

Thèse de Doctorat

Valentin SAMOYEAU

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université de Nantes
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire*

École doctorale : Sciences et technologies de l'information, et mathématiques

Discipline : Mathématiques, section CNU 25, 26

Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL)

Soutenue le 27 juin 2016

Autour des inégalités de dispersion via le semi-groupe de la chaleur

JURY

Président :	M. Emmanuel RUSS , Professeur, Université de Grenoble Alpes
Rapporteurs :	M^{me} Sandrine GRELLIER , Professeur, Université d'Orléans M. Peer KUNSTMANN , Professeur, Université de Karlsruhe
Examineurs :	M. Jean-Philippe ANKER , Professeur, Université d'Orléans M. Gilles CARRON , Professeur, Université de Nantes
Directeur de thèse :	M. Frédéric BERNICOT , Chargé de recherche CNRS, Université de Nantes

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Le cas Euclidien	8
1.2	Contexte historique	10
1.2.1	Inégalités de Strichartz	10
1.2.2	Cadre de travail	12
1.2.3	Espaces H^1 et BMO	14
1.2.4	Équation des ondes	16
1.3	Résultats de la thèse	17
2	Inégalités de Strichartz	23
2.1	Introduction	24
2.2	Définitions et préliminaires	34
2.2.1	Notations	34
2.2.2	Le semi-groupe de la chaleur et le calcul fonctionnel associé .	35
2.2.3	Fonctionnelles quadratiques et espaces de Sobolev associés au semi-groupe	38
2.2.4	Espaces de Hardy et BMO	42
2.2.5	À propos de l'hypothèse $(H_m(A))$	47
2.3	De la Propriété $(H_m(A))$ aux estimations de dispersion	50
2.3.1	Continuité sur les atomes	50
2.3.2	Extension à la continuité sur l'espace de Hardy	55
2.3.3	Interpolation	59
2.4	Application aux inégalités de Strichartz	60
2.5	Estimations de dispersion pour l'opérateur de Schrödinger à travers l'opérateur des ondes	65
2.5.1	De la dispersion pour les ondes à la dispersion pour Schrödinger	65
2.5.2	Une digression à propos de ces propriétés de dispersion et de la mesure spectrale	72
2.6	Les cas Euclidien et Riemannien	75
2.7	Propagation des ondes dans l'espace Euclidien	81

3	Dispersion faible	85
3.1	Introduction	86
3.2	Définitions et préliminaires	92
3.2.1	Notations	92
3.2.2	Le semi-groupe de la chaleur et le calcul fonctionnel associé .	93
3.2.3	Espaces de Hardy et BMO	94
3.2.4	Motivation de l'hypothèse	97
3.3	Preuves des Théorèmes	99
3.3.1	Estimations de dispersion pour l'opérateur de Schrödinger .	99
3.3.2	Inégalités de Strichartz	103
4	Dispersion localisée	111
4.1	Introduction	111
4.2	Définitions et préliminaires	114
4.2.1	Notations	114
4.2.2	Espaces de Hardy et BMO	115
4.3	Inégalités aux bons lambdas	118
4.4	Interpolation	125
4.5	Estimations de dispersion pour le propagateur de Schrödinger . . .	129
4.6	Dispersion pour Schrödinger à partir de l'opérateur des ondes . . .	136
5	Exemples	147
5.1	Espaces de type homogène	147
5.2	Estimations sur le semi-groupe	149
5.2.1	Estimations du noyau de la chaleur	149
5.2.2	Estimations de Davies-Gaffney	150
5.3	Hypothèses sur le propagateur des ondes	150
5.4	Inégalités de Strichartz	151
5.5	Perspectives	154
	Bibliographie	164

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier mon directeur de thèse Frédéric Bernicot de m'avoir proposé ce sujet, de m'avoir fait découvrir de jolies mathématiques, et d'avoir toujours répondu avec patience à mes questions (même les plus naïves).

Je remercie chaleureusement Sandrine Grellier et Peer Kunstmann d'avoir accepté de rapporter ma thèse.

Je les remercie également avec Jean-Philippe Anker, Gilles Carron, et Emmanuel Russ d'avoir constitué le jury de cette thèse.

Je tiens à remercier le Labex Lebesgue sans qui cette thèse n'aurait pas eu lieu.

J'ai passé trois années de thèse très agréables au sein du Laboratoire de Mathématiques Jean Leray. Je souhaite donc remercier l'ensemble des membres du laboratoire pour leur accueil tant au niveau des enseignements que dans les différents groupes de travail, exposés, et autres réunions. Le laboratoire ne serait rien sans son incroyable secrétariat qui effectue un travail formidable. Je le remercie vivement ici ainsi que Claude, Dominique, Éric, Saïd, et Serge qui participent à la bonne marche du laboratoire. Un merci aussi à Bertrand de la cafétéria pour sa bonne humeur.

Je remercie aussi Jean-Marc Bouclet, Francesco Fanelli, El Maati Ouhabaz, les nombreuses autres personnes avec qui j'ai pu discuté de mes travaux, ainsi que les doctorants que j'ai rencontrés au cours de conférences.

Je remercie évidemment tous les thésards qui m'ont côtoyés pendant ces trois ans. Pour leur accueil, les pauses café, les galettes des rois, le sport, les sorties, les conseils (mathématiques ou pas!), les soirées, les parties de cartes, l'entraide administrative, la préparation des enseignements, et pour beaucoup d'autres choses encore : un grand merci à la bonne ambiance dans laquelle ils ont plongé ma thèse.

Je remercie bien sûr ma famille et mes amis qui se sont souvent demandé ce que je pouvais bien faire durant ces trois ans.

Je ne peux pas finir ces remerciements sans mentionner mes deux collègues du bureau 09 : Damien et Pierre. Ma vie d'étudiant n'aurait pas été la même sans eux. Ces quelques lignes ne suffiront pas à exprimer toute ma gratitude à leur égard. Je les remercie pour tout ce que nous avons partagé durant nos thèses et en dehors.

Enfin je souhaite remercier Camille pour son soutien ; cela n'a pas été toujours

facile de supporter un thésard, tu t'en es très bien sortie. Merci pour tout ce que tu fais pour moi dans les bons moments comme dans les moins bons.

Pour toutes ces raisons et pour bien d'autres encore, à toutes ces personnes et à toutes celles que j'ai oubliées (qu'elles m'en excusent) : merci.

Introduction

En mécanique quantique, l'équation de Schrödinger

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = F(u) \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases} \quad (1.0.1)$$

est primordiale puisqu'elle y joue le rôle du Principe Fondamental de la Dynamique de la mécanique classique. Elle permet ainsi de décrire l'évolution dans le temps d'une particule massive non relativiste. En mathématiques, et plus précisément dans le domaine de l'étude des équations aux dérivées partielles (EDP), une telle équation soulève trois questions :

1. Existe-t-il des solutions ?
2. Les solutions sont-elles uniques ?
3. Comment varie la solution en fonction de la donnée initiale ?

Pour répondre à ces problèmes, une méthode usuelle est d'utiliser un théorème de point fixe. C'est un résultat d'existence qui répond à la première question. Par construction, on arrive alors à répondre à la deuxième question. La troisième question fait intervenir un outil fondamental de l'analyse mathématique : les inégalités. Ces dernières vont ici décrire le comportement de la taille de la solution en fonction de la taille de la donnée initiale.

Les inégalités qui nous intéressent dans cette thèse sont les inégalités de Strichartz et plus particulièrement les inégalités de dispersion. Les premières estiment

précisément la taille de la solution d'une EDP (type équation de Schrödinger ou équation des ondes) en fonction de la taille de la donnée initiale. La taille est ici à comprendre comme une norme dans un espace fonctionnel bien choisi. Les inégalités de dispersion décrivent le comportement au cours du temps de la norme de la solution à un problème d'évolution. On peut illustrer le phénomène de dispersion pour l'équation des ondes (qui a une vitesse de propagation finie) en imaginant les ondes formées à la surface de l'eau lorsque l'on y jette un caillou. Les ondelettes se propagent dans toutes les directions et leurs amplitudes diminuent au cours du temps : c'est le phénomène de dispersion. Pour l'équation de Schrödinger, qui propage à vitesse infinie, on peut y penser comme la caractérisation de la décroissance au cours du temps de la probabilité de présence d'une particule dans une région fixée. On appelle dispersion ces deux phénomènes.

L'interface entre l'analyse harmonique et l'étude des EDP est un domaine très prospère en mathématiques. L'analyse harmonique s'illustre, entre autres, par la représentation de Fourier des signaux, l'analyse temps-fréquence, l'étude des fonctions maximales, ou encore la théorie de Littlewood-Paley. Cette thèse s'inscrit, de par les outils et techniques utilisés, dans cette théorie.

1.1 Le cas Euclidien

Afin de pouvoir mieux expliquer le sujet de cette thèse, on expose brièvement l'exemple naturel d'une équation posée sur l'espace Euclidien $\mathbb{R}^d$ dans lequel les calculs sont explicites.

On choisit une donnée initiale $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et on considère l'équation de Schrödinger linéaire posée dans l'espace Euclidien à d dimensions :

$$\begin{cases} i\partial_t u(t, x) + \Delta u(t, x) = 0 \\ u|_{t=0}(x) = u_0(x) \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.1.1)$$

On rappelle que l'opérateur Laplacien est défini de la façon suivante :

$$\Delta = \sum_{j=1}^d \partial_j^2.$$

Par transformée de Fourier en espace, on peut donner l'expression de la solution en résolvant l'Équation Différentielle Ordinaire :

$$\begin{cases} i\partial_t \hat{u}(t, \xi) - |\xi|^2 \hat{u}(t, \xi) = 0 \\ \hat{u}|_{t=0}(\xi) = \hat{u}_0(\xi) \end{cases}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On obtient ainsi

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-it|\xi|^2} \hat{u}_0(\xi). \quad (1.1.2)$$

D'où

$$u(t, x) = e^{it\Delta} u_0(x). \quad (1.1.3)$$

On rappelle le théorème de point fixe de Picard :

Théorème 1.1.1 (Théorème de point fixe de Picard). *Soient E un espace métrique complet et $\phi: E \rightarrow E$. Si ϕ est contractante alors ϕ admet un unique point fixe.*

Il s'agit donc de définir un espace fonctionnel et une application ϕ adaptés à l'équation. La formule (de perturbation) de Duhamel nous fournit un bon choix pour ϕ . On rappelle que si u est solution de (1.0.1) alors on a la reformulation intégrale suivante :

$$u(t, x) = e^{it\Delta} u_0(x) - i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} F(u(s, x)) ds. \quad (1.1.4)$$

On pose donc

$$\phi(u)(t, x) = e^{it\Delta} u_0 - i \int_0^t e^{i(t-s)\Delta} F(u(s, x)) ds.$$

Pour montrer que ϕ admet un point fixe, on doit montrer qu'elle est contractante. En supposant que la non-linéarité F est assez régulière, on a donc besoin d'estimer, pour u dans un espace fonctionnel E bien choisi, $\|e^{it\Delta} u\|_E$ en fonction de $\|u\|_E$ et t . Il y a plusieurs façons d'approcher ce problème. Celle que l'on veut présenter ici fait intervenir l'équation de la chaleur. L'équation de la chaleur est le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases}$$

On sait donner une solution explicite (en utilisant la transformée de Fourier) à cette équation :

$$u(t, x) = e^{t\Delta} u_0(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{d(x,y)^2}{4t}} u_0(y) dy = p_t * u_0(x).$$

La solution u est donnée par un opérateur intégral de noyau p_t . On appelle ce noyau “noyau de la chaleur”. Il jouera un rôle crucial dans notre travail. En prolongeant de façon holomorphe le noyau de la chaleur, on peut ainsi donner une estimation pour la solution de (1.1.1), à savoir :

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \lesssim |t|^{-\frac{d}{2}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \quad (1.1.5)$$

On appelle cette inégalité : estimation de dispersion $L^1 - L^\infty$. On sait de plus par un résultat de calcul fonctionnel borné que

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (1.1.6)$$

En interpolant entre (1.1.5) et (1.1.6), par le Théorème d'interpolation de Riesz-Thorin, on obtient des estimations de dispersion $L^p - L^{p'}$:

$$\forall p \in [1, 2], \quad \|e^{it\Delta} u_0\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^d)} \lesssim |t|^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \quad (1.1.7)$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Les inégalités de Strichartz découlent de l'estimation (1.1.5) via un argument TT^* , et sont de la forme :

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L^p(\mathbb{R}, L^q)} \lesssim \|u_0\|_{L^2}, \quad (1.1.8)$$

pour toute paire d'exposants $(p, q) \in [2, \infty]^2$ telle que

$$\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2} \quad (1.1.9)$$

et $(p, q, d) \neq (2, \infty, 2)$. Ce sont elles qui permettent de faire fonctionner le Théorème de point fixe de Picard 1.1.1 et montrer ainsi l'existence, l'unicité, et le comportement de la solution en fonction de la donnée initiale pour l'équation de Schrödinger (1.0.1).

1.2 Contexte historique

1.2.1 Inégalités de Strichartz

Les inégalités de Strichartz furent initialement introduites par Strichartz dans [Str77] en 1977 pour l'équation des ondes dans l'espace Euclidien. Par la suite, on peut citer les travaux de Ginibre et Velo [GV92] qui étendent ces inégalités notamment à l'équation de Schrödinger, et enfin l'article plus récent de Keel et Tao (1998) qui donne la plus grande plage d'exposants p et q pour lesquels l'estimation est valable dans [KT98]. On dit que les estimations sont globales en temps lorsque $t \in \mathbb{R}$ dans (1.1.8). Dans certaines situations, on ne peut prendre t que dans un intervalle de temps fini, on dit alors que les inégalités sont locales en temps :

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L^p([-1, 1], L^q)} \lesssim \|u_0\|_{L^2}.$$

Cette situation apparaît par exemple dans le cas d'un espace compact. En effet, ces inégalités découlent de l'estimation $L^1 - L^\infty$ (1.1.5). Si on se place sur le tore $\mathbb{T}$ et que l'on considère une donnée initiale $u_0 = 1$ constante, alors la solution est aussi constante et on remarque que (1.1.5) ne peut pas être valable pour des temps grands. En 2011, Bouclet a obtenu des estimations locales en temps de ce genre dans [Bou11] pour une équation posée sur une variété asymptotiquement hyperbolique.

1.2. Contexte historique

La question de l'équation de Schrödinger sur une variété a été largement étudiée et on peut se référer aux travaux de Burq-Gérard-Tzvetkov en 2004 pour connaître les résultats optimaux dans ce domaine. Deux cas de figure se présentent.

Lorsque la variété est compacte, dans [BGT04b] ou [ST02] les auteurs montrent des inégalités de Strichartz locales en temps en requérant plus de régularité sur la donnée initiale, à savoir une donnée dans l'espace de Sobolev d'ordre $1/p$ basé sur L^2 : $u_0 \in W^{1/p,2}$. On appelle ces estimations “avec perte de $1/p$ dérivées” :

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^p([-1,1],L^q)} \lesssim \|u_0\|_{W^{\frac{1}{p},2}}. \quad (1.2.1)$$

Dans [BGT04b], la perte de dérivées est due à des estimations de dispersion semi-classiques.

Pour le cas d'une variété non compacte, des inégalités de Strichartz avec la même perte $\frac{1}{p}$ de dérivées ont aussi été obtenues par Burq-Gérard-Tzvetkov dans [BGT04a]. La perte est cette fois due à des injections de Sobolev.

L'approche de [BGT04b] a aussi entraîné d'autres travaux dans des situations non compactes : [Ant08], [BSS08], ou [BFHM12] par exemple. Une remarque fondamentale est qu'on peut obtenir des inégalités de Strichartz directement par injections de Sobolev, mais la perte de dérivées est alors plus importante. En effet $\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2}$ implique que $W^{\frac{2}{p},2} \hookrightarrow L^q$, ainsi on a :

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^q} \lesssim \|e^{it\Delta}u_0\|_{W^{\frac{2}{p},2}} \leq \|u_0\|_{W^{\frac{2}{p},2}}.$$

En prenant la norme $L^p([-1,1])$ en temps de cette expression, on obtient :

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^p([-1,1],L^q)} \lesssim \|u_0\|_{W^{\frac{2}{p},2}}.$$

La perte de dérivées dans des inégalités de Strichartz est donc non triviale si elle est inférieure à $\frac{2}{p}$. Un problème intéressant est de déterminer pour chaque situation particulière, la perte de dérivée optimale qui lui est associée. On trouve des résultats dans ce sens dans les travaux de Bourgain [Bou93] ou Takaoka et Tzvetkov [TT01]. Dans [BGT04b], les auteurs ont montré que la perte $\frac{1}{p}$ est optimale. Ils l'ont obtenue en considérant l'exemple de la sphère dans l'espace Euclidien. Enfin dans la même veine, Christianson a montré dans [Chr08] des estimations avec une perte $1/p + \varepsilon$ pour des variétés infinies avec une orbite piégée et un opérateur Laplacien perturbé par un potentiel régulier.

Pour terminer ce survol de résultats, nous aimerions citer les deux résultats clés de Burq-Gérard-Tzvetkov qui ont motivé notre travail. Le premier est le Lemme 2.5 de [BGT04b]. Il s'agit d'une estimation de dispersion semi-classique $L^1 - L^\infty$ pour une variété Riemannienne compacte.

Lemme 1.2.1 (Lemme 2.5 [BGT04b]). *Soit M une variété Riemannienne compacte de dimension $d \geq 1$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Il existe $\alpha > 0$ et $C > 0$ tels que, pour tout $v_0 \in C^\infty(M)$, pour tout $h \in]0, 1]$*

$$\|e^{it\Delta}\varphi(h^2\Delta)v_0\|_{L^\infty(M)} \leq \frac{C}{|t|^{d/2}}\|v_0\|_{L^1(M)} \quad (1.2.2)$$

pour tout $t \in [-\alpha h, \alpha h]$.

Le second est le Théorème 1.1 de [BGT04b]. Il peut se déduire du Lemme 1.2.1 par les méthodes exposées dans [KT98], et donne les inégalités de Strichartz pour l'équation de Schrödinger sur une variété compacte :

Théorème 1.2.2 (Théorème 1.1 [BGT04b]). *Soient (M, g) une variété Riemannienne compacte de dimension $d \geq 1$ et Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami sur M . Étant donnés p, q satisfaisant la condition d'échelle (1.1.9) et $p \geq 2$, $q < \infty$, la solution v de*

$$i\partial_t v + \Delta v = 0, \quad v(0, x) = v_0(x),$$

vérifie pour tout intervalle de temps fini I ,

$$\|v\|_{L^p(I, L^q(M))} \leq C(I)\|v_0\|_{W^{1/p, 2}(M)}. \quad (1.2.3)$$

Ces énoncés constituent le point de départ de cette thèse, et nous font considérer la problématique suivante : quel contexte général peut-on donner à de telles estimations afin de donner des inégalités de Strichartz dans un cadre aussi large que possible, à partir d'estimations de dispersion analogues à celles du Lemme 1.2.1 ?

1.2.2 Cadre de travail

Dans cette thèse, on cherche donc à généraliser les résultats précédents en donnant une méthode unifiée qui permet de retrouver des estimations de dispersion et des inégalités de Strichartz dans des situations variées (variétés compactes ou non, groupes de Lie, domaines dans l'espace Euclidien, ...). Plus précisément, on se place dans un espace métrique (X, d) muni d'une mesure μ doublante. C'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C\mu(B(x, r)).$$

Ce contrôle sur le volume de la boule de rayon double par rapport au volume de la boule ouverte $B(x, r)$ de centre x et de rayon $r > 0$ assure alors l'existence d'un réel $d > 0$ appelé dimension homogène et tel que

$$\forall \lambda \geq 1, \quad \mu(B(x, \lambda r)) \lesssim \lambda^d \mu(B(x, r)),$$

où la constante implicite dans l'inégalité précédente ne dépend que de la constante de doublement C . Ce genre d'espace, dit de type homogène, est désormais bien connu et on mentionne [TDOS02, CS08, KU15] comme des références notables, du point de vue de l'analyse harmonique, qui se placent dans ce cadre de travail. Ainsi on aspire nos résultats à s'appliquer dans une large classe d'espaces comme des ouverts de $\mathbb{R}^d$, des variétés lisses de dimension d , certains ensembles fractaux, groupes de Lie, ou le groupe de Heisenberg...

On va aussi généraliser les résultats précédents en considérant non plus l'opérateur de Laplace-Beltrami (le "Laplacien positif") usuel mais un opérateur auto-adjoint positif H satisfaisant des propriétés qui nous assurent qu'il se comporte "comme" le Laplacien. On suppose que H est à domaine dense dans $L^2(X)$. On sait alors ([Dav97]) que $-H$ engendre un semi-groupe $(e^{-tH})_{t \geq 0}$, et on suppose qu'il satisfait les estimations L^2 de Davies-Gaffney : pour tout $t > 0$ et tous sous-ensembles E et F de X :

$$\|e^{-tH}\|_{L^2(E) \rightarrow L^2(F)} \lesssim e^{-\frac{d(E,F)^2}{4t}}. \quad (\text{DG})$$

Cette propriété très générale est vérifiée pour la plupart des opérateurs différentiels auto-adjoints du second-ordre, comme l'opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété Riemannienne, ou l'opérateur Laplacien perturbé par un potentiel. On renvoie à [Aus07, ACDH04, CD99] pour des exemples d'opérateurs vérifiant cette propriété. On supposera aussi que pour tout $t > 0$, e^{-tH} admet un noyau p_t , le noyau de la chaleur, qui satisfait les estimations diagonales typiques pour un opérateur d'ordre deux :

$$\text{p. p. } x \in X, \quad |p_t(x, x)| \lesssim \mu(B(x, \sqrt{t}))^{-1}. \quad (\text{DUE})$$

Ces estimations s'auto-améliorent en des estimations Gaussiennes ponctuelles complètes (voir [CS08] ou [Gri97]) :

$$\text{p. p. } x, y \in X, \quad |p_t(x, y)| \lesssim \mu(B(x, \sqrt{t}))^{-1} e^{-c \frac{d(x,y)^2}{t}}. \quad (\text{UE})$$

Le semi-groupe de la chaleur étant déjà largement étudié, on connaît de nombreux cas dans lesquels les inégalités précédentes sont vérifiées, voir par exemple [CS08, GSC11, AT98, Rob91, CRTN01, BFHM12]. On note aussi que, quitte à changer la constante de normalisation dans (DG) :

$$(\text{DUE}) \Rightarrow (\text{UE}) \Rightarrow (\text{DG}).$$

Ainsi, on s'intéresse au problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} i\partial_t u(t, x) + Hu(t, x) = 0, & x \in X, \quad t \in \mathbb{R}. \\ u_{|t=0}(x) = u_0(x) \end{cases} \quad (1.2.4)$$

On termine cette section en remarquant que l'on peut se passer de supposer que l'opérateur H est auto-adjoint si on sait définir les propagateurs de Schrödinger et des ondes associés, et si on dispose par ailleurs d'informations (comme des estimations $L^2 - L^2$) sur le propagateur des ondes.

1.2.3 Espaces H^1 et BMO

On le rappelle, le point clé pour obtenir des estimations de Strichartz est l'estimation de dispersion $L^1 - L^\infty$ (1.1.5). En effet la machinerie de Keel et Tao [KT98] repose sur un argument TT^* , l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev, et l'interpolation avec L^2 , et ces techniques sont robustes, au sens où elles peuvent s'adapter à de nombreuses situations. Cependant, l'estimation (1.1.5) est en général difficile à montrer. Depuis 2001 déjà, on sait d'après Klainermann [Kla01] par exemple, qu'il est suffisant de prouver à la place une estimation de dispersion $H^1 - \text{BMO}$.

Les espaces de Hardy H^1 (dit aussi de Coifman-Weiss [CW77]) et BMO ("Bounded Mean Oscillations" introduit par John-Nirenberg [JN61] dans les années 1960) apparaissent naturellement en Analyse Harmonique comme une extension de l'échelle des espaces de Lebesgue $(L^p)_{1 < p < +\infty}$ lorsque $p \rightarrow 1$ pour H^1 et $p \rightarrow +\infty$ pour BMO. On rappelle ici leurs définitions :

Définition 1.2.3. *Une fonction localement intégrable f appartient à BMO si la quantité suivante, qui définit la norme $\|f\|_{\text{BMO}}$, est finie :*

$$\sup_B \int_B |f - \int_B f d\mu| d\mu < +\infty,$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des boules B de $\mathbb{R}^d$.

Définition 1.2.4. *On appelle atome toute fonction a pour laquelle il existe une boule B telle que a est supportée dans B , $\int_B a d\mu = 0$ et $\|a\|_{L^\infty(B)} \leq \frac{1}{|B|}$.*

Une fonction localement intégrable f appartient à l'espace de Hardy H^1 s'il existe une suite de nombres complexes $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N})$ et une suite d'atomes $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, telles que

$$f = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i a_i.$$

On équipe H^1 de la norme

$$\|f\|_{H^1} := \inf \sum_{i \in \mathbb{N}} |\lambda_i|,$$

où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des décompositions $f = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i a_i$ possibles.

