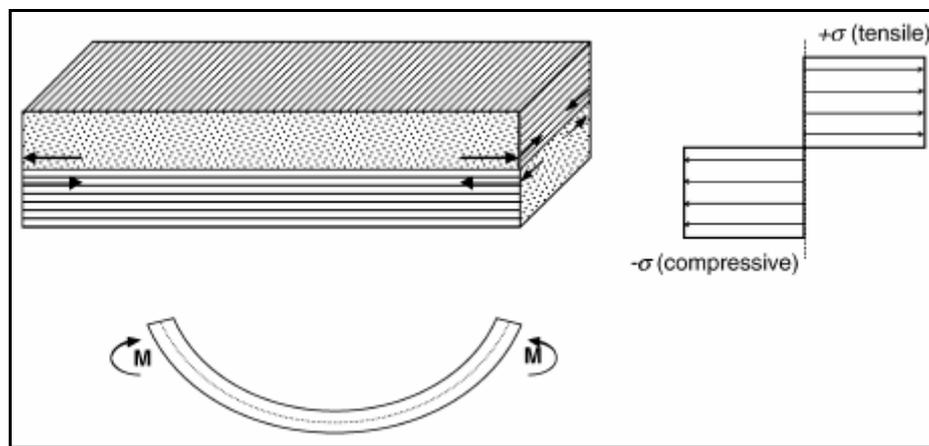
Figure III-1 : Contraintes résiduelles intra-laminaires (mésoscopiques) dans un stratifié  $[0^\circ/90^\circ]$



## 1.2.2 Phénomènes intervenant à l'échelle pseudo-macroscopique

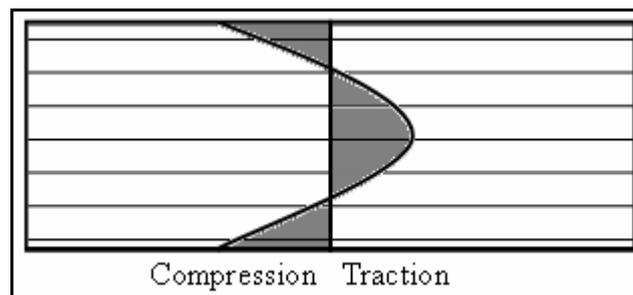
Les contraintes intra-laminaires évoquées ci-dessus peuvent se répercuter à l'échelle pseudo-macroscopique, en fonction de l'empilement du stratifié. Si l'empilement est symétrique, les contraintes thermo-chimiques se traduisent par un effort tranchant et un moment de torsion nuls, si bien qu'elles ne génèrent pas de torsion de la pièce, du moins en-dehors des zones courbées. En revanche, dans le cas d'un stratifié non-symétrique (Figure III-2), la résultante de ces contraintes est un moment de torsion, qui génère une courbure dans les zones qui étaient droites avant le processus de fabrication [Gigliotti et al., 2003; Wisnom et al., 2006]. Dans le cas de pièces courbées, même pour un stratifié homogène à l'échelle de la structure (unidirectionnel), la seule anisotropie du matériau génère des variations des angles de courbure liées au retrait thermo-chimique. Pour les deux matériaux qui seront étudiés ici (composite de type Hextool et stratifié unidirectionnel), pour lesquels la notion d'empilement est inadéquate, on pourra négliger la problématique liée à l'équilibre des contraintes intra-laminaires, pour se concentrer sur les variations d'angles liées à la seule anisotropie du matériau.

Figure III-2 : Courbure résiduelle dans un stratifié  $[0^\circ/90^\circ]$  asymétrique [Parlevliet et al., 2006]



En plus de ces phénomènes purement mécaniques, des gradients de température et d'avancement peuvent apparaître au cours de la cuisson, en raison de la faible conductivité thermique de la matrice. En général, l'exothermie de la réaction de polymérisation crée, au centre de la pièce, des températures plus importantes qu'en surface, d'autant plus que la réaction est autocatalytique [Kim et White, 1997; Bogetti et Gillespie, 1990 ; Bogetti et Gillespie, 1992]. De même, pendant la phase de refroidissement, le cœur de la pièce se refroidit plus lentement que la surface. Enfin, la réaction de polymérisation étant généralement incomplète après la première phase de cuisson, le taux de conversion avant la post-cuisson éventuelle est généralement plus important au cœur de la pièce. Tous ces phénomènes génèrent donc des contraintes thermiques, dites de cœur-peau, qui suivent une distribution grossièrement parabolique suivant l'épaisseur (Figure III-3).

Figure III-3 : Contraintes résiduelles cœur-peau dans un stratifié composite unidirectionnel



L'aspect multiphysique de ces contraintes de cœur-peau est très marqué, dans la mesure où celles-ci sont très largement dépendantes de la cinétique de polymérisation de la résine, des propriétés

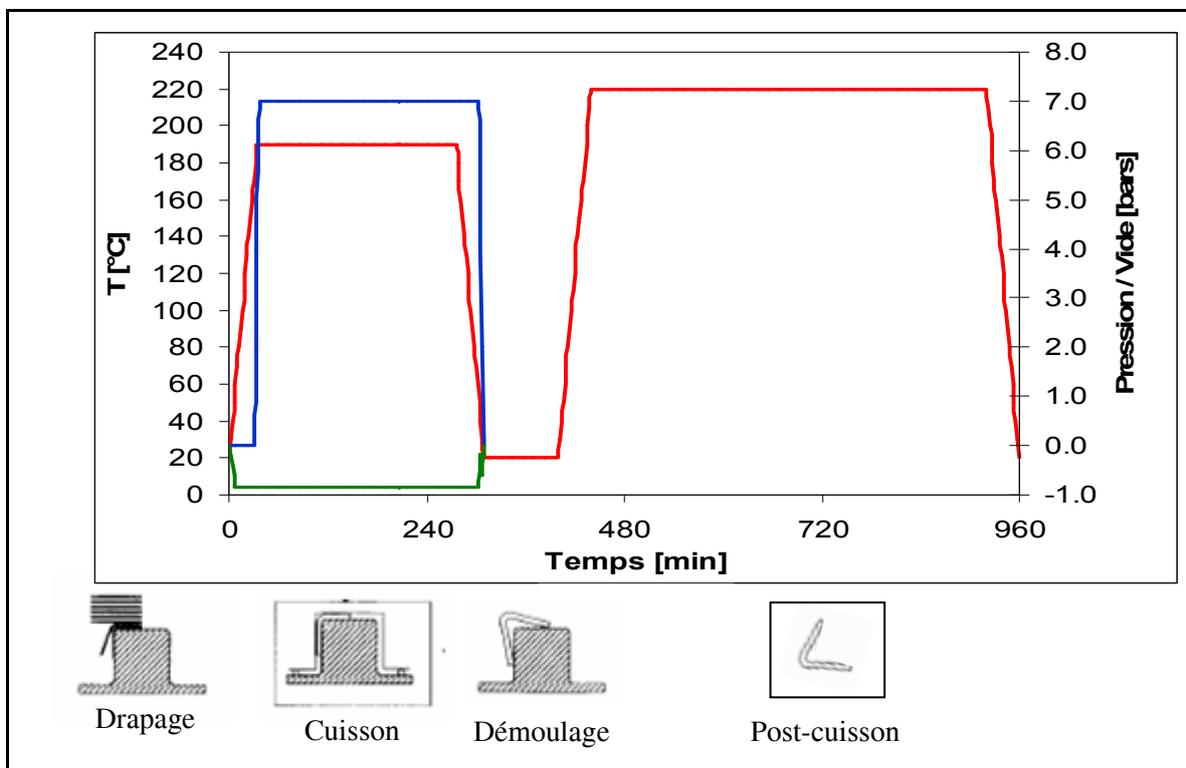
thermiques du composite, ainsi que des conditions aux limites thermiques appliquées à la pièce [Msallem, 2008]. Enfin, l'équilibre de ces contraintes de cœur-peau (et par suite, la déformation de la pièce) peut être modifié si la pièce est usinée, l'enlèvement de matière se traduisant par la relaxation d'une partie des contraintes de peau.

Ces contraintes de cœur-peau peuvent revêtir une importance particulière dans le cas de pièces ou moules en Hextool. En effet, ce matériau est destiné à la fabrication de pièces épaisses, qui de plus doivent être usinées presque systématiquement, afin d'obtenir des surfaces lisses et qui respectent les tolérances dimensionnelles imposées par le cahier des charges. Ces problématiques font l'objet de la thèse d'Olga Klinkova, menées au sein du LTDS/ENISE (UMR CNRS 5513), partenaire du projet LCM-Smart, et ne seront pas abordées ici. Pour les travaux menés dans le cadre de la présente étude, on considérera que la température et le degré de conversion sont uniformes dans la pièce, et que celle-ci n'est pas usinée.

### 1.2.3 Phénomènes intervenant à l'échelle macroscopique

A l'échelle macroscopique, le matériau étant considéré comme homogène, les phénomènes observés, ainsi que leur traitement, sont beaucoup plus standards : il s'agit d'interactions mécaniques classiques, qui peuvent être correctement traitées par l'analyse des milieux continus, ou éventuellement à l'aide de la méthode des éléments finis. Pour les applications qui nous intéressent, la difficulté est de tenir compte, d'une manière réaliste, des interactions moule-pièce durant la fabrication. Le cycle de fabrication des pièces composites lui-même comporte plusieurs étapes (Figure III-4) : le cycle de cuisson, le démoulage de la pièce, éventuellement suivi d'un cycle de post-cuisson durant lequel la pièce n'est souvent pas maintenue (*stand-alone cure*). Le traitement du comportement matériau et des conditions aux limites appliquées à la pièce est d'autant plus crucial que les propriétés du matériau évoluent significativement au cours de la cuisson.

Figure III-4 : Cycle de fabrication typique d'une pièce composite en Hextool



Durant le cycle de cuisson, les contraintes à l'interface moule-pièce peuvent aboutir à une décohésion des deux éléments, c'est à dire à un démoulage partiel ou total de la pièce avant la fin du cycle. Cette décohésion est un problème de contact, dont la simulation pose traditionnellement un

certain nombre de difficultés numériques (temps de calculs extrêmement longs). De plus, ce problème est fortement dépendant de la géométrie du couple moule-pièce : dans le cas d'équerres en C par exemple, le fait d'utiliser un moule mâle peut entraîner un blocage de la pièce sur le moule, qu'on n'observe pas avec un moule femelle [Fernlund et al., 2002].

A ces phénomènes peut également s'ajouter un effet de concentration de la résine près du moule, qui peut aboutir à une variation du taux de fibres de l'ordre de 6 à 8 % à travers l'épaisseur [Radford, 1995 ; Huang et Yang, 1997]. Ceci génère un retrait plus important du matériau près du moule, induisant des gauchissements analogues à ceux observés sur les stratifiés non-symétriques. Ce problème est encore plus aigu pour les procédés d'injection de résine, qui nécessitent une optimisation des points d'injection (position, débit, pression) pour limiter autant que possible la formation de zones « sèches » ou « humides », ainsi que la porosité [Ruiz et al., 2006 ; Sanchez et al., 2006].

Les interactions moule-pièce sont donc influencées par un certain nombre de paramètres, qu'on peut classer comme des paramètres "intrinsèques" (liés à la pièce) ou "extrinsèques" (liés aux sollicitations appliquées) [Albert et Fernlund, 2002].

Parmi les paramètres intrinsèques, on peut citer de manière non-exhaustive :

- la géométrie de l'équerre (forme, rayon, épaisseur, ouverture angulaire, longueur des parties droites),
- les propriétés thermiques et mécaniques du matériau, ainsi que leurs évolutions au cours de la fabrication,
- l'empilement des plis, dans le cas des structures stratifiées,
- et, éventuellement, les variations du taux de fibre dans la pièce.

Les paramètres extrinsèques ne sont pas moins nombreux, citons notamment :

- la géométrie du moule, ainsi que sa position par rapport à la courbure (intérieure, extérieure, ou les deux),
- les propriétés thermomécaniques du matériau utilisé pour le moule,
- la qualité de la cohésion moule-pièce, qui dépend notamment des états de surface et des éventuels agents démoulants,
- le cycle de fabrication,
- les conditions de mise en œuvre (conditions atmosphériques dans l'autoclave, empilement des tissus fonctionnels).

L'abondance de ces paramètres explique pourquoi la question des déformations résiduelles reste difficile à traiter, malgré la richesse de la littérature portant sur le sujet.

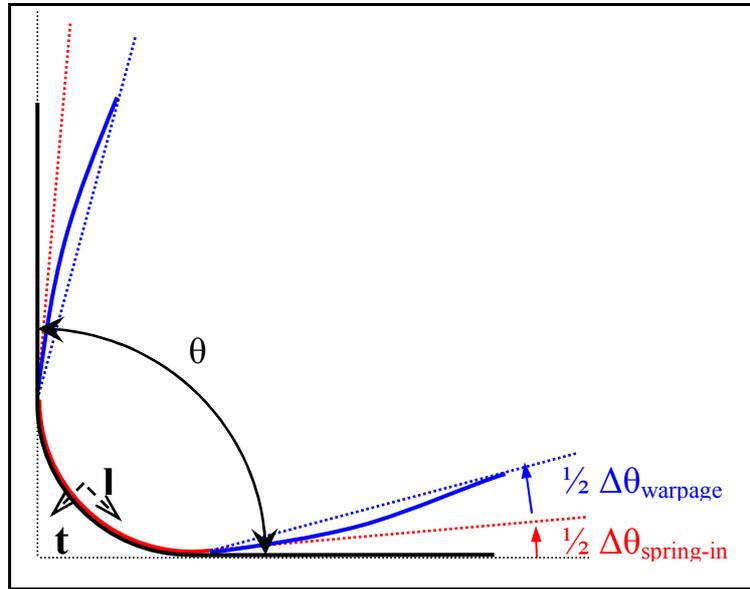
### **1.3 Cas particulier des équerres composites**

La plupart des études sur les déformations résiduelles de pièces composites courbées sont centrées sur les équerres en L ou en C. Celles-ci constituent en effet des démonstrateurs à la fois simples et pertinents d'un point de vue industriel. Ces géométries mettent en évidence les effets de retrait angulaire (*spring-in*), et de gauchissement (*warpage*) dans les parties droites de l'équerre, illustrés sur la figure III-5 ci-dessous [Arafath et al. 2008a, 2008b].

Ces effets peuvent parfois être compensés en modifiant la géométrie du moule, ou en modifiant la séquence d'empilement des plis (dans le cas des stratifiés) au niveau des zones courbées [Radford et Diefendorf, 1993]. Ces modifications sont classiquement faites sur la base de résultats expérimentaux, suivant une procédure de type essai-correction [Zeng et Raghavan, 2010]. Plus récemment, des méthodes d'instrumentation par fibres optiques à réseau de Bragg ont été développées afin de suivre l'évolution des déformations dans la pièce tout au long de la cuisson

[De Oliveira et al., 2008]. Ces méthodes expérimentales restent cependant coûteuses car elles doivent être répétées à chaque modification d'un des paramètres de fabrication. C'est pourquoi il est intéressant de simuler ces déformations résiduelles, autant que possible, avant la fabrication de la pièce.

Figure III-5 : Illustration des effets de retrait angulaire et de gauchissement des équerres composites



La formule la plus simple et la plus couramment utilisée pour prédire la variation angulaire d'une équerre composite a été proposée par [Radford et Diefendorf, 1993]. En supposant que l'effet de spring-in était dû à l'anisotropie du matériau, et en utilisant l'hypothèse de Bernoulli (les faces initialement planes restent planes après déformation), les auteurs ont abouti à l'expression suivante :

$$\frac{\Delta\theta_{\text{spring-in}}}{\theta} = \frac{\varepsilon_l - \varepsilon_t}{1 + \varepsilon_t}, \quad (\text{III-1})$$

où  $\varepsilon_l$  représente la déformation finale (après démoulage) du matériau dans la direction de courbure, et  $\varepsilon_t$  la déformation finale dans l'épaisseur du pli. Comme la pièce est libre de contraintes après démoulage, ces déformations s'expriment très facilement en fonction des coefficients d'expansion thermique et de retrait chimique. Le corollaire de cette relation est qu'une pièce constituée d'un matériau isotrope (métallique par exemple) n'est pas sujette aux effets de variation angulaire, ce qui se vérifie aisément par les éléments finis.

Cette formule permet donc de pré-dimensionner très simplement la variation angulaire (hors effet de gauchissement). [Albert et Fernlund, 2002] ont démontré expérimentalement l'influence d'un certain nombre de paramètres sur le retrait angulaire et le gauchissement : forme de l'équerre (L ou C), épaisseur et taille de l'équerre, stratification, cycle de cuisson, type de moule (acier ou aluminium), agents de surface. Les expériences ont été faites sur des équerres assez peu épaisses (1,6 mm d'épaisseur maximale, pour des rayons de courbure de 6 mm) et avec des moules convexes (mâles). Les auteurs concluent que le retrait angulaire relatif, hors gauchissement, n'est affecté que par la stratification, et qu'il peut être correctement prédit avec la formule de Radford et Diefendorf. En revanche, le gauchissement est fortement influencé par plusieurs paramètres : la géométrie de l'équerre, le cycle de cuisson ainsi que par l'agent de surface appliqué sur le moule. Notons aussi que les auteurs recommandent l'utilisation d'un moule dont les coefficients d'expansion thermique se rapprochent de celui de la pièce, afin de limiter la dispersion sur la variation angulaire.

Ces conclusions devraient cependant être quelque peu nuancées. En effet, elles ne sont pas généralisables aux équerres présentant une épaisseur importante par rapport au rayon de courbure,

sous peine de mettre en défaut l'hypothèse de Bernoulli utilisée pour établir la formule analytique. D'autre part, les moules concaves (femelle) n'ont pas été testés, pas plus que l'utilisation de deux moules (mâle et femelle). Enfin et surtout, l'effet du gauchissement apparaît comme très significatif par rapport au retrait angulaire, et cela même pour des stratifiés symétriques. Or ce gauchissement, qui dépend d'un grand nombre de paramètres, ne peut pas être estimé simplement. C'est pourquoi la méthode des éléments finis est fréquemment utilisée afin de calculer la déformée de la pièce après fabrication. La finesse des simulations est fortement dépendante des capacités du logiciel utilisé.

Ainsi, [Clifford et al., 2006] utilisent le logiciel Abaqus afin de calculer les effets de retrait angulaire et de gauchissement sur une équerre composite libre. Les auteurs ont proposé une méthode simple pour diminuer la taille du modèle, en n'utilisant les éléments tridimensionnels que dans la partie courbée de l'équerre, les parties droites pouvant être modélisée par des éléments coque. Cette méthode tire partie des capacités d'Abaqus pour lier ces deux éléments, et permet ainsi la modélisation de structures de grande taille. Leur modèle prend en compte le comportement viscoélastique du matériau et met en évidence un effet de relaxation des contraintes et déformations associées, d'autant plus important que la vitesse de refroidissement est lente. Une comparaison avec les résultats expérimentaux montre néanmoins que la simulation surestime les déformations de l'équerre.

[Fernelund et al., 2002] proposent, quant à eux, une modélisation plus fine du phénomène à l'aide d'un logiciel dédié, COMPRO. Leur modèle prend en compte la présence d'une couche de démoulant entre l'équerre et le moule, qui empêche la transmission de contraintes de cisaillement entre les deux éléments. De plus, l'utilisation d'un maillage mobile a permis une modélisation plus fine des phénomènes de blocage pouvant survenir, au niveau de la zone courbée, pour les équerres en C. Les résultats montrent que ce phénomène peut jouer de façon très significative sur le retrait angulaire.

## 2 DEFORMATIONS RESIDUELLES DANS UNE EQUERRE COMPOSITE

### 2.1 Avant-propos

On s'intéresse, dans un premier temps, aux déformations résiduelles de fabrication qui apparaissent dans une équerre composite de type Hextool, lors de sa fabrication (i.e. lors du cycle de cuisson et du démoulage). Ce moule, qu'on nommera pièce composite par commodité, a la forme d'une équerre ; il est donc sujet aux effets de variation angulaire et, potentiellement, de gauchissement, décrits plus haut. Afin d'imposer une forme correcte à la pièce composite future, il est nécessaire de prédire, et éventuellement de corriger, ces effets. Dans ce but, une simulation par éléments finis de la fabrication, permettant de rendre compte de certaines interactions moule-pièce, a été mise en place sous Comsol Multiphysics.

On s'est intéressé à l'influence des conditions aux limites appliquées à la pièce composite sur la déformée finale après démoulage. Plusieurs conditions aux limites simples ont été testées (bords libres, appui plan, encastrement), ainsi que l'utilisation de moules métalliques, soit en acier, soit en aluminium. Ces conditions aux limites ont été imposées sur les faces concaves et/ou convexes de l'équerre composite, afin de compléter l'analyse.

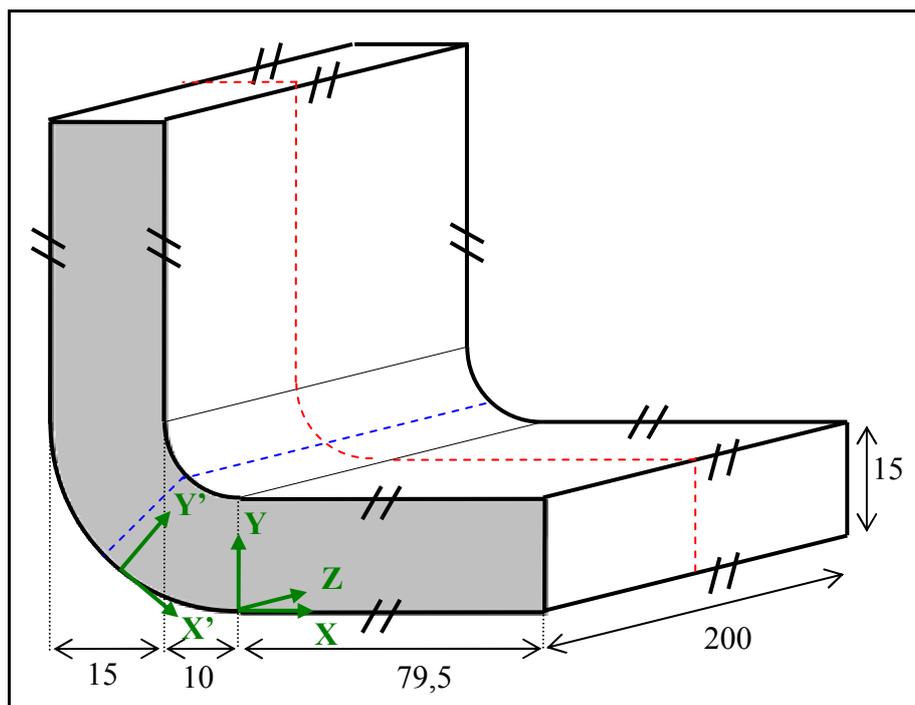
L'étude proposée ici présente une petite originalité par rapport à ce que l'on trouve le plus souvent dans la littérature. En effet, l'évolution des propriétés de l'équerre au cours de la fabrication (coefficients d'expansion et surtout rigidité), qu'on a pu estimer grâce aux méthodes d'homogénéisation (voir parties I et II du présent mémoire), a également été prise en compte dans l'implémentation par éléments finis.

### 2.2 Mise en données du problème

#### 2.2.1 Géométrie et maillage

La géométrie de l'équerre composite étudiée est détaillée sur la figure III-6 ci-dessous. Les moules acier et aluminium, non représentés, ont une épaisseur de 50 mm (voir Figure III-7). Notons le fort rapport épaisseur (15 mm) sur rayon de courbure intérieur de l'équerre (10 mm).

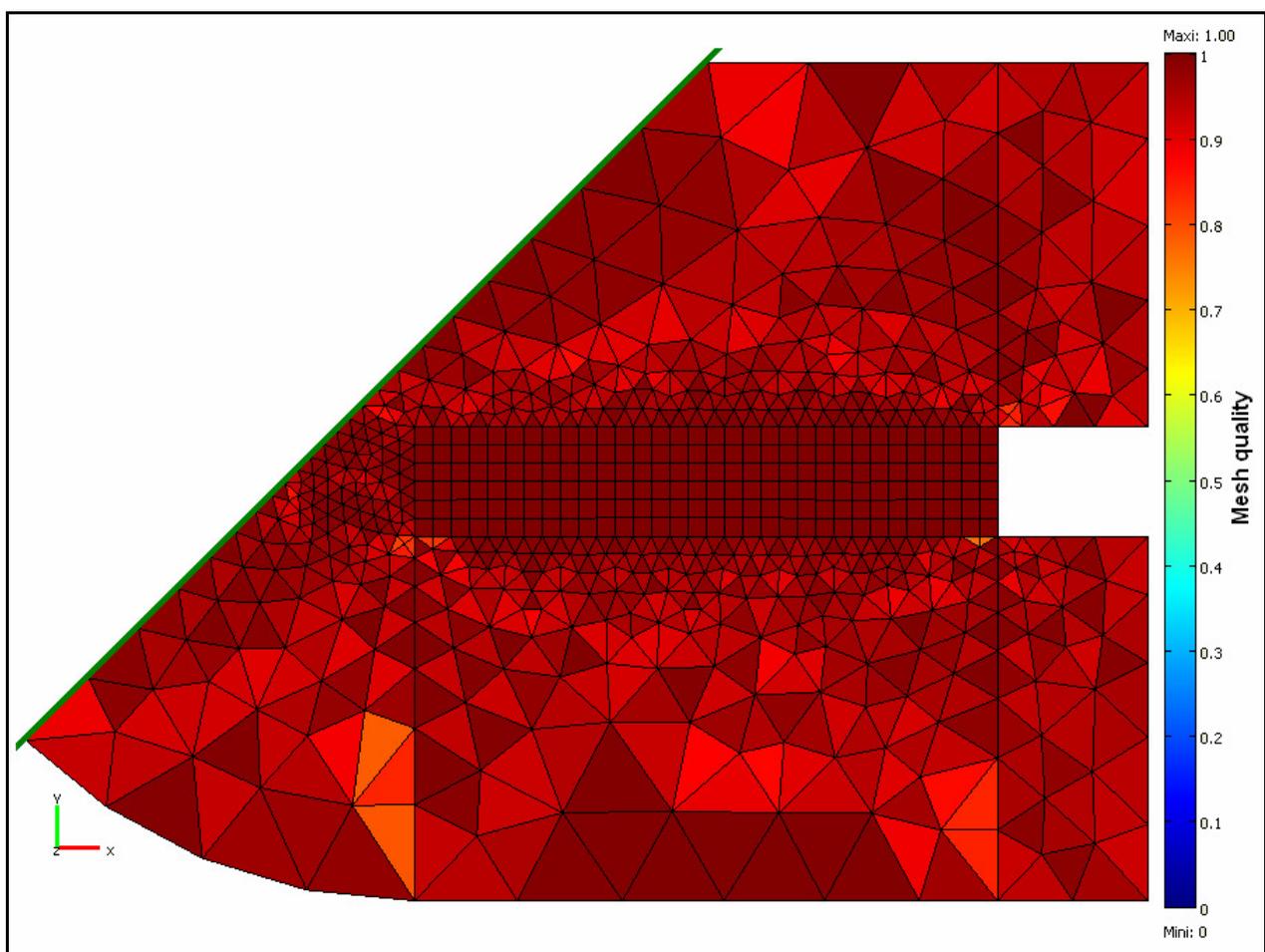
Figure III-6 : Géométrie de l'équerre composite (cotes en mm, échelle 1/1)



Le repère global XYZ utilisé par Comsol est présenté sur la figure III-6 ; un autre repère « local » X'Y'Z', qui suit la courbure du pli, est défini afin d'affecter correctement les propriétés du composite à la zone courbée. On remarque que la géométrie possède deux plans de symétrie, figurés en pointillés bleus et rouges, dont il convient de tirer parti afin de limiter la taille du modèle. Les conditions de symétrie correspondent à des appuis plans sur les faces idoines. Notons également qu'on a supposé une parfaite cohésion moule-pièce et donc un transfert intégral des contraintes, ce qui néglige notamment la présence d'agent démoulant à l'interface.

Le maillage de la géométrie a été construit à partir d'éléments triangulaires et rectangulaires. Comme l'équerre est très large, les effets de bord peuvent être négligés et les éléments sont dans un état de déformations planes généralisées (avec, néanmoins, un léger cisaillement en XZ et en YZ). Cependant, comme on l'avait fait remarquer plus tôt, les déformations planes généralisées ne sont pas implémentées sous Comsol Multiphysics (v3.5) ; on a donc utilisé des éléments prismes tridimensionnels, mais avec une seule couche d'extrusion dans la direction Z. Le maillage de surface utilisé est montré sur la figure III-6 ci-dessous, pour la demi-géométrie, le plan de symétrie étant représenté en vert. La taille maximale des éléments est de 2,5 mm dans l'équerre, et elle est laissée libre dans le reste de la géométrie (i.e. dans les moules mâle et femelle). Ceci se traduit par un maillage de bonne qualité, quoique de taille un peu grossière, avec un faible nombre de degrés de liberté (inférieur à 25 000). Ce nombre est largement inférieur aux capacités de calcul de la machine, mais l'utilisation séquentielle de plusieurs modules de calcul (expliqué plus bas) génère des problèmes de convergence, lorsqu'on augmente la finesse du maillage.

**Figure III-7 : Maillage surfacique de l'équerre composite et des moules**



## 2.2.2 Cycle de fabrication et propriétés matériau

Les déformations des pièces composites sont très dépendantes du cycle de fabrication appliqué : l'utilisation de paliers de température au cours de la cuisson, ou l'application d'un cycle de post-cuisson (pièce maintenue ou non), peuvent changer significativement la déformée finale de la pièce, en particulier si sa cinétique de cuisson est lente. Pour simplifier l'implémentation et l'analyse des résultats, on a considéré le cycle de cuisson à 180 °C, et la cinétique de cuisson, présentés dans la partie précédente (figure III-8).

Figure III-8 : Cycle de cuisson à 180 °C

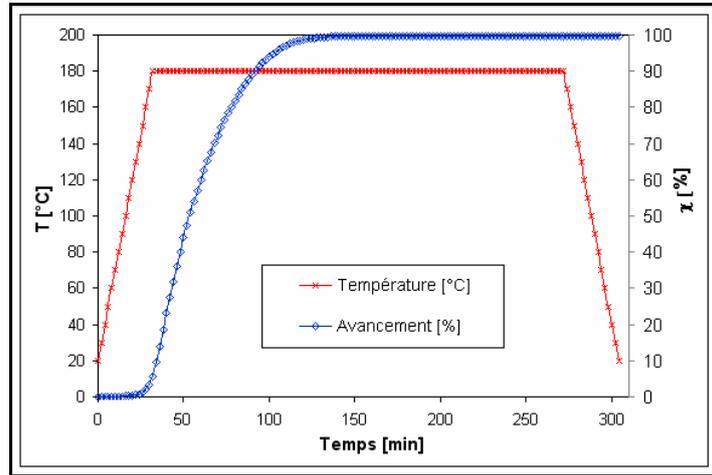
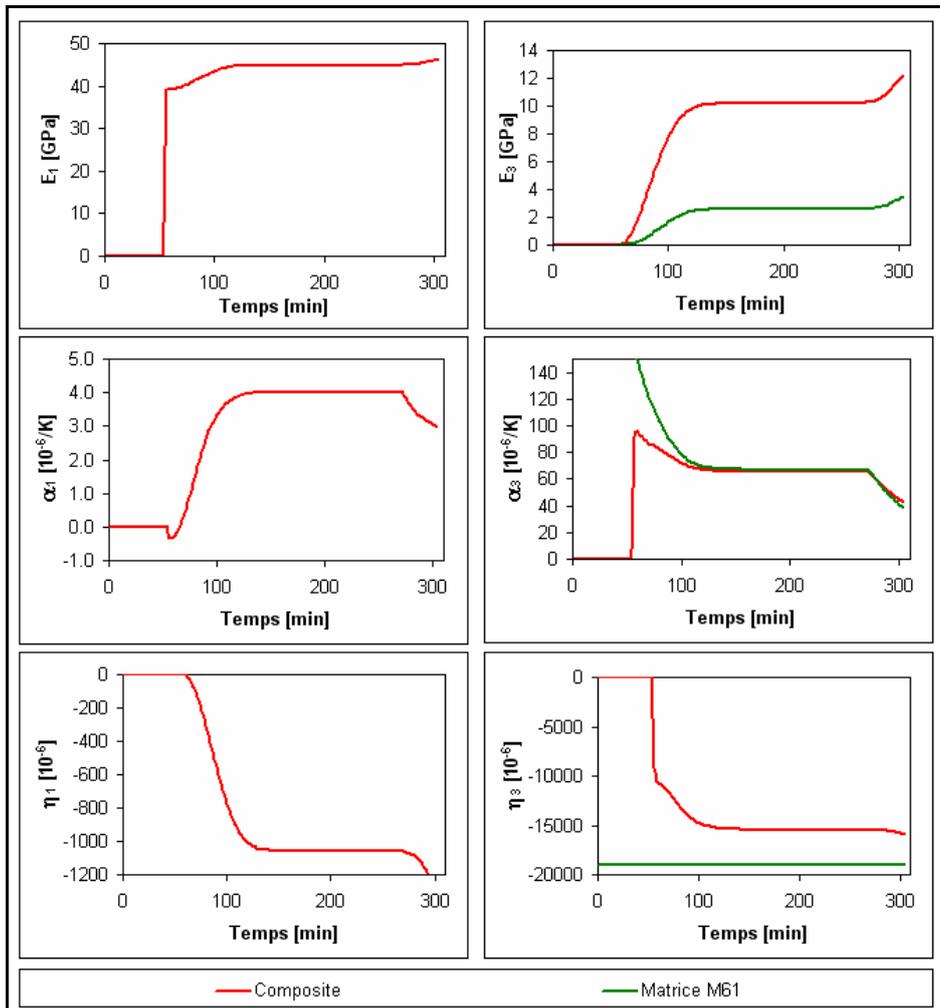


Figure III-9 : Evolutions des propriétés du composite au cours du cycle de cuisson



On peut également utiliser les mêmes propriétés effectives pour le composite, rappelées sur la figure III-9 ci-dessus. Notons que le saut observé sur certaines propriétés effectives (module de Young longitudinal  $E_1$  notamment), juste après le point de gel, génère quelques problèmes numériques lors du calcul par éléments finis. C'est pourquoi on a modifié manuellement la première valeur après le point de gel, afin d'adoucir ce saut. Ceci ne génère pas d'erreur sur les contraintes, le retrait thermo-chimique étant nul au moment du gel du matériau.

Les propriétés effectives du composite, calculées par les méthodes d'homogénéisation, ont été exportées sous forme de fichier texte, à chaque pas de temps (un point toutes les deux minutes), dans un format adapté pour Comsol. Le même procédé a été adopté pour la température et l'avancement. A partir de ces points, Comsol permet de construire des fonctions d'interpolation cubiques par morceaux, directement utilisables dans les menus. Notons qu'il existe une façon alternative de procéder : on peut également construire et exporter des tableaux de valeurs des propriétés effectives, selon la température et le degré de conversion de cuisson. Il est alors possible de résoudre ces deux paramètres, soit en définissant un module de calcul thermique, soit en fixant la température et en résolvant la cinétique via la fonction EDP (équation aux dérivées partielles) intégrée à Comsol. Cette méthode permet ainsi de prendre en compte des gradients de cuisson et de température dans l'équerre, et de calculer les contraintes cœur-peau correspondantes.

En ce qui concerne les moules acier et aluminium, on a utilisé des propriétés standards, supposées constantes tout au long de la cuisson :

- Acier structurel :  $E = 200 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,33$  et  $\alpha = 12,3 \cdot 10^{-6}/\text{K}$
- Aluminium 6063-T83 :  $E = 69 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,33$  et  $\alpha = 24,4 \cdot 10^{-6}/\text{K}$

### 2.2.3 Modules de calcul

Le logiciel Comsol Multiphysics offre la possibilité de résoudre simultanément ou séquentiellement, des problèmes faisant intervenir plusieurs physiques différentes, avec de possibles couplages entre eux. On peut ainsi définir plusieurs modules de calcul, avec pour chacun ses propres propriétés physiques, inconnues, réglages du solveur, etc. Par exemple, il est possible de définir un module permettant de résoudre la thermique du problème (cinétique de cuisson et échanges thermiques), puis un deuxième module mécanique permettant de calculer les contraintes cœur-peau associées.

Les simulations opérées ici ne tiennent compte que de l'aspect mécanique du problème des déformations résiduelles, cependant les capacités spécifiques du logiciel seront tout de même mises à profit. Le traitement mécanique du cycle de fabrication du composite sous Comsol présente deux difficultés notables. La première difficulté est de prendre en compte correctement l'évolution des propriétés au cours du calcul, la deuxième est de gérer l'étape de démoulage de l'équerre. Ces difficultés ont été surmontées en utilisant plusieurs modules de calcul.

#### 2.2.3.1 Prise en compte de l'évolution des propriétés

Le module « calcul de structures » de Comsol ne permet que la résolution de problèmes thermo-élastiques linéaires, du type :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{L} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{libre}}), \quad (\text{III-2})$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{libre}}$  représente une déformation libre de contraintes. Or la loi de comportement du matériau composite constituant l'équerre, s'écrit comme une loi « en vitesse » de la forme :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(t) = \mathbf{L}(t) : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) - \boldsymbol{\alpha}(t) \cdot \dot{T} - \boldsymbol{\eta}(t) \cdot \dot{\chi}), \quad (\text{III-3})$$

avec  $\dot{T}$  la vitesse de chauffe,  $\dot{\chi}$  la vitesse de cuisson,  $\boldsymbol{\alpha}$  le coefficient d'expansion thermique et  $\boldsymbol{\eta}$  le coefficient d'expansion chimique. Les contraintes et déformations correspondantes doivent par

conséquent être calculées par intégration temporelle. Le calcul a donc été réalisé à l'aide de deux modules, utilisés de façon séquentielle :

- Un module « calcul de structure » permet de résoudre le problème défini en vitesse, à chaque pas de temps. La dilatation libre du composite a été défini égal à  $\alpha(t) \cdot \dot{T} - \eta(t) \cdot \dot{\chi}$ , de même pour les moules (avec  $\eta = 0$ ). Les variables de sortie sont donc les vitesses de déplacement  $\dot{u}$ , de déformation  $\dot{\epsilon}$  et de chargement  $\dot{\sigma}$ .
- Un module EDP permet de réaliser l'intégration temporelle des déplacements et des contraintes. Les déformations totales sont calculées directement à partir des déplacements totaux, en définissant les expressions correspondantes. Rappelons que le module EDP résout le problème suivant sur le volume :

$$e_a \frac{\partial^2 u_{tot}}{\partial t^2} + d_a \frac{\partial u_{tot}}{\partial t} + \nabla \cdot \Gamma = F, \quad (III-4)$$

où  $u_{tot}$  est le déplacement total (inconnue du problème),  $\Gamma$  le vecteur de flux,  $F$  le terme source,  $e_a$  le coefficient de masse et  $d_a$  le coefficient d'amortissement. Afin de réaliser l'intégration temporelle, on a pris un coefficient  $d_a$  égal à 1, un terme source  $F$  égal à  $\dot{u}$  (calculé dans le module précédent) et on a fixé tous les autres termes à zéro. D'autre part, on a défini sur les bords des conditions de Neumann (flux nul), qui se présentent sous la forme suivante :

$$-\bar{n} \cdot \Gamma = G, \quad (III-5)$$

$\bar{n}$  étant le vecteur normal à la surface, et  $G$  étant fixé à zéro ici.

Pour les contraintes, le problème se pose de la même façon, en remplaçant  $\mathbf{u}$  (3 composantes par nœud) par  $\boldsymbol{\sigma}$  (6 composantes par nœud). Il est préférable de définir un module séparé pour réaliser l'intégration des contraintes, afin d'alléger l'analyse. En outre, le déplacement  $\mathbf{u}$  étant interpolé par des fonctions de formes quadratiques, on peut réduire l'interpolation des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  à une fonction de forme linéaire, ce qui permet de diminuer encore la taille du système à résoudre.

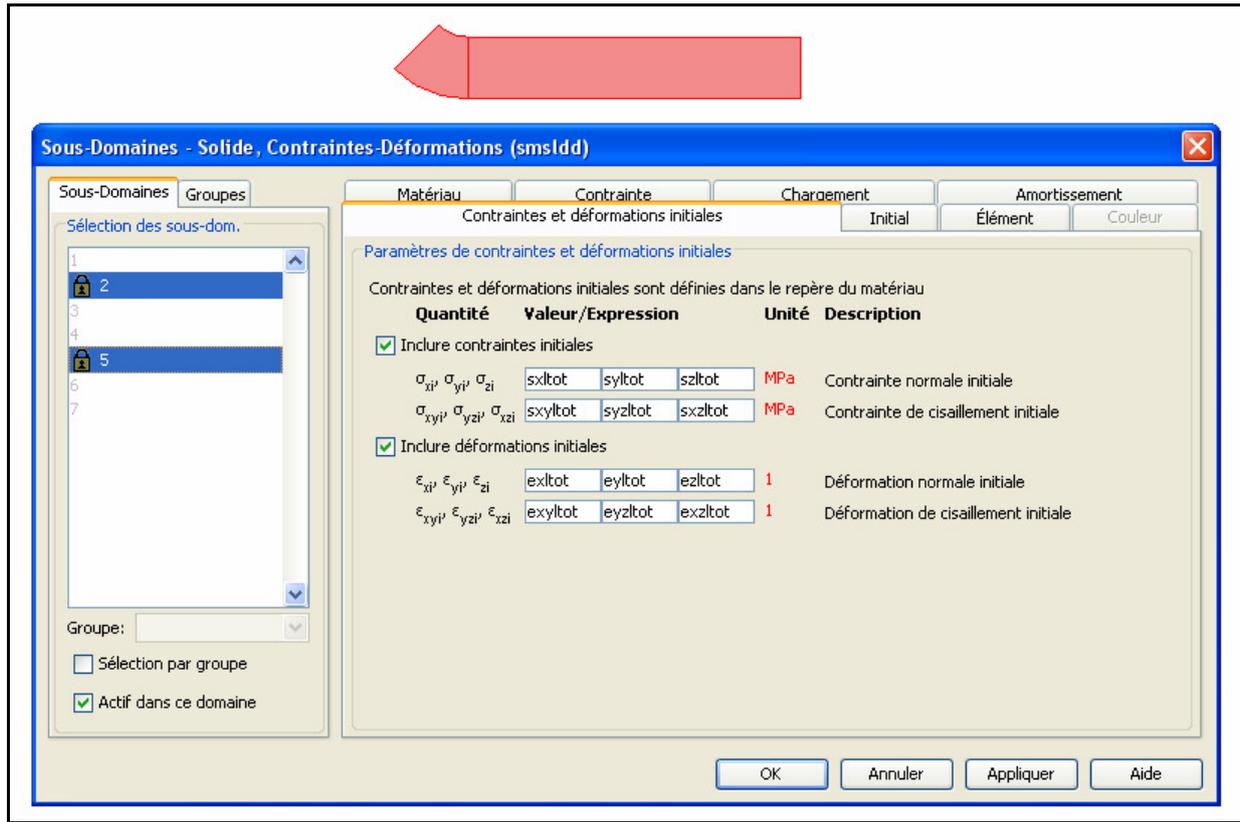
Le calcul est effectué sur la totalité du cycle de cuisson, c'est à dire pour  $t$  compris entre 0 et 304 minutes. On a imposé au solveur un pas de temps maximal de deux minutes, afin d'optimiser la qualité de l'intégration temporelle. Il existe une façon simple de vérifier la qualité du résultat : en faisant le calcul pour une équerre laissée libre de contraintes (hors conditions de symétrie), on obtient des contraintes finales quasiment nulles (inférieures à 3 MPa).