Ces espaces ont de nombreuses propriétés intéressantes qui font défaut aux espaces de Lebesgue L^1 et L^∞ . On peut citer entre autres des résultats de dualité, de caractérisation par la transformée de Fourier, la continuité de certains opérateurs de Calderón-Zygmund ou fonctions maximales. De plus les atomes étant dans l'espace L^2 , il est plus facile de travailler avec ces fonctions puisque la théorie L^2 est très développée et on dispose donc des outils de la théorie spectrale par exemple. L'utilisation de l'espace de Hardy permet ainsi de se passer de formulations ponctuelles des noyaux des propagateurs, qui sont souvent très restrictives. BMO contient strictement L^∞ et H^1 est strictement inclus dans L^1 , mais ces espaces conservent une propriété fondamentale : celle de s'interpoler avec les espaces de Lebesgue, et que les espaces intermédiaires d'interpolation soient des espaces de Lebesgue, comme le font les espaces L^1 et L^∞ . C'est pourquoi une estimation de dispersion $H^1 - \text{BMO}$ est un bon substitut à l'estimation $L^1 - L^\infty$ (1.1.5).

Cependant, il existe des situations dans lesquelles ces espaces ne sont pas les bons remplaçants des espaces de Lebesgue (on peut montrer par exemple que la transformée de Riesz n'est pas continue de H^1 dans L^1 dans certain cas). C'est pourquoi de nombreux travaux tentent de construire des espaces de Hardy et BMO adaptés à chaque problème et plus particulièrement adaptés à la structure de semi-groupe de la chaleur. Dans cette direction, on peut citer les travaux [ADM05, Aus07, ACDH04, Ber10, BZ08, BZ12, DY05a, HM09]. Plus précisément, dans [BZ08, BZ12], Bernicot et Zhao ont proposé une construction abstraite d'espaces de Hardy et BMO ainsi que des résultats d'interpolation avec les espaces de Lebesgue. L'idée principale de cette construction est de considérer les oscillations données par le semi-groupe de la chaleur plutôt que celles données par les opérateurs de moyenne usuels.

L'interpolation est la clé dans l'utilisation de l'estimation de dispersion $H^1 - \text{BMO}$. Il faut comprendre la propriété d'interpolation entre H^1 et L^2 d'une part, et entre BMO et L^2 d'autre part comme l'interpolation donnée par le Théorème de Riesz-Thorin (en remplaçant L^1 par H^1 et L^∞ par BMO) dont on donne un corollaire ici (voir Théorème 1.1.1 de [BL76] pour un énoncé complet) :

Théorème 1.2.5. *Si T est un opérateur qui admet les bornes de continuité suivantes*

$$\|T\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} \leq A \quad \text{et} \quad \|T\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq B,$$

alors pour tout $\theta \in (0, 1)$, T est continu de L^{p_θ} dans L^{q_θ} où

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{\theta}{1} + \frac{1-\theta}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{2}$$

et :

$$\|T\|_{L^{p_\theta} \rightarrow L^{q_\theta}} \leq A^\theta B^{1-\theta}.$$

L'idée est donc dans un premier temps de prouver un théorème similaire au précédent en remplaçant L^1 par H^1 et L^∞ par BMO.

1.2.4 Équation des ondes

Comme nous le verrons ultérieurement, notre démarche nous amène à étudier les liens entre l'équation de Schrödinger et l'équation des ondes. Plus particulièrement, on s'intéresse au problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + Hu = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \\ \partial_t u|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (1.2.5)$$

On définit ainsi le propagateur des ondes, qui associe à une donnée initiale $u_0 \in L^2$ l'unique solution au temps t de (1.2.5) : $\cos(t\sqrt{H})u_0$. On peut trouver les solutions explicites de ce problème dans [Fol95] pour l'espace Euclidien et dans [Bér77] pour le cas d'une variété Riemannienne compacte grâce à des formules précises du noyau du propagateur des ondes. La propriété fondamentale de l'opérateur $\cos(t\sqrt{H})$ est sa propagation à vitesse finie (vitesse 1 vu la normalisation de l'équation (1.2.5)).

Propriété 1.2.6. *Soient deux sous-ensembles ouverts disjoints U_1, U_2 de X et deux fonctions $f_1, f_2 \in L^2$ supportées respectivement sur U_1 et U_2 . Si $0 < t < d(U_1, U_2)$, alors*

$$\langle \cos(t\sqrt{H})f_1, f_2 \rangle = 0. \quad (1.2.6)$$

Cette propriété signifie que si $\cos(t\sqrt{H})$ est un opérateur intégral de noyau K_t , alors K_t est supporté sur le cône de lumière

$$\mathcal{D}_t := \{(x, y) \in X, d(x, y) \leq t\}.$$

En d'autres termes, si la donnée initiale u_0 est supportée dans une boule B de rayon r , alors la solution au temps t $\cos(t\sqrt{H})u_0$ est supportée dans la boule de même centre et de rayon $r + t$.

Un résultat remarquable de [CS08] est qu'en toute généralité, cette Propriété 1.2.6 est équivalente aux estimations de Davies-Gaffney pour le semi-groupe de la chaleur (DG). Ainsi cette propriété est satisfaite vu notre choix d'opérateur H . Pour faire le lien entre l'équation des ondes et celle de Schrödinger, on utilisera la formule suivante (issue d'un Théorème de Cauchy d'analyse complexe) qui permet de reconstruire le propagateur de Schrödinger à partir de l'opérateur des ondes :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0, \quad e^{-zH} = \int_0^\infty \cos(t\sqrt{H}) e^{-\frac{t^2}{4z}} \frac{dt}{\sqrt{\pi z}}. \quad (1.2.7)$$

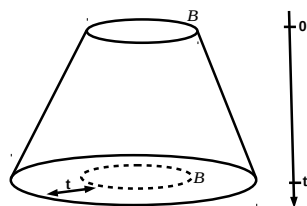


FIGURE 1.1 – Cône de lumière

Nous sommes donc motivés par la question suivante : quelles hypothèses sur le propagateur des ondes nous permettent d'obtenir de bonnes propriétés de dispersion sur le propagateur de Schrödinger, et d'en déduire des inégalités de Strichartz pour l'équation de Schrödinger dans notre cadre abstrait ? C'est précisément la question à laquelle cette thèse apporte des réponses.

1.3 Résultats de la thèse

Dans cette section on présente brièvement les résultats majeurs obtenus dans les chapitres suivants afin de donner un aperçu d'ensemble des aboutissements de la thèse. Les résultats obtenus sont de différents types.

- On donnera des résultats d'interpolation entre les espaces de Lebesgue et les espaces de Hardy et BMO construits pour ce problème (voir par exemple les Théorèmes 2.2.16 et 4.4.3).
- On montrera aussi une caractérisation de la dispersion $H^1 - \text{BMO}$ et $L^p - L^{p'}$ par une estimation microlocalisée $L^2 - L^2$ (e.g. Théorème 2.3.5 ou Théorème 4.5.8).
- On étudiera les propriétés sur le propagateur des ondes qui permettent d'obtenir les estimations $L^2 - L^2$ précédentes (e.g. Théorème 2.5.4, Théorème 3.3.1).
- Enfin, on appliquera les résultats précédents pour démontrer des inégalités de Strichartz avec ou sans perte de dérivées dans un cadre général (e.g. Théorèmes 2.1.4, 3.1.4, 4.1.1).

Ainsi on montre comment les estimations de dispersion pour le propagateur de Schrödinger et les inégalités de Strichartz peuvent être une conséquence d'estimations de dispersion pour l'équation des ondes.

Pour mettre en lumière les différences et les similitudes des résultats des différents chapitres, on énonce maintenant trois Théorèmes qui correspondent à une synthèse des travaux de chaque chapitre et qui montrent comment la dispersion pour le propagateur des ondes entraîne de la dispersion pour le groupe de Schrödinger. Pour ces résultats on suppose à chaque fois que (DUE) est satisfaite et que la mesure μ a la propriété de régularité Ahlfors suivante :
il existe $C > 0$ tel que pour tout $r > 0$ et $x \in X$:

$$\frac{1}{C}r^d \leq \mu(B(x, r)) \leq Cr^d.$$

Dans le Chapitre 2, on montre comment, sous une hypothèse de dispersion microlocalisée $L^2 - L^2$ précise pour le propagateur des ondes, on est capable d'obtenir des inégalités de Strichartz, avec ou sans perte de dérivées selon la "géométrie" de la situation, par une méthode unique.

Théorème A. *Si $d > 1$ et s'il existe $\kappa \in (0, +\infty]$ et un entier m_0 tel que pour tout $s \in (0, \kappa)$, tout $r > 0$ et toutes boules $B, \tilde{B}$ de rayon r*

$$\|\cos(s\sqrt{H})\psi_m(h^2H)\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} \lesssim \left(\frac{r}{r+s}\right)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{r}{r+|L-s|}\right)^{\frac{d+1}{2}}, \quad (1.3.1)$$

où $L = d(B, \tilde{B})$ et $\psi_m(h^2H) = (h^2H)^m e^{-h^2H}$ est une version régulière du projecteur spectral, obtenu par calcul fonctionnel holomorphe à partir du semi-groupe. Alors pour toute solution u de (1.2.4) et toute paire (p, q) vérifiant (1.1.9) avec $q \neq \infty$, on a

- si $\kappa = +\infty$: u vérifie des inégalités de Strichartz globales en temps sans perte de dérivées :

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}, L^q)} \lesssim \|u_0\|_{L^2};$$

- si $\kappa < +\infty$: pour tout $\varepsilon > 0$, u vérifie des inégalités de Strichartz locales en temps avec perte de $1/p + \varepsilon$ dérivées :

$$\|u\|_{L^p([-1,1], L^q)} \lesssim \|u_0\|_{W^{1/p+\varepsilon, 2}}.$$

On remarque que dans le cas $\kappa = +\infty$ on retrouve par exemple le résultat connu sur l'espace Euclidien, et que le cas $\kappa < +\infty$ traite l'exemple des variétés Riemanniennes compactes de [BGT04b] avec une perte de dérivées aussi proche que l'on veut de la perte optimale.

Dans le Chapitre 3, on fait cette fois-ci une hypothèse beaucoup plus faible sur le propagateur des ondes. On ne suppose en effet à présent aucune connaissance

sur ce qu'il se passe à l'intérieur du cône de lumière, mais on conserve une propriété de dispersion naturelle au bord du cône de lumière (c'est la partie la plus compliquée). Les estimations que l'on peut espérer montrer en pratique devraient être meilleures que l'hypothèse (1.3.2). En ce sens, on s'intéresse à la pire des situations, pour savoir quelles inégalités de Strichartz on pourrait tout de même obtenir, en adaptant la méthode du Théorème A.

Théorème B. *Si $d > 2$ et s'il existe $\kappa \in (0, +\infty]$ et un entier m_0 tel que pour tout $s \in (0, \kappa)$, tout $r > 0$ et toutes boules $B, \tilde{B}$ de rayon r*

$$\|\cos(s\sqrt{H})\psi_m(h^2 H)\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} \lesssim \left(\frac{r}{r+s}\right)^{\frac{d-1}{2}}. \quad (1.3.2)$$

Alors pour toute solution u de (1.2.4) et toute paire (p, q) telle que $2 \leq p \leq +\infty$, $2 \leq q < +\infty$, $(p, q, d) \neq (2, \infty, 2)$ et

$$\frac{2}{p} + \frac{d-2}{q} = \frac{d-2}{2},$$

- *si $\kappa = +\infty$: u vérifie des inégalités de Strichartz locales en temps avec perte de $2(1/2 - 1/q)$ dérivées :*

$$\|u\|_{L^p([-1,1], L^q)} \lesssim \|u_0\|_{W^{2(1/2-1/q), 2}};$$

- *si $\kappa < +\infty$: pour tout $\varepsilon > 0$, u vérifie des inégalités de Strichartz locales en temps avec perte de $1/p + 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}) + \varepsilon$ dérivées :*

$$\|u\|_{L^p([-1,1], L^q)} \lesssim \|u_0\|_{W^{1/p+2(1/2-1/q)+\varepsilon, 2}}.$$

Il est important de noter que la perte de dérivées dans ces estimations n'est pas triviale. Elle est à comparer avec la perte donnée directement par les injections de Sobolev lorsque $\frac{2}{p} + \frac{d-2}{q} = \frac{d-2}{2}$, à savoir une perte de $2/p + 2(1/2 - 2/q)$. Par contre, on perd le caractère global en temps dans le cas $\kappa = +\infty$ à cause d'estimations de dispersion $H^1 - \text{BMO}$ moins bonnes.

Dans le Chapitre 4, on s'intéresse cette fois à des estimations de dispersion pour le propagateur des ondes qui prennent en compte l'intérieur du cône de lumière, mais qui oublient les phénomènes qui peuvent arriver près de son bord. La méthode que nous employons ne nous permet plus alors de retrouver des inégalités de Strichartz, mais on est tout de même en mesure d'obtenir des estimations de dispersion $H^1 - \text{BMO}$ et $L^p - L^{p'}$ localisée sur la diagonale.

Théorème C. *Si $d > 1$ et s'il existe $\kappa \in (0, +\infty]$ tel que pour tout $s > 0$, le propagateur des ondes $\cos(s\sqrt{H})$ admet un noyau $K_{\cos(s\sqrt{H})}$ vérifiant :*

$$|K_{\cos(s\sqrt{H})}(x, y)| \leq s^{-d} \quad \text{si} \quad d(x, y) \leq \frac{s}{2} \quad \text{et} \quad s \leq \kappa. \quad (1.3.3)$$

Alors, pour tout $m' \in \mathbb{N}$, et tout $p \in (1, 2)$, on a :

$$\|\mathbf{1}_{B_0} e^{itH} \psi_{m'}(h^2 H)\|_{L^p(B_0) \rightarrow L^{p'}(B_0)} \lesssim |t|^{-\frac{d}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} \right)}, \quad (1.3.4)$$

où B_0 désigne une boule fixée de rayon $\sqrt{t}$, et le temps t pour lequel l'estimation précédente est valide est donné par :

- si $\kappa = +\infty$, alors on a (1.3.4) pour tout $t \neq 0$;
- si $\kappa < +\infty$, alors on a (1.3.4) pour tous $\varepsilon > 0$, $0 < h \leq 1$ et $h^2 \leq |t| \leq h^{1+\varepsilon}$.

On remarque que dans [BGT04b], les auteurs travaillent avec $h^2 \leq |t| \leq h$. On est encore une fois aussi proche que l'on veut de ce régime. L'hypothèse (1.3.3) est donnée sous une forme légèrement différente de (1.3.1) et (1.3.2). Pour les comparer plus aisément, on donne ici une estimation $L^2(B) - L^2(\tilde{B})$ que l'on peut obtenir à l'aide de (1.3.3). Si $d(B, \tilde{B}) \leq s/2$:

$$\|\cos(s\sqrt{H})\psi_m(h^2 H)\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} \lesssim \left(\frac{r}{s}\right)^d \simeq \left(\frac{r}{r+s}\right)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{r}{r+|L-s|}\right)^{\frac{d+1}{2}}. \quad (1.3.5)$$

La dernière inégalité met en évidence les liens entre (1.3.1), (1.3.2), et (1.3.5).

Comme illustré sur les figures suivantes, le rayon r des boules B et $\tilde{B}$ est plus petit que le temps d'évolution t . En effet, si $r \geq t$ alors toutes les estimations des théorèmes précédents sont triviales par calcul fonctionnel borné. Lorsque l'on parle de la dispersion “à l'intérieur de cône de lumière”, on veut dire que la distance entre les boules B et $\tilde{B}$ est plus petite que $\frac{t}{2}$ comme il est représenté sur la Figure 1.2. Pour les phénomènes au bord du cône de lumière, on entend que $\frac{t}{2} \leq d(B, \tilde{B}) \leq t$, voir Figure 1.3. Enfin, si $d(B, \tilde{B}) > t$ (voir Figure 1.4), alors la propagation à vitesse finie permet de dire que

$$\|\cos(t\sqrt{H})\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} = 0.$$

Les chapitres de la thèse sont indépendants, et peuvent être lus dans le désordre. Pour faciliter leur lecture on redonne, pour chaque chapitre, une introduction avec les notations utilisées dans le chapitre. La thèse s'articule de la façon suivante. Le Chapitre 2 est le plus conséquent, puisqu'il reprend en détail l'exposition de

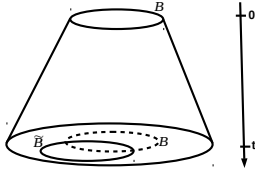


FIGURE 1.2 – Intérieur du cône de lumière

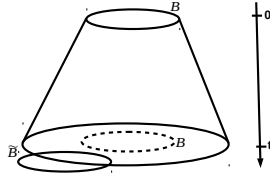


FIGURE 1.3 – Bord du cône de lumière

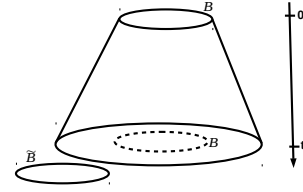


FIGURE 1.4 – Hors du cône de lumière

la méthode que l'on réinvestira les chapitres suivants. C'est celui qui contient le plus de définitions, en particulier les définitions des espaces de Hardy et BMO associés au semi-groupe de la chaleur, ainsi que les propriétés d'interpolation et de calculs fonctionnels qui sont utiles tout au long de la thèse. On montre d'une part comment ramener les estimations $H^1 - \text{BMO}$ à des estimations microlocalisées $L^2 - L^2$ plus maniables. Ces estimations $H^1 - \text{BMO}$ permettent, par interpolation, d'obtenir des estimations de dispersion $L^p - L^{p'}$. Ensuite, on explique comment en déduire des inégalités de Strichartz. On s'intéresse alors à une propriété de dispersion sur le propagateur des ondes, qui permet de prouver que les estimations microlocalisées $L^2 - L^2$ sont valables. Les résultats de ce chapitre sont résumés dans le Théorème A. La fin du chapitre expose en détail comment obtenir des estimations de dispersion $L^2 - L^2$ pour le propagateur des ondes quand on peut mener les calculs de façon explicite. On montre ainsi que l'hypothèse sur le propagateur des ondes est satisfaite dans le cas Euclidien par exemple où on connaît assez bien la solution à l'équation des ondes.

Le Chapitre 3 propose d'étudier le problème si on affaiblit l'hypothèse sur le propagateur des ondes. En suivant la même démarche qu'au Chapitre 2, on montre quelles estimations de dispersion une hypothèse faible sur le propagateur des ondes entraîne. Puis on applique un raffinement de l'argument de Keel et Tao dans [KT98] pour en déduire les inégalités de Strichartz du Théorème B.

Dans le Chapitre 4, on définit de nouveaux espaces de Hardy et BMO afin de prouver une estimation de dispersion sur la diagonale. On reprend donc la construction de [BZ08] et on démontre un résultat d'interpolation entre ces nouveaux espaces et les espaces de Lebesgue (via des inégalités aux bons λ s). On peut ainsi montrer, à partir d'une propriété de dispersion naturelle pour le propagateur des ondes, des estimations de dispersion $L^p - L^{p'}$ pour le propagateur de Schrödinger (voir Théorème C).

Enfin dans le Chapitre 5, on recense des exemples dans lesquels la démarche développée dans cette thèse s'applique. À savoir, démontrer des inégalités de Strichartz et obtenir des estimations de dispersion dans une large classe de situations. On retrouve ainsi différents résultats connus qui rentrent tous dans le cadre d'ap-

plication de notre méthode liée au semi-groupe de la chaleur. On présente aussi des perspectives de recherche qui peuvent découler de cette thèse.

Les chapitres 2 et 3 sont les traductions de deux articles. Le premier ([BS14], [arXiv:1407.4086](#)) est écrit en collaboration avec Frédéric Bernicot et est à paraître aux *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze*. Le second ([Sam16], [hal-01299484](#)) est soumis pour publication.

Inégalités de Strichartz avec perte de dérivées par une méthode liée au semi-groupe de la chaleur

Ce chapitre a pour but de donner un analogue général des inégalités de Strichartz obtenues par Burq, Gérard, et Tzvetkov [BGT04b] et Staffilani et Tataru [ST02] dans un cadre éventuellement compact ou non compact. De plus, l'approche que nous proposons est nouvelle, reposant uniquement sur le semi-groupe de la chaleur, de façon à comprendre les liens analytique entre le semi-groupe de la chaleur et le groupe unitaire de Schrödinger (tous deux associés à un même opérateur auto-adjoint). Une des nouveautés de ce travail est de contourner l'estimation de dispersion $L^1 - L^\infty$ en cherchant à prouver une estimation plus faible de type $H^1 - \text{BMO}$ (pour des espaces de Hardy H^1 et BMO associés au semi-groupe de la chaleur). Ce nouveau point de vue permet de donner un cadre de travail très général (espaces métriques infinis, variétés Riemanniennes avec des métriques non régulières, variétés à bord, ...) où les inégalités de Strichartz avec perte de dérivées peuvent se réduire à des propriétés de dispersion $L^2 - L^2$. On exploitera aussi le lien entre le propagateur des ondes et le groupe unitaire de Schrödinger pour prouver comment la dispersion en temps court pour les ondes implique la dispersion pour le groupe de Schrödinger.

2.1 Introduction

Un outil puissant pour étudier des équations de type Schrödinger non linéaires est la famille des inégalités dites de Strichartz. Ces estimations sont utiles pour contrôler la taille de la solution à un problème linéaire en fonction de la taille de la donnée initiale. La notion de taille étant habituellement donnée par un espace fonctionnel adapté du type $L_t^p L_x^q$. De telles inégalités furent initialement introduites par Strichartz dans [Str77] pour des ondes dans l'espace Euclidien. Elles furent ensuite étendues par Ginibre et Velo dans [GV92] et Keel et Tao dans [KT98] pour le propagateur associé à l'équation de Schrödinger dans $\mathbb{R}^d$. Ainsi pour une donnée initiale u_0 , on s'intéresse au contrôle de la solution $u(t, \cdot) = e^{it\Delta} u_0$ au temps t du problème linéaire de Schrödinger suivant :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}.$$

On sait que le groupe unitaire $e^{it\Delta}$ vérifie l'inégalité suivante :

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L^p L^q([-T, T] \times \mathbb{R}^d)} \leq C_T \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

pour toute paire (p, q) d'exposants admissible, c'est-à-dire : $2 \leq p, q \leq \infty$, $(p, q, d) \neq (2, \infty, 2)$, et

$$\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2}. \quad (2.1.1)$$

Les inégalités de Strichartz peuvent se déduire, via un argument TT^* de l'estimation de dispersion $L^1 - L^\infty$

$$\|e^{it\Delta} u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \lesssim |t|^{-\frac{d}{2}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \quad (2.1.2)$$

Si $\sup_{T>0} C_T < +\infty$, on dira qu'on a à faire à une inégalité de Strichartz globale en temps. Une telle inégalité a été prouvée pour le Laplacien usuel dans $\mathbb{R}^d$ par Strichartz, tandis que des inégalités locales en temps sont connues dans plusieurs contextes géométriques comme le cas d'une variété non piégeante (asymptotiquement Euclidienne, conique, ou hyperbolique), le groupe de Heisenberg ; voir [BT07, Bou11, HTW06, ST02, BGX00] ou pour une équation à coefficients variables dans [RZ05, Tat06]. Le volume fini de la variété et la présence de géodésiques piégées semblent limiter la façon dont la dispersion peut se produire.

La situation pour des variétés compactes présente une nouvelle difficulté, puisque l'exemple d'une donnée initiale constante $u_0 = 1 \in L^2$ soulève une contradiction dans (2.1.2) pour des temps grands.

Burq, Gérard, et Tzvetkov [BGT04b] ainsi que Staffilani et Tataru [ST02] ont prouvé que l'on peut obtenir des inégalités de Strichartz sur des variétés compactes

2.1. Introduction

si on considère une donnée initiale régulière $u_0 \in W^{1/p,2}$. Ces inégalités sont dites “avec perte de dérivées” ($1/p$ ici) :

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^p L^q} \lesssim \|u_0\|_{W^{\frac{1}{p},2}}.$$

Un problème intéressant est de déterminer, dans une situation spécifique donnée, quelle est la perte de dérivées optimale (voir par exemple de travail de Bourgain [Bou93] sur le tore plat, et celui [TT01] de Takaoka et Tzvetkov).

De nombreux travaux récents ont pour but d’obtenir de telles inégalités de Strichartz avec perte de dérivées dans des contextes variés ; par exemple correspondant à un opérateur Laplacien sur un domaine lisse avec une condition de bord (de Dirichlet ou de Neumann) ; voir par exemple les travaux de Anton [Ant08], Blair-Smith-Sogge [BSS08] et Blair-Ford-Herr-Marzuola [BFHM12]. Tous ces travaux sont construits à partir de l’approche pour les variétés compactes de [BGT04b]. Concernant les variétés non compactes, des inégalités de Strichartz avec la même perte de dérivées ont été obtenues dans [BGT04a] par Burq-Gérard-Tzvetkov pour le complémentaire d’un domaine lisse borné dans l’espace Euclidien. Précisons que pour des exposants vérifiant (2.1.1), les deux approches [BGT04b] (pour le cas compact) et [BGT04a] (pour le cas non compact) sont complètement différentes même si elles aboutissent à la même perte de dérivées. En effet dans [BGT04b], la perte n’est due qu’à l’utilisation d’estimations de dispersion semi-classiques, tandis que dans [BGT04a], la perte est due à des injections de Sobolev ainsi qu’à une régularisation locale près du bord. On peut aussi ajouter que dans [BGT04a], les auteurs ont pu contourner la perte de régularité quitte à restreindre la plage des exposants des espaces de Lebesgue en combinant leur technique avec un effet régularisant.