Remarquons que pour les cas étudiés ici, on peut ne démarrer le calcul qu'à partir du point de gel ( $t = 56$  min), ce qui évite la difficulté numérique liée au brusque changement des propriétés du composite. La montée en température du moule est négligée, mais elle ne génère pas de retrait angulaire. La dilatation thermique va tout au plus générer une déformation en surface de l'éprouvette, sans autre conséquence sur les résultats.

### 2.2.3.2 Simulation du démoulage de l'équerre

A la fin du cycle de cuisson, l'équerre est démoulée, c'est à dire qu'on libère les conditions aux limites contraignantes et autres interactions moule-pièce. Malheureusement, Comsol multiphysics n'offre pas la possibilité de désactiver une condition aux limites durant le calcul. Il est possible stopper le calcul à l'instant du démoulage, de désactiver la condition aux limites incriminée, puis de reprendre le calcul à partir de ce point. Cependant, cette méthode efface les valeurs calculées aux instants précédents le démoulage, ce qui est une gêne considérable pour l'analyse des résultats. En revanche, Comsol offre la possibilité d'appliquer des contraintes et déformations initiales aux différents sous-domaines (figure III-10).

Figure III-10 : Application de contraintes et déformations initiales à l'équerre, sous Comsol Multiphysics



On a donc ajouté un nouveau module « calcul de structure » au modèle, avec des réglages identiques au premier, mais en désactivant les moules et les conditions aux limites contraignantes (hors symétrie), ainsi que la dilatation thermique. On a ensuite appliqué à l'équerre des contraintes (et déformations) initiales égales aux contraintes totales (respectivement déformations totales) calculées par intégration temporelle, à l'instant  $t$ . Comsol résout le problème de sorte à annuler les contraintes initiales, si bien qu'on obtient à  $t = 304$  min la déformation résiduelle après démoulage, ainsi que toutes les données de post-traitement associées. En outre, en réglant le solveur pour faire le calcul sur tout le cycle de cuisson ( $t = 0$  à  $304$  min), on conserve la totalité des résultats précédents.

## 2.3 Résultats et discussion

Les calculs ont été opérés pour trois conditions aux limites simples (équerre libre, soumise à un appui plan ou encore à un encastrement), appliquées sur la zone radiale et droite de l'équerre, du côté intérieur et/ou à l'extérieur de la courbure. Les interactions avec un moule acier et un moule en aluminium ont également été testées, toujours des deux côtés de l'équerre. Les moules eux-mêmes ont été laissés libres (pas de conditions aux limites contraignantes).

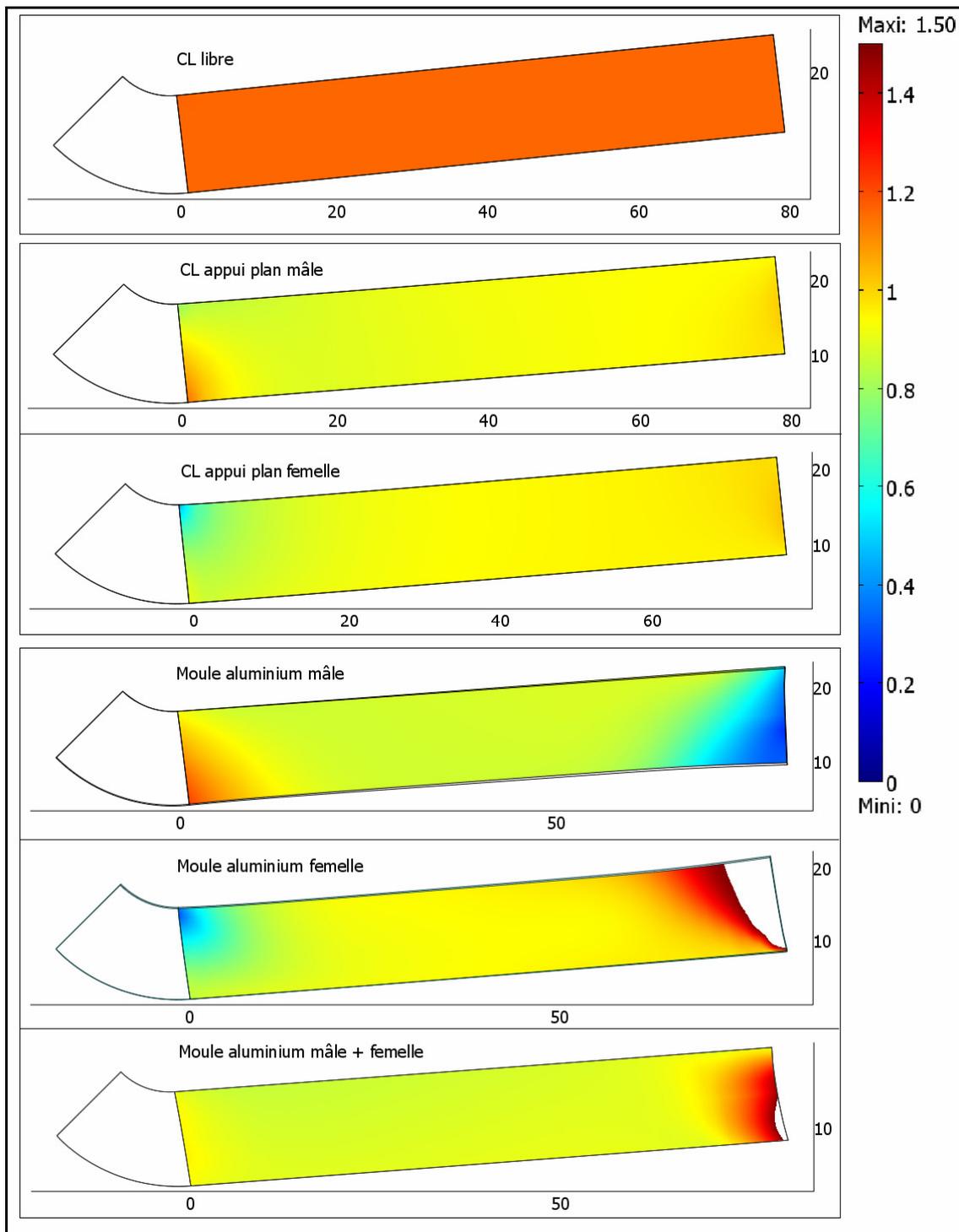
Pour chacune des 13 expériences citées ci-dessus, on a calculé le retrait angulaire moyen de l'équerre, à partir des déplacements selon  $Y$  de la partie droite, au niveau du plan de symétrie  $Z = 0$  mm. Le retrait angulaire en un point de la partie droite, rapporté à un angle de  $90^\circ$ , s'écrit :

$$\Delta\theta_{\text{spring-in}} = 2 \times \frac{180^\circ}{\pi} \times \frac{du_y}{dx} \quad (\text{III-6})$$

Les erreurs d'intégration temporelle et d'interpolation des déplacements génèrent une légère incertitude sur ce retrait angulaire. En comparant les résultats obtenus dans le cas d'une fabrication libre, sur les déplacements avant et après démoulage, et en utilisant deux maillages de finesses différentes, on a pu estimer grossièrement cette incertitude à  $0,03^\circ$ .

Le retrait angulaire n'est pas nécessairement constant au sein de l'équerre, comme le montre la figure III-11 ci-dessous. On observe des effets de bords en  $X = 0$  mm (fin de la partie courbée) et  $X = 79,5$  mm (extrémité de la partie droite), qui génèrent une distorsion localisée des faces libres de l'équerre. Ainsi, une condition aux limites (appui plan, moule...) appliquée sur le côté extérieur de l'équerre entraînera une distorsion importante du côté opposé (intérieur), tandis que le côté extérieur restera assez droit ( $\Delta\theta$  quasiment constant). Une CL appliquée sur les faces supérieures et inférieures de l'équerre permet d'obtenir des faces bien droites des deux côtés ; une cuisson libre de l'équerre génère une variation d'angle uniforme dans la partie droite.

**Figure III-11 : Retrait angulaire  $\Delta\theta$  dans l'équerre après démoulage, pour différentes conditions aux limites. (vue en coupe dans le plan de symétrie  $Z = 0$  mm, échelle commune  $0^\circ - 1,5^\circ$ , déformée après démoulage  $\times 10$ )**



On constate, en outre, que l'intensité des distorsions dépend directement de celle des interactions moule-pièce, que l'on peut classer par ordre croissant de fonction de la CL appliquée : libre < appui plan < encastrement < moule acier < moule aluminium.

Il convient de rappeler que les distorsions localisées observées sur les faces libres ne doivent pas être confondues avec un effet de gauchissement, qui apparaîtrait même en l'absence de conditions aux limites sur l'équerre. Par ailleurs, ces distorsions sont sensibles à la qualité du maillage. Par conséquent, si l'on veut étudier l'influence des CL sur le retrait angulaire, il est préférable de calculer une valeur moyenne de  $\Delta\theta$  sur les faces contraintes de l'équerre, où il y a peu de distorsion. Ces valeurs moyennes sont récapitulées dans le tableau III-1 ci-dessous.

**Tableau III-1 : Retrait angulaires moyens de l'équerre composite, pour différentes conditions aux limites**

Position CL Type CL	Extérieur (femelle)	Intérieur (mâle)	Intérieur + Extérieur (mâle + femelle)
Libre (Radford & Diefendorf)	1,24°	1,24°	1,24°
<b>Libre</b>	<b>1,16°</b>	<b>1,16°</b>	<b>1,16°</b>
Appui plan	0,93°	0,91°	(0,75°) *
Encastéré	0,80°	0,89°	(0,72°) *
Moule acier	0,89°	0,88°	0,84°
Moule aluminium	0,94°	0,87°	0,89°

\* Valeurs sujettes à discussion, voir plus bas.

On peut d'ores et déjà noter, que la formule analytique de Radford et Diefendorf, également présentée dans le tableau, surestime la variation angulaire, même lorsque l'équerre est laissée libre durant la cuisson. Cette dernière condition est elle-même assez sous-contraindante, puisqu'elle aboutit à une variation angulaire supérieure de près d'un quart de degré à toutes les autres. Cet écart provient notamment du fait que l'utilisation d'un moule (ou d'une CL contraignante) limite très fortement le retrait chimique de la pièce. Un moyen simple de vérifier cela est de soumettre l'équerre à une remontée en température à 180 °C après la cuisson, sans appliquer aucune contrainte. On observe alors que le retrait angulaire à température de cuisson est beaucoup faible pour une équerre cuite dans un moule acier (0,2° environ), que pour équerre cuite sans moule (0,48°).

Les résultats montrent une influence assez nette des interactions moule-pièce sur les résultats, puisque la variation angulaire évolue entre 1,16° et 0,80°, si l'on exclut les deux valeurs entre parenthèses (discutées plus bas). Pour une CL de type appui plan, qui ne transmet pas de contraintes longitudinales à l'équerre, on observe un retrait angulaire important et peu dépendant de la position de la CL. Pour les trois autres types de CL (encastrement, moule acier et aluminium), on peut dégager deux schémas d'analyse, en fonction de la position (genre) de la CL. Pour une CL de genre femelle ou mâle + femelle, le retrait angulaire augmente avec le CET et la souplesse du moule (l'encastrement correspondant à un moule non dilatant). Au contraire, pour une CL de genre mâle, le retrait angulaire tend à diminuer avec le CET du moule, avec néanmoins des variations beaucoup plus faibles.

La variabilité de  $\Delta\theta$ , prédite ici, est uniquement due à l'évolution des propriétés du composite au cours du cycle de cuisson. On le vérifie assez aisément en assignant une rigidité constante au composite durant la cuisson : la déformée finale est alors indépendante des conditions aux limites appliquées durant le cycle, on aboutit au même résultat que dans le cas l'équerre laissée libre. Au contraire, si l'on prend en compte l'évolution des propriétés matériau, la déformée finale devient

dépendante de l'historique de chargement de l'équerre. Comme la rigidité de l'équerre augmente au cours de la cuisson, les déformations thermo-chimiques contrariées par les interactions avec le moule ne sont pas intégralement restituées après le démoulage. En conséquence, un assemblage plus rigide se traduira par une déformation plus faible après démoulage, ce qui est l'un des buts recherchés. Ceci explique pourquoi le cycle de fabrication sans conditions aux limites contraignantes (« cuisson libre ») aboutit au retrait angulaire maximal.

Le corollaire de ce constat, est que les estimations données par les autres conditions de fabrication seront probablement sous-estimées, s'il se produit un détachement de la pièce et du moule durant la fabrication. Le problème du contact moule-pièce a donc sans doute une influence très significative sur la variation angulaire. L'hypothèse d'un contact parfait entre le moule et la pièce est probablement sur-contraignante ; à ce titre, la condition d'appui plan semble plus réaliste que celle d'encastrement. Il faut également envisager la possibilité que les contraintes à l'interface moule-pièce soient suffisamment importantes pour provoquer un démoulage prématuré de l'ensemble de la pièce. Les deux valeurs mises entre parenthèses dans le tableau III-1, correspondant respectivement à un appui plan et à un encastrement sur les deux faces de l'équerre, en sont l'exemple typique. En effet, ces conditions aux limites impliquent que le retrait thermo-chimique de l'équerre dans l'épaisseur soit complètement bloqué jusqu'au moment du démoulage, ce qui génère des contraintes de traction normales au pli. Dans la réalité, ces contraintes interfaciales aboutiraient à un démoulage rapide de la pièce, ce pourquoi ces résultats n'ont pas été intégrés au schéma d'analyse général. Cependant, cette remarque peut également s'appliquer aux autres simulations et, en particulier, à celles pour lesquelles on utilise un moule femelle : l'effet de retrait angulaire tend alors à séparer l'équerre du moule, particulièrement au niveau des parties droites ; alors qu'au contraire, pour un moule mâle, l'équerre tend à se bloquer sur le moule et le risque de décohésion est plutôt localisé au niveau de la partie courbe.

Afin de quantifier ce risque de démoulage, il est pertinent d'analyser les contraintes à l'interface moule-pièce, juste avant le démoulage. Les contraintes  $\sigma_{X'Y'}$  et  $\sigma_{Y'Z'}$  permettent de quantifier le risque de glissement interfacial, tandis que des contraintes  $\sigma_{Y'Y'}$  fortement positives traduisent un risque important de décollement de l'interface. Ces contraintes sont doublement importantes car le Hextool, comme beaucoup de matériaux composites à matrice organique, résiste assez mal aux sollicitations de traction ou de cisaillement hors-plan. Sur les figures qui suivent, on a tracé les contraintes  $\sigma_{Y'Y'}$  dans l'équerre, en coupe dans le plan  $Z = 0$  mm (teintes arc-en-ciel). On a ajouté, au niveau des interfaces moule-pièce, un graphique en teintes bleu-rouge, qui indique la valeur absolue des contraintes de cisaillement  $\sigma_{X'Y'}$ .

Pour des conditions aux limites de type appui plan (figure III-12), on constate que les contraintes de cisaillement sont nulles (aux erreurs numériques près). Les contraintes dans la direction normale au pli sont significatives, mais restent suffisamment faibles pour ne pas causer de décollement de la pièce. Cependant, si on utilise cette CL sur les deux faces de l'équerre, on voit apparaître des contraintes normales très importantes (jusqu'à 182 MPa), qui aboutiraient à un décollement rapide de l'une ou l'autre face de l'équerre, si ce n'est à une dégradation du matériau. Si l'on utilise un moule métallique (en acier, par exemple), on voit apparaître des contraintes de cisaillement interfaciales assez importantes, particulièrement aux extrémités de l'équerre (figure III-13). Celles-ci pourraient suffire à initier un glissement dans la partie droite de l'équerre, mais pas dans la partie courbée. Les contraintes normales peuvent également s'avérer problématiques si l'on utilise au moins un moule mâle, pouvant potentiellement générer un décollement dans la partie courbée et à proximité. Dans le cas du moule femelle, il n'y a pas de risque de décollement dans la partie courbée, puisque les contraintes normales sont plutôt compressives. L'équerre est retenue au moule par des contraintes de traction de faible amplitude, réparties sur toutes les parties droites de l'interface. Les mêmes phénomènes peuvent être observés avec un moule aluminium, avec néanmoins des contraintes plus élevées en raison de la plus forte hétérogénéité des CET.

Figure III-12 : Contraintes interfaciales  $|\sigma_{X'Y'}|$  et  $\sigma_{Y'Y'}$  avant démoulage, pour une CL de type appui plan

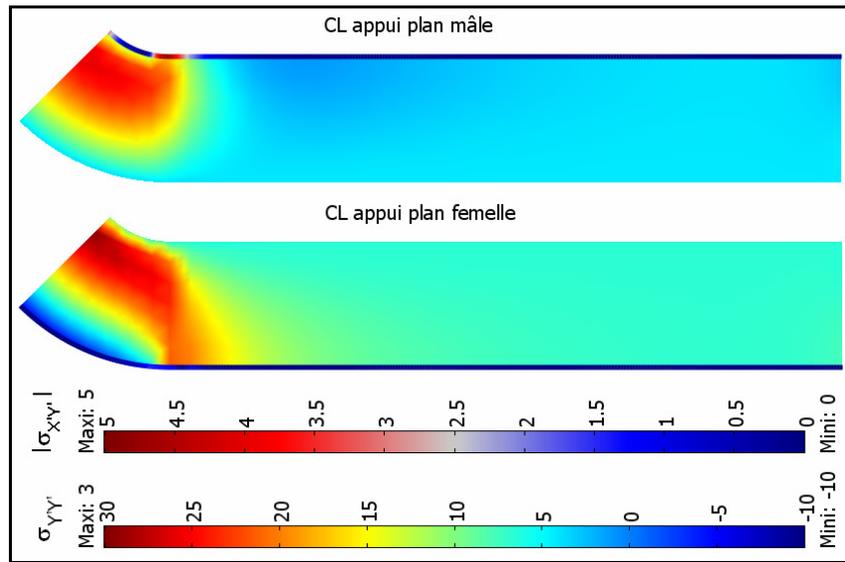
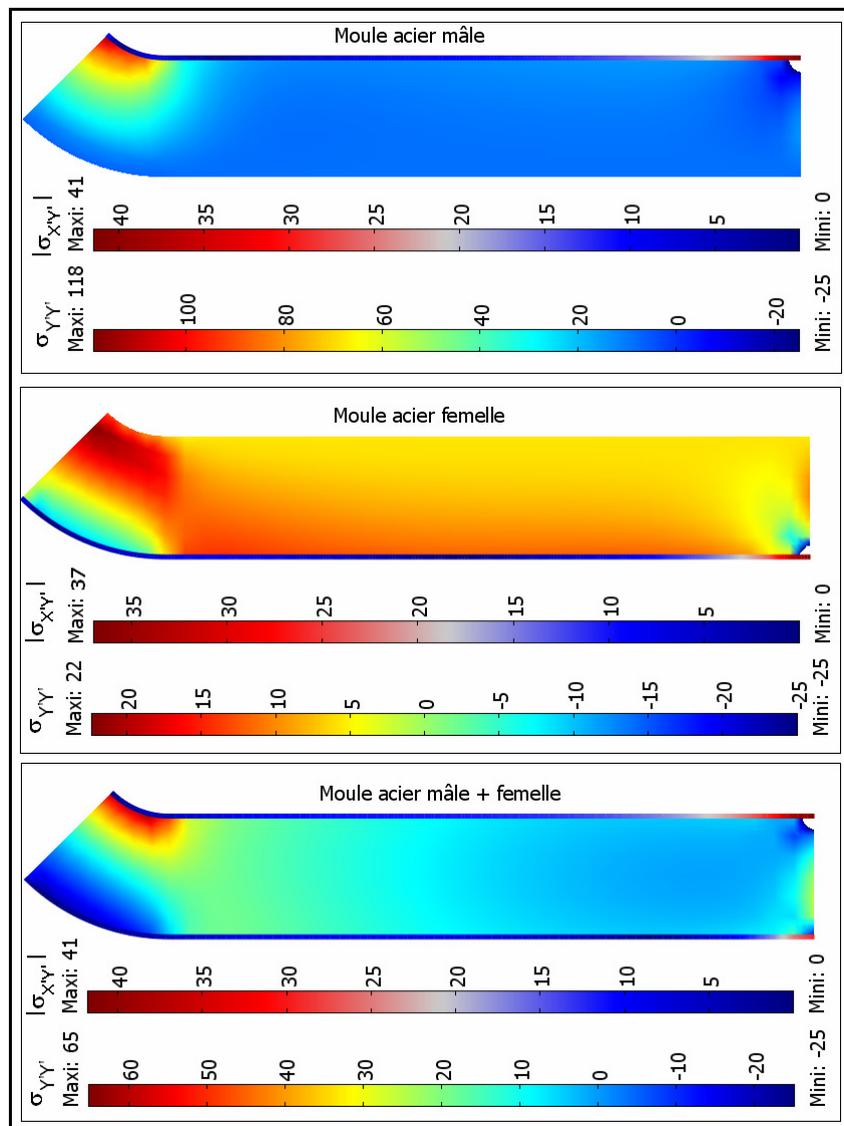


Figure III-13 : Contraintes interfaciales  $|\sigma_{X'Y'}|$  et  $\sigma_{Y'Y'}$  avant démoulage, pour un moule acier



Par ailleurs, ces phénomènes sont essentiellement dus à l'écart entre le CET du moule et celui de la pièce, lequel génère des contraintes de compression dans l'équerre. La figure III-14 suivante montre

le développement des contraintes  $\sigma_{X'X'}$  au cours du temps, au point central de la partie droite de l'équerre  $\{X = 40 \text{ mm}, Y = 7,5 \text{ mm}, Z = 0 \text{ mm}\}$  et pour trois conditions aux limites typiques : un appui plan, un encastrement et un moule acier, tous appliqués des deux cotés de l'équerre. On note que dans le cas d'un moule non-dilatant (Invar ou encastrement), les contraintes de traction se développent également durant le retrait thermique.

Figure III-14 : Evolution des contraintes  $\sigma_{X'X'}$  dans l'équerre avant démoulage, pour différentes CL (valeurs calculées au point  $\{X = 40 \text{ mm}, Y = 7,5 \text{ mm}, Z = 0 \text{ mm}\}$ )

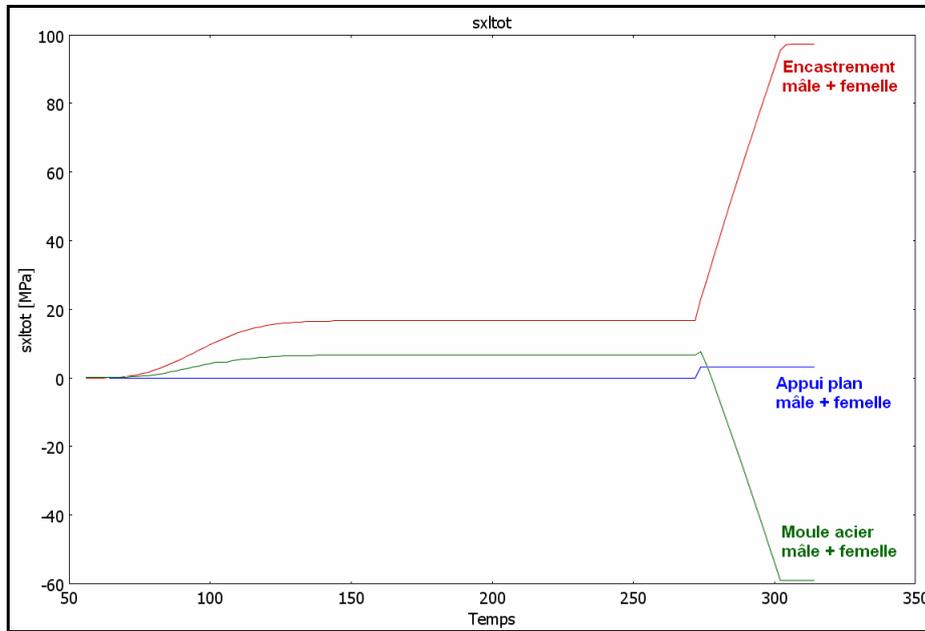
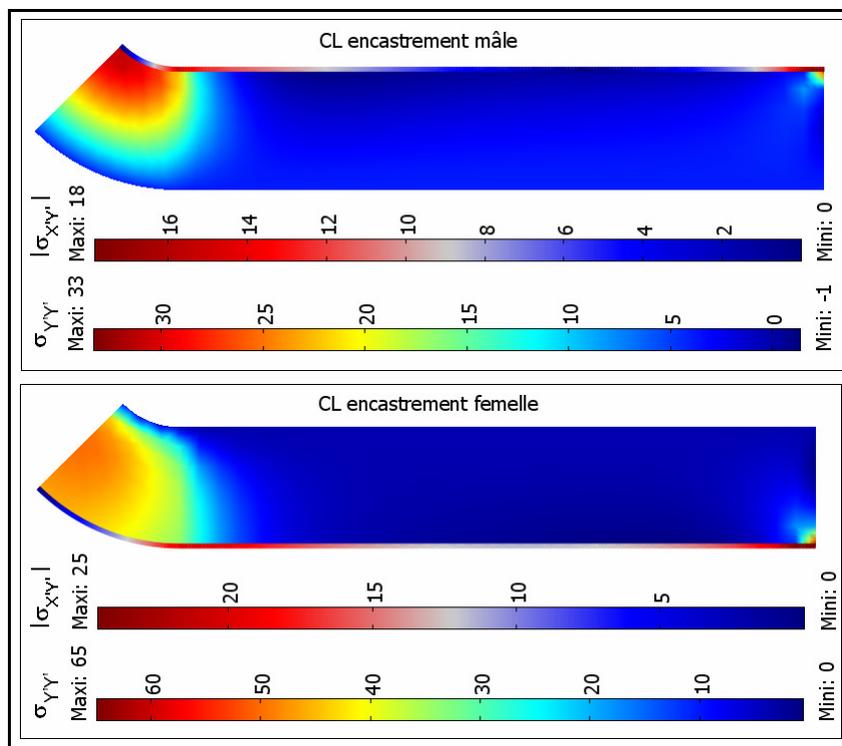


Figure III-15 : Contraintes interfaciales  $\sigma_{X'Y'}$  et  $\sigma_{Y'Y'}$  avant démoulage, pour une CL de type encastrement



Ceci se traduit par des interactions moule-pièce légèrement différentes, comme le montre la figure III-15 ci-dessus. D'une part, les glissements peuvent se produire à l'extrémité de l'équerre mais également à proximité de la zone de courbure. D'autre part, dans le cas d'un encastrement appliqué

sur l'extérieur de l'équerre, on observe des contraintes normales de traction assez importantes dans la zone courbée, qui seraient susceptibles d'initier un décollement de l'équerre.

## 2.4 Conclusion et perspectives

Le modèle de calcul développé sous Comsol Multiphysics a permis de simuler l'effet de spring-in dans une équerre composite de type Hextool, pour différents types de conditions aux limites appliquées durant la cuisson. Le modèle rend possible la prise en compte de l'évolution des propriétés du composite durant la fabrication, ce qui a permis de révéler une sensibilité non négligeable du retrait angulaire au type de CL (ou moule) d'une part, ainsi qu'à sa position (mâle et/ou femelle) d'autre part. Ces évolutions de propriétés entraînent une dépendance des états mécaniques dans l'équerre à l'historique de chargement et donc aux interactions moule-pièce.

Les simulations ont permis de montrer que la formule analytique de Radford et Diefendorf, pour les équerres composites épaisses, surestime le retrait angulaire de près de 40 % par rapport à celui obtenu avec une ou plusieurs conditions aux limites contraignantes, en utilisant des approches éléments finis. De même, le choix d'un cycle de fabrication non contraint (CL libre) aboutit à une surestimation du retrait angulaire par rapport aux autres types de CL. De plus, on montre une sensibilité du retrait angulaire au type de moule, notamment si l'on utilise au moins un moule femelle. Dans ce cas, le CET du moule peut jouer un rôle important sur le retrait angulaire, lequel est créé principalement par le retrait thermique (le retrait chimique étant très largement contrarié par le moule). Si l'on souhaite minimiser le retrait angulaire de l'équerre composite, il semble que la combinaison d'un moule et d'un contre-moule en acier soit la meilleure, parmi celles testées.

Par ailleurs, on a pu constater l'apparition de distorsions localisées sur les surfaces de l'équerre, dont l'intensité dépend directement de la force des interactions moule-pièce. Ces distorsions se font peu ressentir sur les faces où le moule a été utilisé, mais apparaissent nettement sur les faces libres.

Enfin, les simulations opérées ici se sont basées sur l'hypothèse d'une interface moule-pièce parfaite. Or, les contraintes calculées à l'interface semblent indiquer qu'il pourrait se produire des glissements, voir des décollements de l'interface, en fonction de l'agent démoulant (ou du pli d'arrachement) utilisé. Le cas du décollement, qui correspond à un changement brutal des CL au cours de la fabrication, est particulièrement critique, et pourrait avoir une influence importante sur la déformée finale de l'équerre composite. Ce risque est peu prononcé lorsqu'on utilise un moule femelle, mais il est important avec un moule mâle, en particulier si celui-ci est en aluminium.

### **3 QUALIFICATION D'UN MOULE COMPOSITE**

#### **3.1 Avant-propos**

Le chapitre précédent a permis de montrer l'influence du moule utilisé, et notamment de son coefficient d'expansion thermique, sur la déformée finale des pièces composites. Il apparaît que ce choix influe assez fortement sur les contraintes interfaciales moule-pièce, lesquelles peuvent entraîner un glissement interfacial voir même un décollement prématuré de la pièce. Ces phénomènes de décollement correspondent à un changement brutal et difficilement prévisible des conditions au limites, et donc de la déformation finale de la pièce. C'est pourquoi il est préférable, suivant la recommandation d'Albert et Fernlund (2002), d'utiliser un moule ayant un CET aussi proche que possible de celui de la pièce moulée.

En raison de son CET assez faible ( $3 \text{ à } 4 \cdot 10^{-6}/\text{K}$ ), le Hextool ouvre de nouvelles perspectives en tant que matériau d'outillage, se posant comme remplaçant possible des matériaux métalliques (acier ou aluminium), classiquement utilisés. Cette faible expansion thermique permettrait de limiter les contraintes d'interaction moule-pièce et donc le risque de décohésion. En contrepartie, l'utilisation d'un moule composite soulève un certain nombre de problématiques, notamment le problème du retrait angulaire du moule lui-même. Les calculs précédents ont montré que ce retrait est important à température ambiante, mais beaucoup plus modéré à température de cuisson. Par ailleurs, les propriétés du moule étant dépendantes de la température et donc de l'historique de chargement, il faut vérifier que les interactions moule-pièce ne génèrent pas une déformation supplémentaire du moule à la fin de la cuisson.

C'est pourquoi on s'est attaché à simuler la cuisson d'une équerre composite simple, composée de plis unidirectionnels à  $0^\circ$ , dans différents moules (acier, aluminium, et composite de type Hextool), afin d'étudier l'influence de ces interactions moule-pièce sur la déformée finale de la pièce.

#### **3.2 Mise en données**

Comme dans le cas précédent, on utilise Comsol Multiphysics afin de calculer la déformée de l'équerre UD après cuisson, ainsi que celle du moule. La géométrie utilisée est représentée sur la figure III-15, en vue en coupe dans le plan XY (l'épaisseur totale est 200 mm). Notons que l'équerre UD a le même rayon de courbure intérieur que l'équerre de type Hextool, mais une épaisseur plus faible (9,5 mm). La géométrie du moule est également très différente du cas précédent. On utilisera à nouveau la symétrie du problème en ne considérant que la moitié droite de la géométrie, ce qui réduit d'autant la taille du modèle.

Le repère global utilisé par Comsol a été représenté en vert, et placé sur l'origine des coordonnées. Par ailleurs, la pièce UD ainsi que le moule composite sont formés par drapage de plis anisotropes. On a donc défini un repère local qui suit la courbure du pli, dans la zone représentée sur la figure III-16 avec des tons plus sombres. Les plis sont orientés à  $0^\circ$  par rapport à la direction X' du repère local.

Le maillage a été construit par la même méthode que précédemment, i.e. par extrusion du maillage surfacique (une seule couche d'éléments), lequel est montré sur la figure III-17. Le modèle comporte environ 23 000 degrés de libertés (ddl, pour un calcul mécanique à 3 ddl par nœud). Des tests faits avec un maillage plus fin, comportant 35 000 ddl, ont abouti à des résultats très proches, mais avec un temps de calcul deux fois plus important.

Figure III-16 : Géométrie de l'équerre UD et du moule métallique/composite (cotes en mm, échelle 1/1)

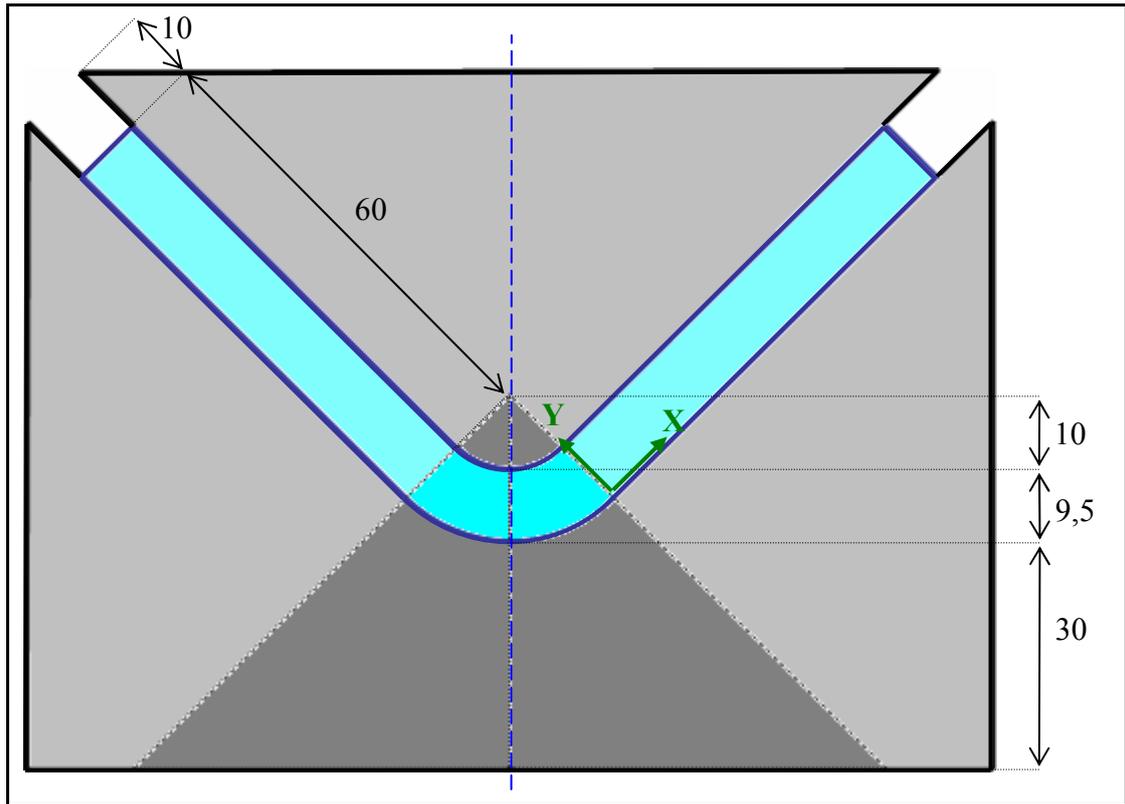
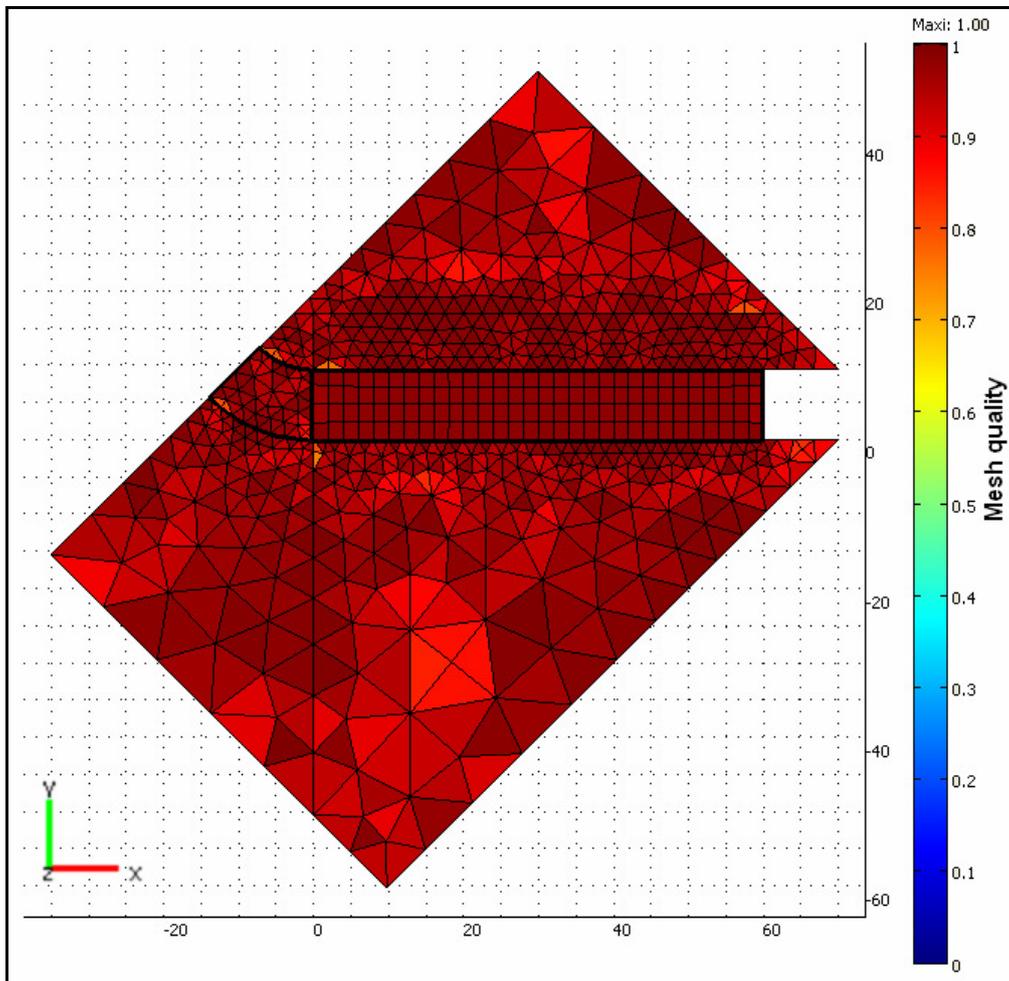
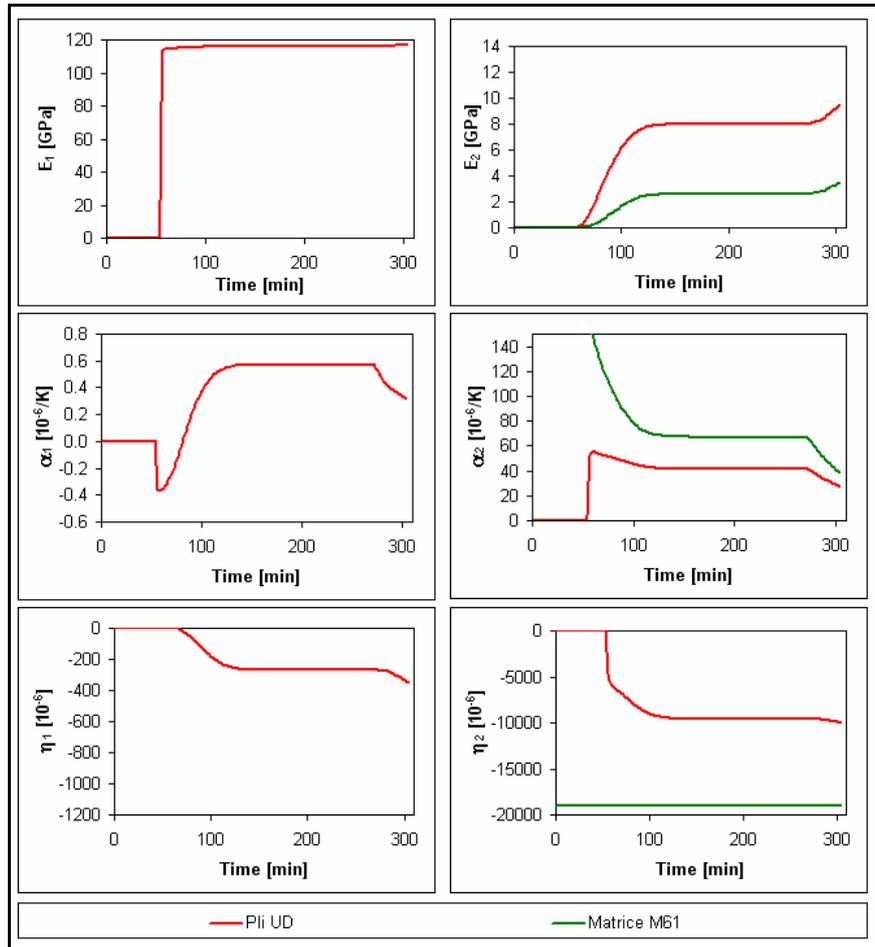


Figure III-17 : Maillage surfacique de l'équerre UD et du moule



On a considéré l'emploi de différents matériaux pour le moule : de l'acier, de l'aluminium, et composite de type Hextool (supposé totalement cuit). En ce qui concerne les plis UD composant l'équerre, on a considéré qu'ils étaient formés de fibres de carbone AS4 et de résine M61 avec un taux volumique de fibres égal à 56 %, c'est à dire une microstructure identique à celles des bandes renforçantes constituant le moule composite. Le cycle de fabrication utilisé ici est identique à celui du chapitre précédent, de même que la cinétique de cuisson de l'équerre. L'évolution des propriétés de l'équerre au cours du cycle de cuisson, calculée avec le modèle autocohérent de Eshelby-Kröner, est donnée dans la figure III-18.