Le cas des variétés infinies (à bord) avec une orbite piégée a été étudié par Christianson dans [Chr08] où une perte de dérivées plus grande ($1/p + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$) est obtenue. L’auteur autorise dans son résultat une perturbation du Laplacien par un potentiel régulier.

On remarque que par injection de Sobolev, la perte de $2/p$ dérivées est directe. En effet lorsque $d(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}) = \frac{2}{p}$, on a par injection de Sobolev : $W^{\frac{2}{p},2} \hookrightarrow L^q$ de sorte que

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^q} \lesssim \|e^{it\Delta}u_0\|_{W^{\frac{2}{p},2}} \leq \|u_0\|_{W^{\frac{2}{p},2}} \quad (2.1.3)$$

et en prenant la norme $L^p([-T, T])$ en temps, on obtient

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^p L^q} \leq C_T \|u_0\|_{W^{\frac{2}{p},2}}.$$

Ainsi la perte éventuelle de dérivées dans les inégalités de Strichartz est intéressante si elle est inférieure à $2/p$.

Le but de ce chapitre est multiple :

- présenter un résultat général avec perte de dérivées dans un cadre général (compact ou non) impliquant un espace métrique muni d'un opérateur auto-adjoint ;
- essayer de comprendre le lien entre le semi-groupe de la chaleur et le groupe unitaire de Schrödinger, à travers l'utilisation d'espace de Hardy et BMO adaptés. De tels espaces permettent de contourner l'estimation de dispersion ponctuelle $L^1 - L^\infty$ et de ne considérer que des estimations $L^2 - L^2$ microlocalisées (en espace et en fréquence) ;
- relier la dispersion (en temps court) pour le groupe de Schrödinger avec la dispersion pour le propagateur des ondes.

Fixons à présent le cadre de travail général dans lequel on place notre étude. Soit (X, d, μ) un espace métrique mesuré de type homogène. C'est-à-dire que d est une distance sur X et μ une mesure de Borel positive et σ -finie qui vérifie la propriété de doublement :

$$\forall x \in X, \forall r > 0, \mu(B(x, 2r)) \lesssim \mu(B(x, r)), \quad (2.1.4)$$

où $B(x, r)$ désigne la boule ouverte de centre $x \in X$ et de rayon $r > 0$. En conséquence de (2.1.4), il existe une dimension homogène $d > 0$ telle que

$$\forall x \in X, \forall r > 0, \forall t \geq 1, \mu(B(x, tr)) \lesssim t^d \mu(B(x, r)). \quad (2.1.5)$$

Ainsi on souhaite donner à nos résultats une portée très générale, en s'appliquant dans de nombreux cas d'espaces métriques tels que des ouverts de $\mathbb{R}^d$, des variétés lisses de dimension d , certains ensembles fractaux, des groupes de Lie, le groupe de Heisenberg, ...

En gardant en tête l'exemple canonique de l'opérateur Laplacien sur $\mathbb{R}^d$: $\Delta = \sum_{1 \leq j \leq d} \partial_j^2$, on sera plus général au sens suivant : on considère un opérateur auto-adjoint positif H sur $L^2 = L^2(X, \mu)$ à domaine dense, c'est-à-dire que son domaine

$$\mathcal{D}(H) := \{f \in L^2, Hf \in L^2\}$$

est supposé dense dans L^2 . On sait qu'alors $-H$ est le générateur d'un semi-groupe L^2 -holomorphe $(e^{-tH})_{t \geq 0}$ (voir Définition 2.2.1 et [Dav97]) et on suppose qu'il satisfait les estimations L^2 de Davies-Gaffney : pour tout $t > 0$ et tous sous-ensembles $E, F \subset X$:

$$\|e^{-tH}\|_{L^2(E) \rightarrow L^2(F)} \lesssim e^{-\frac{d(E,F)^2}{4t}} \quad (DG)$$

2.1. Introduction

(avec la restriction à $t \lesssim \text{diam}(X)$ si X est borné). Sans perdre de généralités (quitte à considérer λH pour un certain réel $\lambda > 0$), on suppose que H satisfait les estimations précédentes normalisées, ce qui est équivalent à la propriété de propagation à vitesse finie du propagateur des ondes associé à vitesse 1 (voir ci-après (2.1.7)).

On supposera aussi que le semi-groupe de la chaleur $(e^{-tH})_{t \geq 0}$ satisfait les estimations diagonales typiques (pour un opérateur du second ordre) : pour tout $t > 0$, l'opérateur e^{-tH} admet un noyau p_t tel que

$$|p_t(x, x)| \lesssim \frac{1}{\mu(B(x, \sqrt{t}))}, \quad \forall t > 0, \text{ p.p. } x \in X. \quad (DUE)$$

Il est usuel que de telles estimations diagonales ponctuelles s'auto-améliorent en les estimations ponctuelles Gaussiennes complètes suivantes (voir [Gri97, Théorème 1.1] ou [CS08, Section 4.2] par exemple) :

$$|p_t(x, y)| \lesssim \frac{1}{\mu(B(x, \sqrt{t}))} \exp\left(-c \frac{d(x, y)^2}{t}\right), \quad \forall t > 0, \text{ p.p. } x, y \in X. \quad (UE)$$

Avant de poursuivre, donnons quelques exemples qui illustrent le fait que (DUE) est une estimations assez courante :

- Il est connu que pour une variété Riemannienne ([Gri97, Théorème 1.1]) ou pour le Laplacien sur un sous-ensemble avec des conditions de bords ([GSC11]), sous de très faibles hypothèses, le noyau de la chaleur satisfait (DUE) et ainsi (UE). C'est aussi le cas pour un semi-groupe engendré par un opérateur elliptique auto-adjoint sous forme divergence $H = -\text{div}(A\nabla)$ sur l'espace Euclidien avec une matrice elliptique réelle bornée A (voir [AT98, Théorème 4]).
- Si $(X_1, \dots, X_n)$ est une famille de champs de vecteurs vérifiant la condition de Hörmander et si $H := -\sum_{i=1}^n X_i^2$, alors, dans le cas des groupes de Lie ou d'une variété Riemannienne à géométrie bornée, le semi-groupe de la chaleur satisfait aussi des estimations Gaussiennes (UE) (voir [Rob91, Théorème 5.14] et [CRTN01, Section 3, Appendice 1]).
- Quand on considère une surface Euclidienne de volume infini avec des singularités coniques munie de son Laplacien H , alors il est prouvé dans [BFHM12, Section 4] que le noyau de la chaleur satisfait des estimations Gaussiennes ponctuelles (UE).

Précisons maintenant pourquoi on place une telle importance sur ces estimations et sur le semi-groupe de la chaleur. L'opérateur considéré H est auto-adjoint donc admet un calcul fonctionnel C^∞ , ce qui nous permet de contrôler

$\|\phi(H)\|_{L^p \rightarrow L^p}$ pour une fonction régulière ϕ . De telles estimations peuvent être obtenues comme expliqué dans l'Appendice de [IP08] comme une conséquence des estimations Gaussiennes ponctuelles (UE) sur le noyau de la chaleur. De plus, on souhaite utiliser des techniques d'extrapolation (pour passer d'estimations de dispersion micro-localisées $L^2 - L^2$ à des estimations $L^p - L^{p'}$) ce qui requiert des informations locales, comme des estimations hors diagonales de certains opérateurs. De telles informations locales pourraient être transférées de celle sur le semi-groupe de la chaleur par un calcul fonctionnel C^∞ , (voir [KU15] par exemple). Cependant, cela demande de traiter toute une classe de fonction C^∞ (à support compact) avec des normes adaptés... Pour une lecture plus aisée, et une méthode qui nous apparaît plus intrinsèque, on fait le choix de ne travailler qu'avec le semi-groupe et ses dérivées temporelles. On renvoie le lecteur à la Remarque 2.2.6 pour l'équivalence entre ces deux points de vue.

Finalement, nous aimerions mentionner que l'on suppose l'opérateur H auto-adjoint pour garantir certaines propriétés utiles. Cependant, l'approche que nous développons pourrait s'étendre à un opérateur non auto-adjoint H , si tant est que l'on peut définir le groupe de Schrödinger $(e^{itH})_{t \in \mathbb{R}}$ ainsi que le propagateur des ondes avec une propriété de propagation à vitesse finie. Dans un tel cadre, un calcul fonctionnel C^∞ n'est plus disponible et il est donc important d'utiliser uniquement un calcul fonctionnel sectoriel comme on le fait ici.

Motivés par ce programme, on décide de ne travailler qu'avec un calcul fonctionnel holomorphe associé à l'opérateur H et plus précisément, on verra que notre étude repose sur un calcul fonctionnel (sectoriel) impliquant uniquement le semi-groupe de la chaleur et ses dérivées en temps (qui pourrait s'écrire en terme de calcul fonctionnel C^∞ , voir Remarque 2.2.6).

De plus, on garde à l'esprit la question générale suivante : quelles hypothèses sur le semi-groupe de la chaleur $(e^{-tH})_{t \geq 0}$ impliqueraient des estimations de dispersion et des inégalités de Strichartz (avec une possible perte de dérivées) pour le groupe unitaire de Schrödinger $(e^{-itH})_{t \in \mathbb{R}}$? Une telle question est naturelle puisque l'application $z \mapsto e^{-zH}$ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\}$. Des informations sur la dispersion pour le groupe de Schrödinger devraient donc être reliées à certaines bonnes propriétés du noyau de la chaleur.

Dans la première partie de ce chapitre, on étudie cette question, en autorisant une perte de dérivées, comme dans [BGT04b], en proposant une nouvelle approche, reliée au semi-groupe de la chaleur et à l'utilisation des espaces Hardy-BMO associés au semi-groupe. Il est à noter que l'approche que nous proposons donne une façon "unifiée" de prouver des inégalités de Strichartz avec perte de dérivées pour les variétés compactes et non compactes.

Expliquons brièvement l'étude des espaces de Hardy et BMO associés à un tel

semi-groupe de la chaleur. Les espaces de Hardy H^1 (aussi appelé de Coifman-Weiss [CW77]) et BMO usuels (introduits par John et Nirenberg dans [JN61]) apparaissent naturellement (d'un point de vue de l'Analyse Harmonique) comme une "limite", une "extension", de l'échelle des espaces de Lebesgue $(L^p)_{1 < p < \infty}$ lorsque $p \rightarrow \infty$ (pour BMO) et $p \rightarrow 1$ (pour H^1). En effet, ces deux espaces ont certaines propriétés utiles qui font défauts aux espace critiques L^1 et L^∞ , comme une caractérisation de Fourier, la dualité, la continuité de certaines fonctions maximales ou d'opérateurs de Calderón-Zygmund, ainsi que l'équivalence entre différentes définitions. . . Même si BMO contient strictement L^∞ et que H^1 est strictement inclus dans L^1 , ces espaces vérifient tout de même un résultat très pratique d'interpolation : H^1 et BMO s'interpolent avec les espaces de Lebesgue L^p , $1 < p < \infty$ et les espaces intermédiaires sont les espaces de Lebesgue intermédiaires correspondants.

Cependant, il y a certaines situations où ces espaces H^1 et BMO ne sont pas les bons substituts à L^1 ou L^∞ (par exemple on peut montrer que la transformée de Riesz n'est pas bornée de H^1 dans L^1) et il y a eu récemment de nombreux travaux dont le but est de définir des espaces de Hardy et BMO adaptés au contexte d'un semi-groupe (voir [Aus07, ACDH04, Ber10, BZ08, BZ12, DY05a, DY05b, HM09]). Dans [Ber10, BZ08], Bernicot et Zhao ont décrit une théorie très abstraite pour les espaces de Hardy (construits via une décomposition atomique) et ont obtenu des résultats d'interpolation avec les espaces de Lebesgue. L'idée principale de leur construction est de considérer l'oscillation donnée par le semi-groupe à la place de l'oscillation classique donnée par des opérateurs de moyenne. Depuis, ces espaces de Hardy et BMO ont été intensivement étudiés ces dernières années (voir les références ci-dessus) et il est maintenant connu qu'on peut espérer une bonne propriété d'interpolation pour ces espaces. On renvoie à la Section 2.2.4 et aux références ci-dessus pour des définition précises et plus de détail sur cette théorie.

En gardant toujours à l'esprit de relier le semi-groupe de la chaleur avec le propagateur de Schrödinger, On souhaite prouver une estimation de dispersion $H^1 - \text{BMO}$, en utilisant des espaces associés au semi-groupe. Même si l'on perd l'estimation limite $L^1 - L^\infty$, par interpolation on sait que l'on pourra au moins recouvrir les estimations de dispersion intermédiaires $L^p - L^{p'}$. De plus, une telle approche a l'avantage de ne pas requérir d'estimations ponctuelles sur le propagateur de Schrödinger. On voudrait faire remarquer qu'une approche par une telle estimation Hardy-BMO a déjà été utilisée dans [MT12, Tay09] pour obtenir des estimations dispersives, mais les auteurs avaient considéré les espaces classiques, et non ceux associés au semi-groupe de la chaleur.

Il nous semble que la combinaison des estimations de dispersion et des espaces $H^1 - \text{BMO}$ associés au semi-groupe de la chaleur est une problématique nouvelle. Du fait de la nouveauté d'une telle approche, on la décrit dans un premier temps dans un cadre très général en introduisant la notion suivante : on dit qu'un opéra-

teur T borné sur L^2 vérifie la Propriété $(H_m(A))$ pour un certain entier $m \geq 0$ et une constante A (qui a vocation à valoir $|t|^{-\frac{d}{2}}$ dans les applications aux estimées dispersives), si pour tout $r > 0$ (et $r \lesssim \text{diam}(X)$ si X est borné)

$$\|T\psi_m(r^2H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B}_r)} \lesssim A\mu(B_r)^{\frac{1}{2}}\mu(\widetilde{B}_r)^{\frac{1}{2}} \quad (H_m(A))$$

où B_r et $\widetilde{B}_r$ sont deux boules quelconques de rayon r et $\psi_m(x) := x^m e^{-x}$.

Sous un certain contrôle uniforme, par une borne inférieure, du volume des boules : il existe $\nu > 0$ tel que

$$\forall x \in X, \forall r \lesssim \min(1, \text{diam}(X)), \quad r^\nu \lesssim \mu(B(x, r)), \quad (2.1.6)$$

on prouve le théorème suivant :

Théorème 2.1.1. *Supposons (2.1.5), (2.1.6) et (DUE). Soit T un opérateur auto-adjoint borné sur L^2 (avec $\|T\|_{L^2 \rightarrow L^2} \lesssim 1$), qui commute avec H et qui vérifie la Propriété $(H_m(A))$ pour un certain $m \geq \frac{d}{2}$. Alors T est borné de H^1 dans BMO et de L^p dans $L^{p'}$ pour tout $p \in (1, 2)$ avec*

$$\|T\|_{H^1 \rightarrow BMO} \lesssim A \quad \text{et} \quad \|T\|_{L^p \rightarrow L^{p'}} \lesssim A^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}}$$

si l'espace ambiant X est non borné et

$$\|T\|_{H^1 \rightarrow BMO} \lesssim \max(A, 1) \quad \text{et} \quad \|T\|_{L^p \rightarrow L^{p'}} \lesssim \max(A^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}}, B)$$

si X est borné, et où, pour la dernière inégalité, on a supposé de plus que $\|T\|_{L^p \rightarrow L^2} \lesssim B$.

De cette façon, on peut réduire les estimations de dispersion $L^p - L^{p'}$ à des estimations micro-localisées $L^2 - L^2$ (localisées en fréquences à l'échelle $1/r$ par les opérateurs $\psi_m(r^2H)$ et dans l'espace physique à l'échelle r à travers les boules B_r et $\widetilde{B}_r$, respectant ainsi le principe d'incertitude de Heisenberg).

Il est à noter que la Propriété $(H_m(A))$ est plus faible qu'une estimation $L^1 - L^\infty$. En effet si T est continu de L^1 dans L^∞ avec une borne de continuité inférieure à A , alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne la Propriété $(H_m(A))$ de la façon suivante : pour toutes boules B_r et $\widetilde{B}_r$ de rayon r et $f \in L^2(B_r)$, on a

$$\begin{aligned} \|T\psi_m(r^2H)f\|_{L^2(\widetilde{B}_r)} &\leq A\|\psi_m(r^2H)f\|_{L^1}\mu(\widetilde{B}_r)^{1/2} \\ &\lesssim A\mu(\widetilde{B}_r)^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^1(B_r)} \\ &\leq A\mu(\widetilde{B}_r)^{\frac{1}{2}}\mu(B_r)^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2(B_r)}. \end{aligned}$$

Pour la continuité $L^1 - L^1$ de l'opérateur $\psi_m(r^2H)$ utilisé ici, on renvoie au Corollaire 2.2.4.

2.1. Introduction

Notre but est d'obtenir l'estimation de dispersion

$$\|T_t(H)\|_{H^1 \rightarrow \text{BMO}} \lesssim |t|^{-\frac{d}{2}},$$

où $T_t(H) = e^{itH}\psi_m(h^2H)$, $h > 0$. Le cas $|t| \leq 1$ (c'est-à-dire t indépendant de h) est le plus difficile. Cependant, le cas $|t| \leq h^2$ est direct : en effet, pour $m = 0$ ($m \neq 0$ s'en déduisant facilement comme on le montrera par la suite) on a $T_t(H) = e^{itH}e^{-h^2H} = e^{-zH}$ où $z = h^2 - it$. L'observation clé est que $|z| = \sqrt{h^4 + t^2} \lesssim h^2 = \text{Re}(z)$. Ainsi (le temps complexe z appartenant à un secteur loin de l'axe des complexes imaginaires purs), par analyticité, la Propriété (UE) peut s'étendre au semi-groupe à temps complexe et donner

$$\|T_t(H)\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} \leq \frac{1}{\text{Re}(z)^{\frac{d}{2}}} \lesssim \frac{1}{|z|^{\frac{d}{2}}} \leq \frac{1}{|t|^{\frac{d}{2}}}.$$

Donc l'estimation complète $L^1 - L^\infty$ (et la Propriété ($H_m(A)$) qui en découle, comme on vient de le voir) est évidemment satisfaite lorsque $|t| \leq h^2$.

Le cas intermédiaire $h^2 \leq |t| \leq h$ est étudié dans le contexte particulier des variétés Riemanniennes compactes dans [BGT04b] ainsi que les inégalités de Strichartz avec perte (non triviale) de dérivées associées. On s'intéressera à cette situation, et nous décriront comment les estimations dispersives impliquent les inégalités de Strichartz dans un cadre si général (voir Théorème 2.4.5).

Notre étude a aussi pour vocation de mettre en lumière le lien entre le semi-groupe de la chaleur et l'opérateur des ondes. Dans la seconde partie de ce chapitre (à partir de la Section 2.5) notre objectif est d'étudier quelles propriétés de dispersion sur l'équation des ondes est suffisante pour assurer l'hypothèse ($H_m(A)$) pour $T = e^{itH}\psi_m(h^2H)$, afin de retrouver des estimations de dispersion qui mènent à des inégalités de Strichartz pour le groupe unitaire de Schrödinger. On s'intéresse au propagateur des ondes au temps t , $\cos(t\sqrt{H})$, qui est défini comme suit : pour tout $f \in L^2$, $u(t) := t \mapsto \cos(t\sqrt{H})f$ est l'unique solution du problème linéaire des ondes suivant :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + Hu = 0 \\ u|_{t=0} = f \\ \partial_t u|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

On peut trouver des solutions explicites à ce problème dans [Fol95] pour le cas Euclidien, et dans [Bér77] pour le cas d'une variété Riemannienne grâce à une formulation précise du noyau du propagateur des ondes. La propriété remarquable de cet opérateur vient de sa propagation à vitesse finie. On sait que les estimations de Davies-Gaffney (DG) impliquent (et sont en fait équivalentes ([CS08, Théorème 3.4]) à la propriété de propagation à vitesse finie (vitesse 1), à savoir : pour tous

sous-ensembles ouverts disjoints $U_1, U_2 \subset X$, toutes fonctions $f_i \in L^2(U_i)$, $i = 1, 2$, alors

$$\forall 0 < t < d(U_1, U_2), \quad \langle \cos(t\sqrt{H})f_1, f_2 \rangle = 0. \quad (2.1.7)$$

Si $\cos(t\sqrt{H})$ est un opérateur intégral de noyau K_t , alors (2.1.7) signifie simplement que K_t est supporté dans le “cône de lumière”

$$\mathcal{D}_t := \{(x, y) \in X^2, d(x, y) \leq t\}.$$

Pour appliquer le Théorème 2.1.1 dans le but d’obtenir des estimations dispersives, on doit d’abord prouver que le propagateur de Schrödinger satisfait la Propriété $(H_m(A))$ pour une certaine constante A . La formule suivante (voir Section 2.5) : pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$:

$$e^{-zH} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos(s\sqrt{H}) e^{-\frac{s^2}{4z}} \frac{ds}{\sqrt{z}},$$

nous permet de décrire le lien entre le propagateur de Schrödinger et le propagateur des ondes.

On aura besoin d’hypothèses supplémentaires (plus forte que la seule propagation à vitesse finie) pour être capable de vérifier $(H_m(A))$. Plus précisément, on fait l’hypothèse de dispersion $L^2 - L^2$ en temps court suivante :

Hypothèse 2.1.2. *Il existe $\kappa \in (0, \infty]$ et un entier m_0 tels que pour tout $s \in (0, \kappa)$ on a : pour tout $r > 0$, et toutes boules $B_r, \widetilde{B}_r$ de rayon r , alors*

$$\|\cos(s\sqrt{H})\psi_{m_0}(r^2H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B}_r)} \lesssim \left(\frac{r}{s+r}\right)^{\frac{d-1}{2}} \left(1 + \frac{|L-s|}{r}\right)^{-\frac{d+1}{2}},$$

où $L = d(B_r, \widetilde{B}_r)$.

Pour montrer notre second théorème, nous supposons la propriété de régularité supplémentaire suivante sur la mesure :

Hypothèse 2.1.3. *On suppose que la mesure μ est Ahlfors régulière : c’est-à-dire qu’il existe deux constantes positives c et C telles que pour tous $x \in X$ et $r > 0$:*

$$cr^d \leq \mu(B(x, r)) \leq Cr^d. \quad (2.1.8)$$

On montre alors le deuxième résultat principal de ce chapitre :

Théorème 2.1.4. *Supposons (2.1.8) avec $d > 1$, (DUE) et l’Hypothèse 2.1.2 pour $\kappa \in (0, \infty]$. Alors pour tout entier $m \geq \max(\frac{d}{2}, m_0 + \lceil \frac{d-1}{2} \rceil)$ on a :*

2.1. Introduction

- si $\kappa = +\infty$, alors le propagateur e^{itH} satisfait la Propriété $(H_m(|t|^{-\frac{d}{2}}))$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ et on obtient des inégalités de Strichartz sans perte de dérivées ;
- si $\kappa < +\infty$, alors pour tous $0 < \varepsilon < 1$, et $0 < h \leq 1$ avec $h^2 \leq |t| \leq h^{1+\varepsilon}$ et tout entier $m' \geq 0$, le propagateur $e^{itH}\psi_{m'}(h^2H)$ satisfait la Propriété $(H_m(|t|^{-\frac{d}{2}}))$ et on obtient des inégalités de Strichartz avec une perte de $\frac{1+\varepsilon}{p}$ dérivées.

Il est important de noter que, dans la preuve, la même approche soulève deux cas :

- $\kappa < +\infty$ qui mène à des inégalités de Strichartz locales en temps avec perte de dérivées ;
- $\kappa = +\infty$ qui mène à des inégalités de Strichartz globales en temps sans perte de dérivées.

Le contexte général dans lequel nous avons placé notre démarche nous permet d'appliquer ce résultat à de nombreuses situations. Par exemple, l'Hypothèse 2.1.2 est vérifiée pour une variété Riemannienne lisse compacte avec κ donné par le rayon d'injectivité et dans le cas Euclidien avec $\kappa = \infty$ (ou une perturbation lisse du Laplacien dans le cas Euclidien et dans ce cas $\kappa < \infty$).

Un autre exemple est celui de l'espace Euclidien muni d'un opérateur sous forme divergence $H = -\operatorname{div} A \nabla$, où A est une matrice à coefficients $C^{1,1}$ (dérivables dont les premières dérivées sont lipschitziennes). Alors Smith a construit une parametrix en temps court [Smi06] de l'équation des ondes correspondante (voir aussi les travaux de Blair [Bla06]), qui assure en particulier que notre Hypothèse 2.1.2 est vérifiée pour un certain $\kappa < \infty$. En conséquence, on en déduit que la solution de l'équation de Schrödinger associée vérifie des inégalités de Strichartz avec pertes de $\frac{1+\varepsilon}{p}$ dérivées pour tout $\varepsilon > 0$.

De plus, les propriétés de la mesure spectrale (plus particulièrement l'estimation de dispersion microlocalisée de la Proposition 3.3 de [Zha15]) obtenues par Zhang permettent de retrouver l'Hypothèse 2.1.2 avec $\kappa = +\infty$ et ainsi de disposer d'une nouvelle démonstration du résultat de Hassel-Zhang dans [HZ16], à savoir : des inégalités de Strichartz globales en temps sans perte de dérivées pour équation posée sur une variété Riemannienne asymptotiquement conique non piégeante (on ne retrouve cependant pas le cas $q = \infty$ qui est exclu par notre méthode).