Figure III-18 : Evolutions des propriétés du pli UD au cours du cycle de cuisson



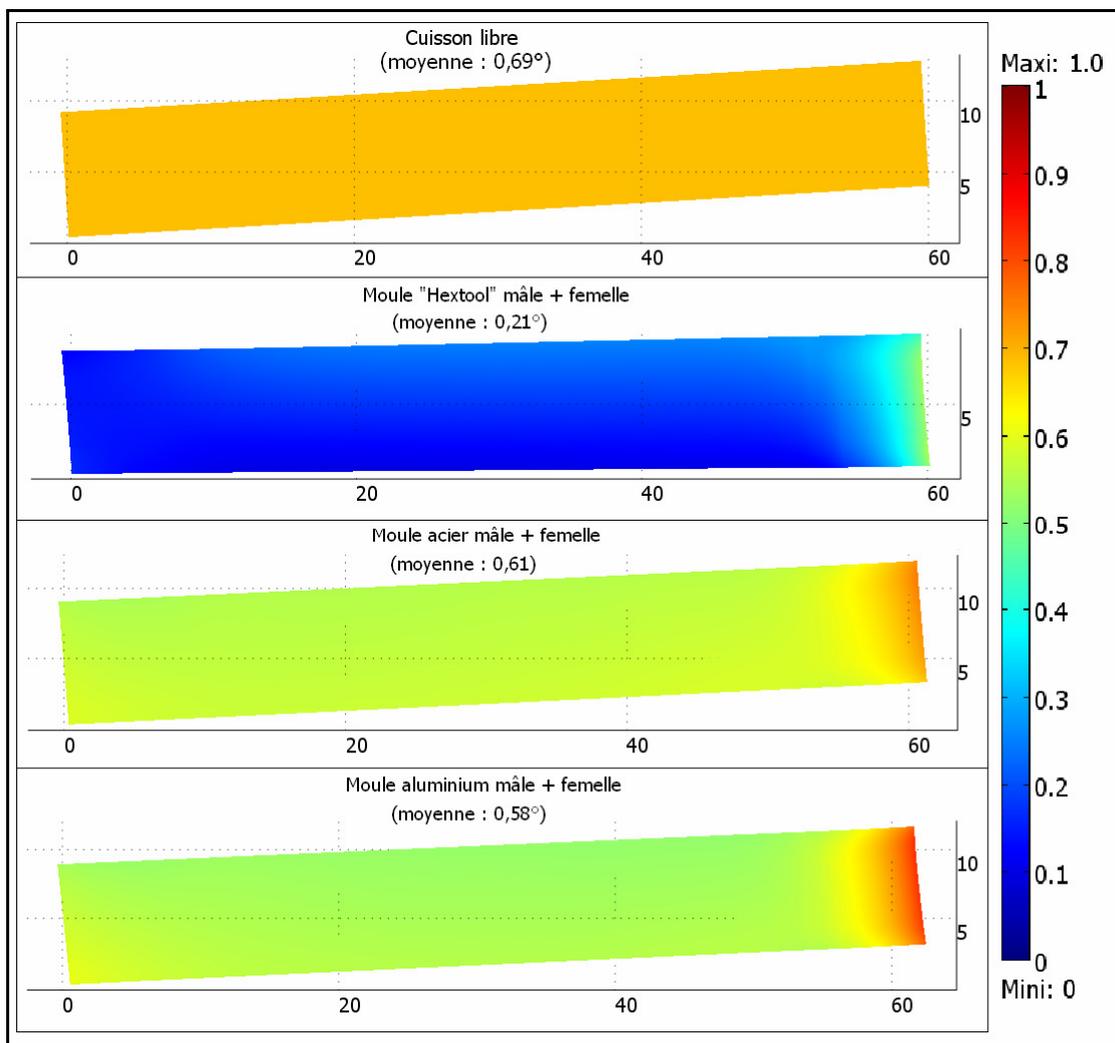
L'évolution des propriétés de l'équerre et, le cas échéant, du moule composite, a été gérée selon la même méthode que pour l'équerre composite. Cependant, le traitement du démoulage a été opéré d'une manière légèrement différente, afin de conserver les données de post-traitement liées au moule. Plutôt que de désactiver les sous-domaines correspondant au moule à la dernière étape, on a utilisé le mode « assemblage » de Comsol, qui permet de considérer les différents sous-domaines comme autant de pièces séparées. Ces pièces sont reliées par des conditions d'identité sur frontières (ou paires identité), activables ou désactivables comme de simples conditions aux limites. Ainsi, il suffit de désactiver les paires identités reliant l'équerre aux moules mâle et femelle, pour gérer la phase de démoulage, tout en gardant les données de déformation du moule. Le revers de la médaille est que cette méthode alourdit significativement la gestion des interfaces, donc le temps de calcul, et complique la génération du maillage (correspondance des nœuds aux interfaces).

### 3.3 Résultats et discussion

#### 3.3.1 Déformation de l'équerre

On a simulé la cuisson de l'équerre UD, dans différents types de moules et dans le cas d'une cuisson libre (sans moule), afin d'évaluer sa déformation finale après démoulage. La figure III-19 ci-dessous récapitule les retraits angulaires dans la partie droite de l'équerre, pour les différentes conditions aux limites. Elle met en évidence la forte influence du moule utilisé sur le retrait angulaire moyen : celui-ci est important dans le cas (purement théorique) d'une cuisson libre, avec un retrait angulaire de  $0,69^\circ$  constant dans toute la partie droite, légèrement inférieur à l'estimation de Radford et Diefendorf ( $0,76^\circ$ ). Avec un moule métallique (aluminium ou acier), le retrait angulaire est plus faible (environ  $0,60^\circ$ ) ; cependant, c'est de loin le moule composite qui aboutit au retrait le plus limité, avec une variation d'angle presque trois fois moindre.

Figure III-19 : Retrait angulaire  $\Delta\theta$  dans l'équerre UD après démoulage, pour différentes conditions aux limites. (vue en coupe dans le plan de symétrie  $Z = 0$  mm, échelle commune  $0^\circ - 1^\circ$ , déformée après démoulage  $\times 10$ )



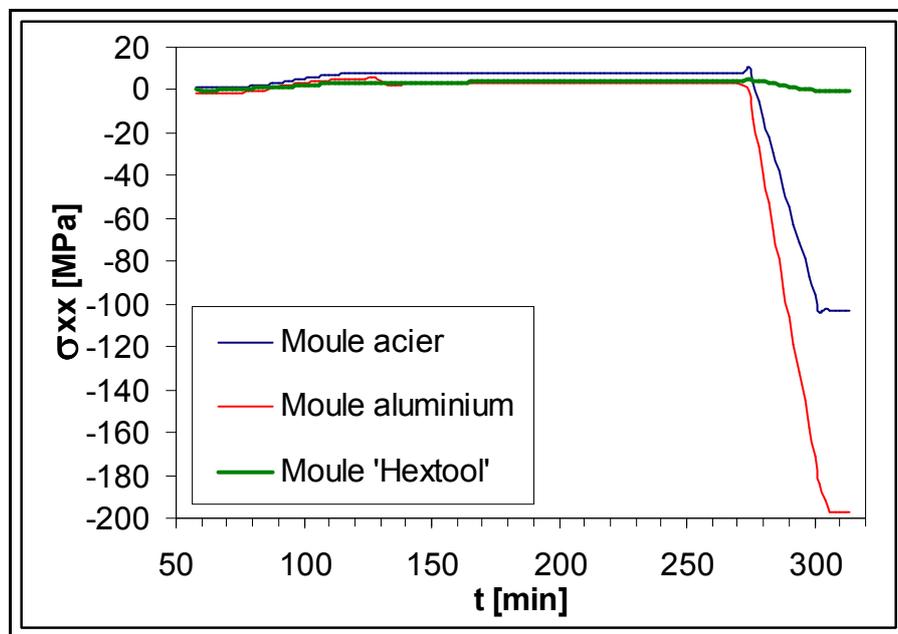
On peut noter la présence de distorsions des faces droites de l'équerre, notamment à l'extrémité de la partie droite, en raison de la faible épaisseur du moule à ce point. En réalité, cet effet de bord peut être négligé car les pièces composites sont généralement détournées après fabrication. Pour la même raison, on note également une légère différence dans la variation angulaire des surfaces inférieures et supérieures de l'équerre, qui peut atteindre  $0,15^\circ$  dans le cas du moule composite (et environ  $0,05^\circ$  pour les moules métalliques). La diminution d'épaisseur de l'équerre est plus importante au niveau de la zone courbée ( $-80 \mu\text{m}$  pour un moule composite) qu'à l'extrémité de l'équerre ( $-15 \mu\text{m}$ ) : les moules induisent un « pincement » de l'équerre au niveau de la zone courbée.

La faible valeur du retrait angulaire pour le moule composite, est principalement due à la dilatation angulaire de celui-ci, durant la phase de chauffe ; celle-ci est de l'ordre de  $0,35^\circ$  pour le moule mâle, tandis qu'elle atteint  $0,50^\circ$  pour le moule femelle (ce qui explique la variation d'épaisseur de l'équerre, évoquée plus haut) ; de sorte que cette dilatation angulaire initiale diminue d'autant le retrait angulaire final.

### 3.3.2 Interactions moule-pièce

L'intensité des interactions moule-pièce est un facteur critique dans le bon déroulement du cycle de fabrication de la pièce. Sur la figure III-20 ci-dessous, on a reporté l'évolution des contraintes  $\sigma_{X'X'}$  au point central de la partie droite de l'équerre. Durant la phase de cuisson de l'équerre, on voit se développer de faibles contraintes de traction, liées au retrait chimique, dont l'intensité dépend de la rigidité du moule. En revanche, durant la phase de refroidissement, l'écart entre les CET du moule et de la pièce génère des contraintes de compression, qui sont très importantes avec les moules métalliques.

Figure III-20 : Evolution des contraintes  $\sigma_{X'X'}$  dans l'équerre au cours de la fabrication, pour différents moules (valeurs calculées au point  $\{X = 30 \text{ mm}, Y = 4,75 \text{ mm}, Z = 0 \text{ mm}\}$ )



Sur les trois figures suivantes, on a représenté les contraintes de cisaillement interfaciales  $\sigma_{X'Y'}$  avant démoulage, ainsi que les contraintes normales  $\sigma_{Y'Y'}$  dans l'équerre et dans le moule. On peut voir au premier coup d'œil que les contraintes interfaciales obtenues avec un moule composite sont largement plus faibles que pour celles générées par un moule en acier ou en aluminium. Les contraintes de cisaillement sont suffisamment faibles pour assurer un bon contact au niveau de l'interface, et les contraintes normales ne semblent pas non plus indiquer un risque de décollement. En revanche, avec les moules acier et aluminium, on peut s'attendre à observer les deux phénomènes, au vu des contraintes calculées. Les contraintes normales subies par l'équerre pourraient même entraîner une dégradation du matériau.

Corollaire de ce constat, les moules métalliques transmettent à l'équerre des efforts de compression  $\sigma_{X'X'}$  importants : les contraintes maximales sont respectivement de  $-192 \text{ MPa}$  et  $-260 \text{ MPa}$  pour les moules acier et aluminium. Au contraire, si l'on utilise un moule composite, l'équerre subit des contraintes de traction-compression très modérées, comprises entre  $-50$  et  $50 \text{ MPa}$ .

Figure III-21 : Contraintes interfaciales  $\sigma_{X'Y'}$  et  $\sigma_{Y'Y'}$  avant démoulage, pour un moule acier

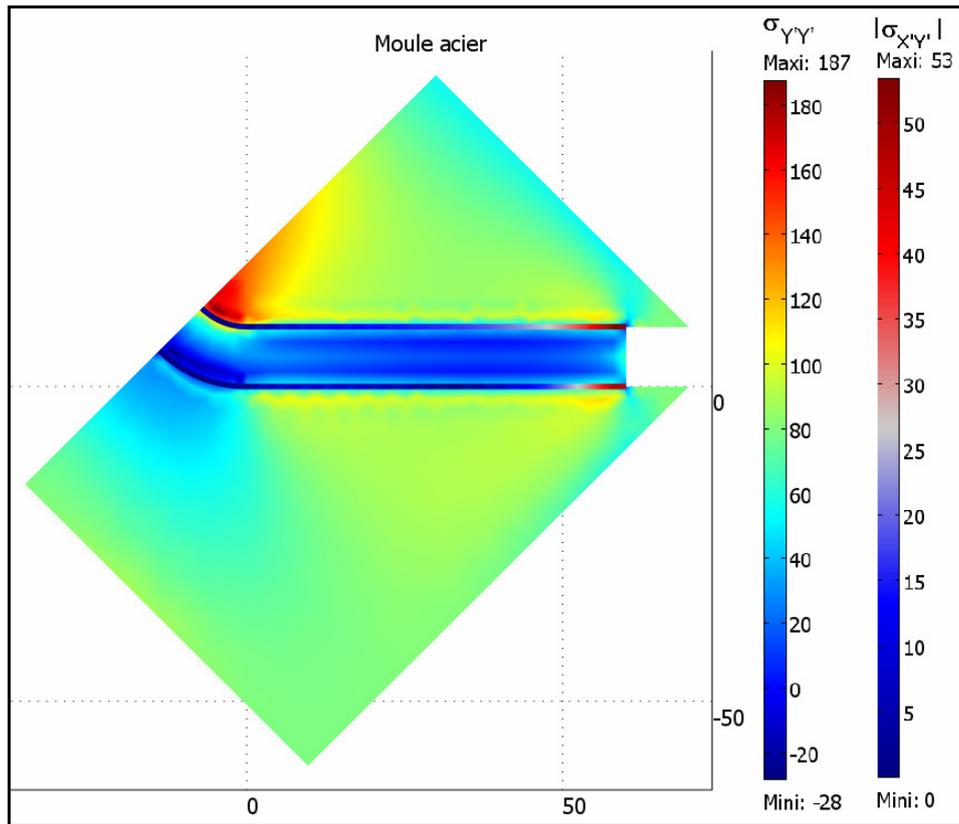


Figure III-22 : Contraintes interfaciales  $\sigma_{X'Y'}$  et  $\sigma_{Y'Y'}$  avant démoulage, pour un moule aluminium

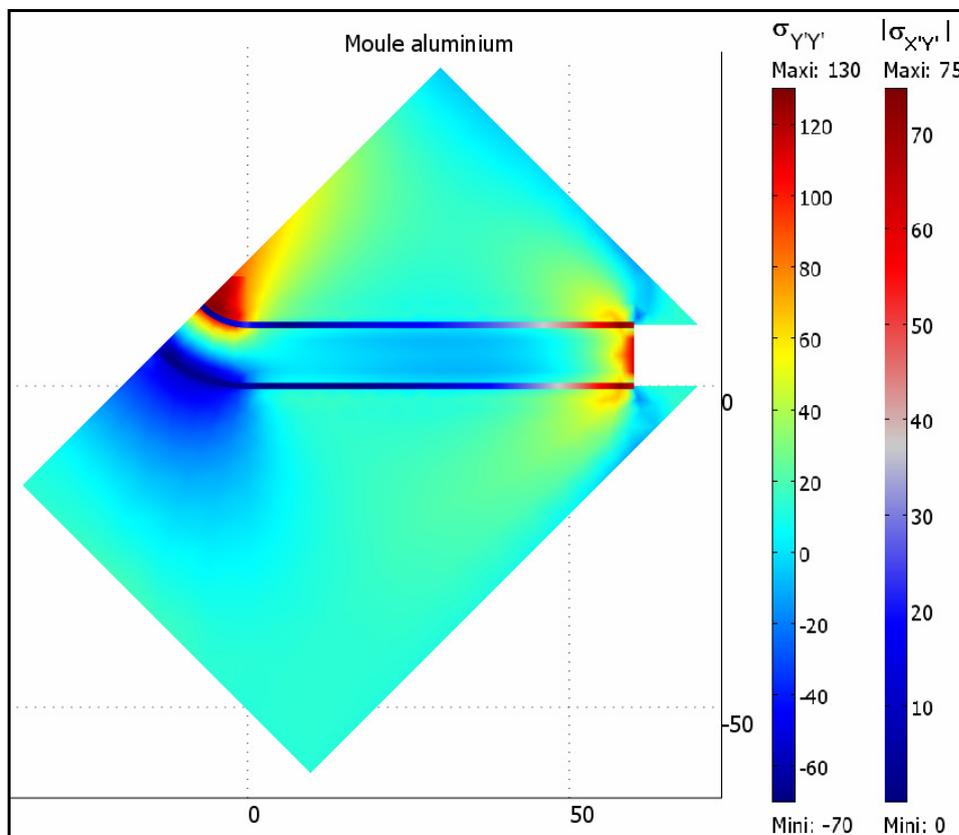
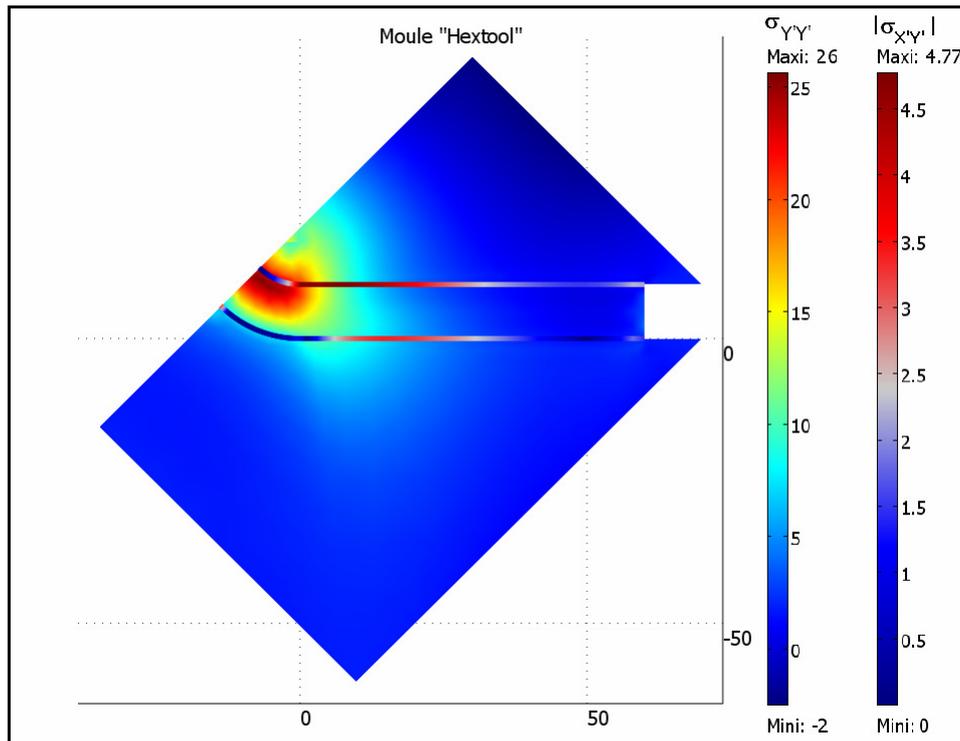


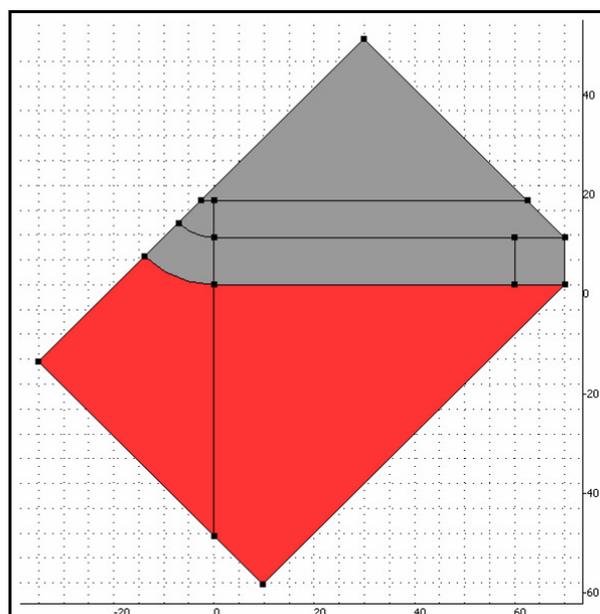
Figure III-23 : Contraintes interfaciales  $\sigma_{X'Y'}$  et  $\sigma_{Y'Y'}$  avant démoulage, pour un moule composite



### 3.3.3 Déformation initiale du moule composite

La simulation opérée sur l'utilisation d'un moule composite montre des résultats encourageants : non seulement les interactions moule-pièce sont largement réduites, mais en outre le retrait angulaire obtenu en utilisant un moule composite est beaucoup plus faible qu'avec un moule métallique. Ce résultat peut cependant s'avérer trompeur : en effet, le moule est lui-même sujet au retrait angulaire lors de la cuisson. Il convient donc de prédire et, si possible, de corriger cette variation angulaire initiale. Il s'agit simplement de réutiliser la méthode décrite dans le chapitre précédent, mais avec une géométrie différente. Etant donné la géométrie particulière du moule, on peut considérer qu'il est cuit sur un simple moule en acier, sans contre-moule et sans autre condition contraignante.

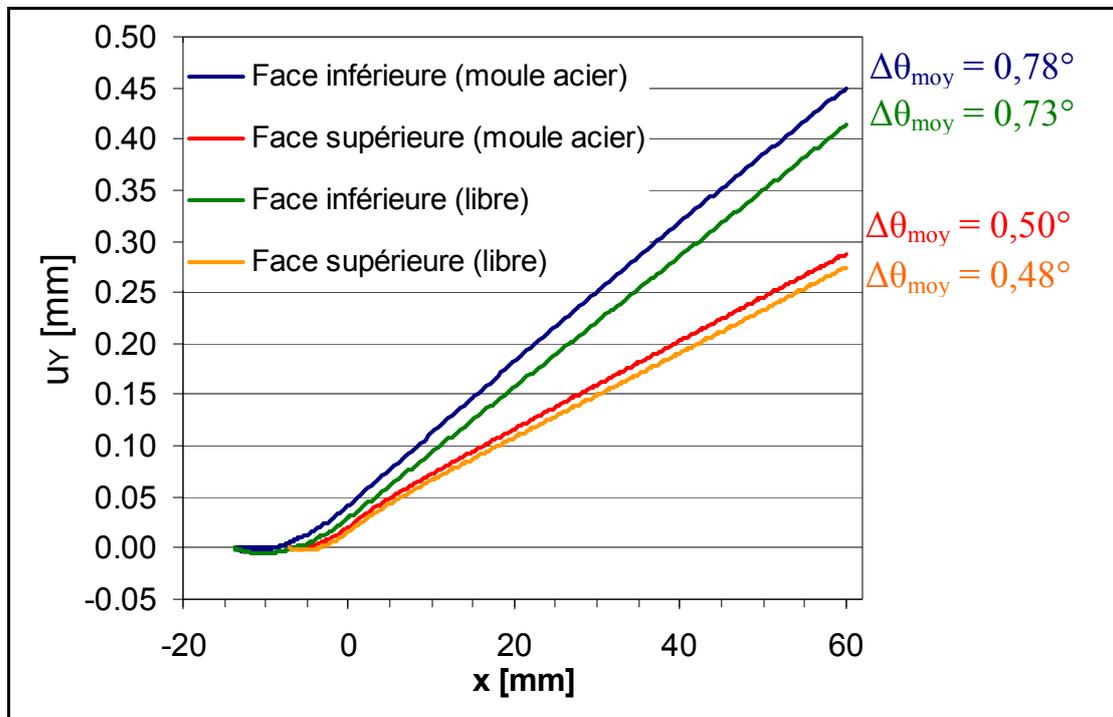
Figure III-24 : Description de la géométrie utilisée pour simuler la cuisson du moule composite inférieur



Afin de constituer le moule acier, on peut utiliser les géométries déjà définies, en ajoutant seulement un morceau à l'équerre centrale. Ainsi, sur la figure III-24 ci-dessus, les parties grisées correspondent au moule acier et la partie en rouge correspond au futur moule composite (partie inférieure), à cuire.

Les calculs ont été menés séparément pour les parties supérieure et inférieure du moule composite, fabriquées sur un moule acier ; on a également simulé une cuisson libre du moule composite, à titre de comparaison. Dans la figure suivante, on a reporté les déplacements selon Y de la surface du moule composite à la fin du cycle de fabrication, ainsi que les retraits angulaires moyens calculés sur la partie droite du moule composite. L'influence du moule acier semble assez faible au vu des résultats, puisqu'on obtient des déplacements sensiblement identiques après une cuisson libre. De plus, les valeurs importantes des contraintes interfaciales, calculées avant le démoulage, laissent à penser qu'un décollement pourrait se produire à l'interface. Par ailleurs, les retraits angulaires moyens sont beaucoup plus faibles que ceux obtenus dans le chapitre précédent, pour l'équerre de type Hextool. Ceci s'explique par la grande épaisseur du moule composite, qui génère des contraintes thermo-élastiques, même en l'absence de sollicitations externes. Ces contraintes entraînent également une légère distorsion de la face inférieure du moule composite.

Figure III-25 : Déplacements normaux et retrait angulaire du moule composite après fabrication

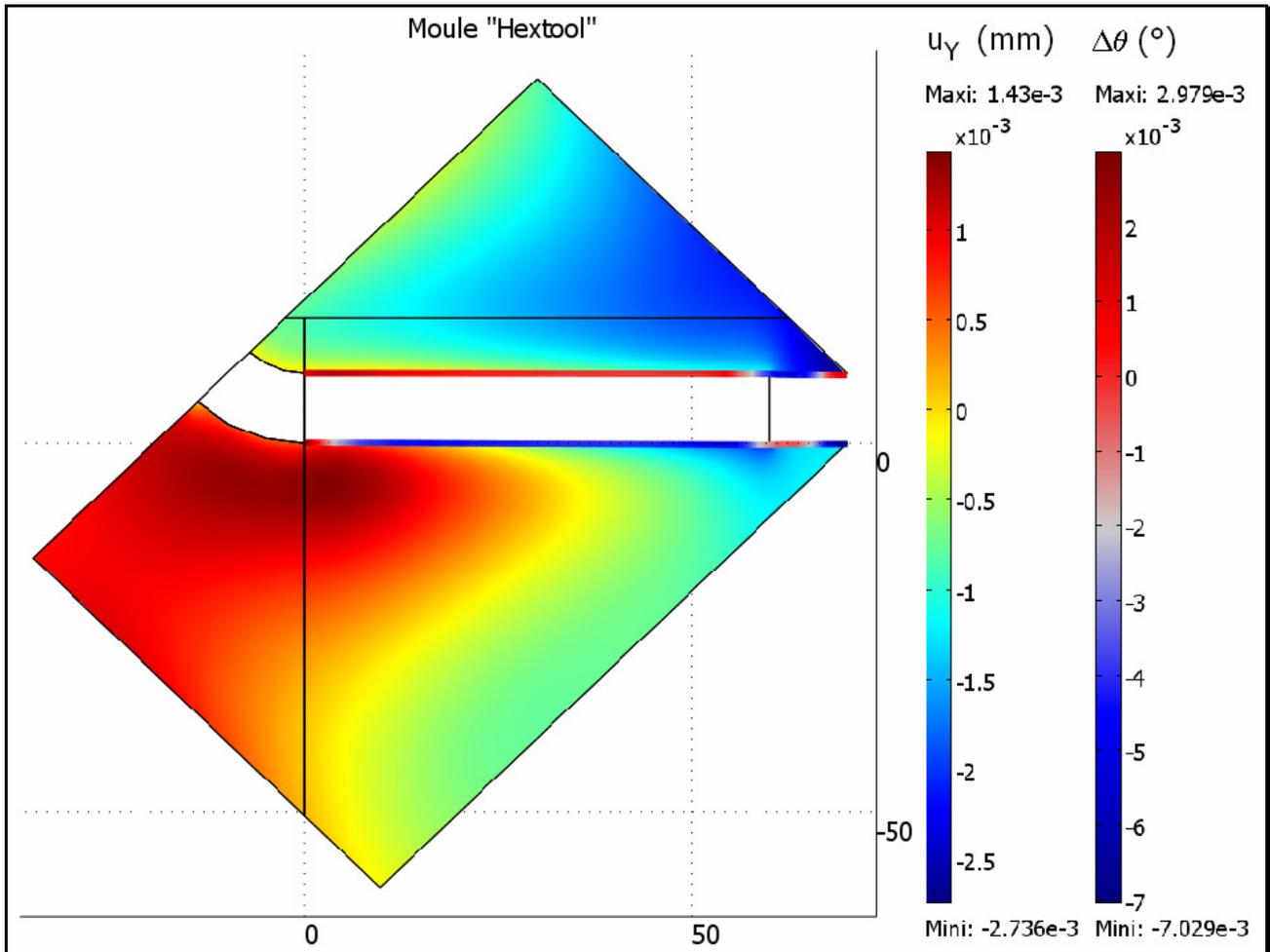


L'enseignement à tirer de cette étude est qu'il est absolument nécessaire de tenir compte de la déformation initiale du moule composite, pour calculer correctement celle de la pièce moulée. Si l'on ajoute le retrait angulaire initial du moule composite, à celui généré durant la cuisson ( $0,21^\circ$  environ), on aboutit à un retrait total de  $0,85^\circ$  environ, très supérieur à celui obtenu avec les moules métalliques. C'est pourquoi il est préférable de corriger la forme du moule composite afin de limiter au maximum la déformation finale de la pièce. La microstructure particulière du Hextool permet de le faire assez aisément, en ajoutant ou en enlevant de la matière (par drapage de plis supplémentaires, ou par usinage). Comme les plis de Hextool sont quasi-isotropes, l'ajout ou le retrait d'un pli n'entraîne pas de déformation de la pièce. En cela, le Hextool diffère des stratifiés composites, dans lesquels la déformée finale de la pièce résulte d'un équilibre entre les contraintes intra-laminaires, qui est perturbé dès que l'on enlève un pli en surface.

### 3.3.4 Déformation résiduelle de service du moule composite

La forte sensibilité des propriétés thermo-élastiques du Hextool à la température pose la question de sa stabilité dimensionnelle en service, en l'occurrence au cours du cycle de fabrication d'une pièce. La déformation du matériau étant dépendante de l'historique de chargement, il convient de vérifier que le matériau reprend bien à sa forme d'origine à la fin du cycle de cuisson de la pièce (démoulage compris). Sur la figure suivante, on a représenté les déplacements selon Y des deux parties du moule composite, à la fin du cycle de fabrication (teintes arc-en-ciel). On a également tracé, sur la surface plane du moule, la variation angulaire rapportée à 90° d'angle (teintes bleu-rouge).

Figure III-26 : Déformation résiduelle dans un moule composite après fabrication d'une équerre UD



On constate que la déformation résiduelle après un cycle de fabrication est très faible, avec des déplacements micrométriques et des variations angulaires inférieures à 0,01°. Ces résultats semblent indiquer que le moule composite a une excellente stabilité dimensionnelle et pourrait subir plus d'une centaine de cycles de fabrication sans que l'accumulation des déformations résiduelles ne devienne gênante.

## 4 CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans cette partie, la problématique des déformations résiduelles et du retrait angulaire des équerres composites a été traitée par la méthode des éléments finis. Un modèle a été défini sous Comsol Multiphysics afin de simuler les déformations d'une équerre composée de plis composites unidirectionnels alignés ainsi que celles d'une équerre et d'un moule fabriqués dans un matériau composite semblable au Hextool. Les propriétés macroscopiques utilisées sont issues des modèles d'homogénéisation développés précédemment.

Les capacités « multiphysiques » de Comsol ont été mises à profit afin de tenir compte de l'évolution des propriétés des matériaux tout au long de la fabrication et pour gérer la phase de démoulage. Cette évolution des propriétés de la pièce composite durant la fabrication entraînent une dépendance de la déformée finale à l'historique de chargement de la pièce. En conséquence, on observe des retraits angulaires différents selon la condition aux limites appliquée ou le moule utilisé. Un fait notable est que les déformations prédites pour une équerre cuite sans moule sont assez largement surestimées, le retrait chimique étant généralement fortement contrarié par le moule. Pour la même raison, la formule analytique de Radford et Diefendorf semble également surestimer de façon importante le retrait angulaire. Le retrait angulaire a été calculé pour une équerre composite de type Hextool, avec différentes conditions aux limites. Les résultats indiquent qu'il est préférable d'utiliser un moule d'acier plutôt qu'un moule aluminium, si l'on souhaite diminuer le retrait angulaire.

Le modèle a également permis d'estimer les contraintes de cisaillement et de traction à l'interface moule-pièce, lesquelles sont fréquemment à l'origine d'un glissement interfacial, voire d'un décollement de la pièce. Les contraintes interfaciales sont particulièrement critiques si l'on utilise un moule mâle, car elles se concentrent dans la zone courbe de l'équerre. Afin de limiter ces contraintes, il est préférable d'utiliser un moule ayant le CET le plus proche possible de celui de la pièce moulée ; en l'occurrence, un moule en acier est plus adapté qu'un moule en aluminium.

La fabrication d'une équerre composite classique, à base de plis UD à 0°, a également été étudiée. La possibilité d'utiliser un moule composite, à base d'Hextool, a été évaluée et comparée à des solutions classiques (moule acier et aluminium). Les résultats semblent indiquer que l'utilisation d'un moule composite permettrait de diviser par presque trois le retrait angulaire. Surtout, cela devrait permettre de limiter énormément l'intensité des interactions moule-pièce et donc le risque de décollement de la pièce.

Au demeurant, il convient de rappeler que le moule en Hextool est lui-même sujet au retrait angulaire, lequel doit être impérativement corrigé si l'on souhaite respecter les tolérances dimensionnelles de la pièce finale. Or, le Hextool se prête bien à la correction de forme, puisqu'il est possible de l'usiner à volonté ou, au contraire, de rajouter de la matière au moule après la fabrication. La notion de pli ne revêt pas la même signification pour le Hextool que pour un stratifié classique : l'ajout ou le retrait d'un pli ne modifie pas l'équilibre des contraintes mésoscopiques (sauf en cas de gradients de température dans l'épaisseur), de sorte qu'il est possible de corriger simplement la forme du moule, sans générer de déformation incontrôlée de la pièce. Cette correction peut être apportée après la fabrication du moule, d'après les observations expérimentales. Il est également possible de réparer le moule après un certain temps de service, pour corriger les éventuels défauts ayant été occasionnés. L'étape de prototypage peut potentiellement être évitée, en simulant la déformation du moule et des pièces moulées. Si l'on connaît des défauts de forme du moule et de la pièce, on peut modifier la forme de départ du moule afin de se rapprocher de la forme désirée. Un usinage du moule après fabrication permet alors d'en parfaire les surfaces, de sorte que la pièce moulée respecte les tolérances dimensionnelles prescrites.

Plusieurs améliorations pourraient être apportées au modèle développé sous Comsol Multiphysics, afin de simuler le comportement de la pièce de façon plus réaliste. En premier lieu, le cycle de fabrication et la cinétique de cuisson de la pièce pourraient être adaptés afin de mieux correspondre au processus de fabrication et aux résines utilisés. Notamment, il serait intéressant d'étudier l'effet de paliers de cuisson et d'un cycle de post-cuisson sur la déformée finale de la pièce. Les conditions aux limites appliquées à la pièce pourraient également être simulées de façon plus réaliste en prenant en compte l'effet de la pression de compactage et éventuellement d'un serrage par vis du moule et du contre-moule.

D'autre part, la déformation des pièces composites épaisses peut être affectée par l'hétérogénéité de répartition de résine dans l'épaisseur ; celle-ci ayant, en effet, tendance à migrer vers le moule ou à être absorbée par le feutre de drainage, ce qui modifie l'équilibre des contraintes dans l'épaisseur et entraîne un gauchissement de l'équerre. L'effet sur le retrait angulaire est plutôt bénéfique lorsqu'on utilise un moule femelle (ouverture de l'équerre), mais il est néfaste si l'on utilise un moule mâle. La complémentarité entre les méthodes d'homogénéisation et la simulation macroscopique par éléments finis est manifeste dans ce cas, les premières pouvant aisément fournir les propriétés mécaniques macroscopiques nécessaires à la seconde. Par ailleurs, les travaux effectués dans le cadre de la thèse d'Olga Klinkova montrent que, pour une équerre UD comme pour une équerre en Hextool, les variations angulaires constatées expérimentalement (cuisson dans un moule aluminium) sont entre 50 % et 100 % plus importantes que celles qui ont été prédites ici (toutes proportions gardées, les géométries et cycle de cuisson expérimentales et simulées n'étant pas exactement identiques). Ceci semble indiquer qu'il serait pertinent de prendre en compte les variations du taux de résine dans les pièces.

Dans la même veine, il est possible de prendre en compte la présence de gradients de température dans les pièces épaisses (le moule Hextool en est un exemple parfait). Il suffit pour cela d'ajouter un module de calcul thermique au modèle, couplé à un traitement de la cinétique de cuisson de la résine. Le problème mécanique des contraintes de cœur-peau peut être traité à la suite.

Un problème plus délicat à aborder avec le logiciel Comsol Multiphysics, est le traitement des interactions moule-pièce lorsque les contraintes interfaciales génèrent un glissement ou un décollement de la pièce par rapport au moule. L'ajout d'une fine couche d'interface, ayant une faible rigidité, entre les deux éléments, semble une piste prometteuse. Il serait possible de simuler le glissement et la décohésion interfaciale en affectant à cette couche un comportement de type élasto-plastique. La difficulté de cette méthode est que le problème mécanique est traité en vitesse puis intégré en temps, de sorte que la définition du seuil d'écoulement plastique peut s'avérer délicate. En outre, sa résolution sera probablement coûteuse en capacités de calcul puisqu'il faut résoudre simultanément le problème en vitesse, l'intégration temporelle et l'écoulement plastique. Une autre méthode pour traiter le problème (toujours sous Comsol Multiphysics) est d'utiliser les éléments de contact à l'interface, mais elle pose le même genre de problèmes en implémentation et en capacités de calcul.

Il reste une autre question délicate à traiter, qui implique autant les méthodes d'homogénéisation que la résolution du problème macroscopique par les éléments finis. Il s'agit de l'aspect visco-élastique du comportement des matériaux composites [Biot, 1954 ; Rupnowski et al., 2006]. Cet aspect joue un rôle mineur durant les premiers temps du cycle de cuisson, alors que la résine n'a pas encore acquis de rigidité mesurable. Pour les calculs opérés ici, on a considéré que la rigidité du matériau était quasiment nulle avant le point de gel, de même que ses coefficients d'expansion (ce qui est plus douteux). Cette hypothèse entraîne un saut de propriétés au point de gel, qui peut poser des difficultés d'ordre numérique. Le second rôle joué par le caractère visco-élastique de la résine est plus important, puisqu'il intervient durant la phase de retrait thermique du matériau. En fonction de la vitesse de refroidissement du matériau, les contraintes peuvent avoir le temps de se relaxer ou non, ce qui joue sur la déformée finale. Un problème corollaire est la question du fluage du

matériau après fabrication. Des modules de visco-élasticité sont intégrés dans la plupart des logiciels de calculs par éléments finis, même si ils sont souvent limités à un comportement isotrope (ce qui est le cas pour Comsol par exemple). Quant au calcul des propriétés visco-élastiques effectives du matériau, il peut être réalisé via des méthodes d'homogénéisation reprenant, par exemple, le principe général du modèle autocohérent de Eshelby-Kröner élastique, ce dernier étant toutefois appliqué, non pas à l'espace temporel classique, mais plutôt à l'espace de la transformée de Carson [Sabar et al., 2002 ; Zhao et al., 2007].



# CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES



Cette thèse porte sur l'étude multi-échelles d'un matériau composite à matrice organique ayant une structure assez particulière, puisqu'il est composé de bandes de renforts unidirectionnelles orientées aléatoirement dans le plan du pli. Le comportement mécanique du composite à trois échelles caractéristiques est décrit de manière uniforme grâce aux méthodes d'homogénéisation à champ moyen ; une comparaison partielle de ces résultats avec un approche à champ complet périodique, utilisant les éléments finis, a également été menée. Les effets structuraux dans les pièces composites sont décrits, quant à eux, par une méthode éléments finis utilisant les résultats de l'homogénéisation.

Les méthodes d'homogénéisation (modèles de Mori-Tanaka et autocohérent) permettent de calculer les propriétés effectives (macroscopiques) du composite à partir des propriétés des constituants, et cela pour un coût de calcul très réduit (de l'ordre de dix secondes, encore largement optimisable). Ces méthodes utilisent les travaux d'Eshelby sur le comportement d'une inclusion noyée dans un milieu infini, ainsi que les principes de cohérence de Hill sur les moyennes des états mécaniques. Une assez bonne corrélation des propriétés effectives estimées et expérimentales a été trouvée, les écarts s'expliquant par la structure particulière du matériau, qui génère une ondulation des bandes renforçantes difficile à prendre en compte. Par ailleurs, les limites du modèle autocohérent lorsque le Volume Élémentaire Représentatif comporte des conclusions de différentes morphologies ont été mises en lumière, et levées grâce à une formulation plus générale s'inspirant du modèle de Mori-Tanaka. Cette formulation semble très peu présente dans la littérature, et présenterait un grand intérêt pour les applications aux matériaux à microstructure non-triviales, telles que les mats de verre, les grains des polycristaux, etc... Mais également pour des applications plus classiques, puisque cette formulation permet une convergence plus rapide du calcul de la rigidité, que celle obtenue avec le modèle autocohérent classique (optimisation du temps de calcul).

Par ailleurs, les méthodes à champ moyen permettent également de calculer des états mécaniques locaux en fonction des sollicitations appliquées à l'échelle macroscopique. Ceux-ci ont été calculés pour des sollicitations typiques appliquées au composite, mais également dans le cas d'un cycle de fabrication simplifié. La combinaison des deux a également été traitée.

En s'appuyant sur une description du comportement mécanique et thermocinétique de la résine selon la température et son degré de réticulation, l'évolution des propriétés du composite et des contraintes résiduelles locales (dus au retrait thermochimique de la résine), a pu être déterminée tout au long du cycle de fabrication, pour différentes contraintes appliquées au composite. Ces contraintes simulées n'ont pas été confrontées à une évaluation expérimentale (instrumentation pas fibres optiques à réseau de Bragg, par exemple), ce qui serait une amélioration possible de l'étude.

Sur ce point, un certain nombre d'hypothèses de travail méritent d'être revues, sur la cinétique de cuisson de la résine notamment, afin de mieux correspondre au matériau choisi et à son cycle de fabrication classique. En effet, la cinétique et le cycle de cuisson utilisées pour évaluer les contraintes correspondent à celle d'un matériau à base de résine époxy, alors que la résine bismaléimide utilisée ici a une cuisson beaucoup plus lente, à plus haute température (190 °C), et avec utilisation quasi obligatoire d'un cycle de post-cuisson à 220 °C. Des essais de DSC menés au LTDS devraient permettre d'obtenir un meilleur accord entre les cycles de fabrication réels et simulés.

Il serait également pertinent d'aborder l'aspect viscoélastique du comportement de la résine au cours de la cuisson, qui revêt un rôle important. Au premiers temps de la cuisson (avant le point de gel de la résine, qui reste mal connu par ailleurs), on a considéré que les propriétés du matériau étaient nulles, de même que les contraintes et déformations dans le matériau ; en réalité, les coefficients d'expansion et les déformations ne sont pas nuls, et la rigidité *instantanée* du matériau non plus. Peu après le point de gel, la température de cuisson est supérieure à la température de transition vitreuse, si bien que le matériau est dans un état caoutchoutique et que les contraintes locales peuvent se relaxer partiellement ; cet état pourrait persister aux premiers temps du refroidissement ainsi qu'au début de la post-cuisson, et on aurait alors une influence de la vitesse de

refroidissement sur les contraintes. Une évaluation de la température de transition vitreuse est actuellement en cours au LTDS, ce qui prendra en compte cette variable via l'équation de Di Benedetto, par exemple. De plus, des essais de DMA (réalisés ou à venir) permettront également une description correcte du comportement viscoélastique de la résine et par suite, du matériau.