De cette façon, on propose une méthode unique pour traiter à la fois des situations compactes ou non compactes et on retrouve (à une perte ε près aussi petite que l'on veut) les inégalités de Strichartz avec perte de dérivées pour le cas des variétés lisse compactes de [BGT04b, ST02] et les inégalités de Strichartz complètes dans le cas Euclidien et des variétés non piégeantes. Même si les estimées obtenues

n'améliorent pas celles déjà connues dans la littérature (qui sont déjà optimales pour certaines), nos résultats si situent dans une bien plus grande généralité et proviennent uniquement d'une méthode nouvelle reposant sur le semi-groupe de la chaleur. De plus, le lien entre la dispersion pour l'équation des ondes, et la dispersion pour l'équation de Schrödinger n'était, à notre connaissance, pas connu dans une si grande généralité.

Le plan de ce chapitre est le suivant : Dans la Section 2.2 on donne d'abord les notations et définitions utiles au reste du chapitre. Ensuite, on décrit les hypothèses requises sur le semi-groupe de la chaleur $(e^{-tH})_{t \geq 0}$ ainsi que certaines propriétés de base à propos des espaces de Hardy et BMO et du calcul fonctionnel associé à H . Le Théorème 2.1.1 est démontré dans la Section 2.3 et on l'applique en Section 2.4 pour prouver les inégalités de Strichartz (avec une possible perte de dérivées). La Section 2.5 montre le Théorème 2.1.4, et enfin la section Section 2.6 comment l'Hypothèse $(H_m(A))$ peut s'obtenir à partir d'une parametrix en temps court de l'opérateur des ondes.

2.2 Définitions et préliminaires

2.2.1 Notations

Pour une boule ouverte $B(x, r)$ de X ($x \in X$ et $r > 0$) et un paramètre $\lambda > 0$, on note $\lambda B(x, r) := B(x, \lambda r)$ la boule dilatée et concentrique. Une des conséquences de la propriété de doublement (2.1.4) est qu'on peut recouvrir une boule $B(x, \lambda r)$ par $C\lambda^d$ boules de rayon r , uniformément en $x \in X$, $r > 0$ et $\lambda > 1$ (C ne dépendant que de la constante de doublement). De plus, le volume des boules admet le comportement suivant :

$$\mu(B(y, r)) \lesssim \left(1 + \frac{d(x, y)}{r}\right)^d \mu(B(x, r)) \quad (2.2.1)$$

uniformément en tous $x, y \in X$ et $r > 0$.

Pour une boule Q et un entier $i \geq 1$, on note $C_i(Q)$ la $i^{\text{ème}}$ couronne dyadique autour de Q :

$$C_i(Q) := 2^i Q \setminus 2^{i-1} Q.$$

On note $C_0(Q) := Q$.

Si aucune confusion n'est possible, on notera L^p à la place de $L^p(X, \mu)$ pour $p \in [1, \infty]$. On utilisera la notation $u \lesssim v$ pour dire qu'il existe une constante C (indépendante des paramètres importants du problèmes) telle que $u \leq Cv$; on notera $u \simeq v$ lorsque $u \lesssim v$ et $v \lesssim u$.

Si Ω est un ensemble, $\mathbb{1}_\Omega$ est la fonction caractéristique de Ω , définie par

$$\mathbb{1}_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega \end{cases}.$$

La fonction maximale de Hardy-Littlewood est notée $\mathcal{M}$ et est définie pour tout $x \in X$ et toute fonction $f \in L^1_{loc}$ par :

$$\mathcal{M}(f)(x) := \sup_{\substack{B \text{ boule} \\ x \in B}} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| d\mu \right) = \sup_{\substack{B \text{ boule} \\ x \in B}} \int_B |f| d\mu.$$

Puisque l'espace est de type homogène, on sait que cet opérateur maximal est borné sur chaque espace L^p , pour tout $p \in (1, \infty]$.

2.2.2 Le semi-groupe de la chaleur et le calcul fonctionnel associé

On rappelle la définition d'un semi-groupe L^2 -holomorphe :

Définition 2.2.1. Une famille d'opérateurs $(S(z))_{\operatorname{Re}(z) \geq 0}$ de $\mathcal{L}(L^2)$ est un semi-groupe holomorphe sur L^2 si (en notant $\Gamma := \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$) :

1. $S(0) = id$;
2. $\forall z_1, z_2 \in \Gamma, S(z_1 + z_2) = S(z_1) \circ S(z_2)$;
3. $\forall f \in L^2, \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \Gamma}} \|S(z)f - f\|_{L^2} = 0$.
4. $\forall f, g \in L^2$, l'application $z \mapsto \langle S(z)f, g \rangle$ est holomorphe sur l'intérieure $\overset{\circ}{\Gamma}$.

On rappelle le théorème de calcul fonctionnel borné de [RS72] :

Théorème 2.2.2. Si H est un opérateur auto-adjoint positif, il admet un calcul fonctionnel L^∞ , c'est-à-dire : si $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, alors on peut considérer l'opérateur $f(H)$ en tant qu'opérateur borné sur L^2 et

$$\|f(H)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \|f\|_{L^\infty}.$$

Pour un entier $m \geq 1$ et un nombre réel $n > 0$, on pose $\psi_{m,n}(x) = x^m e^{-nx}$ et $\psi_m := \psi_{m,1}$. Ces fonctions lisses $\psi_{m,n} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^+)$, s'annulent en 0 et à l'infini. De plus $\|\psi_{m,n}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \lesssim 1$. Le théorème précédent nous permet donc de considérer les opérateurs $\psi_{m,n}(tH)$ pour tous $t \geq 0$, $m \in \mathbb{N}$, et $n > 0$.

Des estimations Gaussiennes du noyau de la chaleur (UE) et par analyticité du semi-groupe (voir [Dav97, Corollaire 5] ou [CCO02]) on obtient que pour tout entier $m \in \mathbb{N}$ et tout $n > 0$, l'opérateur $\psi_{m,n}(tH)$ admet un noyau $p_{m,n,t}$ vérifiant lui aussi les estimations Gaussiennes :

$$|p_{m,n,t}(x, y)| \lesssim \frac{1}{\mu(B(x, \sqrt{t}))} \exp\left(-c \frac{d(x, y)^2}{t}\right), \quad \forall t > 0, \text{ p.p. } x, y \in X. \quad (2.2.2)$$

On donne maintenant quelques résultats de base sur le semi-groupe de la chaleur sous nos hypothèses.

Proposition 2.2.3. *Si (2.1.5) et (UE) sont vérifiées, alors le semi-groupe de la chaleur est ponctuellement borné par l'opérateur maximal de Hardy-Littlewood et est uniformément borné dans chaque espace L^p pour tout $p \in [1, \infty]$: pour toute fonction localement intégrable f et tout $x_0 \in X$, on a*

$$\sup_{t>0} \|e^{-tH} f\|_{L^\infty(B(x_0, \sqrt{t}))} \lesssim \mathcal{M}(f)(x_0) \quad \text{et} \quad \sup_{t>0} \|e^{-tH} f\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p}.$$

Démonstration. La majoration ponctuelle par l'opérateur maximal est une conséquence directe de (UE) et de la propriété de doublement (2.1.5). En conséquence, le type fort (p, p) de l'opérateur maximal implique la borne uniforme du semi-groupe de la chaleur sur tous les L^p pour $p > 1$. Il reste à vérifier le cas $p = 1$. Par (UE), on a :

$$\begin{aligned} & \int_{x \in X} |e^{-tH} f(x)| d\mu(x) \\ & \lesssim \int_{x \in X} \int_{y \in X} \frac{1}{\mu(B(x, \sqrt{t}))} e^{-c \frac{d(x, y)^2}{t}} |f(y)| d\mu(y) d\mu(x) \\ & \lesssim \int_{y \in X} |f(y)| \frac{1}{\mu(B(y, \sqrt{t}))} \int_{x \in X} \left(1 + \frac{d(x, y)}{\sqrt{t}}\right)^d e^{-c \frac{d(x, y)^2}{t}} d\mu(x) d\mu(y). \end{aligned}$$

Une décomposition en couronnes dyadiques autour de $B(y, \sqrt{t})$ nous permet de contrôler l'intégrale sur x :

$$\begin{aligned} & \int_{B(y, \sqrt{t})} \left(1 + \frac{d(x, y)}{\sqrt{t}}\right)^d e^{-c \frac{d(x, y)^2}{t}} d\mu(x) + \\ & \sum_{j \geq 1} \int_{C_j(B(y, \sqrt{t}))} \left(1 + \frac{d(x, y)}{\sqrt{t}}\right)^d e^{-c \frac{d(x, y)^2}{t}} d\mu(x) \\ & \leq 2^d \mu(B(y, \sqrt{t})) + \sum_{j \geq 1} (1 + 2^j)^d e^{-c 2^{2j}} \mu(B(y, 2^j \sqrt{t})) \\ & \lesssim \left(2^d + \sum_{j \geq 1} (1 + 2^j)^d 2^{jd} e^{-c 2^{2j}}\right) \mu(B(y, \sqrt{t})) \lesssim \mu(B(y, \sqrt{t})), \end{aligned}$$

2.2. Définitions et préliminaires

où la dernière inégalité résulte de la propriété de doublement de μ . D'où, uniformément en $t > 0$,

$$\|e^{-tH}\|_{L^1 \rightarrow L^1} \lesssim 1.$$

□

Corollaire 2.2.4. *Pour $m \in \mathbb{N}$ et $n > 0$, puisque $\psi_{m,n}(tH)$ vérifie aussi (UE), on en déduit que les opérateurs $\psi_{m,n}(tH)$ satisfont aussi les mêmes estimées.*

On liste ici quelques propriétés basiques à propos des fonctions $\psi_{m,n}$:

Proposition 2.2.5. (a) *pour tous $k \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}$ et $n > 0$, on a $\psi_{km,kn} = (\psi_{m,n})^k$;*
(b) *pour tous $m, m' \in \mathbb{N}$ et $n, n', u, v > 0$:*

$$\psi_{m,n}(u \cdot) \psi_{m',n'}(v \cdot) = \frac{u^m v^{m'}}{(nu + n'v)^{m+m'}} \psi_{m+m',1}((nu + n'v) \cdot);$$

(c) *pour tout $r > 0$ et tout $f \in L^2$:*

$$(1 - e^{-r^2 H})f = \int_0^{r^2} H e^{-sH} f ds = \int_0^{r^2} \psi_{1,1}(sH) f \frac{ds}{s};$$

(d) *si $m \in \mathbb{N}^*$, $n > 0$ et $f \in L^2$, alors*

$$\left(\int_0^{+\infty} \|\psi_{m,n}(vH)f\|_{L^2}^2 \frac{dv}{v} \right)^{\frac{1}{2}} + \|P_{N(H)}f\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{L^2};$$

où $P_{N(H)}$ est le projecteur sur le noyau de H : $N(H) := \{f \in L^2 \cap \mathcal{D}(H), Hf = 0\}$.

(e) *pour $m \in \mathbb{N}^*$, $n > 0$, à une constante $c_{m,n}$ près, on a la décomposition (formule reproduisante de Calderón) :*

$$Id = c_{m,n} \int_0^{+\infty} \psi_{m,n}(sH) \frac{ds}{s} + P_{N(H)}.$$

Démonstration. (a), (b), (c) et (e) découle d'un calcul directe. (d) est classique et une directe application de (e) avec la presque orthogonalité des opérateurs $\psi_{m,n}(vH)$: pour tous $u, v > 0$

$$\|\psi_{m,n}(uH)\psi_{m,n}(vH)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \lesssim \min\left(\frac{u}{v}, \frac{v}{u}\right)^m;$$

pour laquelle on renvoie à [BBR12] par exemple.

□

Il est crucial de garder à l'esprit que, par le calcul fonctionnel holomorphe, l'item (e) donne une décomposition de l'identité, la formule reproduisante de Calderón :

$$Id = c_{m,n} \int_0^\infty \psi_{m,n}(sH) \frac{ds}{s} + P_{N(H)},$$

qui doit être interprétée comme une version lisse de la décomposition spectrale. En effet, les opérateurs $\psi_{m,n}(sH)$ jouent le rôle d'une version régularisée des projecteurs $\mathbb{1}_{[s^{-1}, 2s^{-1}]}(H)$.

Remarque 2.2.6. *On voudrait insister sur le fait que l'utilisation des fonctions $\psi_{m,n}$ est exactement équivalente à l'utilisation des fonction lisses à support compact (fonctions “cut-off”). En effet, il est facile par une partition lisse de l'unité de construire $\psi_{m,n}$ par une série absolument convergente de fonctions “cut-off” C^∞ à support compact. Par calcul fonctionnel, on sait aussi comment construire une fonction C^∞ à support compact par la résolvante de H (en utilisant le semi-groupe), et ainsi par les fonctions $\psi_{m,n}$ (voir [IP08, Appendice] ou [KU15] par exemple).*

On a choisit de ne travailler qu'avec les fonctions $\psi_{m,n}$ pour mettre en lumière les liens entre les estimations de dispersion et le semi-groupe de la chaleur, et aussi pour s'éviter le calcul de différentes normes que l'on doit considérer avec les espaces C^∞ .

2.2.3 Fonctionnelles quadratiques et espaces de Sobolev associés au semi-groupe

On définit les outils utiles au prochain théorème, pour tout $\lambda > 0$:

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &:= \int_\lambda^{+\infty} \psi_{m,n}(u) \frac{du}{u}, \\ \tilde{\varphi}(\lambda) &:= \int_0^\lambda \psi_{m,n}(v) \frac{dv}{v} = \int_0^1 \psi_{m,n}(\lambda u) \frac{du}{u}. \end{aligned}$$

Remarque 2.2.7. *On remarque que, par intégration par parties, φ est une combinaison linéaire finie de fonctions $\psi_{k,\ell}$ pour $k \in \{0, \dots, m\}$ et $\ell > 0$. De plus pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$,*

$$\tilde{\varphi}(\lambda) + \varphi(\lambda) = \int_0^{+\infty} u^{m-1} e^{-nu} du = \frac{\Gamma(m)}{n^m} := c_{m,n}.$$

Le théorème suivant est utile pour estimer des normes L^p à travers le semi-groupe de la chaleur.

2.2. Définitions et préliminaires

Théorème 2.2.8. *Supposons (2.1.5) et (DUE). Pour tout entier $m \geq 1$, tout réel $n > 0$ et tout $p \in (1, \infty)$, on a*

$$\|f\|_{L^p} \simeq \|\varphi(H)f\|_{L^p} + \left\| \left(\int_0^1 |\psi_{m,n}(uH)f|^2 \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}.$$

Donc, si $q \geq 2$:

$$\|f\|_{L^q} \lesssim \|\varphi(H)f\|_{L^q} + \left(\int_0^1 \|\psi_{m,n}(uH)f\|_{L^q}^2 \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Un tel résultat peut se voir comme une version semi-groupe de la caractérisation de Littlewood-Paley des espaces de Lebesgue.

Démonstration. On donne une esquisse de la preuve (et renvoie à [Aus07, Chapitre 6, Théorème 6.1] et [BBR12, Proposition 2.12] pour plus de détails, et où il est prouvé que de telles inégalités sont valables pour tout p appartenant à une plage d'exposants dictée par le semi-groupe de la chaleur $(e^{-tH})_{t \geq 0}$; qui est $(1, \infty)$ ici). On veut étudier la continuité de la fonctionnelle quadratique

$$T: f \mapsto \left(\int_0^1 |\psi_{m,n}(s^2H)f|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

T est une fonctionnelle carrée horizontale (ou une fonction g de Littlewood-Paley-Stein), et sa continuité sur les L^p est bien connu par la théorie du calcul fonctionnel (voir [Ste70], [Med95] et les autres références du chapitre) lorsque le semi-groupe est sous-markovien et conservatif.

On voudrait rapidement donner une autre approche (plus analytique) de cette continuité, qui ne requiert pas d'être sous-markovien ou conservatif, mais qui repose par contre sur les estimations Gaussiennes (UE). On veut appliquer le théorème d'extrapolation [Aus07, Théorème 1.1] ou de [BZ08] à T avec $p_0 = 1$. Pour garder les mêmes notations que [Aus07] on rappelle que

$$A_r := Id - (Id - e^{-r^2H})^M \quad \text{et} \quad B_r := Id - A_r = (Id - e^{-r^2H})^M,$$

avec M un entier assez grand. Tout d'abord, par le calcul fonctionnel holomorphe L^2 , on sait que T est borné sur L^2 (voir [BBR12] par exemple). On doit maintenant vérifier les deux hypothèses principales de [Aus07, Théorème 1.1].

En développant, A_r se comporte comme e^{-r^2H} , au sens où il admet un noyau qui vérifie des estimations Gaussiennes à l'échelle r . Notons B une boule de rayon

r , et f une fonction supportée dans B . Pour tout $j \geq 1$ et tout $x \in C_j(B)$, on a

$$\begin{aligned} |A_r f(x)| &\lesssim \int_B \frac{1}{\mu(B(x, r))} e^{-c \frac{d(x, y)^2}{r^2}} |f(y)| d\mu(y) \\ &\lesssim \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_B e^{-c 2^{2j}} |f| d\mu. \end{aligned}$$

Si z désigne le centre de la boule B , alors par la propriété de doublement (2.2.1) de la mesure, on a

$$\mu(B) \lesssim \left(1 + \frac{d(z, x)}{r}\right)^d \mu(B(x, r)),$$

de sorte que

$$\mu(B(x, r))^{-1} \lesssim \left(1 + \frac{d(z, x)}{r}\right)^d \mu(B)^{-1} \lesssim 2^{jd} \mu(B)^{-1},$$

où on a utilisé que $z \in B$ et $x \in C_j(B)$ impliquent $d(z, x) \lesssim 2^j r$. D'où

$$\left(\frac{1}{\mu(2^{j+1}B)} \int_{C_j(B)} |A_r f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim g(j) \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| d\mu,$$

avec $g(j) \lesssim e^{-c 4^j} 2^{jd}$ vérifiant

$$\sum_j g(j) 2^{dj} < +\infty.$$

C'est la première hypothèse de [Aus07, Théorème 1.1]. On tient à faire remarquer que l'on reproduira souvent ce genre de raisonnement en effectuant un découpage de l'espace en couronnes dyadiques et en utilisant les estimations Gaussiennes du noyau de la chaleur pour obtenir les estimations souhaitées.

La deuxième (et dernière) hypothèse de [Aus07, Théorème 1.1] a été affaiblie dans [BZ08] et il suffit de vérifier que pour tout $j \geq 2$:

$$\left(\frac{1}{\mu(2^{j+1}B)} \int_{C_j(B)} |T(B_r f)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \leq g(j) \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f|^2 d\mu \right)^{1/2}.$$

On renvoie le lecteur à [Aus07, Étape 3, item 1, Théorème 6.1] et aussi [CDL03] et [ACDH04], où de telles inégalités sont prouvées, et les arguments de la démonstration ne reposent que sur les inégalités de Davies-Gaffney (DG) pour $\psi_{m,n}(tH)$.

Ainsi, on peut appliquer [Aus07, Théorème 1.1] et en déduire que la fonctionnelle carrée T est bornée sur L^p pour tout $p \in (1, 2]$. Pour $p > 2$, on doit appliquer

[Aus07, Théorème 1.2] et ce raisonnement est aussi détaillé dans [Aus07, Étape 2, Théorème 6.1]. Ainsi, si $p \in (1, \infty)$ alors

$$\left\| \left(\int_0^1 |\psi_{m,n}(s^2 H) f|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p}. \quad (2.2.3)$$

Il reste à vérifier l'inégalité dans l'autre sens. On procède par dualité pour finir la preuve. Puisque $\varphi(x) + \int_0^1 \psi_{m,n}(tx) \frac{dt}{t} = c_{m,n}$ est une constante indépendante de x , alors :

$$\begin{aligned} c_{m,n} \langle f, g \rangle &= \langle f, \varphi(H)g \rangle + \int_0^1 \langle \psi_{m,n}(tH)g, \frac{dt}{t} \rangle \\ &= \langle \varphi(H)f, g \rangle + \int_0^1 \langle \psi_{\frac{m}{2}, \frac{n}{2}}(tH)f, \psi_{\frac{m}{2}, \frac{n}{2}}(tH)g \rangle \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

On devrait ici décomposer $m = m_1 + m_2$ en somme de deux entiers m_1, m_2 comparable à $\frac{m}{2}$. Pour simplifier on prend $m_1 = m_2 = \frac{m}{2}$, on suppose que ce sont des entiers. On laisse les modifications mineures éventuelles au lecteur. L'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire $(u, v) = \int_0^1 u(t)v(t) \frac{dt}{t}$ donne :

$$\begin{aligned} |\langle f, g \rangle| &\leq |\langle \varphi(H)f, g \rangle| + \int \left(\int_0^1 |\psi_{\frac{m}{2}, \frac{n}{2}}(tH)f|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |\psi_{\frac{m}{2}, \frac{n}{2}}(tH)g|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} d\mu \\ &\leq \|\varphi(H)f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} + \left\| \left(\int_0^1 |\psi_{\frac{m}{2}, \frac{n}{2}}(tH)f|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \left\| \left(\int_0^1 |\psi_{\frac{m}{2}, \frac{n}{2}}(tH)g|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^{p'}} \\ &\lesssim \|\varphi(H)f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} + \left\| \left(\int_0^1 |\psi_{\frac{m}{2}, \frac{n}{2}}(tH)f|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}, \end{aligned}$$

où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ et on a utilisé (2.2.3) pour p' .

Ainsi, par dualité :

$$\|f\|_{L^p} = \sup_{\|g\|_{L^{p'}} \leq 1} |\langle f, g \rangle| \lesssim \|\varphi(H)f\|_{L^p} + \left\| \left(\int_0^1 |\psi_{\frac{m}{2}, \frac{n}{2}}(tH)f|^2 \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}.$$

Cela conclut la preuve de la caractérisation des normes d'espaces de Lebesgue, via les fonctionnelles carrées associées au semi-groupe de la chaleur.

En particulier pour $q \in [2, +\infty)$, l'inégalité généralisée de Minkowski montre finalement que

$$\|f\|_{L^q(M)} \lesssim \|\varphi(H)f\|_{L^q} + \left(\int_0^1 \|\psi_{m,n}(uH)f\|_{L^q(M)}^2 \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

□

Nous allons aussi travailler avec des espaces de Sobolev inhomogènes associés à H , définis en termes d'espaces de type Bessel : pour $s \geq 0$ et $p \in (1, \infty)$, $W_H^{s,p}$ que l'on notera $W^{s,p}$ est l'espace de Sobolev d'ordre s associé à/équipé de la norme

$$\|f\|_{W^{s,p}} := \|(1+H)^{\frac{s}{2}}f\|_{L^p} \simeq \|f\|_{L^p} + \|H^{\frac{s}{2}}f\|_{L^p}.$$

L'équivalence entre ces normes est une conséquence directe du calcul fonctionnel L^p holomorphe, appliqué aux fonctions

$$z \mapsto (1+z)^{-\frac{s}{2}} \quad ; \quad z \mapsto [z(1+z)]^{-\frac{s}{2}} \quad ; \quad z \mapsto \frac{(1+z)^{\frac{s}{2}}}{1+z^{\frac{s}{2}}},$$

qui sont holomorphes et bornées dans une région conique au voisinage de $(0, +\infty)$ dans $\mathbb{C}$, et ainsi engendrent des opérateurs bornés sur L^p . D'après le résultat précédent, on a

$$\begin{aligned} \|f\|_{W^{s,p}} &\simeq \|\varphi(H)f\|_{L^p} + \left\| \left(\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{2ks} |\psi_{m,n}(2^{-2k}H)f|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \\ &\simeq \|\varphi(H)f\|_{L^p} + \left\| \left(\int_0^1 u^{-2s} |\psi_{m,n}(u^2H)f|^2 \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}. \end{aligned}$$

On renvoie le lecteur à [BBR12] pour plus de détails sur de tels espaces de Sobolev. On peut passer du cas discret au cas continu de ces partitions de type Littlewood-Paley en écrivant :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_1^2 \psi_{m,n}(2^{-2k}u^2\lambda) \frac{du}{u} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{2^{-k}}^{2^{-(k-1)}} \psi_{m,n}(\lambda v^2) \frac{dv}{v} = \int_0^1 \psi_{m,n}(\lambda v^2) \frac{dv}{v} \\ &= \int_0^\lambda \psi_{m,n}(u) \frac{du}{2u} = \int_0^1 \psi(\lambda u) \frac{du}{2u}. \end{aligned}$$

Remarque 2.2.9. *L'intégrale du terme de gauche porte sur $u \in [1, 2]$, donc on peut passer des informations du cas discret aux mêmes informations pour le cas continu.*

2.2.4 Espaces de Hardy et BMO

On définit maintenant les espaces de Hardy atomiques adaptés à notre situation (c'est-à-dire dictés par un semi-groupe sur un espace doublant) en utilisant la construction introduite dans [BZ08]. Soit $\mathcal{Q}$ la collection de toutes les boules de X :

$$\mathcal{Q} := \{B(x, r), x \in X, r > 0\}.$$

2.2. Définitions et préliminaires

On définit $(B_Q)_{Q \in \mathcal{Q}}$ une famille d'opérateurs par :

$$\forall Q \in \mathcal{Q}, B_Q := (1 - e^{-r^2 H})^M,$$

où r est le rayon de la boule Q et M est un entier assez grand ($M \geq \min(\frac{3}{4} + \frac{3d}{8}, 3)$ est suffisant). Ces opérateurs sont bornés sur L^2 uniformément en r . En effet, en développant, B_Q est une combinaison linéaire finie d'opérateurs $e^{-kr^2 H}$ avec $k \in \{0, \dots, M\}$ et le Théorème 2.2.2 donne

$$\|e^{-kr^2 H}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \|x \mapsto e^{-kr^2 x}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \leq 1,$$

puisque H est positif.

Remarque 2.2.10. $M \geq \frac{3}{4} + \frac{3d}{8}$ assure que $\frac{4M}{3} - \frac{d}{2} \geq 1$ donc il existe un entier $m \in [\frac{d}{2}, \frac{4M}{3}]$. On aura besoin de cette propriété plus tard à la Section 2.3.

Définition 2.2.11. Une fonction $a \in L^1_{loc}$ est un atome associé à la boule $Q \in \mathcal{Q}$ s'il existe une fonction f_Q à support dans Q telle que $a = B_Q(f_Q)$, et avec

$$\|f_Q\|_{L^2(Q)} \leq (\mu(Q))^{-\frac{1}{2}}.$$

Cette dernière condition nous permet de normaliser f_Q dans L^1 . En effet, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|f_Q\|_{L^1} \leq \|f_Q\|_{L^2(Q)} \mu(Q)^{\frac{1}{2}} \leq 1.$$

De plus, B_Q est borné sur L^1 donc chaque atome est dans L^1 et ils sont aussi normalisés dans L^1 :

$$\sup_a \|a\|_{L^1} \lesssim 1, \tag{2.2.4}$$

où on prend la borne supérieure sur tous les atomes. En effet, si on considère un atome quelconque $a = B_Q(f_Q) = (1 - e^{-r^2 H})^M f_Q$ avec une fonction ad hoc f_Q supportée dans la boule Q , la formule du binôme de Newton nous indique que B_Q se comporte comme $e^{-kr^2 H}$. Ainsi, la Proposition 2.2.3 donne

$$\|a\|_{L^1(X)} = \|B_Q(f_Q)\|_{L^1(X)} \leq \sum_{k=1}^M \binom{M}{k} \|e^{-kr^2 H} f_Q\|_{L^1} \lesssim \|f_Q\|_{L^1} \lesssim 1.$$

On peut maintenant définir l'espace de Hardy par une décomposition atomique :

Définition 2.2.12. Une fonction mesurable h appartient à l'espace de Hardy atomique H^1_{ato} , que l'on notera H^1 , s'il existe une décomposition

$$h = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i a_i \quad \mu - p.p.$$

où les a_i sont des atomes et les λ_i des nombres réels tels que

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} |\lambda_i| < +\infty.$$

On équipe l'espace H^1 de la norme :

$$\|h\|_{H^1} := \inf_{h = \sum_i \lambda_i a_i} \sum_{i \in \mathbb{N}} |\lambda_i|,$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les décompositions atomiques possibles.

Pour une définition plus générale et plus de propriétés sur ces espaces atomiques, on renvoie à [Ber10, BZ08]. De (2.2.4), on déduit :

Corollaire 2.2.13. *L'espace de Hardy s'injecte continument dans L^1 :*

$$\|f\|_{L^1} \lesssim \|f\|_{H^1}.$$

D'après [BZ08, Corollaire 7.2], l'espace de Hardy H^1 est aussi un espace de Banach.

On renvoie le lecteur à [BZ08, Section 8], pour plus de détails sur le problème d'identifier l'espace dual $(H^1)^*$ avec un espace BMO. Pour une fonction L^∞ , on définit la norme BMO par

$$\|f\|_{\text{BMO}} := \sup_Q \left(\int_Q |B_Q(f)|^2 d\mu \right)^{1/2},$$

où la borne supérieure est prise sur toutes les boules. Si $f \in L^\infty$ alors $B_Q(f)$ est aussi uniformément borné (par rapport à la boule Q), car le semi-groupe de la chaleur est uniformément borné sur L^∞ (voir Proposition 2.2.3), donc $\|f\|_{\text{BMO}}$ est finie.

Définition 2.2.14. *L'espace fonctionnel BMO est défini comme l'adhérence*

$$\text{BMO} := \overline{\{f \in L^\infty + L^2, \|f\|_{\text{BMO}} < \infty\}}$$

pour la norme BMO.

Remarque 2.2.15. *La caractérisation de la norme BMO suivante sera utile : si $f \in L^2$, alors*

$$\|f\|_{\text{BMO}} = \sup_{a \text{ atom}} |\langle f, a \rangle| \tag{2.2.5}$$

2.2. Définitions et préliminaires

et f appartient à BMO si et seulement si le membre de droite est fini. En effet, si $f \in L^2$, alors pour toute boule $Q \in \mathcal{Q}$:

$$\begin{aligned} \mu(Q)^{-\frac{1}{2}} \|B_Q(f)\|_{L^2(Q)} &= \mu(Q)^{-\frac{1}{2}} \sup_{\substack{g \in L^2(Q) \\ \|g\|_{L^2(Q)} \leq 1}} | \langle B_Q(f), g \rangle | \\ &= \sup_{\substack{g \in L^2(Q) \\ \|g\|_{L^2(Q)} \leq 1}} | \langle f, B_Q(\mu(Q)^{-\frac{1}{2}} g) \rangle |, \end{aligned}$$

où on a utilisé que B_Q est auto-adjoint. On peut vérifier que l'ensemble des atomes correspond exactement à l'ensemble des fonctions du type $B_Q(\mu(Q)^{-\frac{1}{2}} g)$ avec $g \in L^2(Q)$ et $\|g\|_{L^2} \leq 1$.

En suivant [BZ08, Section 8], on obtient que BMO s'injecte continument dans l'espace dual $(H^1)^*$ et qu'il contient L^∞ :

$$L^\infty \hookrightarrow BMO \hookrightarrow (H^1)^*.$$

D'où

$$\|T\|_{H^1 \rightarrow (H^1)^*} \lesssim \|T\|_{H^1 \rightarrow BMO}, \quad (2.2.6)$$

et

$$\forall \theta \in (0, 1), \quad (L^2, BMO)_\theta \hookrightarrow (L^2, (H^1)^*)_\theta. \quad (2.2.7)$$

Le théorème d'interpolation entre espace de Hardy et espace de Lebesgue suivant est un des points clé de notre étude :

Théorème 2.2.16. *Pour tout $\theta \in (0, 1)$, on considère les exposants $p \in (1, 2)$ et $q = p' \in (2, \infty)$ donnés par*

$$\frac{1}{p} = \frac{1 - \theta}{2} + \theta \quad \text{et} \quad \frac{1}{q} = \frac{1 - \theta}{2}.$$

Alors (en utilisant les notations de la théorie de l'interpolation),

$$(L^2, H^1)_\theta = L^p \quad \text{et} \quad (L^2, (H^1)^*)_\theta \hookrightarrow L^q,$$

si l'espace ambiant X n'est pas borné, et

$$L^p \hookrightarrow L^2 + (L^2, H^1)_\theta \quad \text{et} \quad L^2 \cap (L^2, (H^1)^*)_\theta \hookrightarrow L^q,$$

si X est borné.

Le même résultat est valable en remplaçant $(H^1)^*$ par BMO grâce à (2.2.7).

Démonstration. Le résultat découle directement de [Ber10, Théorèmes 4 et 5] (et on garde ses notations dans cette preuve). Pour s'assurer qu'il s'applique dans notre contexte, on doit vérifier que $H^1 \hookrightarrow L^1$ (ce que l'on sait par le Corollaire 2.2.13), et que la fonction maximale M_∞ est majorée par $\mathcal{M}$. On rappelle que

$$M_\infty(f)(x) = \sup_{Q \ni x} \|A_Q^*(f)\|_{L^\infty(Q)},$$

avec

$$A_Q = Id - (Id - e^{-r^2 H})^M \text{ est auto-adjoint et } r \text{ désigne le rayon de } Q.$$

La formule du binôme de Newton montre que A_Q est une combinaison linéaire finie des opérateurs $e^{-kr^2 H}$ pour $k \in \{1, \dots, M\}$. Ainsi le fait que M_∞ est ponctuellement majorée par $\mathcal{M}$ est une conséquence directe de la Proposition 2.2.3. $\square$

Dans le cas d'un espace borné (de mesure finie), l'interpolation est un peu plus délicate puisque le résultat précédent ne fournit pas de caractérisation complète de l'espace intermédiaire en tant qu'un espace de Lebesgue L^p . On a cependant le résultat suivant :

Théorème 2.2.17. *Supposons que l'espace X est borné (ou de façon équivalente que $\mu(X) < +\infty$) et considérons l'opérateur auto-adjoint T vérifiant les continuités suivantes :*

$$\begin{cases} \|T\|_{L^2 \rightarrow L^2} \lesssim 1 \\ \|T\|_{H^1 \rightarrow (H^1)^*} \lesssim A < +\infty \\ \|T\|_{L^p \rightarrow L^2} \lesssim B < +\infty \text{ pour } p \in (1, 2) \end{cases},$$

alors T est borné de L^p dans $L^{p'}$ avec

$$\|T\|_{L^p \rightarrow L^{p'}} \lesssim B + A^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}}.$$

Le même résultat reste valable en remplaçant $(H^1)^*$ par BMO grâce à (2.2.7).

Démonstration. Soit $p \in (1, 2)$. On veut appliquer le Théorème 2.2.16 à T . On choisit $\theta \in (0, 1)$ tel que $\frac{1-\theta}{2} = 1 - \frac{1}{p}$. Alors $\theta = \frac{1}{p} - \frac{1}{p'}$. Soit $f \in L^p \hookrightarrow L^2 + (L^2, H^1)_\theta$. On se donne une décomposition $f = a + b$ avec $a \in L^2$ et $b \in (L^2, H^1)_\theta$ telle que

$$\|a\|_{L^2} + \|b\|_{(L^2, H^1)_\theta} \lesssim \|f\|_{L^p}.$$

Puisque T est auto-adjoint, T est borné de L^2 dans $L^{p'}$ avec une norme d'au plus B . Ainsi

$$\|Ta\|_{L^{p'}} \lesssim B\|a\|_{L^2}.$$

De façon similaire, par le Théorème 2.2.16 :

$$\|Tb\|_{L^{p'}} \lesssim \|Tb\|_{L^2} + \|Tb\|_{(L^2, (H^1)^*)_\theta} \lesssim B\|b\|_{L^p} + A^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \|b\|_{(L^2, H^1)_\theta}.$$

De plus $H^1 \hookrightarrow L^1$ donc $(L^2, H^1)_\theta \hookrightarrow (L^2, L^1)_\theta = L^p$. Par conséquent

$$\|Tb\|_{L^{p'}} \lesssim \left(B + A^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \right) \|b\|_{(L^2, H^1)_\theta}.$$

D'où

$$\|Tf\|_{L^{p'}} \lesssim B\|a\|_{L^2} + \left(B + A^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \right) \|b\|_{(L^2, H^1)_\theta} \lesssim \left(B + A^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \right) \|f\|_{L^p}.$$

□

2.2.5 À propos de l'hypothèse $(H_m(A))$

On veut dans cette section étudier le comportement de l'Hypothèse $(H_{m,n}(A))$ par rapport aux paramètres m et n .

On considère un opérateur fixé T , un réel $A > 0$, et on définit la propriété $(H_{m,n}(A))$ pour $m \in \mathbb{N}$ et $n > 0$ par :

$$\|T\psi_{m,n}(r^2H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B}_r)} \lesssim A\mu(B_r)^{\frac{1}{2}}\mu(\widetilde{B}_r)^{\frac{1}{2}}, \quad (H_{m,n}(A))$$

où B_r et $\widetilde{B}_r$ sont deux boules quelconques de même rayon $r > 0$.

Proposition 2.2.18. *Pour tout entier $m \geq 0$ et tout $n > 0$:*

$$(H_{m,1}(A)) \Rightarrow (H_{m,n}(A)).$$

Démonstration. Supposons vraie la propriété $(H_{m,1}(A))$. Puisque

$$\psi_{m,n}(x) = x^m e^{-nx} = (nx)^m e^{-nx} n^{-m} = n^{-m} \psi_{m,1}(nx),$$

alors

$$T\psi_{m,n}(r^2H) = n^{-m} T\psi_{m,1}(nr^2H).$$

Si $n \geq 1$ alors $B_r \subset \sqrt{n}B_r$ et $\widetilde{B}_r \subset \sqrt{n}\widetilde{B}_r$. Donc, par la propriété de doublement, on a

$$\begin{aligned} \|T\psi_{m,n}(r^2H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B}_r)} &= n^{-m} \|T\psi_{m,1}(nr^2H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B}_r)} \\ &\leq n^{-m} \|T\psi_{m,1}(nr^2H)\|_{L^2(\sqrt{n}B_r) \rightarrow L^2(\sqrt{n}\widetilde{B}_r)} \\ &\leq n^{-m} A\mu(\sqrt{n}B_r)^{\frac{1}{2}}\mu(\sqrt{n}\widetilde{B}_r)^{\frac{1}{2}} \lesssim A\mu(B_r)^{\frac{1}{2}}\mu(\widetilde{B}_r)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Si $n \leq 1$ alors $\sqrt{n}\widetilde{B}_r \subset \widetilde{B}_r$. On recouvre $\widetilde{B}_r$ par $N \simeq \left(\frac{r}{\sqrt{nr}}\right)^d = n^{-\frac{d}{2}}$ boules $\widetilde{B}_j$ de rayon $\sqrt{nr}$ et B_r par N boules B_k de rayon $\sqrt{nr}$ (recouvrement satisfaisant la propriété de recouvrement borné). Ainsi

$$\|T(\psi_{m,n}(r^2 H)f)\|_{L^2(\widetilde{B}_r)} \leq \sum_j \sum_k \|T(\psi_{m,n}(r^2 H)f \cdot \mathbf{1}_{B_k})\|_{L^2(\widetilde{B}_j)}.$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \|T\psi_{m,n}(r^2 H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B}_r)} &\leq \sum_j \sum_k n^{-m} \|T\psi_{m,1}(nr^2 H)\|_{L^2(B_k) \rightarrow L^2(\widetilde{B}_j)} \\ &\lesssim \sum_j \sum_k n^{-m} A\mu(B_k)^{\frac{1}{2}} \mu(\widetilde{B}_j)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim A \left(\sum_j \mu(\widetilde{B}_j) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_k \mu(B_k) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim A\mu(B_r)^{\frac{1}{2}} \mu(\widetilde{B}_r)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

□

On pourra donc maintenant se contenter de travailler avec $(H_{m,1}(A))$ et des fonctions $\psi_{m,1} = \psi_m$ plutôt que de garder la dépendance en n .

Proposition 2.2.19. *Si $m' > m \geq 0$ sont deux entiers, alors*

$$(H_{m,1}(A)) \Rightarrow (H_{m',1}(A)).$$

Démonstration. Supposons que $(H_{m,1}(A))$ est satisfaite. Alors, par la Proposition 2.2.18, $(H_{m,n}(A))$ est aussi vraie pour tout $n > 0$. On remarque tout d'abord que

$$T\psi_{m',1}(r^2 H) = T\psi_{m,\frac{1}{2}}(r^2 H)\psi_{m'-m,\frac{1}{2}}(r^2 H).$$

D'où, en décomposant X en couronnes dyadiques autour de B_r :

$$\begin{aligned} &\|T\psi_{m',1}(r^2 H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B}_r)} \\ &\leq \sum_{j=0}^{+\infty} \|T\psi_{m,\frac{1}{2}}(r^2 H)\|_{L^2(C_j(B_r)) \rightarrow L^2(\widetilde{B}_r)} \|\psi_{m'-m,\frac{1}{2}}(r^2 H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(C_j(B_r))}. \end{aligned}$$

Soit $f \in L^2(B_r)$. On traite le cas $j = 0$ avec la Proposition 2.2.3 et $(H_{m,\frac{1}{2}}(A))$:

$$\|T\psi_{m,\frac{1}{2}}(r^2 H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B}_r)} \|\psi_{m'-m,\frac{1}{2}}(r^2 H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(B_r)} \lesssim A\mu(B_r)^{\frac{1}{2}} \mu(\widetilde{B}_r)^{\frac{1}{2}}.$$

2.2. Définitions et préliminaires

On s'intéresse maintenant au cas $j \geq 1$. Si $x \in C_j(B_r)$, alors, l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique :

$$\begin{aligned} |\psi_{m'-m, \frac{1}{2}}(r^2 H)f(x)| &\leq \int_{B_r} \frac{1}{\mu(B(x, r))} e^{-c \frac{d(x, y)^2}{r^2}} |f(y)| d\mu(y) \\ &\leq \frac{e^{-c2^{2j}} \mu(B_r)^{\frac{1}{2}}}{\mu(B(x, r))} \|f\|_{L^2(B_r)}. \end{aligned}$$

Par (2.2.1), on a déjà vu que pour tout $x \in C_j(B_r)$:

$$\mu(B_r) \lesssim 2^{jd} \mu(B(x, r)),$$

ce qui entraîne

$$|\psi_{m'-m, \frac{1}{2}}(r^2 H)f(x)| \lesssim e^{-c2^{2j}} 2^{jd} \mu(B_r)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(B_r)}.$$

Donc, par la propriété de doublement,

$$\|\psi_{m'-m, \frac{1}{2}}(r^2 H)f\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(C_j(B_r))} \lesssim e^{-c2^{2j}} 2^{\frac{3jd}{2}}. \quad (2.2.8)$$

Considérons $(B_k)_{k=0, \dots, K}$ une collection de boules de rayon r qui recouvrent $C_j(B_r)$ (avec une propriété de recouvrement borné, ce qui implique que $K \lesssim 2^{jd}$). Par la propriété de doublement : $\mu(B_k) \lesssim 2^{jd} \mu(B_r)$. De $(H_{m, \frac{1}{2}})$ on déduit

$$\begin{aligned} \|T\psi_{m, \frac{1}{2}}(r^2 H)\|_{L^2(C_j(B_r)) \rightarrow L^2(\widetilde{B_r})} &\leq \sum_{k=0}^K \|T\psi_{m, \frac{1}{2}}(r^2 H)\|_{L^2(B_k) \rightarrow L^2(\widetilde{B_r})} \\ &\leq \sum_{k=0}^K A \mu(B_k)^{\frac{1}{2}} \mu(\widetilde{B_r})^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim A 2^{\frac{3}{2}jd} \mu(B_r)^{\frac{1}{2}} \mu(\widetilde{B_r})^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Ainsi, en combinant (2.2.8) et (2.2.9), il vient

$$\begin{aligned} \|T\psi_{m', 1}(r^2 H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B_r})} &\lesssim \left(1 + \sum_{j \geq 1} e^{-c2^{2j}} 2^{3jd}\right) A \mu(B_r)^{\frac{1}{2}} \mu(\widetilde{B_r})^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim A \mu(B_r)^{\frac{1}{2}} \mu(\widetilde{B_r})^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de la propriété $(H_{m', 1}(A))$. □

On résume les Propositions 2.2.18 et 2.2.19 dans le théorème suivant :

Théorème 2.2.20. *Supposons (2.1.5). Pour tout entier $m \geq 0$, la Propriété $(H_{m, n}(A))$ est indépendante de $n > 0$. On l'appelle donc $(H_m(A))$. Elle est "croissante en m ", dans le sens où pour deux entiers $m' > m \geq 0$, on a*

$$(H_m(A)) \Rightarrow (H_{m'}(A)).$$

2.3 De la Propriété $(H_m(A))$ aux estimations de dispersion

Le but de cette section est de montrer le Théorème 2.1.1, plus précisément que la Propriété $(H_m(A))$ implique des inégalités de dispersion $H^1 - BMO$ et $L^p - L^{p'}$. L'idée principale derrière ce résultat est de prouver la continuité voulue sur les atomes, puis d'en déduire la continuité sur l'espace de Hardy H^1 tout entier, et enfin d'interpoler avec la continuité L^2 .

Dans toute cette section, on fixe un entier assez grand $M \geq \max(3, \frac{3}{4} + \frac{3d}{8})$, ce qui nous permet de considérer la notion d'atomes et d'espace de Hardy H^1 , construit avec ce paramètre. Comme on l'a noté dans la Remarque 2.2.10, cela nous assure aussi que l'on peut trouver un entier $m \in [\frac{d}{2}, \frac{4M}{3}]$.

2.3.1 Continuité sur les atomes

Théorème 2.3.1. *Supposons (2.1.5) et (DUE). Soit T un opérateur borné sur L^2 , qui commute avec H . Si T vérifie la Propriété $(H_m(A))$ pour un certain entier $m \leq \frac{4M}{3}$, alors on a*

$$\sup_{a,b} |\langle Ta, b \rangle| \lesssim A,$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des atomes a et b .

Démonstration. Soient a et b deux atomes. Par définition, il existe deux boules B_1 et B_2 de rayons respectifs r_1 et r_2 , et $f \in L^2(B_1)$, $g \in L^2(B_2)$, tels que

$$\begin{cases} a = (1 - e^{-r_1^2 H})^M f & \text{avec } \|f\|_{L^2(B_1)} \leq \mu(B_1)^{-\frac{1}{2}} \\ b = (1 - e^{-r_2^2 H})^M g & \text{avec } \|g\|_{L^2(B_2)} \leq \mu(B_2)^{-\frac{1}{2}} \end{cases}.$$

On remarque tout d'abord par (c) de la Proposition 2.2.5 que :

$$\begin{aligned} a &= \left(\int_0^{r_1^2} H e^{-sH} ds \right)^M f = \int_0^{r_1^2} \dots \int_0^{r_1^2} H^M e^{-(s_1 + \dots + s_M)H} f ds_1 \dots ds_M \\ &= \int_0^{Mr_1^2} \underbrace{\left(\int_{\substack{s_1 + \dots + s_M = u \\ 0 \leq s_i \leq r_1^2}} ds_1 \dots ds_{M-1} \right)}_{=I_M(u)} H^M e^{-uH} f du. \end{aligned}$$

Comme $s_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, M\}$ avec $s_1 + \dots + s_M = u$, on a $0 \leq s_i \leq u$.

D'où

$$I_M(u) \leq u^{M-1}.$$

Ainsi

$$\langle Ta, b \rangle = \int_0^{Mr_1^2} \int_0^{Mr_2^2} I_M(u) I_M(v) \langle T\psi_M(uH)f, \psi_M(vH)g \rangle \frac{dv}{v} \frac{du}{u}.$$

De plus ψ_M est continue et H est auto-adjoint donc $\psi_M(uH)$ et $\psi_M(vH)$ sont aussi auto-adjoints. En utilisant (a) et (b) de la Proposition 2.2.5 et le fait que T commute avec H (et donc avec chaque opérateur $\psi_{m,n}(H)$), on obtient :

$$\begin{aligned} |\langle Ta, b \rangle| &\leq \int_0^{Mr_1^2} \int_0^{Mr_2^2} |\langle T\psi_{M,1}(uH)\psi_{\frac{M}{3},\frac{1}{3}}(vH)\psi_{\frac{M}{3},\frac{1}{3}}(vH)f, \psi_{\frac{M}{3},\frac{1}{3}}(vH)g \rangle| \frac{du}{u} \frac{dv}{v} \\ &= \iint |\langle T \frac{(uv^{\frac{1}{3}})^M}{(u+\frac{v}{3})^{\frac{4M}{3}}} \psi_{\frac{4M}{3},1}((u+\frac{v}{3})H)\psi_{\frac{M}{3},\frac{1}{3}}(vH)f, \psi_{\frac{M}{3},\frac{1}{3}}(vH)g \rangle| \frac{du}{u} \frac{dv}{v}. \end{aligned}$$

Ici on a décomposé $\psi_{M,1}$ en trois termes impliquant $\psi_{\frac{M}{3},\frac{1}{3}}$. On veut appliquer les estimations Gaussiennes (2.2.2), qui ne sont valables que si $\frac{M}{3}$ est un entier. On devrait décomposer $M = M_1 + M_2 + M_3$ avec trois entiers M_1, M_2, M_3 qui sont comparables à $M/3$ (c'est pourquoi on a choisit $M \geq 3$). Pour simplifier on prend $M_1 = M_2 = M_3 = M/3$ et on suppose que ce sont des entiers. On laisse les modifications mineures au lecteurs si ce n'est pas le cas.