Des premiers essais menés avec les quelques données disponibles, avec une thermocinétique et un cycle de cuisson (et post-cuisson) plus réaliste, montre que les contraintes dues au retrait thermo-chimique sont principalement développées durant la post-cuisson (dix derniers pourcents de conversion), cependant ceci est compensé par des contraintes thermoélastiques plus importantes, si bien que les contraintes finales sont assez proches.

Sur la question des contraintes locales, une simulation du comportement d'un pli unidirectionnel (bande renforçante AS4/M61) a également été menée par une approche à champ complet périodique (en utilisant les éléments finis). La microstructure du pli unidirectionnel a été supposée périodique, ce qui occasionne une anisotropie transverse des propriétés calculées, en particulier pour le réseau périodique carré ; l'introduction dans la simulation du caractère aléatoire de la microstructure devrait permettre d'effacer cet effet. Cette approche a montré que les modèles à champ moyen, notamment celui de Mori-Tanaka, donnent une estimation assez correcte des propriétés effectives du pli ; il serait cependant bon de vérifier cette allégation pour des taux de fibres plus élevés.

Parallèlement, il est apparu que les contraintes moyennes calculées par le modèle de Mori-Tanaka correspondaient bien à celles obtenues par l'approche périodique. Cependant, leur valeur en des points particuliers de la microstructure peut être jusqu'à deux fois plus élevée que ce que l'on attendait, notamment dans les zones où l'épaisseur de résine est faible (proximité de deux fibres).

Dans cette optique, une description de l'ensemble des champs mécaniques dans le pli UD semble nécessaire si l'on veut décrire correctement les phénomènes de décohésion fibre-matrice qui précèdent souvent la rupture du pli. Les méthodes EF<sup>2</sup>, FFT, ou la méthode des cellules seraient des pistes à explorer pour ce faire. De telles approches seraient également pertinentes dans le cas du pli Hextool, mais il faudrait également y introduire le caractère aléatoire de la mésostructure (qui joue sur les contraintes inter-laminaires), ce qui peut s'avérer compliqué. Enfin, les calculs ont montré la présence de contraintes de compression importantes dans les éléments rigides, si bien qu'il conviendrait d'estimer également le risque de flambements locaux de ceux-ci.

Dans une dernière partie, les propriétés effectives calculées par les modèles d'homogénéisation ont été utilisées afin d'alimenter la simulation d'effets structuraux dans les pièces composites, à l'aide des éléments finis. On s'est notamment intéressé au phénomène de retrait angulaire des équerres composites (spring-in), dû à l'anisotropie du matériau. Une procédure spécifique définie sous Comsol Multiphysics a permis de simuler ce retrait ainsi que les interactions moule-pièce, en tenant compte de l'évolution des propriétés mécaniques de l'équerre. Différentes conditions aux limites ont été testées, ainsi que différents moules métalliques (acier et aluminium), et on a montré une influence significative (mais pas critique) de ce choix sur la déformée finale de la pièce. La possibilité d'utiliser un moule composite pour cuire des pièces elles-mêmes composites a également été évaluée, et on a montré que ce dispositif aboutissait à une diminution significative de la variation angulaire finale.

Par ailleurs, l'évolution des interactions moule-pièce durant la fabrication a également pu être simulée ; l'intensité de ces interactions, particulièrement dans le cas de moules métalliques, semble indiquer que des décohésions moule-pièce pourraient se produire durant la phase de refroidissement de la pièce. Il serait donc pertinent de prendre en compte cette décohésion, bien que la manœuvre puisse être délicate numériquement parlant.

Il semble que les simulations sous-estiment assez largement la variation angulaire par rapport à ce qui est obtenu expérimentalement. Cet écart pourrait s'expliquer par une répartition hétérogène de la résine dans l'épaisseur de la pièce, qui pourrait être assez facilement pris en compte dans la

simulation (l'évolution des propriétés avec le taux de résine peut être aisément calculé par les modèles d'homogénéisation).

De même, il est possible de prendre en compte la présence de gradients de température dans les pièces épaisses, sous l'effet de l'exothermie de réticulation de la résine. Il suffit pour cela d'ajouter un module de calcul thermique au modèle, couplé à un traitement de la cinétique de cuisson de la résine ; cette dernière doit également être estimée de façon plus réaliste, de même que le cycle de fabrication. Le problème mécanique des contraintes de cœur-peau peut être traité à la suite.

Enfin, il serait là aussi pertinent d'injecter le caractère viscoélastique du comportement du composite dans la simulation, puisque celui-ci a souvent un effet significatif sur les déformations résiduelles, notamment à long terme (fluage).



# RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES



- [Aboudi et al., 2003] Aboudi J, Pindera M J, Arnold S M, **Higher-order theory for periodic multiphase materials with inelastic phases**, International Journal of Plasticity, **19 (6)** : 805-847, 2003.
- [Adamson, 1980] Adamson M J, **Thermal expansion and swelling of cured epoxy resin used in graphite/epoxy composite materials**, Journal of Materials Science, **15 (7)** : 1736-1745, 1980.
- [Adolf et Chambers, 1997] Adolf D B, Chambers R S, **Verification of the capability for quantitative stress prediction during epoxy cure**, Polymer, **38 (21)** : 5481-5490, 1997.
- [Adolf et al., 2004] Adolf D B, Chambers R S, Caruthers J M, **Extensive validation of a thermo-dynamically consistent, nonlinear viscoelastic model for glassy polymers**, Polymer, **45 (13)** : 4599-4621, 2004.
- [Agbossou et Pastor, 1997] Agbossou A, Pastor J, **Thermal stresses and thermal expansion coefficients of n-layered fiber-reinforced composites**, Composite Science and Technology, **57** : 249-260, 1997.
- [Albert et Fernlund, 2002] Albert C, Fernlund G, **Spring-in and warpage of angled composite laminates**, Composites Science and Technology, **62** : 1895–1912, 2002.
- [Arafath et al. 2008a] Arafath A R A, Vaziri R, Poursartip A, **Closed-form solution for process-induced stresses and deformation of a composite part cured on a solid tool: Part I – Flat geometries**, Composites: Part A, **39** : 1106–1117, 2008.
- [Arafath et al. 2008b] Arafath A R A, Vaziri R, Poursartip A, **Closed-form solution for process-induced stresses and deformation of a composite part cured on a solid tool: Part II – Curved geometries**, Composites: Part A, **40** : 1545–1557, 2008.
- [Asp et al., 1996] Asp L E, Berglund L A, Talreja R, **Prediction of matrix-initiated transverse failure in polymer composites**, Composites Science and Technology, **56** : 1089-1097, 1996.
- [Baczmanski et al, 2009] Baczmanski A, Hfaiedh B, François M, Wierzbanski K, **Plastic incompatibility stresses and stored elastic energy in plastically deformed copper**, Materials Science and Engineering: A, **501 (1-2)** : 153-165, 2009.
- [Bailleul et al., 1997] Bailleul J L., **Optimisation du cycle de cuisson des pièces épaisses en matériau composite. Application à un préimprégné résine époxyde/fibres de verre**, Thèse de doctorat, Université de Nantes, 1997.
- [Baptiste, 2003] Baptiste D, **Non Linear Behavior Micromechanical Multi-scale Modelling of Discontinuous Reinforced Composites**, Material Science Forum, **426-432** : 3939-3944, 2003.

- [Benveniste, 1987] Benveniste Y, **A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials**, Mechanics of Materials, **6** : 147-157, 1987.
- [Benveniste et al., 1991] Benveniste Y, Dvorak, G J, Chen T, **On diagonal and elastic symmetry of the approximate effective stiffness tensor of heterogeneous media**, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **39** : 927-946, 1991.
- [Benveniste, 2008] Benveniste Y, **Revisiting the generalized self-consistent scheme in composites: Clarification of some aspects and a new formulation**, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **56** : 2984–3002, 2008.
- [Berryman et Berge, 1996] Berryman J, Berge P, **Critique of two explicit schemes for estimating elastic properties of multiphase composites**, Mechanics of Materials, **22** : 149-164, 1996.
- [Berthelot, 1999] Berthelot JM, **Matériaux composites – Comportement mécanique et analyse des structures**, 1999.
- [Biot, 1954] Biot M A, **Theory of stress-strain relations in anisotropic viscoelasticity and relaxation phenomena**, Journal of Applied Physics, **25** : 1385-1391, 1954.
- [Bogetti et Gillespie, 1990] Bogetti T A, Gillespie J W, **Residual stress and deformation in thick laminate composites undergoing chemical hardening and shrinkage**, 45<sup>th</sup> Annual Conference, Composites Institute, the Society of the Plastic Industry, pp19-A1/1-8, 1990.
- [Bogetti et Gillespie, 1992] Bogetti T A, Gillespie J W, 1992. **Process-induced stress and deformation in thick-section thermo-set composite laminates**, Journal of Composite Materials, **26 (5)** : 626-659, 1992.
- [Broohm, 2003] Broohm A, **Homogénéisation du comportement élastique des composites avec la prise en compte de l'endommagement**, Thèse Université de Metz, 2003.
- [Browning, 1976] Browning CE, **The mechanisms of elevated temperature property losses in high performance structural epoxy resin matrix materials after exposures to high humidity environments**, Technical Report AFML-TR 75-153, 1976.
- [Chaboche et al, 1998] Chaboche J L, Suquet P, Endommagement, interfaces. **Ecole d'Été Méthodes d'Homogénéisation en Mécanique des Matériaux** (notes de cours), La Londe-les-Maures, 1998.
- [Chen et al, 1992] Chen T, Dvorak G J, Benveniste Y, **Mori-Tanaka estimates of the overall elastic moduli of certain composite materials**, Journal of applied mechanics, **59 (3)** : 539-546, 1992.

- [Chen et Papathanasiou, 2004] Chen X, Papathanasiou T D, **Interface stress distributions in transversely loaded continuous fiber composites: parallel computation in multi-fiber RVEs using the boundary element method**, Composites Science and Technology, **64** : 1101–1114, 2004.
- [Christensen et Lo, 1979] Christensen R M, Lo K H, **Solutions for effective and shear properties in three phase and cylinder models**, J. Mech. Phys. Solids, **27** : 315–330, 1979.
- [Clifford et al., 2006] Clifford S, Jansson N, Yu W, Michaud V, Månson J-A E, **Thermoviscoelastic anisotropic analysis of process induced residual stresses and dimensional stability in real polymer matrix composite components**, Composites Part A, **37** : 538–545, 2006.
- [Coleman et al., 2006] Coleman J N, Khan U, Blau W J, Gun'ko K Y, **Small but strong: A review of the mechanical properties of carbon nanotube-polymer composites**, Carbon, **44** : 1624–1652, 2006.
- [Dai et al., 1999] Dai L H, Huang Z P, Wang R, **Explicit expressions for bounds for the effective moduli of multi-phased composites by the generalized self-consistent method**, Composites Science and Technology, **59** : 1691-1699, 1999.
- [Delasi et Whiteside, 1978] Delasi R, Whiteside J B, **Effect of Moisture on epoxy resins and composites**, Advanced Composite Materials – Environmental effects, ASTM STP 658, Vinson J R, American Society for Testing and Materials, 2-20, 1978.
- [Deng et al., 2007] Deng S, Hou M, Ye L, **Temperature-dependent elastic moduli of epoxies measured by DMA and their correlations to mechanical testing data**, Polymer Testing, **26** : 803–813, 2007.
- [De Oliveira et al., 2008] De Oliveira R, Lavanchy S, Chatton R, Costantini D, Michaud V, Salathé R, Månson J-A E, **Experimental investigation of the effect of the mould thermal expansion on the development of internal stresses during carbon fibre composite processing**, Composites Part A, **39** : 1083–1090, 2008.
- [Dillman et Seferis, 1987] Dillman S H, Seferis J C, **Kinetic viscoelasticity for the dynamic mechanical properties of polymer system**, Journal of Macromolecular Science – Chemistry, **27 (9)** : 749-772, 1987.
- [Dvorak, 1992] Dvorak G J, **Transformation field analysis of inelastic composite materials**, Proceedings of the Royal Society London, **437** : 311-327, 1992.
- [Düster et al., 2008] Düster A, Parvizian J, Yang Z, Rank E, **The finite cell method for three-dimensional problems of solid mechanics**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **197** : 3768-3782, 2008.
- [Eshelby, 1954] Eshelby J D, **Distortion of a crystal by point imperfections**, Journal of Applied Physics, **25** : 255–261, 1954.

- [Eshelby, 1957] Eshelby J D, **The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems**, Proceedings of the Royal Society London, A241 : 376–396, 1957.
- [Fernlund et al, 2002] Fernlund G, Rahman N, Courdji R, Bresslauer M, Poursartip A, Willden K, Nelson K, **Experimental and numerical study of the effect of cure cycle, tool surface, geometry, and the lay-up on the dimensional stability of autoclave-processed composite parts**, Composites Part A, **13 (3)** : 341–51, 2002.
- [Fidelus et al., 2005] Fidelus J D, Wiesel E, Gojny F H, Schulte K, Wagner H D, **Thermo-mechanical properties of randomly oriented carbon/epoxy nanocomposites**, Composites: Part A, **36** : 1555–1561, 2005.
- [Fiedler et al., 2001] Fiedler B, Hojo M, Ochiai S, Schulte K, Ando M, **Failure behavior of an epoxy matrix under different kinds of static loading**, Composites Science and Technology, **61** : 1615–1624, 2001.
- [François, 1991] François M, **Détermination des contraintes résiduelles sur des fils d'acier eutectoïde de faible diamètre par diffraction des rayons X**, Thèse ENSAM Paris, 1991.
- [Fréour, 2003] Fréour S, **Application des modèles de transition d'échelles à la détermination des contraintes internes par diffraction des rayons X, cas des matériaux biphasés**, Thèse Université de Nantes, 2003.
- [Fréour et al., 2003a] Fréour S, Gloaguen D, François M, Guillén R, **Thermal properties of polycrystals – X-ray diffraction and scale transition modelling**, Physica Status Solidi a, **201** : 59-71, 2003.
- [Fréour et al., 2003b] Fréour S, Gloaguen D, François M, Guillén R, **Study of the Coefficients of thermal Expansion of phases embedded in multiphase materials**, Material Science Forum, **426-432** : 2083-2088, 2003.
- [Fréour et al., 2005] Fréour S, Jacquemin F, Guillén R, **On an analytical self-consistent model for internal stress prediction in fiber-reinforced composites submitted to hygro-elastic load**, Journal of Reinforced Plastics and Composites, **24** : 1365-1377, 2005.
- [Fréour et al., 2006] Fréour S, Jacquemin F, Guillén R, **Extension of Mori-Tanaka approach to hygro-elastic loading of fiber-reinforced Composites – Comparison with Eshelby-Kröner self-consistent model**, Reinforced Plastics and Composites, **25** : 1039-1053, 2006.
- [Gibbons et Hansell, 2008] Gibbons G J, Hansell R G, **Thermal-sprayed coatings on aluminium for mould tool protection and upgrade**, Journal of Materials Processing Technology, **204 (1-3)** : 184-191, 2008.
- [Gigliotti et al., 2003] Gigliotti M, Wisnom M R, Potter K D, **Development of curvature during the cure of AS4-8552 [0-90] unsymmetric composite plates**, Composites Science and Technology, **63** : 187–197, 2003.

- [Gloaguen et al., 2002] Gloaguen D, François M, Guillén R, Royer J, **Evolution of internal stresses in rolled Zr702 $\alpha$** , Acta Materiala, **50** : 871-880, 2002.
- [Goemmers et al., 1996] Gommers B, Verpoest I, Van Houtte P, **Modelling the elastic properties of knitted-fabric-reinforced composites**, Composites Science and Technology, **56** : 685-694, 1996.
- [Guemes, 1994] Guemes J A, **Curing Residual Stresses and Failure Analysis in Composite Cylinders**, Journal of Reinforced Plastics and Composites, **13** : 408-419, 1994.
- [Ha et al., 2008a] Ha S K, Jin K K, Huang Y, **Effects of fiber arrangement on mechanical behavior of unidirectional composites**, Journal of Composite Materials, **42** : 1851-1871, 2008.
- [Ha et al., 2008b] Ha S K, Huang Y, Jin K K, **Micro-mechanics of failure (MMF) for continuous fiber reinforced composites**, Journal of Composite Materials, **42** : 1873-1895, 2008.
- [Hashin et Shtrikman, 1963] Hashin Z, Shtrikman S, **A variational approach to the elastic moduli of multiphase materials**, Journal of Mechanics and Physics of Solids, **11** : 127-140, 1963.
- [Hearle, 1980] Hearle J W S, **The mechanics of dense fibre assemblies**, Mechanics of Flexible Fibre Assemblies, Nato Advanced Study Institute Series E: Applied Sciences, No. 38, ed. Sijthoff and Noordhoff, New York, 1980.
- [Hexcel coms, 2008] Hexcel Composites France, **Communications internes avec C. Dauphin et M. Bonnafoux**, 2008.
- [Hexcel HDS, 2008] Hexcel Europe, **Hextool M61 Datasheet**, www.hexcel.com, 2008.
- [Hexcel HUG, 2007] Hexcel Europe, **Hextool M61 User Guide**, www.hexcel.com, 2007.
- [Hexcel M61DS, 2008] Hexcel Europe, **Hexply® M61 Datasheet**, www.hexcel.com, 2008.
- [Hexcel PT, 2010] Hexcel Europe, **Prepreg Technology**, www.hexcel.com, 2010.
- [Hill, 1952] Hill R, **The elastic behaviour of a crystalline aggregate**, Proceedings of the Physical Society A, **65** : 349-354, 1952.
- [Hill, 1965] Hill R, **Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals**, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **13** : 89-101, 1965.
- [Hill, 1967] Hill R, **The essential structure of constitutive laws for metals composites and polycrystals**, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **15** : 79-95, 1967.
- [Hobbiebrunken et al., 2005] Hobbiebrunken T, Fiedler B, Hojo M, Ochiai S, Schulte K, **Microscopic yielding of CF/epoxy composites and the effect on the formation of thermal residual stresses**, Composites Science and Technology, **65** : 1626-1635, 2005.

- [Hori et Nemat-Nasser, 1994] Hori M, Nemat-Nasser S, **Double-inclusion model and overall moduli of multi-phase composites**, *Mechanics of Materials*, **14 (3)** : 189-206, 1994.
- [Huang et Yang, 1997] Huang CK, Yang SY, **Warping in advanced composite tools with varying angles and radii**. *Composites: Part A*, **28A** : 891-893, 1997.
- [Hutchinson, 1970] Hutchinson J W, **Elastic-plastic behaviour of polycrystalline metals and composites**, *Proceedings of the Royal Society London*, **319** : 247-272, 1970.
- [Hu et Weng, 2000] Hu G K, Weng G J, The connections between the double-inclusion model and the Ponte-Castaneda-Willis, Mori-Tanaka, and Kuster-Toksoz models, *Mechanics of Materials*, **32** : 495-503, 2000.
- [Jacquemin et al., 2005] Jacquemin F, Fréour S, Guillén R, **A hygro-elastic self-consistent model for fiber-reinforced composites**, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, **24** : 485-502, 2005.
- [Jacquemin et Fréour, 2008] Jacquemin F, Fréour S, **Multi-scale analysis of fiber-reinforced composite parts submitted to environmental and mechanical loads**, In : *Composite Materials Research Progress*, Nova Science Publishers Inc., ISBN-13 : 978-1-60021-994-8, 2008.
- [Jiang et al., 2001] Jiang C P, Tong Z H, Cheung Y K, **A generalized self-consistent method for piezoelectric fiber reinforced composites under antiplane shear**, *Mechanics of Materials*, **33 (5)** : 295-308, 2001.
- [Jin et al, 2008] Jin K K, Huang Y, Lee Y H, Ha S K, **Distribution of micro stresses and interfacial tractions in unidirectional composites**, *Journal of Composite Materials*, **42** : 1825-1849, 2008.
- [Kamal et Sourour, 1973] Kamal M R, Sourour S, **Kinetics and thermal characterization of thermo-sets cure**, *Polymer Engineering and Science*, **13** : 59-64, 1973.
- [Kanouté, 1999] Kanouté, P., 1999. **Etude du comportement hygro-mécanique de matériaux composites à matrice polymérique**, Thèse de doctorat de l'Université Paris VI.
- [Kaushik et Raghavan, 2010] Kaushik V, Raghavan J, **Experimental study of tool-part interaction during autoclave processing of thermoset polymer composite structures**, *Composites Part A*, **41**: 1210–1218, 2010.
- [Kim et Hahn, 1989] Kim K S, Hahn H T, **Residual stress development during processing of graphite/epoxy composites**, *Composite Science and Technology*, **36** : 121–31, 1989
- [Kim et White, 1997] Kim R Y, White S R, **Viscoelastic analysis of processing-induced residual stresses in thick composite laminates**, *Mechanics of Composite Materials and Structures*, **4** : 361-387, 1997.
- [Kneer, 1963] Kneer G, **Die elastischen Konstanten quasiisotroper Vielkristallaggregate**, *Physica Status Solidi*, **3** : K330-K335, 1963.