Sans perdre de généralité puisque le problème est symétrique en u et v , on peut supposer que $u \leq v$ de sorte que $\frac{v}{3} \leq u + \frac{v}{3} \leq \frac{4v}{3}$. D'où $\frac{uv^{\frac{1}{3}}}{(u+\frac{v}{3})^{\frac{4}{3}}} \simeq \frac{u}{v}$. On recouvre l'espace X par des boules B_j et B_k de rayon $\sqrt{u + \frac{v}{3}}$. Le recouvrement satisfaisant la propriété de recouvrement borné. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la Propriété $(H_m(A))$ pour montrer :

$$\begin{aligned} |\langle Ta, b \rangle| &\lesssim \\ &\lesssim \iint \sum_{j,k} \left(\frac{u}{v}\right)^M |\langle \mathbb{1}_{B_k} T\psi_{\frac{4M}{3},1}((u+\frac{v}{3})H)\mathbb{1}_{B_j}\psi_{\frac{M}{3},\frac{1}{3}}(vH)f, \mathbb{1}_{B_k}\psi_{\frac{M}{3},\frac{1}{3}}(vH)g \rangle| \frac{du}{u} \frac{dv}{v} \\ &\lesssim \iint \sum_{j,k} \left(\frac{u}{v}\right)^M \|T\psi_{\frac{4M}{3},1}((u+\frac{v}{3})H)\mathbb{1}_{B_j}\psi_{\frac{M}{3},\frac{1}{3}}(vH)f\|_{L^2(B_k)} \cdot \\ &\quad \|\psi_{\frac{M}{3},\frac{1}{3}}(vH)g\|_{L^2(B_k)} \frac{du}{u} \frac{dv}{v} \\ &\lesssim \iint \sum_{j,k} \left(\frac{u}{v}\right)^M A\mu(B_k)^{\frac{1}{2}} \mu(B_j)^{\frac{1}{2}} \|\psi_{\frac{M}{3},\frac{1}{3}}(vH)f\|_{L^2(B_j)} \|\psi_{\frac{M}{3},\frac{1}{3}}(vH)g\|_{L^2(B_k)} \frac{du}{u} \frac{dv}{v}, \end{aligned}$$

où on a utilisé que T vérifie la Propriété $(H_{4M/3})$. En effet, T vérifie la Propriété $(H_m(A))$ pour $m \leq 4M/3$ (donc T vérifie aussi $(H_{4M/3})$ d'après le Théorème 2.2.20). Pour simplifier les notations, on note dans la suite de cette preuve $\psi_{\frac{M}{3},\frac{1}{3}} =$

ψ . On fait une décomposition en couronnes dyadiques autour de B_1 :

$$\sum_{j \in J} \mu(B_j)^{\frac{1}{2}} \|\psi(vH)f\|_{L^2(B_j)} \leq \sum_{j \in J} \sum_{l=0}^{+\infty} \mu(B_j)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{1}_{C_l(B_1)} \psi(vH)f\|_{L^2(B_j)}.$$

On étudie les termes $l = 0$ et $l \geq 1$ séparément.

D'une part quand $l = 0$:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \mu(B_j)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{1}_{C_0(B_1)} \psi(vH)f\|_{L^2(B_j)} &\leq \left(\sum_J \mu(B_j) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_J \|\mathbf{1}_{B_1} \psi(vH)f\|_{L^2(B_j)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \mu(B_1)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_J \int_{B_j} |\mathbf{1}_{B_1}(x) \psi(vH)f(x)|^2 d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \mu(B_1)^{\frac{1}{2}} \|\psi(vH)f\|_{L^2}. \end{aligned}$$

D'autre part quand $l \geq 1$, le nombre d'indices de J pour lesquels la somme est non nulle est équivalent au nombre de boules de rayon $\sqrt{u + \frac{v}{3}}$ dont on a besoin pour recouvrir $C_l(B_1)$, c'est-à-dire $|J| \simeq \left(\frac{2^l r_1}{\sqrt{u + \frac{v}{3}}} \right)^d$.

Maintenant, par la propriété de doublement de la mesure et (2.2.1), puisque B_j est une boule de rayon $\sqrt{u + v/3} \simeq \sqrt{v}$, on déduit que pour $x \in B_j \cap C_l(B_1)$ on a

$$\mu(B(x, \sqrt{v})) \simeq \mu(B_j).$$

Par (2.2.2), on a

$$\begin{aligned} &\sum_{j \in J} \sum_{l=1}^{+\infty} \mu(B_j)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{1}_{C_l(B_1)} \psi(vH)f\|_{L^2(B_j)} \\ &\lesssim \sum_{j \in J} \sum_{l=1}^{+\infty} \mu(B_j)^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\mathbf{1}_{C_l(B_1)}(x)}{\mu(B(x, \sqrt{v}))} e^{-\frac{2^{2l} r_1^2}{v}} \|f\|_{L^1(B_1)} \right\|_{L_x^2(B_j)} \\ &\lesssim \sum_{j \in J} \sum_{l=1}^{+\infty} \mu(B_j)^{\frac{1}{2}} \mu(B_j)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\mu(B_j)} e^{-\frac{2^{2l} r_1^2}{v}} \\ &\lesssim \sum_{l \geq 1} \left(\frac{2^l r_1}{\sqrt{u + \frac{v}{3}}} \right)^d e^{-\frac{2^{2l} r_1^2}{v}} \lesssim \sum_{l \geq 1} \left(\frac{2^l r_1}{\sqrt{v}} \right)^d e^{-\frac{2^{2l} r_1^2}{v}}, \end{aligned}$$

où on a utilisé la normalisation de f qui nous assure que $\|f\|_{L^1} \lesssim 1$.

On renvoie ensuite le lecteur au Lemme calculatoire 2.3.2 pour estimer la somme et obtenir

$$\sum_{j \in J} \sum_{l=1}^{+\infty} \mu(B_j)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{1}_{C_l(B_1)} \psi(vH)f\|_{L^2(B_j)} \lesssim \left(\frac{r_1}{\sqrt{v}} \right)^{-1}.$$

D'où

$$\sum_{j \in J} \mu(B_j)^{\frac{1}{2}} \|\psi(vH)f\|_{L^2(B_j)} \leq \mu(B_1)^{\frac{1}{2}} \|\psi(vH)f\|_{L^2} + \frac{\sqrt{v}}{r_1}.$$

De la même façon pour B_2 et la somme sur $k \in K$:

$$\sum_{k \in K} \mu(B_k)^{\frac{1}{2}} \|\psi(vH)g\|_{L^2(B_k)} \leq \mu(B_2)^{\frac{1}{2}} \|\psi(vH)g\|_{L^2} + \frac{\sqrt{v}}{r_2}.$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} |\langle Ta, b \rangle| &\lesssim A \iint \left(\frac{u}{v}\right)^M \left(\mu(B_1)^{\frac{1}{2}} \|\psi(vH)f\|_{L^2} + \frac{\sqrt{v}}{r_1} \right) \\ &\quad \left(\mu(B_2)^{\frac{1}{2}} \|\psi(vH)g\|_{L^2} + \frac{\sqrt{v}}{r_2} \right) \frac{du}{u} \frac{dv}{v}. \end{aligned}$$

On développe le produit qui nous conduit à l'étude des quatre termes suivants :

$$\begin{aligned} I &= \iint \left(\frac{u}{v}\right)^M \mu(B_1)^{\frac{1}{2}} \mu(B_2)^{\frac{1}{2}} \|\psi(vH)f\|_{L^2} \|\psi(vH)g\|_{L^2} \frac{du}{u} \frac{dv}{v}, \\ II &= \iint \left(\frac{u}{v}\right)^M \mu(B_1)^{\frac{1}{2}} \|\psi(vH)f\|_{L^2} \frac{\sqrt{v}}{r_2} \frac{du}{u} \frac{dv}{v}, \\ III &= \iint \left(\frac{u}{v}\right)^M \mu(B_2)^{\frac{1}{2}} \|\psi(vH)g\|_{L^2} \frac{\sqrt{v}}{r_1} \frac{du}{u} \frac{dv}{v}, \\ IV &= \iint \left(\frac{u}{v}\right)^M \frac{\sqrt{v}}{r_1} \frac{\sqrt{v}}{r_2} \frac{du}{u} \frac{dv}{v}. \end{aligned}$$

On distingue alors deux cas :

Cas 1 : $0 \leq u \leq v \leq R = \min(Mr_1^2, Mr_2^2)$.

L'item (d) de la Proposition 2.2.5 donne

$$\begin{aligned} I &= \int_{v=0}^R \int_{u=0}^v \left(\frac{u}{v}\right)^M \mu(B_1)^{\frac{1}{2}} \mu(B_2)^{\frac{1}{2}} \|\psi(vH)f\|_{L^2} \|\psi(vH)g\|_{L^2} \frac{du}{u} \frac{dv}{v} \\ &\simeq \mu(B_1)^{\frac{1}{2}} \mu(B_2)^{\frac{1}{2}} \int_0^R \|\psi(vH)f\|_{L^2} \|\psi(vH)g\|_{L^2} \frac{dv}{v} \\ &\leq \mu(B_1)^{\frac{1}{2}} \mu(B_2)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} \|\psi(vH)f\|_{L^2}^2 \frac{dv}{v} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} \|\psi(vH)g\|_{L^2}^2 \frac{dv}{v} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \mu(B_1)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2} \mu(B_2)^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L^2} \lesssim 1, \end{aligned}$$

De la même façon pour le second terme :

$$\begin{aligned} II &= \mu(B_1)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r_2} \int_0^R \|\psi(vH)f\|_{L^2} \sqrt{v} \frac{dv}{v} \\ &\leq \mu(B_1)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{r_2} \|f\|_{L^2} \left(\int_0^R v \frac{dv}{v} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{R^{\frac{1}{2}}}{r_2} \leq \frac{\sqrt{Mr_2^2}}{r_2} \lesssim 1. \end{aligned}$$

Le troisième terme se traite de façon similaire. Le quatrième terme donne lieu à :

$$IV = \frac{1}{r_1 r_2} \int_0^R \sqrt{v} \sqrt{v} \frac{dv}{v} = \frac{R}{r_1 r_2} \leq \frac{\min(Mr_1^2, Mr_2^2)}{\sqrt{\min(r_1^2, r_2^2)} \sqrt{\min(r_1^2, r_2^2)}} \lesssim 1.$$

Donc pour ce premier cas on obtient

$$I + II + III + IV \lesssim 1. \quad (2.3.1)$$

Cas 2 : $0 \leq u \leq Mr_1^2 \leq v \leq Mr_2^2$.

De la même façon qu'au cas 1 on obtient :

$$\begin{aligned} I &= \mu(B_1)^{\frac{1}{2}} \mu(B_2)^{\frac{1}{2}} \int_{v=Mr_1^2}^{Mr_2^2} \int_{u=0}^{Mr_1^2} \left(\frac{u}{v}\right)^M \|\psi(vH)f\|_{L^2} \|\psi(vH)g\|_{L^2} \frac{du}{u} \frac{dv}{v} \\ &\leq \mu(B_1)^{\frac{1}{2}} \mu(B_2)^{\frac{1}{2}} \int_{v=Mr_1^2}^{Mr_2^2} \int_{u=0}^{Mr_1^2} \frac{uv^{M-1}}{v^M} \|\psi(vH)f\|_{L^2} \|\psi(vH)g\|_{L^2} \frac{du}{u} \frac{dv}{v} \\ &= \mu(B_1)^{\frac{1}{2}} \mu(B_2)^{\frac{1}{2}} \int_{v=Mr_1^2}^{Mr_2^2} \frac{Mr_1^2}{v} \|\psi(vH)f\|_{L^2} \|\psi(vH)g\|_{L^2} \frac{dv}{v} \\ &\leq \mu(B_1)^{\frac{1}{2}} \mu(B_2)^{\frac{1}{2}} Mr_1^2 \sup_{v \in [Mr_1^2, Mr_2^2]} \frac{1}{v} \left(\int_0^{Mr_2^2} \|\psi(vH)f\|_{L^2}^2 \frac{dv}{v} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left(\int_0^{Mr_2^2} \|\psi(vH)g\|_{L^2}^2 \frac{dv}{v} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{Mr_1^2}{Mr_1^2} = 1. \end{aligned}$$

Pour le second terme, puisque $r_1 \leq r_2$:

$$II \leq \mu(B_1)^{\frac{1}{2}} \frac{Mr_1^2}{r_2} \left(\int_0^{Mr_1^2} \|\psi(vH)f\|_{L^2}^2 \frac{dv}{v} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{Mr_1^2}^{+\infty} \frac{1}{v} \frac{dv}{v} \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \frac{r_1^2}{r_2 r_1} \leq 1.$$

Le troisième terme est similaire :

$$III \leq \mu(B_2)^{\frac{1}{2}} Mr_1^2 \int_{Mr_1^2}^{Mr_2^2} \frac{1}{v} \|\psi(vH)g\|_{L^2} \frac{\sqrt{v}}{r_1} \frac{dv}{v} \lesssim r_1 \left(\int_{Mr_1^2}^{+\infty} \frac{1}{v} \frac{dv}{v} \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \frac{r_1}{r_1} = 1.$$

Finalement le dernier terme s'estime comme suit :

$$IV \leq \int_{Mr_1^2}^{Mr_2^2} \frac{Mr_1^2}{v} \frac{\sqrt{v}}{r_1} \frac{\sqrt{v}}{r_2} \frac{dv}{v} \lesssim \frac{r_1}{r_2} \int_{Mr_1^2}^{Mr_2^2} \frac{1}{v} \frac{dv}{v} = 2 \frac{r_1}{r_2} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) \lesssim 1,$$

car $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est continue si $x \geq 1$, vaut 0 si $x = 1$, et tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$; donc est bornée uniformément en $x \geq 1$ (ici $\frac{r_2}{r_1} \geq 1$).

Ainsi, dans le second cas, on conclut aussi

$$I + II + III + IV \lesssim 1. \quad (2.3.2)$$

Comme $u \leq v$ (ce qu'on avait supposé par symétrie), les cas 1 et 2 couvrent toutes les situations possibles. En conséquence, on en déduit que pour tous atomes a et b , on a

$$|\langle Ta, b \rangle| \lesssim A,$$

où la constante implicite ne dépend pas des atomes (mais peut-être des paramètres M et m). $\square$

On a utilisé le Lemme suivant au cours de la preuve avec $N = 1$ et $x = \frac{r}{\sqrt{v}}$:

Lemme 2.3.2. *Soient $x > 0$ et $d \in \mathbb{N}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante $C = C(N)$ telle que :*

$$\sum_{l=0}^{+\infty} (2^l x)^d e^{-(2^l x)^2} \leq C x^{-N}.$$

Démonstration. On remarque que $\int_{2^l}^{2^{l+1}} \frac{dt}{t} = \ln \left(\frac{2^{l+1}}{2^l} \right) = \ln 2$. Ainsi :

$$\sum_{l=0}^{+\infty} (2^l x)^d e^{-(2^l x)^2} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{l=0}^{+\infty} (2^l x)^d e^{-(2^l x)^2} \int_{2^l}^{2^{l+1}} \frac{dt}{t}.$$

$2^l \leq t \leq 2^{l+1}$ implique $(2^l x)^d \leq (tx)^d$ et $e^{-(tx)^2} \geq e^{-(2^{l+1}x)^2}$. Donc on a : $e^{-(2^l x)^2} \leq e^{-\frac{(tx)^2}{4}}$. D'où :

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{+\infty} (2^l x)^d e^{-(2^l x)^2} &\lesssim \int_1^{+\infty} (tx)^d e^{-\frac{(tx)^2}{4}} \frac{dt}{t} = \int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} (2u)^d e^{-u^2} \frac{du}{u} \\ &\lesssim \int_{\frac{x}{2}}^{+\infty} \frac{1}{u^N} \frac{du}{u} = \left[\frac{u^{-N}}{-N} \right]_{\frac{x}{2}}^{+\infty} \lesssim x^{-N} \end{aligned}$$

pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ aussi grand que l'on veut. $\square$

2.3.2 Extension à la continuité sur l'espace de Hardy

Après avoir prouvé que l'opérateur T (du Théorème 2.1.1) est borné sur les atomes, on souhaite maintenant montrer que T est borné de l'ensemble de l'espace de Hardy H^1 vers son dual $(H^1)^*$ (et plus précisément vers BMO) avec une norme contrôlée par A .

Si $f \in H^1$ alors il existe une décomposition $f = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda_i a_i$ où les a_i sont des atomes et $\sum_{i=0}^{+\infty} |\lambda_i| < 2\|f\|_{H^1}$. On sait comment borner l'opérateur sur les atomes, on voudrait étendre cette continuité en passant à la limite dans

$$T \left(\sum_{i=0}^N \lambda_i a_i \right) = \sum_{i=0}^N \lambda_i T a_i$$

afin d'appliquer le Théorème 2.3.1. Lorsque N tend vers l'infini, cette dernière égalité peut ne pas être vérifiée. En effet, on peut trouver dans [Bow05] un exemple (dû à Meyer) d'une forme linéaire bornée sur les atomes, et non bornée sur l'espace de Hardy tout entier. Donc, dans le but de vérifier rigoureusement cette étape, on va avoir besoin d'utiliser les spécificités de notre situation. Pour ce faire nous allons utiliser une approximation de l'identité bien adaptée à notre cadre de travail : $(e^{-sH})_{s>0}$.

On commence par montrer que Te^{-sH} (la version régularisée de T) satisfait la même estimation que celle du Théorème 2.3.1 :

Théorème 2.3.3. *Supposons (2.1.5) et (DUE). On considère un opérateur fixé T , borné sur L^2 , qui commute avec H et qui vérifie la Propriété $(H_m(A))$ pour un certain entier $m \in [\frac{d}{2}, \frac{4M}{3}]$. Alors, uniformément par rapport à $s > 0$, l'opérateur Te^{-sH} vérifie la Propriété $(H_m(A))$ et donc, par le Théorème 2.3.1, l'estimation :*

$$\sup_{s>0} \sup_{a,b} |\langle Te^{-sH} a, b \rangle| \lesssim A,$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble de tous les atomes a et b .

Démonstration. On pose $U_s := Te^{-sH}$. Il suffit de montrer que U_s satisfait la Propriété $(H_m(A))$ uniformément en $s > 0$, c'est-à-dire

$$\|U_s \psi_{m,1}(r^2 H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B}_r)} \lesssim A \mu(B_r)^{\frac{1}{2}} \mu(\widetilde{B}_r)^{\frac{1}{2}},$$

pour deux boules quelconques B_r et $\widetilde{B}_r$ de même rayon $r > 0$. Tout d'abord on remarque que

$$U_s \psi_{m,1}(r^2 H) = Te^{-sH} (r^2 H)^m e^{-r^2 H} = T \psi_{m,1}((r^2 + s)H) \left(\frac{r^2}{r^2 + s} \right)^m,$$

de sorte que

$$\|U_s \psi_{m,1}(r^2 H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B}_r)} = \left(\frac{r^2}{r^2 + s} \right)^m \|T \psi_{m,1}((r^2 + s)H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B}_r)}.$$

2.3. De la Propriété $(H_m(A))$ aux estimations de dispersion

Comme $r^2 < r^2 + s$, les boules de rayon r sont incluses dans les boules concentriques de rayon $\sqrt{r^2 + s}$ notées $B_{\sqrt{r^2 + s}}$ et $\widetilde{B_{\sqrt{r^2 + s}}}$. Ainsi (par la Propriété $(H_m(A))$ pour T et la propriété de doublement de la mesure)

$$\begin{aligned}
& \|U_s \psi_{m,1}(r^2 H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B_r})} \\
& \leq \left(\frac{r^2}{r^2 + s} \right)^m \|T \psi_{m,1}((r^2 + s)H)\|_{L^2(B_{\sqrt{r^2 + s}}) \rightarrow L^2(\widetilde{B_{\sqrt{r^2 + s}}})} \\
& \leq \left(\frac{r^2}{r^2 + s} \right)^m A \mu(B_{\sqrt{r^2 + s}})^{\frac{1}{2}} \mu(\widetilde{B_{\sqrt{r^2 + s}}})^{\frac{1}{2}} \\
& \lesssim \left(\frac{r^2}{r^2 + s} \right)^m A \sqrt{\frac{r^2 + s}{r^2}}^{\frac{d}{2}} \mu(B_r)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{r^2 + s}{r^2}}^{\frac{d}{2}} \mu(\widetilde{B_r})^{\frac{1}{2}} \\
& \leq A \left(\frac{r^2}{r^2 + s} \right)^{m - \frac{d}{2}} \mu(B_r)^{\frac{1}{2}} \mu(\widetilde{B_r})^{\frac{1}{2}} \leq A \mu(B_r)^{\frac{1}{2}} \mu(\widetilde{B_r})^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient du fait que $m \geq \frac{d}{2}$. Ceci achève la preuve de la Propriété $(H_m(A))$ pour l'opérateur U_s ; et toutes les estimations sont uniformes par rapport à $s > 0$. $\square$

Afin de prouver que l'on peut passer à la limite quand N tend vers l'infini dans

$$Te^{-sH} \left(\sum_{i=0}^N \lambda_i a_i \right) = \sum_{i=0}^N \lambda_i Te^{-sH} a_i$$

pour des atomes a_i , on doit montrer une certaine continuité de l'opérateur Te^{-sH} .

Théorème 2.3.4. *Si T est un opérateur borné sur L^2 qui commute avec H et si l'espace ambiant X vérifie le contrôle inférieur uniforme du volume (2.1.6), alors pour tout $s > 0$: Te^{-sH} envoie L^1 vers L^∞ et*

$$\|Te^{-sH}\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} \lesssim s^{-\frac{\nu}{2}}.$$

Démonstration. Par commutativité on peut écrire $Te^{-sH} = e^{-sH/2} T e^{-sH/2}$. Donc

$$\|Te^{-sH}\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} \leq \|e^{-\frac{s}{2}H}\|_{L^1 \rightarrow L^2} \|T\|_{L^2 \rightarrow L^2} \|e^{-\frac{s}{2}H}\|_{L^2 \rightarrow L^\infty}.$$

En utilisant les estimations Gaussiennes ponctuelles du noyau de la chaleur et (2.1.6), on en déduit par un argument T^*T que

$$\begin{aligned}
\|e^{-\frac{s}{2}H}\|_{L^1 \rightarrow L^2}^2 &= \|e^{-sH}\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} \\
&= \sup_{x,y} p_s(x,y) \lesssim s^{-\frac{\nu}{2}};
\end{aligned}$$

et par dualité

$$\|e^{-\frac{s}{2}H}\|_{L^1 \rightarrow L^2} = \|e^{-\frac{s}{2}H}\|_{L^2 \rightarrow L^\infty} \lesssim s^{-\frac{\nu}{4}}.$$

Ce qui par conséquent nous donne l'estimation annoncée. $\square$

Nous sommes maintenant capable d'établir le résultat sur l'espace de Hardy H^1 tout entier :

Théorème 2.3.5. *Supposons (2.1.5), (2.1.6) et (DUE). On considère un opérateur T , borné sur L^2 , qui commute avec H et qui vérifie la Propriété $(H_m(A))$ pour un certain entier $m \in [\frac{d}{2}, \frac{4M}{3}]$. Alors T et Te^{-sH} pour tout $s > 0$, peuvent s'étendre continument de H^1 dans BMO (et donc en particulier dans le dual $(H^1)^*$) et on a*

$$\|T\|_{H^1 \rightarrow BMO} + \sup_{s>0} \|Te^{-sH}\|_{H^1 \rightarrow BMO} \lesssim A.$$

Démonstration. Soit $f \in H^1$ dont on donne une décomposition atomique. Les atomes sont uniformément bornés dans L^1 donc la limite

$$f = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda_i a_i = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^N \lambda_i a_i$$

a lieu dans L^1 .

De plus, $a_i \in L^1$ implique que $Te^{-sH}(a_i) \in L^\infty$ d'après le Théorème 2.3.4. Donc la limite

$$Te^{-sH} \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^N \lambda_i a_i \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} Te^{-sH} \left(\sum_{i=0}^N \lambda_i a_i \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^N \lambda_i Te^{-sH}(a_i)$$

est valide et a lieu dans L^∞ pour tout $s > 0$ fixé. Ainsi

$$Te^{-sH}(f) = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda_i Te^{-sH}(a_i). \quad (2.3.3)$$

Pour $f \in H^1$, il existe une décomposition $f = \sum_i \lambda_i a_i$ avec des atomes a_i , $\sum_i |\lambda_i| < +\infty$, et $\sum_i |\lambda_i| \leq 2\|f\|_{H^1}$. On veut estimer

$$\|Te^{-sH}f\|_{BMO} = \sup_b |\langle Te^{-sH}f, b \rangle|$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des atomes b (d'après la Remarque 2.2.15). Par le Théorème 2.3.3 et (2.3.3), on a :

$$\begin{aligned} |\langle Te^{-sH} \sum_i \lambda_i a_i, b \rangle| &\leq \sum_i |\lambda_i| |\langle Te^{-sH} a_i, b \rangle| \\ &\lesssim \sum_i |\lambda_i| A \lesssim A \|f\|_{H^1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\|Te^{-sH}\|_{H^1 \rightarrow \text{BMO}} \lesssim A$$

et la constante implicite est uniforme en $s > 0$.

Considérons maintenant la continuité pour l'opérateur T . On sait que (voir [BZ08] par exemple) $H^1 \cap L^2$ est dense dans H^1 (puisque tous les atomes sont dans L^2). De plus $(e^{-sH})_{s \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu de $\mathcal{L}(L^2)$ donc :

$$\forall f \in L^2, \lim_{s \rightarrow 0} \|e^{-sH}f - f\|_{L^2} = 0.$$

On se donne $f \in H^1 \cap L^2$ de sorte que $Tf \in L^2$ et un atome a . On a aussi

$$|\langle Te^{-sH}f - Tf, a \rangle| \leq \|e^{-sH}Tf - Tf\|_{L^2} \|a\|_{L^2} \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0.$$

Par conséquent, uniformément par rapport à l'atome a , on a

$$|\langle Tf, a \rangle| = \lim_{s \rightarrow 0} |\langle Te^{-sH}f, a \rangle| \lesssim A \|f\|_{H^1}.$$

Donc, pour tout $f \in H^1 \cap L^2$:

$$\|Tf\|_{\text{BMO}} \lesssim A \|f\|_{H^1}.$$

Comme BMO est un espace de Banach, T admet une extension (que l'on notera encore T) qui est bornée de H^1 dans BMO et de H^1 dans $(H^1)^*$ car $\text{BMO} \hookrightarrow (H^1)^*$. $\square$

2.3.3 Interpolation

Ayant obtenu une borne sur l'espace de Hardy, on veut maintenant interpoler cette continuité pour conclure la preuve du Théorème 2.1.1.

Preuve du Théorème 2.1.1. On considère un opérateur T borné sur L^2 , qui commute avec H , et qui vérifie la Propriété $(H_m(A))$ pour un certain $m \in [\frac{d}{2}, \frac{4M}{3}]$. Alors le Théorème 2.3.5 montre que T admet une extension continue de H^1 dans $(H^1)^*$. On veut donc faire l'interpolation entre les deux continuités suivantes :

$$\begin{cases} \|T\|_{L^2 \rightarrow L^2} \lesssim 1 \\ \|T\|_{H^1 \rightarrow (H^1)^*} \lesssim A \end{cases}.$$

Fixons $p \in (1, 2)$. Alors, en choisissant $\theta = \frac{2}{p} - 1 \in (0, 1)$ et $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ (c'est-à-dire $q = p'$), d'après le Théorème 2.2.16, si $\mu(X) = +\infty$, on a

$$T: (L^2, H^1)_\theta = L^p \rightarrow (L^2, (H^1)^*)_\theta \hookrightarrow L^q.$$

Il s'en suit la continuité de T de L^p dans $L^{p'}$. Plus précisément, si l'espace X n'est pas borné alors

$$\|T\|_{L^p \rightarrow L^{p'}} \lesssim \|T\|_{H^1 \rightarrow (H^1)^*}^\theta \|T\|_{L^2 \rightarrow L^2}^{1-\theta} \lesssim A^\theta = A^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}}.$$

Si l'espace X est borné, alors le Théorème 2.2.17 donne

$$\|T\|_{L^p \rightarrow L^{p'}} \lesssim A^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} + B,$$

si tant est que $\|T\|_{L^p \rightarrow L^2} \lesssim B$. □

2.4 Application aux inégalités de Strichartz

Dans cette section, on veut tirer avantage des estimations obtenues précédemment dans le cas particulier où T est donné par le propagateur de Schrödinger, pour en déduire des inégalités de Strichartz avec perte de dérivées, comme introduites dans [BGT04b].

En particulier, on s'intéresse à des estimations dispersives $L^p - L^{p'}$ avec une borne polynomiale. Il est naturel de se placer dans le cas d'une mesure Ahlfors régulière (en plus de la propriété de doublement). On rappelle que l'espace de type homogène X est dit Ahlfors régulier s'il existe deux constantes positives c et C telles que pour tout $x \in X$ et $r > 0$:

$$cr^d \leq \mu(B(x, r)) \leq Cr^d. \quad (2.4.1)$$

À partir de maintenant, on supposera cette propriété.

Pour établir des inégalités de Strichartz à partir d'estimations de dispersion, on va adapter le résultat de Keel et Tao de [KT98], à savoir :

Si on considère $(U(t))_{t \in \mathbb{R}}$ une famille d'opérateurs uniformément borné sur L^2 , c'est-à-dire :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|U(t)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \lesssim 1 \quad (2.4.2)$$

et telle que pour un certain $\sigma > 0$

$$\forall t \neq s \in \mathbb{R}, \|U(s)U(t)^*\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} \lesssim |t - s|^{-\sigma}. \quad (2.4.3)$$

Alors il est prouvé dans [KT98] que, pour toute paire admissible d'exposants (p, q) , c'est-à-dire qu'ils vérifient

$$\frac{1}{p} + \frac{\sigma}{q} = \frac{\sigma}{2},$$

on a

$$\|U(t)f\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|f\|_{L^2}.$$

En suivant exactement leur preuve, on a le résultat suivant :

2.4. Application aux inégalités de Strichartz

Théorème 2.4.1. *Supposons que la famille $(U(t))_{t \in \mathbb{R}}$ vérifie (2.4.2) et pour un certain $\sigma > 0$*

$$\forall t \neq s \in \mathbb{R}, \|U(s)U(t)^*\|_{H^1 \rightarrow (H^1)^*} \lesssim |t - s|^{-\sigma}. \quad (2.4.4)$$

Alors, pour toute paire d'exposants (p, q) vérifiant

$$\frac{1}{p} + \frac{\sigma}{q} = \frac{\sigma}{2}$$

avec $q \neq +\infty$, on a

$$\|U(t)f\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim \|f\|_{L^2},$$

où on a supposé de plus que

$$\forall t \neq s \in \mathbb{R}, \|U(s)U(t)^*\|_{L^{p'} \rightarrow L^2} \lesssim |t - s|^{-\sigma \left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} \right)} \quad (2.4.5)$$

dans le cas où X est borné.

On ne donne pas de preuve de ce résultat puisque c'est exactement la même que dans [KT98] en remplaçant l'espace L^1 par l'espace de Hardy H^1 . La preuve repose sur l'interpolation entre les deux continuités (2.4.2) et (2.4.4), ce qui est toujours possible avec l'espace de Hardy d'après le Théorème 2.2.16.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le résultat suivant :

Théorème 2.4.2. *Supposons (2.4.1) et (DUE). On considère un entier $\ell \geq 0$. Si l'opérateur $T_t(H) := e^{itH}\psi_{2\ell}(h^2H)$ satisfait la Propriété $(H_m(|t|^{-\frac{d}{2}}))$ pour un certain entier $m \geq \frac{d}{2}$ pour tout $t \in [-1, 1]$ non nul, alors pour toute paire (p, q) vérifiant (2.1.1) avec $q \neq +\infty$, on a*

$$\left(\int_{-1}^1 \|e^{itH}\psi_{2\ell}(h^2H)f\|_{L^q}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \lesssim \|\psi_{\ell, \frac{1}{2}}(h^2H)f\|_{L^2}.$$

On a aussi une version “semi-classique” de cet énoncé, impliquant une perte de dérivées :

Théorème 2.4.3. *Supposons (2.4.1) et (DUE). On considère un entier $\ell \geq 0$. Si pour certains $h_0 > 0$ et $\gamma \in [0, 2)$ (ou $\gamma \in [1, 2)$ si X est borné) l'opérateur $T_t(H) := e^{itH}\psi_{2\ell}(h^2H)$ satisfait la Propriété $(H_m(|t|^{-\frac{d}{2}}))$ pour un certain $m \geq \frac{d}{2}$ et tout t tel que*

$$h^2 \leq |t| \leq h^\gamma \quad \text{et} \quad h \leq h_0,$$

alors pour toute paire (p, q) vérifiant (2.1.1) avec $q \neq +\infty$, on a

$$\left(\int_{-1}^1 \|e^{itH}\psi_{2\ell}(h^2H)f\|_{L^q}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \lesssim h^{-\frac{\gamma}{p}} \|\psi_{\ell, \frac{1}{2}}(h^2H)f\|_{L^2}.$$

Remarque 2.4.4. On tient à faire remarquer les deux points suivants :

1. D'après les arguments de la Proposition 2.2.19, si $e^{itH}\psi_{2\ell}(h^2H)$ satisfait la Propriété $(H_m(|t|^{-\frac{d}{2}}))$ pour un certain entier $\ell \geq 0$ alors $e^{itH}\psi_{2\ell'}(h^2H)$ satisfait aussi la Propriété $(H_m(|t|^{-\frac{d}{2}}))$ pour tout entier $\ell' \geq \ell$.
2. Le cas $\gamma \geq 2$ est facile (comme expliqué dans l'Introduction). Lorsque X est borné, on ne peut pas espérer $\gamma = 0$ à cause de l'exemple d'une donnée initiale constante (voir la Section Introduction 2.1).

Preuve des Théorèmes 2.4.2 et 2.4.3. On ne détaille que la preuve du Théorème 2.4.3 qui est un peu plus technique, et on laisse les modifications mineures pour prouver le Théorème 2.4.2 au lecteur.

On fixe un intervalle $J \subset [-1, 1]$ de longueur $|J| = h^\gamma$ et on considère

$$U(t) = \mathbb{1}_J(t)e^{itH}\psi_{\ell, \frac{1}{2}}(h^2H).$$

On veut appliquer le Théorème 2.4.1 avec $\sigma = \frac{d}{2}$ et un entier adapté assez grand M (qui permet de définir l'espace de Hardy). On fixe donc l'entier $M \geq \frac{3m}{4}$ assez grand pour considérer les atomes et l'espace de Hardy associés à ce paramètre ; et on a $m \in [\frac{d}{2}, \frac{4M}{3}]$ comme il est requis dans le Théorème 2.3.5.

Puisque $x \mapsto e^{itx}\psi_{\ell, \frac{1}{2}}(x) \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ est uniformément bornée par rapport à t , le Théorème 2.2.2 montre alors que :

$$\sup_{t>0} \|U(t)f\|_{L^2} = \|\mathbb{1}_J(t)e^{itH}\psi_{\ell, \frac{1}{2}}(h^2H)f\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{L^2},$$

ce qui correspond à (2.4.2).

Vérifions maintenant (2.4.4). On a

$$\begin{aligned} U(t)U(s)^* &= \mathbb{1}_J(t)\mathbb{1}_J(s)e^{itH}\psi_{\ell, \frac{1}{2}}(h^2H)(e^{isH}\psi_{\ell, \frac{1}{2}}(h^2H))^* \\ &= \mathbb{1}_J(t)\mathbb{1}_J(s)T_{t-s}(H), \end{aligned}$$

où on a utilisé que H est auto-adjoint et que $|\psi_{\ell, \frac{1}{2}}|^2 = \psi_{2\ell}$. Puisque J est de longueur h^γ alors $U(t)U(s)^*$ s'annule sauf lorsque $|t-s| \leq h^\gamma$. Dans ce cas, $U(t)U(s)^*$ satisfait la Propriété $(H_m(|t-s|^{-\frac{d}{2}}))$ par hypothèse. Donc, d'après le Théorème 2.3.5, on en déduit

$$\|U(t)U(s)^*f\|_{(H^1)^*} \lesssim \frac{1}{|t-s|^{\frac{d}{2}}} \|f\|_{H^1},$$

ce qui correspond à (2.4.4).

2.4. Application aux inégalités de Strichartz

Vérifions enfin (2.4.5) dans le cas où X serait borné. De la même façon puisque le propagateur de Schrödinger est unitaire sur L^2 , on a

$$\|U(t)U(s)^*\|_{L^{p'} \rightarrow L^2} \leq \|\psi(h^2 H)\|_{L^{p'} \rightarrow L^2}$$

avec $|t - s| \leq h^\gamma \lesssim 1$. On rappelle que pour tout $p' \in [1, 2)$:

$$\|\psi(h^2 H)f\|_{L^p} \lesssim h^{-d\left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}\right)} \|f\|_{L^{p'}}.$$

Par un argument TT^* , on a

$$\|\psi(h^2 H)\|_{L^{p'} \rightarrow L^p} = \|\psi(h^2 H)\|_{L^{p'} \rightarrow L^2}^2.$$

Donc

$$\|U(t)U(s)^*\|_{L^{p'} \rightarrow L^2} \lesssim h^{-\frac{d}{2}\left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}\right)} \leq |t - s|^{-\frac{d}{2\gamma}\left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}\right)} \lesssim |t - s|^{-\frac{d}{2}\left(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p}\right)}$$

dès que $\gamma \geq 1$.

Ainsi on peut appliquer le Théorème 2.4.1. Pour toute paire (p, q) vérifiant (2.1.1) avec $q \neq +\infty$, on a donc

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \|U(t)g\|_{L^q}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \lesssim \|g\|_{L^2}.$$

C'est-à-dire

$$\left(\int_J \|e^{itH}\psi_{\ell, \frac{1}{2}}(h^2 H)g\|_{L^q}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \lesssim \|g\|_{L^2}.$$

En prenant $g = \psi_{\ell, \frac{1}{2}}(h^2 H)f$ alors $\psi_{\ell, \frac{1}{2}}(h^2 H)g = \psi_{2\ell}(h^2 H)f$ donc

$$\left(\int_J \|e^{itH}\psi_{2\ell}(h^2 H)f\|_{L^q}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \lesssim \|\psi_{\ell, \frac{1}{2}}(h^2 H)f\|_{L^2}. \quad (2.4.6)$$

On subdivise maintenant $[-1, 1] = \bigcup_{k=1}^N J_k$, où les J_k sont des intervalles disjoints de longueur inférieure à h^γ . Le nombre total d'intervalles est donc $N \lesssim \frac{1}{h^\gamma}$.

D'où, par (2.4.6)

$$\int_{-1}^1 \|e^{itH}\psi_{2\ell}(h^2 H)f\|_{L^q}^p dt \lesssim \sum_{k=1}^N \int_{J_k} \|e^{itH}\psi_{2\ell}(h^2 H)f\|_{L^q}^p dt \lesssim N \|\psi_{\ell, \frac{1}{2}}(h^2 H)f\|_{L^2}^p,$$

et ainsi

$$\left(\int_{-1}^1 \|e^{itH}\psi_{2\ell}(h^2 H)f\|_{L^q}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \lesssim \frac{1}{h^{\frac{\gamma}{p}}} \|\psi_{\ell, \frac{1}{2}}(h^2 H)f\|_{L^2}.$$

□

On peut maintenant prouver le résultat principal de cette section, à savoir : comment la Propriété $(H_m(|t|^{-\frac{d}{2}}))$ implique des inégalités de Strichartz avec une perte de $\frac{\gamma}{p}$ dérivées :

Théorème 2.4.5. *Supposons (2.4.1) et (DUE). On considère un entier $\ell \geq 0$. Si pour certains $h_0 > 0$ et $\gamma \in [0, 2)$ l'opérateur $T_t(H) := e^{itH}\psi_{2\ell}(h^2H)$ satisfait la Propriété $(H_m(|t|^{-\frac{d}{2}}))$ pour un certain $m \geq \frac{d}{2}$ et tout t tel que*

$$h^2 \leq |t| \leq h^\gamma \quad \text{et} \quad h \leq h_0,$$

alors pour toute paire (p, q) vérifiant (2.1.1) avec $q \neq +\infty$, toute solution $u = e^{itH}u_0$ du problème

$$\begin{cases} i\partial_t u + Hu = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \end{cases}$$

vérifie

$$\|u\|_{L^p([-1,1], L^q)} \lesssim \|u_0\|_{W^{\frac{\gamma}{p}, 2}}.$$

Remarque 2.4.6. *On peut considérer des données initiales plus régulières, au sens où si pour un certain $\delta > 0$:*

$$\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2} - \delta,$$

alors on a

$$\|u\|_{L^p([-1,1], L^q)} \lesssim \|u_0\|_{W^{\delta + \frac{\gamma}{p}, 2}}.$$

Démonstration. On applique le Théorème 2.2.8 à $u(t) = e^{itH}u_0$:

$$\|u(t)\|_{L^q} \lesssim \|\varphi(H)u(t)\|_{L^q} + \left\| \left(\int_0^{h_0} |\psi_{2\ell}(s^2H)u(t)|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^q}.$$

La fonction φ dépend aussi des paramètres h_0, ℓ . On omet cette dépendance pour plus de clarté. En prenant la norme $L^p([-1,1])$ en temps de cette expression, l'inégalité de Minkowski mène à

$$\|u\|_{L^p([-1,1], L^q)} \lesssim \underbrace{\|\varphi(H)u\|_{L^p([-1,1], L^q)}}_{=I} + \underbrace{\left\| \left(\int_0^{h_0} \|\psi_{2\ell}(s^2H)u\|_{L^q}^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p([-1,1])}}_{=II}.$$

Alors (UE) et (2.4.1) implique que $\varphi(H)$ a un noyau vérifiant des estimations Gaussiennes ponctuelles (2.2.2) à l'échelle 1 (ou plus précisément h_0 mais on ne

tient pas compte de cette dépendance) donc en particulier est bornée de L^2 dans L^q (car $q \geq 2$) et donc

$$I \lesssim \|e^{itH}u_0\|_{L^p([-1,1],L^2)} \lesssim \|u_0\|_{L^2} \lesssim \|u_0\|_{W^{\frac{\gamma}{p},2}},$$

car le groupe de Schrödinger est une isométrie sur L^2 .

Puisque $p \geq 2$, l'inégalité de Minkowski généralisée et le Théorème 2.4.3 donnent

$$\begin{aligned} II &\leq \left(\int_0^{h_0} \|\psi_{2\ell}(s^2H)u\|_{L^p([-1,1],L^q)}^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \left(\int_0^{h_0} s^{-\frac{2\gamma}{p}} \|\psi_{\ell,\frac{1}{2}}(s^2H)u_0\|_{L^2}^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \left\| \left(\int_0^{h_0} s^{-\frac{2\gamma}{p}} |\psi_{\ell,\frac{1}{2}}(s^2H)u_0|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2} \lesssim \|u_0\|_{W^{\frac{\gamma}{p},2}}, \end{aligned}$$

où on a utilisé que $\ell > \frac{\gamma}{p}$ (car $\ell \geq 1$, $\gamma \in [0, 2)$ et $p \geq 2$) et le fait que

$$s^{-\frac{\gamma}{p}} \psi_{\ell,\frac{1}{2}}(s^2H) = \psi_{\ell-\frac{\gamma}{2p},\frac{1}{2}}(s^2H) H^{\frac{\gamma}{2p}}$$

d'après le Théorème 2.2.8. Finalement, on obtient

$$\|u\|_{L^p([-1,1],L^q)} \lesssim \|u_0\|_{W^{\frac{\gamma}{p},2}}.$$

□

2.5 Estimations de dispersion pour l'opérateur de Schrödinger à travers l'opérateur des ondes

Cette partie a pour but de montrer sous quelles conditions on peut prouver l'Hypothèse $(H_m(A))$. Plus précisément, on va montrer que sous de bonnes hypothèses sur le propagateur des ondes associé à notre problème, on est en mesure de montrer $(H_m(|t|^{-\frac{d}{2}}))$.

2.5.1 De la dispersion pour les ondes à la dispersion pour Schrödinger

On rappelle que l'on veut obtenir

$$\|T_t(H)\|_{H^1 \rightarrow \text{BMO}} \lesssim |t|^{-\frac{d}{2}}$$

où $T_t(H) = e^{itH}\psi_{2\ell}(h^2H)$ pour t appartenant à un intervalle aussi grand que possible. Grâce à la section précédente, il suffit de vérifier que $e^{itH}\psi_{2\ell}(h^2H)$ satisfait la Propriété $(H_m(|t|^{-\frac{d}{2}}))$ (pour certains paramètres ℓ, m, γ, h_0), qui peut s'écrire avec (2.4.1) : pour toutes boules $B_r, \widetilde{B}_r$ de rayon r

$$\|e^{itH}\psi_{2\ell}(h^2H)\psi_m(r^2H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B}_r)} \lesssim \left(\frac{r^2}{|t|}\right)^{\frac{d}{2}}. \quad (2.5.1)$$

Nous voulons utiliser la formule d'Hadamard, qui décrit comment le propagateur de Schrödinger peut être construit à l'aide du propagateur des ondes. Rappelons brièvement comment on l'obtient : la formule de Cauchy donne pour tout $a \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(a) > 0$:

$$a^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\xi^2}{2a}} = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-\frac{ax^2}{2}} dx.$$

Par imparité, et en notant $z = \frac{1}{2a}$, on a

$$e^{-z\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos(s\xi) e^{-\frac{s^2}{4z}} \frac{ds}{\sqrt{z}}.$$

Puisque H est un opérateur auto-adjoint positif qui admet un calcul fonctionnel L^∞ , on en déduit la formule de transmutation d'Hadamard :

$$e^{-zH} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos(s\sqrt{H}) e^{-\frac{s^2}{4z}} \frac{ds}{\sqrt{z}}. \quad (2.5.2)$$

On donne maintenant une condition acceptable sur le propagateur des ondes sous laquelle (2.5.1) peut être démontrée grâce à (2.5.2).

Hypothèse 2.5.1. *Il existe $\kappa \in (0, \infty]$ et un entier m_0 tels que pour tout $s \in (0, \kappa)$ on a : pour tout $r > 0$ et toutes boules $B_r, \widetilde{B}_r$ de même rayon r , alors*

$$\|\cos(s\sqrt{H})\psi_{m_0}(r^2H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B}_r)} \lesssim \left(\frac{r}{s+r}\right)^{\frac{d-1}{2}} \left(1 + \frac{|L-s|}{r}\right)^{-\frac{d+1}{2}},$$

où $L = d(B_r, \widetilde{B}_r)$.

On montrera dans la Section 2.6 des exemples où l'on sait vérifier cette hypothèse. Elle n'est autre qu'une version améliorée du principe de propagation à vitesse finie pour l'opérateur des ondes. Plus précisément, on s'intéressera aux cas de l'espace Euclidien et d'une variété Riemannienne lisse, où l'on connaît bien l'opérateur des ondes.

Remarque 2.5.2. *En utilisant les mêmes arguments que dans la Proposition 2.2.19, on peut montrer que si l'Hypothèse 2.5.1 est vraie pour un entier m_0 alors elle est aussi vraie pour tout entier $m \geq m_0$.*

Le résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème 2.5.3. *Supposons (2.4.1), $d > 1$, (DUE) et l'Hypothèse 2.5.1 pour $\kappa = \infty$. Alors pour tout entier $m \geq \max(\frac{d}{2}, m_0 + \lceil \frac{d-1}{2} \rceil)$ (où m_0 est donné par l'Hypothèse 2.5.1) on a pour tout $t \in \mathbb{R}^*$:*

$$\|e^{itH}\psi_m(r^2H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B}_r)} \lesssim \left(\frac{r^2}{|t|}\right)^{\frac{d}{2}}, \quad (2.5.3)$$

où la constante implicite dépend de m, m' . Par conséquent, e^{itH} satisfait la Propriété $(H_m(|t|^{-\frac{d}{2}}))$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$.

Théorème 2.5.4. *Supposons (2.4.1), $d > 1$, (DUE) et l'Hypothèse 2.5.1 pour $\kappa \in (0, \infty)$. Alors pour tous $\varepsilon > 0$ et $0 < h \leq 1$ tels que $h^2 \leq |t| \leq h^{1+\varepsilon}$, et tous entiers $m' \geq 0$ et $m \geq \max(\frac{d}{2}, m_0 + \lceil \frac{d-1}{2} \rceil)$ (avec m_0 donné par l'Hypothèse 2.5.1), on a*

$$\|e^{itH}\psi_{m'}(h^2H)\psi_m(r^2H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B}_r)} \lesssim \left(\frac{r^2}{|t|}\right)^{\frac{d}{2}}, \quad (2.5.4)$$

où la constante implicite dépend seulement de $\varepsilon > 0$, m , et m' . Par conséquent, $e^{itH}\psi_{m'}(h^2H)$ satisfait la Propriété $(H_m(|t|^{-\frac{d}{2}}))$ pour tous $h^2 \leq |t| \leq h^{1+\varepsilon}$ et $\varepsilon > 0$.

Preuve des Théorèmes 2.5.3 et 2.5.4. On prouve uniquement le Théorème 2.5.4, qui est plus difficile, et on laisse le lecteur vérifier que la même preuve permet d'obtenir le Théorème 2.5.3; plus facile car la quantité I_κ (qui sera définie ultérieurement dans la preuve) s'annule.

Étape 1 : Quelques réductions faciles.

On remarque que le cas $r \geq \sqrt{|t|}$ est facile par le calcul fonctionnel borné. En effet

$$\begin{aligned} & \|e^{itH}\psi_{m'}(h^2H)\psi_m(r^2H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B}_r)} \\ & \leq \|e^{it\cdot}\psi_{m'}(h^2\cdot)\psi_m(r^2\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \lesssim 1 \lesssim \left(\frac{r^2}{|t|}\right)^{\frac{d}{2}}. \end{aligned}$$

On peut donc se restreindre à montrer le théorème pour $r^2 \leq |t|$.

Supposons ensuite que (2.5.4) est prouvée pour chaque $h \in (0, r]$. On va montrer qu'elle est alors aussi valable pour $h > r$. Fixons donc deux boules B_r et $\widetilde{B}_r$ de

rayon $r < h$. On a

$$\begin{aligned} & \|e^{itH}\psi_{m'}(h^2H)\psi_m(r^2H)\|_{L^2(B_r)\rightarrow L^2(\widetilde{B_r})} \\ & \lesssim \frac{r^{2m}}{(\frac{h^2}{2} + r^2)^m} \|e^{itH}\psi_{m'}(\frac{h^2}{2}H)\psi_m((\frac{h^2}{2} + r^2)H)\|_{L^2(B_r)\rightarrow L^2(\widetilde{B_r})} \\ & \lesssim \left(\frac{r}{h}\right)^{2m} \|e^{itH}\psi_{m'}(\frac{h^2}{2}H)\psi_m((\frac{h^2}{2} + r^2)H)\|_{L^2(B_\rho)\rightarrow L^2(\widetilde{B_\rho})}, \end{aligned}$$

où $\rho = \sqrt{\frac{h^2}{2} + r^2} \geq r$, $\rho \simeq h$ et on note $B_\rho = \frac{\rho}{r}B_r$ la boule dilatée et concentrique (même notation pour $\widetilde{B}_\rho$). En utilisant (2.5.4) à l'échelle ρ (car $\rho \geq h/\sqrt{2}$) on obtient

$$\begin{aligned} \|e^{itH}\psi_{m'}(h^2H)\psi_m(r^2H)\|_{L^2(B_r)\rightarrow L^2(\widetilde{B_r})} & \lesssim \left(\frac{r}{h}\right)^{2m} \left(\frac{\rho^2}{|t|}\right)^{\frac{d}{2}} \\ & \lesssim \left(\frac{r}{h}\right)^{2m} \left(\frac{h^2}{|t|}\right)^{\frac{d}{2}} \\ & \lesssim \left(\frac{r^2}{|t|}\right)^{\frac{d}{2}}, \end{aligned}$$

où on a utilisé que $m \geq d/2$ et

$$\frac{r^{2m}}{h^{2m}} h^d = r^d \frac{r^{2m-d}}{h^{2m-d}} \leq r^d$$

(puisque $r < h$).