- [Kocks et al., 1998] Kocks U F, Tomé C N, Wenk H R, **Texture and anisotropy**, Cambridge University Press, 1998.
- [Krajcinovic et Mallick, 1995] Krajcinovic D, Mallick K, **Micromechanics of the process induced damage evolution in thermo-sets**, Journal of Mechanics and Physics of Solids, **43 (7)** : 1059-1086, 1995.
- [Krenchel, 1964] Krenchel H, **Fibre Reinforcements**, Akademisk Forlag, Copenhagen, 1964.
- [Kröner, 1958] Kröner E, **Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus des Konstanten des Einkristalls**, Zeitschrift für Physik, **151** : 504-508, 1958.
- [Kumar et al., 2006] Kumar A, Welzel U, Mittemeijer E J, **Direction-dependent grain interaction in nickel and copper thin films, analysed by X-ray diffraction**, Acta Materiala, **54 (5)** : 1419-1430, 2006.
- [Le Pen et Baptiste, 2002] Le Pen E, Baptiste D, **Multi-scale fatigue behaviour modelling of Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> short fibre composites by a micro-macro approach**, International journal of Fatigue, **24** : 205-214, 2002.
- [Li, 2008] Li S, **Boundary conditions for unit cells from periodic microstructures and their implications**, Composites Science and Technology, **68** : 1962–1974, 2008.
- [Li et Weng, 1998] Li J, Weng G J, **A unified approach from elasticity to viscoelasticity to viscoplasticity of particle-reinforced solids**, International Journal of Plasticity, **14 (1-3)** : 193-208, 1998.
- [Loos et Springer, 1981] Loos A C , Springer G S, **Moisture absorption of Graphite-Epoxy composition immersed in liquids and in humid air**, Environmental effects on composite materials, Technomic Publishing, Westport, USA, pp. 34-55, 1981.
- [LTDS/ECL coms, 2010a] Terekhina S, Salvia M, **Communications internes avec S Terekhina et M Salvia**, LTDS/ECL (UMR CNRS 5513), 2010.
- [LTDS/ECL coms, 2010b] Szymanska K, Salvia M, **Communications internes avec K Szymanska et M Salvia**, LTDS/ECL (UMR CNRS 5513), 2010.
- [Matthies et al., 1993] Matthies S, Humbert M., **The realization of the Concept of a Geometric Mean for Calculating Physical Constants of Polycrystalline Materials**, Physica Status Solidi b, **177** : K47-K50, 1993.
- [Matthies et al., 1994] Matthies S, Humbert M., Schuman Ch., **On the Use of the Geometric Mean Approximation in Residual Stress Analysis**, Physica Status Solidi b, **186** : K41-K44, 1994.
- [Matthies et Humbert, 1993] Matthies S., Humbert M., **The realization of the concept of a geometric mean for calculating physical constants of polycrystalline materials**, Physica Status Solidi b, **177** : K47, 1993.

- [Mc Kague et al., 1978 ] McKague E L, Reynolds J D, Halkias J E, **Swelling and glass transition relations for epoxy matrix material in humid environment**, Journal of applied polymer science, **22** : 1643-1654, 1978.
- [Molinari et El Mouden, 1996] Molinari A, El Mouden M, **The problem of elastic inclusions at finite concentration**, International Journal of Solids and Structures, **33** : 3131-3150, 1996.
- [Moriawec, 1989] Morawiec A, **Calculation of polycrystal elastic constants from single-crystal data**, Physica Status Solidi b, **154** : 535, 1989.
- [Morris, 1970] Morris R, **Elastic constants of polycrystals**, International Journal of Engineering Science, **8 (1)** : 49-61, 1970.
- [Moulinec et Suquet, 1998] Moulinec H, Suquet P, **A numerical method for computing the overall response of non-linear composites with complex microstructure**, Computer methods in applied mechanics and engineering, **157** : 69-94, 1998.
- [Msallem, 2008] Msallem Y A, **Caractérisation thermique et mécanique d'un matériau composite aéronautique pendant le procédé d'élaboration – Contribution à l'estimation des contraintes résiduelles**, Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Nantes, 2008.
- [Msallem et al., 2008] Msallem Y A, Jacquemin F, Boyard N, Poitou A, Delaunay D, Chatel S, **Material characterization and residual stresses simulation during the manufacturing process of epoxy matrix composites**, Composites Part A, **41 (1)** : 108-115, 2010.
- [Mura, 1982] Mura T, **Micromechanics of Defects in Solids**, Martinus Nijhoff Publishers, The Hague, Netherlands, 1982.
- [Navabpour et al., 2006] Navabpoura P, Teer D G, Hitt D J, Gilbert M, **Evaluation of non-stick properties of magnetron-sputtered coatings for moulds used for the processing of polymers**, Surface and Coatings Technology, **201 (6)** : 3802-3809, 2006.
- [Nemat-Nasser, 2000] Nemat-Nasser S, **Multi-inclusion method for finite deformations: exact results and applications**, Materials Science and Engineering, **A285** : 239–245, 2000.
- [Nemat-Nasser et Hori, 1993] Nemat-Nasser S, Hori M, **Micromechanics: Overall properties of heterogeneous solids**, Elsevier, Amsterdam, 1993.
- [Niu et Talreja, 2000] Niu K, Talreja R, **Modeling of compressive failure in fiber reinforced composites**, International Journal of Solids and Structures, **37** : 2405-2428, 2000.
- [Odegard et Kumosa, 2000] Odegard G, Kumosa M, **Determination of shear strength of unidirectional composite materials with the Iosipescu and 10° off-axis shear tests**, Composites Science and Technology, **60 (16)** : 2917-2943, 2000.

- [Ogi et al., 1999] Ogi K, Kim H S, Maruyama T, Takao Y, **The influence of hygrothermal conditions on the damage processes in quasi-isotropic carbon/epoxy laminates**, Composites Science and Technology, **59** : 2375-2382, 1999.
- [Olivier 2006] Olivier P A, **A note upon the development of residual curing strains in carbon-epoxy laminates**, Composites Part A, **37** : 602–616, 2006
- [Parlevliet et al., 2006] Parlevliet P P, Bersee H E N, Beukers A, **Residual stresses in thermo-plastic composites – a study of the literature. Part I: Formation of residual stresses**, Composites Part A, **37** : 1847–1857, 2006.
- [Parlevliet et al., 2007a] Parlevliet P P, Bersee H E N, Beukers A, **Residual stresses in thermo-plastic composites – a study of the literature. Part II: Experimental techniques**, Composites Part A, **38** : 651–665, 2007.
- [Parlevliet et al., 2007b] Parlevliet P P, Bersee H E N, Beukers A, **Residual stresses in thermo-plastic composites – a study of the literature. Part III: Effects of thermal residual stresses**, Composites Part A, **38** : 1581–1596, 2007.
- [Pascault et Williams] J.P. Pascault and R.J.J. Williams, **Glass transition temperature versus conversion relationships for thermosetting polymers**, Journal of Polymer Science Part B: Polymer physics, **28** : 85-95, 1990.
- [Patel et al., 2002] Patel B P, Ganapathi M, Makhecha D P, **Hygrothermal effects on the structural behaviour of thick composite laminates using higher-order theory**, Composite Structures, **56** : 25-34, 2002.
- [Peysers et Bascom, 1981] Peysers P, Bascom W D, **The anomalous lowering of the glass transition of an epoxy resin by plasticization with water**, Journal of Materials Science, **16** : 75-83, 1981.
- [Pham, 2000] Pham D C, **Weighted self-consistent approximations for elastic completely random mixtures**, Mechanics of Materials, **32** : 463-470, 2000.
- [Qiu et Weng, 1991] Qiu Y P, Weng G J, **The influence of inclusion shape on the overall elastoplastic behavior of a two-phase isotropic composite**, International Journal of Solids and Structures, **27 (12)** : 1537-1550, 1991.
- [Radford et Diefendorf, 1993] Radford D W, Diefendorf R J, **Shape instabilities in composites resulting from laminate anisotropy**, Journal of Reinforced Plastics and Composites, **12** : 58–75, 1993.
- [Radford, 1995] Radford D, **Volume fraction gradient induced warpage in curved composite plates**, Composites Engineering, **5 (7)** : 923-934, 1995.

- [Reuss, 1929] Reuss A, **Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle**, Budapest, 1929.
- [Roe, 1965] Roe R J, **Description of Crystallite Orientation in Polycrystalline Materials, III. General solution to pole figure inversion**, Journal of Applied Physics, **36** : 2024, 1965.
- [Rosen, 1965] Rosen V W, **Mechanics of composite strengthening**, In: Fiber Composite Materials, American Society of Metals, Metals Park, Ohio, pp. 37-75, 1965.
- [Ruiz et al., 2006] Ruiz E, Achim V, Soukane S, Trochu F, Bréard J, **Optimization of injection flow rate to minimize micro/macro-voids formation in resin transfer molded composites**, Composites Science and Technology, **66** : 475–486, 2006.
- [Rupnowski et al., 2006] Rupnowski P, Gentz M, Kumosa M, **Mechanical reponse of unidirectional graphite fiber/polyimide composite as function of temperature**, Composites science and technology, **66** : 1045-1055, 2006.
- [Sabar et al., 2002] Sabar H, Berveiller M, Favier V, Berbenni S, **A new class of micro–macro models for elastic–viscoplastic heterogeneous materials**, International Journal of Solids and Structures, **39** : 3257–3276, 2002.
- [Sanchez et al., 2006] Sanchez F, Garcia J A, Chinesta F, Gascon LI, Zhang C, Liang Z, Wang B, **A process performance index based on gate-distance and incubation time for the optimization of gate locations in liquid composite molding processes**, Composites Part A, **37** : 903–912, 2006.
- [Sbirrazzuoli et Vyazovkin, 2002] Sbirrazzuoli N, Vyazovkin S, **Learning about epoxy cure mechanisms from isoconversional analysis of DSC data**, Thermochimica Acta, **388 (1-2)** : 289-298, 2002.
- [Schultheisz et Waas, 1996a] Schultheisz C R, Waas A M, **Compressive failure of composites, part I: testing and micromechanical theories**. Progress in Aerospace Sciences, **32 (1)** : 1-42, 1996.
- [Schultheisz et Waas, 1996b] Schultheisz C R, Waas A M, **Compressive failure of composites, part II: Experimental studies**. Progress in Aerospace Sciences, **32 (1)** : 43-78, 1996.
- [Selzer et Friedrich, 1997] Selzer R, Friedrich K, **Mechanical properties and failure behaviour of carbon fibre-reinforced polymer composites under the influence of moisture**, Composites Part A, **24A** : 595-604, 1997.
- [Shen et Springer, 1976] Shen C H, Springer G S, **Moisture absorption and desorption of composites materials**, Journal of composite materials, **10** : 2, 1976.
- [Stauffer, 1985] Stauffer D, **Introduction to percolation theory**, Taylor and Francis, London, 1985.

- [Sun et al., 2001] Sun H, Di S, Zhang N, Wu C, **Micromechanics of composite materials using multivariable finite element method and homogenization theory**, International Journal of Solids and Structures, **38** : 3007-3020, 2001.
- [Suquet, 1987] Suquet P, **Elements of homogenization theory for inelastic solid mechanics**, in Homogenization techniques for composite media, pp. 194-278, Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1987.
- [Thomason et Groenwoud, 1996] Thomason J L, Groenewoud W M, **The influence of fibre length and concentration on the properties of glass fibre reinforced polypropylene: 2. Thermal properties**, Composites Part A, **21A** : 555-565, 1996.
- [Thostenson et Chou, 2003] Thostenson ET, Chou TW, **On the elastic properties of carbon nanotube-based composites: modeling and characterization**, Journal of Physics D: Applied Physics, **36** : 573, 2003.
- [Toledo et al., 2008] Toledo M, Nallim L, Luccioni B, **A micro-macromechanical approach for composite laminates**, Mechanics of Materials, **40** : 885–906, 2008.
- [Turner et al., 1994] Turner P A, Tomé C N, **A study of residual stresses in Zircaloy-2 with rod texture**, Acta Metallurgica and Materialia, **42** : 4143-4153, 1994.
- [Tsaï et Hahn, 1980] Tsaï S W, Hahn H T, **Introduction to composite materials**, Technomic Publishing co., Inc., Lancaster, Pennsylvania, 1980.
- [Tsaï, 1987] Tsaï S W, **Composite design 3<sup>rd</sup> ed.**, Think Composites, 1987.
- [Twigg et al., 2003] Twigg G, Poursartip A, Fernlund G, **An experimental method for quantifying tool-part shear interaction during composites processing**, Composites Science and Technology, **63** : 1985–2002, 2003.
- [Voigt, 1910] Voigt W, **Lehrbuch der KristallPhysic**, Berlin, Teubner, 1910.
- [Vyazovkin, 1997] Vyazovkin S, **Evaluation of activation energy of thermally stimulated solid-state reactions under arbitrary variation of temperature**, Journal of Computational Chemistry, **18 (3)** : 393-402, 1997.
- [Walpole, 1969] Walpole L J, **On the overall elastic moduli of composite materials**, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **17** : 5-251, 1969.
- [Welzel et al., 2005] Welzel U, Fréour S, Mittemeijer E J, **Direction-Dependent Elastic Grain-Interaction Models – A Comparative Study**, Philosophical Magazine, **85** : 2391-2414, 2005.
- [Weng, 1984] Weng G J, **Some elastic properties of reinforced solids, with special reference to isotropic ones containing spherical inclusions**, International Journal of Engineering Science, **22** : 845-856, 1984.

- [Weng, 1989] Weng G J, **The theoretical connection between Mori-Tanaka's theory and the Hashin-Shtrikman bounds**, International Journal of Engineering Science, **28** : 1111-1120, 1989.
- [Weng, 1993] Weng G J, **A self-consistent relation for the time-dependent creep of polycrystals**, International Journal of Plasticity, **9** : 191–198, 1993.
- [White et Kim, 1998] White S R, Kim Y K, **Process-induced residual stress analysis of AS4/3501-6 composite material**, Mechanics of Composite Materials and Structures, **5 (2)** : 153-186, 1998.
- [Wisnom et al., 2006] Wisnom M R, Gigliotti M, Ersoy N, Campbell M, Potter K D, **Mechanisms generating residual stresses and distortion during manufacture of polymer-matrix composite structures**, Composites: Part A, **37** : 522–529, 2006.
- [Xia et al., 2006] Xia Z, Zhou C, Yong Q, Wang X, **On selection of repeated unit cell model and application of unified periodic boundary conditions in micro-mechanical analysis of composites**, International Journal of Solids and Structures, **43** : 266–278, 2006.
- [Youssef et al., 2009a] Youssef G, Fréour S, Jacquemin F, **Stress-dependent Moisture Diffusion in Composite Materials**, Journal of Composite Materials, **43** : 1621-1637, 2009.
- [Youssef et al., 2009b] Youssef G, Fréour S, Jacquemin F, **Effects of moisture dependent constituents properties on the hygroscopic stresses experienced by composite structures**, Mechanics of Composite Materials, **45** : 369-380, 2009.
- [Zarrella et al., 2006] Zarrella M., Partridge I K, D'Amore A, **Warping induced in bi-material specimens: Coefficient of thermal expansion, chemical shrinkage and viscoelastic modulus evolution during cure**, Composites Part A, **37 (4)** : 565-570, 2006.
- [Zeng et Raghavan, 2010] Zeng X, Raghavan J, **Role of tool-part interaction in process-induced warpage of autoclave-manufactured composite structures**, Composites Part A, **41** : 1174–1183, 2010.
- [Zhang et Sharma, 2005] Zhang X, Sharma P, **Inclusions and inhomogeneities in strain gradient elasticity with couple stresses and related problems**, International Journal of Solids and Structures, **42** : 3833-3851, 2005.
- [Zhao et al., 2007] Zhao L G, Warrior N A, Long A C, **A thermo-viscoelastic analysis of process-induced residual stress in fibre-reinforced polymer-matrix composites**, Materials Science and Engineering A, **452–453** : 483–498, 2007.

# VALORISATION DE LA THESE :

## PUBLICATIONS ET COMMUNICATIONS

### Publications internationales dans des revues à comité de lecture :

Lacoste E., Fréour S., Jacquemin F., **On the validity of the self-consistent scale transition model for inclusions with varying morphologies**, *Mechanics of Materials*, 42 : 218-226, 2010.

Lacoste E., Szymanska K., Terekhina S., Jacquemin F., Fréour S., Salvia M., **A multi-scale analysis of local stresses during the cure of a composite tooling material**, *Composites Part A*, accepté avec corrections mineures.

Fréour S., Lacoste E., Fajoui J., Jacquemin F., **On the meaning of the mathematical method chosen for achieving set averages within Eshelby-Kröner self-consistent scale transition model: the geometric mean versus the classical arithmetic average**, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, accepté avec corrections mineures.

Lacoste E., Fréour S., Jacquemin F., **A study of residual stresses created during the cure process of a composite tooling material**, *Materials Science Forum*, accepté avec corrections mineures.

Fréour S., Lacoste E., Jacquemin F., François M., Guillén R., **Determining Ti-17  $\beta$ -phase Single-Crystal Elasticity Constants through X-Ray Diffraction and inverse scale transition model**, *Materials Science Forum*, accepté avec corrections mineures.

Lacoste E., Fréour S., Jacquemin F., **A multi-scale analysis of materials reinforced by inclusions randomly oriented in the layout**, *Applied Mechanics and Materials*, soumis.

Klinkova O., Lacoste E., Drapier S., Bergheau J.M., Fréour S., Jacquemin F., **Characterization of cured-induced residual stresses in composite structures: measurements and prediction of angular and thickness variations**, en préparation.

### Communications orales dans le cadre de congrès avec comité de lecture :

- Nationales :

Lacoste E., Fréour S., Jacquemin F., **De la validité du modèle de transition d'échelles de Kröner Eshelby dans le cas d'inclusions à morphologies multiples**, 19<sup>ème</sup> Congrès Français de Mécanique, Marseille (France), 24-28 août 2009.

- Internationales :

Lacoste E., Fréour S., Jacquemin F., **On the validity of the self-consistent scale transition model for inclusions with varying morphologies**, International Conference on Structural Analysis of Advanced Materials, Tarbes (France), 7-10 septembre 2009. *Prix de la meilleure communication*.

Lacoste E., Fréour S., Jacquemin F., **A study of residual stresses created during the cure process of a composite tooling material**, 8<sup>th</sup> European Conference on Residual Stress, Riva del Garda (Italie), 26-28 juin 2010.

### Communications orales dans le cadre de séminaires et journées scientifiques :

Lacoste E., **Modélisation multi-échelles des contraintes thermo-mécaniques**, Réunion plénière des participants au projet LCM-Smart, Ecole Centrale de Lyon, 15 mai 2009.

Lacoste E., **Modélisation multi-échelles des contraintes thermo-mécaniques**, Journée des doctorants de l'école doctorale SPIGA, Laboratoire des Ponts et Chaussées (Nantes), 26 mai 2009.

Lacoste E., **Etude multi-échelles de matériaux composites - Application à un matériau industriel: le Hextool**, 1<sup>ère</sup> journée scientifique du projet LCM-Smart, LTDS/ENSM Saint-Etienne, 22 mars 2010.

Lacoste E., **Etude multi-échelles de matériaux composites - Application à un matériau industriel: le Hextool**, Journées du GeM 2010, Saint-Jean-de-Monts, 26-27 avril 2010.

Lacoste E., **Simulation multi-échelles du Hextool - Application à la simulation de fabrication des équerres composites**, 2<sup>ème</sup> journée scientifique du projet LCM-Smart, IFMA Clermont-Ferrand, 26 novembre 2010.

## Résumé

Dans cette thèse, les méthodes multi-échelles ont été utilisées afin de décrire le comportement d'un matériau composite à matrice organique, composé de bandes de renforts unidirectionnelles orientées aléatoirement dans le plan du pli. Une approche à champ moyen (modèles de Mori-Tanaka et autocohérent) a permis de calculer les propriétés mécaniques du composite via une procédure en deux étapes. Les difficultés liées à la coexistence dans le matériau de plusieurs morphologies d'inclusions ont été levées via à une généralisation du modèle autocohérent.

Ce modèle a aussi permis de calculer les contraintes locales de service dans le composite. Les contraintes dans les bandes UD ont également été calculées via une approche à champ complet périodique utilisant les éléments finis, montrant ainsi les avantages et les limites des approches à champs moyens. En s'appuyant sur une description du comportement de la résine selon la température et le degré de réticulation, l'évolution des propriétés du composite et des contraintes résiduelles locales (dus au retrait thermo-chimique de la résine) a pu être déterminée tout au long du cycle de fabrication, pour différentes contraintes appliquées au composite.

La problématique des déformations résiduelles de fabrication des pièces composites a également été abordée, en se focalisant notamment sur le phénomène de retrait angulaire des équerres dû à l'anisotropie du matériau. Les éléments finis ont permis de simuler ce retrait ainsi que les interactions moule-pièce, en tenant compte de l'évolution des propriétés mécaniques de l'équerre. La possibilité d'utiliser un moule composite pour cuire des pièces composites a également été évaluée.

**Mots clés :** Méthodes multi-échelles, Matériaux composites, Contraintes résiduelles, Pièces composites, Simulation.

## Abstract

In this thesis, multi-scale methods were used in order to describe the behaviour of an organic-matrix composite material, made of unidirectional reinforcing strips randomly disposed in the layout. The mean-field approach (Mori-Tanaka and self-consistent models) allowed us to forecast the mechanical properties of the composite via a two-steps procedure. The difficulties linked to the coexistence in the material of several morphologies of inclusions were overtaken with a more general formulation of the self-consistent model.

This model also allowed us to estimate the local service stresses in the composite. Those stresses in the UD strips were also computed with a periodic full-field approach, using the finite elements, which highlighted the advantages and limits of the mean-field approaches. Relying on a description of the resin's behaviour as a function of temperature and reticulation degree, the evolutions of the composite's properties and local residual stresses (created by the thermochemical shrinkage of the resin) along the fabrication process could be determined, for several constraints applied to the composite.

The problematic of the residual distortions of composite parts was also addressed, focusing on the effect of angle spring-in in L-shaped parts yielded by the material anisotropy. The finite elements allowed us to simulate this spring-in and also the mould-part interactions, accounting for the evolutions of the mechanical properties during the cure process. The opportunity of using a composite mould to cure composite parts was also evaluated.

**Keywords:** Multi-scale methods, Composite materials, Residual stresses, Composite parts, Simulation.