Donc, dès que (2.5.4) sera prouvée pour $h \leq r$, alors l'autre cas s'en suivra immédiatement.

On suppose donc que $h \leq r$ et $r^2 \leq |t|$.

Pour un entier $m' \neq 0$, on a

$$e^{itH}\psi_{m'}(h^2H)\psi_m(r^2H) = \left(\frac{h^2}{r^2}\right)^{m'} e^{itH}e^{-h^2H}\psi_{m'+m}(r^2H).$$

En utilisant $h \leq r$, il vient

$$\|e^{itH}\psi_{m'}(h^2H)\psi_m(r^2H)\|_{L^2(B_r)\rightarrow L^2(\widetilde{B_r})} \lesssim \|e^{(it-h^2)H}\psi_{m'+m}(r^2H)\|_{L^2(B_r)\rightarrow L^2(\widetilde{B_r})}.$$

Ainsi, si (2.5.4) est prouvée pour $m' = 0$ et un certain entier m , alors d'après le Théorème 2.2.20, elle sera aussi vraie pour $m' = 0$ et n'importe quel entier $m'' \geq m$. Donc, d'après l'observation précédente, (2.5.4) sera valide pour tout $m' = m'' - m \geq 0$.

Finalement, on peut se restreindre à montrer (2.5.4) pour $m' = 0$, $h \leq r$ et $r^2 \leq |t|$, ce que l'on suppose donc pour le reste de la preuve.

Étape 2 : Décomposition en trois régimes.

On fixe le paramètre h et on considère $e^{itH}e^{-h^2H} = e^{-zH}$ pour $z = h^2 - it$. Par la représentation (2.5.2), on a

$$e^{-zH} = \int_0^\infty \cos(s\sqrt{H})e^{-\frac{s^2}{4z}} \frac{ds}{\sqrt{\pi z}}.$$

On scinde cette intégrale en trois parties. Considérons la fonction lisse suivante :

$$\chi \in C^\infty(\mathbb{R}_+) \text{ définie par } \begin{cases} 0 \leq \chi \leq 1 \\ \chi(x) = 1 \text{ si } x \in [0, \frac{|t|}{r}] \\ \chi(x) = 0 \text{ si } x \in [\frac{2|t|}{r}, +\infty] \end{cases}, \text{ avec de plus } \forall n \in \mathbb{N},$$

$$\|\chi^{(n)}\|_{L^\infty} \lesssim \left(\frac{r}{|t|}\right)^n.$$

On découpe l'intégrale comme suit :

$$e^{-zH} = \int \chi(s) \cos(s\sqrt{H})e^{-\frac{s^2}{4z}} \frac{ds}{\sqrt{\pi z}} + \int_{\frac{|t|}{r}}^\kappa (1 - \chi(s)) \cos(s\sqrt{H})e^{-\frac{s^2}{4z}} \frac{ds}{\sqrt{\pi z}} + I_\kappa(H),$$

où $I_\kappa = 0$ si $\kappa = \infty$ et sinon

$$I_\kappa(H) := \int_\kappa^\infty (1 - \chi(s)) \cos(s\sqrt{H})e^{-\frac{s^2}{4z}} \frac{ds}{\sqrt{\pi z}}.$$

Étape 3 : Les deux derniers régimes.

Le second terme s'estime en utilisant l'Hypothèse 2.5.1 de la façon suivante (on rappelle que $z = h^2 - it$ de sorte que $|z| \simeq |t|$) :

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\frac{|t|}{r}}^\kappa (1 - \chi(s)) \cos(s\sqrt{H}) \psi_m(r^2H) e^{-\frac{s^2}{4z}} \frac{ds}{\sqrt{z}} \right\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B_r})} \\ & \lesssim \int_{\frac{|t|}{r}}^\kappa \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{d-1}{2}} \left(1 + \frac{|L-s|}{r}\right)^{-\frac{d+1}{2}} \frac{ds}{\sqrt{|t|}} \\ & \lesssim \int_{\frac{|t|}{r}}^\kappa \left(\frac{r}{\frac{|t|}{r}}\right)^{\frac{d-1}{2}} \left(1 + \frac{|L-s|}{r}\right)^{-\frac{d+1}{2}} \frac{ds}{\sqrt{|t|}} \\ & \lesssim \int_0^\infty \left(\frac{r^2}{|t|}\right)^{\frac{d-1}{2}} (1+u)^{-\frac{d+1}{2}} \frac{rdu}{\sqrt{|t|}} \\ & \lesssim \left(\frac{r^2}{|t|}\right)^{\frac{d}{2}}. \end{aligned}$$

Le dernier terme $I_\kappa(H)$ s'estime uniquement en par la continuité $L^2 - L^2$ du propagateur des ondes :

$$\begin{aligned}
 & \|I_\kappa(H)\psi_m(r^2H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B}_r)} \\
 & \lesssim \int_{\kappa}^{+\infty} \|\cos(s\sqrt{H})\psi_m(r^2H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B}_r)} e^{-\frac{s^2}{4} \operatorname{Re}(\frac{1}{z})} \frac{ds}{\sqrt{|z|}} \\
 & \lesssim \int_{\kappa\sqrt{\operatorname{Re}(\frac{1}{4z})}}^{+\infty} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{\operatorname{Re}(\frac{1}{z})}\sqrt{|z|}} \\
 & \lesssim \left(\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right) e^{-\frac{\kappa^2 \operatorname{Re}(\frac{1}{4z})}{2}} \left(\sqrt{\operatorname{Re}(\frac{1}{z})} \sqrt{|t|} \right)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Étant donné que $\operatorname{Re}(\frac{1}{z}) = \frac{h^2}{h^4+t^2} \gtrsim \frac{h^2}{t^2}$ (puisque $|t| \geq h^2$), on a

$$\|I_\kappa(H)\psi_m(r^2H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B}_r)} \lesssim \frac{|t|^{\frac{1}{2}}}{h} \left(\frac{h}{|t|} \right)^{-k},$$

pour $k > 0$ aussi grand que l'on veut parce que $\frac{h}{|t|} \gtrsim 1$ (en effet $|t| \leq h^{1+\varepsilon} \leq h$). On remarque que la constante implicite peut dépendre de κ .

Puisque l'on a réduit la situation à $h \leq r$, il vient

$$\frac{|t|^{\frac{1}{2}}}{h} \left(\frac{|t|}{h} \right)^k \lesssim \left(\frac{h}{\sqrt{|t|}} \right)^d \lesssim \left(\frac{r}{\sqrt{|t|}} \right)^d$$

dés que $|t|^{\frac{1}{2}+k+\frac{d}{2}} \leq h^{1+k+d}$, c'est-à-dire $|t| \leq h^{\frac{1+k+d}{\frac{1}{2}+k+\frac{d}{2}}} \leq h^{1+\frac{\frac{1}{2}+\frac{d}{2}}{\frac{1}{2}+k+\frac{d}{2}}}$ ce qui est vrai pour k assez grand puisque $|t| \leq h^{1+\varepsilon}$.

On a donc obtenu la borne souhaitée pour les deux dernier termes. Il reste à traiter le premier et plus difficile.

Étape 4 : Le premier régime.

On veut utiliser des intégrations par parties en s . Pour tout entier $n \geq 0$, et tous $s > 0$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$, on a

$$\partial_s^n \left(e^{-\frac{s^2}{4z}} \right) = e^{-\frac{s^2}{4z}} \left(c_n \frac{s^n}{z^n} + c_{n-1} \frac{s^{n-2}}{z^{n-1}} + \dots + c_{n-2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{s^{n-2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{z^{n-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \right),$$

où les constantes numériques $(c_j)_j$ ne joue aucun rôle pour l'estimation. En faisant

$2n$ intégrations par parties (tant que $m \geq n$), on a :

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \cos(s\sqrt{H})\psi_m(r^2H)\chi(s)e^{-\frac{s^2}{4z}}ds \\
&= \int_0^\infty \frac{\cos(s\sqrt{H})}{H^n}\psi_m(r^2H)\partial_s^{2n}\left[\chi(s)e^{-\frac{s^2}{4z}}\right]ds \\
&= \int_0^\infty \cos(s\sqrt{H})r^{2n}\psi_{m-n}(r^2H)\sum_{k=0}^{2n}c_k\chi^{(2n-k)}(s)\partial_s^k\left(e^{-\frac{s^2}{4z}}\right)ds \\
&= \int_0^\infty \cos(s\sqrt{H})r^{2n}\psi_{m-n}(r^2H)\cdot \\
&\quad \sum_{k=0}^{2n}\chi^{(2n-k)}(s)e^{-\frac{s^2}{4z}}\left(c_k\frac{s^k}{z^k}+\dots+c_{n-2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\frac{s^{k-2\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}}{z^{k-\lfloor\frac{k}{2}\rfloor}}\right)ds,
\end{aligned}$$

où encore une fois les c_j désignent des constantes numériques, pouvant changer de valeurs de ligne en ligne, sans que cela n'impacte le résultat. Le comportement de la somme sur k est gouverné par ses deux termes extrémaux (c'est-à-dire quand $k=0$ et $k=2n$). En ne gardant que ces termes extrêmes pour estimer la somme, puisque $|z| \simeq |t|$, on a

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^{+\infty} \cos(s\sqrt{H})\psi_m(r^2H)\chi(s)e^{-\frac{s^2}{4z}}\frac{ds}{\sqrt{z}} \right\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B}_r)} \\
& \lesssim \int_0^{2\frac{|t|}{r}} \|\cos(s\sqrt{H})\psi_{m-n}(r^2H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B}_r)} r^{2n} \left[\left(\frac{r}{|t|}\right)^{2n} + \left(\frac{s}{|t|}\right)^{2n} + \frac{1}{|t|^n} \right] \frac{ds}{\sqrt{|t|}} \\
& \lesssim \int_0^{2\frac{|t|}{r}} \left(\frac{r}{r+s}\right)^{\frac{d-1}{2}} \left(1 + \frac{|L-s|}{r}\right)^{-\frac{d+1}{2}} r^{2n} \left[\left(\frac{r}{|t|}\right)^{2n} + \left(\frac{s}{|t|}\right)^{2n} + \frac{1}{|t|^n} \right] \frac{ds}{\sqrt{|t|}},
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'Hypothèse 2.5.1 (ce qui est permis si $m-n \geq m_0$) et $L := d(B_r, \widetilde{B}_r)$. Si $n = \lceil \frac{d-1}{2} \rceil$, alors premièrement

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\frac{|t|}{r}} \left(\frac{r}{s+r}\right)^{\frac{d-1}{2}} \left(1 + \frac{|L-s|}{r}\right)^{-\frac{d+1}{2}} \left(\frac{r^2}{|t|}\right)^{2n} \frac{ds}{\sqrt{|t|}} &\leq \int_0^{+\infty} (1+u)^{-\frac{d+1}{2}} \frac{rdu}{\sqrt{|t|}} \left(\frac{r^2}{|t|}\right)^{2n} \\
&\lesssim \left(\frac{r^2}{|t|}\right)^{2n+\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{r^2}{|t|}\right)^{\frac{d}{2}},
\end{aligned}$$

car $d > 1$ et $2n + \frac{1}{2} \geq \frac{d}{2}$.

Pour le second terme, on a

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\frac{|t|}{r}} \left(\frac{r}{r+s} \right)^{\frac{d-1}{2}} \left(1 + \frac{|L-s|}{r} \right)^{-\frac{d+1}{2}} \left(\frac{rs}{|t|} \right)^{2n} \frac{ds}{\sqrt{|t|}} \\
 & \leq \frac{r^{\frac{d-1}{2}+2n}}{|t|^{2n}} \int_0^{\frac{|t|}{r}} \left(1 + \frac{|L-s|}{r} \right)^{-\frac{d+1}{2}} s^{2n-\frac{d-1}{2}} \frac{ds}{\sqrt{|t|}} \\
 & \lesssim \frac{r^{\frac{d-1}{2}+2n}}{|t|^{2n}} \left(\frac{|t|}{r} \right)^{2n-\frac{d-1}{2}} \int_0^{+\infty} (1+u)^{-\frac{d+1}{2}} \frac{rdu}{\sqrt{|t|}} \lesssim \left(\frac{r^2}{|t|} \right)^{\frac{d}{2}},
 \end{aligned}$$

car $2n - \frac{d-1}{2} \geq 0$.

Enfin pour le dernier terme :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\frac{|t|}{r}} \left(\frac{r}{r+s} \right)^{\frac{d-1}{2}} \left(1 + \frac{|L-s|}{r} \right)^{-\frac{d+1}{2}} \frac{r^{2n}}{|t|^n} \frac{ds}{\sqrt{|t|}} \leq \left(\frac{r^2}{|t|} \right)^n \int_0^{+\infty} (1+u)^{-\frac{d+1}{2}} \frac{rdu}{\sqrt{|t|}} \\
 & \lesssim \left(\frac{r^2}{|t|} \right)^{n+\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{r^2}{|t|} \right)^{\frac{d}{2}},
 \end{aligned}$$

parce que $n + \frac{1}{2} \geq \frac{d}{2}$. Les termes intermédiaires dans l'intégration par partie ont tous un comportement intermédiaire. On fait remarquer que ces derniers calculs requièrent $m - n \geq m_0$ ce qui est vrai puisque $m \geq m_0 + \lceil \frac{d-1}{2} \rceil$ et $n = \lceil \frac{d-1}{2} \rceil$. Ainsi

$$\begin{aligned}
 & \|e^{-zH} \psi_m(r^2 H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B}_r)} \\
 & = \left\| \int_0^{+\infty} \cos(s\sqrt{H}) \psi_m(r^2 H) e^{-\frac{s^2}{4z}} \frac{ds}{\sqrt{z}} \right\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B}_r)} \lesssim \left(\frac{r^2}{|t|} \right)^{\frac{d}{2}},
 \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. $\square$

2.5.2 Une digression à propos de ces propriétés de dispersion et de la mesure spectrale

Supposons que l'Hypothèse 2.5.1 est vérifiée pour $\kappa = 1$.

En suivant le même raisonnement qu'aux Sections 2.3 et 2.4, on en déduit que l'inégalité que l'on a supposée :

$$\| \cos(s\sqrt{H}) \psi_{m_0}(r^2 H) \|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\widetilde{B})} \lesssim \left(\frac{r}{s+r} \right)^{\frac{d-1}{2}} \left(1 + \frac{|L-s|}{r} \right)^{-\frac{d+1}{2}},$$

2.5. Estimations de dispersion pour l'opérateur de Schrödinger à travers l'opérateur des ondes

nous permet de prouver que $\cos(s\sqrt{H})$ est borné de l'espace de Hardy H^1 dans l'espace BMO (construits avec un paramètre M assez grand) avec

$$\|\cos(s\sqrt{H})\psi_1(r^2H)\|_{H^1 \rightarrow \text{BMO}} \lesssim r^{-\frac{d+1}{2}}(s+r)^{-\frac{d-1}{2}}, \quad \forall |s| \leq 1.$$

Cela correspond à un équivalent $H^1 \rightarrow \text{BMO}$ d'une estimation de dispersion plus classique $L^1 \rightarrow L^\infty$. En appliquant l'argument d'interpolation de Keel et Tao (comme on l'a détaillé précédemment) pour le propageur des ondes, cela nous permet d'obtenir des estimations de Strichartz pour l'équation des ondes : pour des exposants p, q admissible pour les ondes et $\delta \geq 0$ vérifiant

$$\frac{1}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2} - \delta,$$

toute solution $u = \cos(t\sqrt{H})u_0$ du problème

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 u + Hu = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \\ \partial_t u|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

satisfait :

$$\|u\|_{L^p([-1,1], L^q)} \lesssim \|u_0\|_{W^{\delta,2}}. \quad (2.5.5)$$

De telles inégalités de Strichartz pour l'équation des ondes nous permettent de déduire des estimations $L^2 - L^q$ précises pour le projecteur spectral (introduit par Sogge [Sog88]), comme expliqué par Smith dans [Smi06]. Sans donner de détails, on va juste donner l'esquisse de la preuve de [Smi06] pour vérifier qu'elle peut s'adapter à notre cadre de travail général.

Considérons $\lambda > 0$ et le projecteur spectral

$$\Pi_\lambda = \mathbb{1}_{[\lambda, \lambda+1)}(\sqrt{H}).$$

On définit une fonction ρ par

$$\rho_\lambda(x) := \int_{-1}^1 e^{-it\lambda} \cos(tx) dt$$

dont un calcul direct nous permet d'écrire

$$\rho_\lambda(x) = \frac{\sin(\lambda - x)}{\lambda - x} + \frac{\sin(\lambda + x)}{\lambda + x}.$$

On remarque alors que $\rho_\lambda(x) \in [\frac{1}{2}, 2]$ si $x \in [\lambda, \lambda+1)$. Ainsi, par le calcul fonctionnel borné L^2 , on en déduit que pour $f \in L^2$

$$\Pi_\lambda(f) = \int_{-1}^1 e^{-it\lambda} \cos(t\sqrt{H}) [\rho_\lambda(\sqrt{H})^{-1} \Pi_\lambda f] dt,$$

avec $\rho_\lambda(\sqrt{H})^{-1}\Pi_\lambda$ un opérateur uniformément borné sur L^2 (et aussi tout espace de Sobolev basé sur L^2 puisqu'il commute avec H).

En appliquant (2.5.5), on obtient donc que pour $q \in [\frac{2(d+1)}{d-1}, \infty)$:

$$\begin{aligned} \|\Pi_\lambda(f)\|_{L^q} &\lesssim \left\| \cos(t\sqrt{H}) \left[\rho_\lambda(\sqrt{H})^{-1}\Pi_\lambda f \right] \right\|_{L^2([-1,1], L^q)} \\ &\lesssim \left\| \rho_\lambda(\sqrt{H})^{-1}\Pi_\lambda f \right\|_{W^{\delta(q), 2}} \\ &\lesssim \|\Pi_\lambda f\|_{W^{\delta(q), 2}} \lesssim \lambda^{\delta(q)} \|f\|_{L^2}, \end{aligned}$$

où $\delta(q)$ est donné par

$$\frac{1}{2} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2} - \delta(q).$$

Si on suppose de plus les estimations dites des “fonctionnelles carrées” (voir [Smi06]), alors par interpolation avec la borne triviale $L^2 - L^2$, les inégalités de Strichartz impliquent (comme expliqué dans [Smi06]) :

$$\|\Pi_\lambda\|_{L^2 \rightarrow L^q} \lesssim \begin{cases} \lambda^{\frac{d-1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}, & \text{si } 2 \leq q \leq 2\frac{d+1}{d-1} \\ \lambda^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})-\frac{1}{2}}, & \text{si } q \geq 2\frac{d+1}{d-1}. \end{cases} \quad (2.5.6)$$

Remarquons que si on suppose seulement l'Hypothèse 2.5.1 pour $\kappa = \infty$, alors en combinant les Théorèmes 2.4.5 et 2.5.3 on obtient gratuitement des estimations de dispersion sans perte de dérivées : pour tout $p \in (1, 2]$ on a

$$\|e^{itH}\|_{L^p \rightarrow L^{p'}} \lesssim |t|^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'})}$$

uniformément en par rapport à $t \in \mathbb{R}$. Ainsi si l'opérateur H (ou $\sqrt{H}$) admet une mesure spectrale avec une dérivée de Radon-Nicodým, en suivant [BO13, Corollaire 3.3], on sait que des *estimées de Restriction* sont valables, à savoir :

$$\left\| \frac{dE_H(\lambda)}{d\lambda} \right\|_{L^p \rightarrow L^{p'}} \lesssim \lambda^{\frac{d}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'})-1},$$

où $E_H(\lambda)$ est la mesure spectrale de H et $p \in [1, \frac{2d}{d+2})$. On a aussi d'autres estimations pour des dérivées d'ordre plus élevé, et on renvoie à [BO13] pour plus de détails. De telles estimations donnent en particulier pour $\lambda \geq 1$:

$$\begin{aligned} \|\Pi_\lambda\|_{L^p \rightarrow L^{p'}} &\lesssim \int_{\lambda^2}^{(\lambda+1)^2} \left\| \frac{dE_H(s)}{ds} \right\|_{L^p \rightarrow L^{p'}} ds \\ &\lesssim \int_{\lambda^2}^{(\lambda+1)^2} s^{\frac{d}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'})} \frac{ds}{s} \\ &\lesssim \lambda^{d(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'})-1} \lesssim \lambda^{2d(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})-1}. \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Ainsi, l'Hypothèse 2.5.1 seule nous permet de retrouver l'estimation (2.5.6) mais pour une plage d'exposants $q = p'$ plus petite (que celle que l'on obtient en supposant des estimations aux fonctionnelles carrées). En effet la plage d'exposant dans (2.5.6) est donnée par l'exposant critique $1 \leq p \leq 2^{\frac{d+1}{d+3}}$.

2.6 Les cas Euclidien et Riemannien

Pour renforcer la légitimité de l'Hypothèse 2.5.1, on vérifie sa validité pour l'opérateur de Laplace-Beltrami $H = -\Delta$ dans les quatre situations suivantes :

- l'espace Euclidien $X = \mathbb{R}^d$ avec $\kappa = \infty$;
- une variété Riemannienne lisse compacte de dimension d avec κ donné par le rayon d'injectivité ;
- une variété Riemannienne lisse non compacte de dimension d avec une géométrie C_b^∞ et κ donné par la géométrie ;
- une perturbation lisse de l'espace Euclidien $X = \mathbb{R}^d : H = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot (A \nabla \cdot)$ (pour une fonction ρ uniformément non dégénérée et une matrice A de dérivées bornées) qui est un opérateur auto-adjoint sur $\mathbb{R}^d$, équipé de la mesure $d\mu = \rho dx$, avec $\kappa < \infty$ (dépendant de A et ρ).

Proposition 2.6.1. *Dans les quatre situations précédentes, l'Hypothèse 2.5.1 est satisfaite.*

La preuve se base sur la propriété suivante (qui est un raffinement de la propriété de propagation à vitesse finie pour l'opérateur des ondes) : pour $B, \tilde{B}$ deux boules de rayon r , en notant $L = d(B, \tilde{B})$, pour tout $s \in (0, \kappa)$, on a :

- si $L > s + 2r$ alors la propriété de propagation à vitesse finie a lieu

$$\|\cos(s\sqrt{H})\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} = 0; \quad (2.6.1)$$

- si $L \leq s - 10r$ alors

$$\|\cos(s\sqrt{H})\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} \lesssim \left(\frac{r}{r+s}\right)^{\frac{d-1}{2}} \left(1 + \frac{|L-s|}{r}\right)^{-\frac{d+1}{2}}. \quad (2.6.2)$$

On renvoie le lecteur à l'introduction pour plus de détails sur la propriété de propagation à vitesse finie de l'opérateur des ondes ; qui implique (2.6.1). La propriété (2.6.2) est assez standard, voir par exemple [Bér77] pour le cas d'une

variété Riemannienne compacte (où une parametrix en temps court est explicitée) et l'Appendice 2.7 où on explique en détail les calculs dans le cas Euclidien.

En particulier, on recouvre partiellement les résultats de [BGT04b, ST02] (à une perte $\varepsilon > 0$ près aussi petite que l'on veut). En effet, en combinant la Proposition 2.6.1 avec les Théorèmes 2.4.5 et 2.5.4 (pour $\gamma = 1 + \varepsilon$), on a le corollaire suivant :

Corollaire 2.6.2. *Toute variété Riemannienne lisse compacte ou non compacte avec une géométrie C_b^∞ (ou comme précédemment pour une perturbation lisse de l'espace Euclidien avec des fonctions ρ et A) satisfait des inégalités de Strichartz avec une perte de dérivées $\frac{1}{p} + \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$.*

En conclusion, on a obtenu que dès que l'on connaît une bonne propriété de dispersion $L^2 - L^2$ micro-localisée (en temps court) pour l'équation des ondes (Hypothèse 2.5.1) alors on peut obtenir des inégalités de Strichartz et des estimations de dispersion pour l'équation de Schrödinger (avec une éventuelle perte de dérivées si $\kappa < \infty$). On souligne le fait que dans le cas d'un sous-ensemble convexe de l'espace Euclidien avec un bord, alors l'opérateur des ondes pour le Laplacien de Dirichlet ne vérifie pas l'Hypothèse 2.5.1 (à cause d'une perte, optimale, de $1/4$ dans l'exposant principal dans ce contexte); voir [ILP14] d'Ivanovici, Lebeau et Planchon.

Preuve de la Proposition 2.6.1. On détaille la preuve uniquement dans le cas Euclidien avec $\kappa = \infty$. On laisse le lecteur vérifier que le reste est valide (quitte à changer quelques notations) pour une variété Riemannienne compacte avec κ donné par le rayon d'injectivité. En effet, la preuve repose sur (2.6.2) et une formulation précise du noyau des ondes autour du cône de lumière, qui est obtenue par une parametrix de Hadamard, et a la même forme que dans le cas Euclidien, voir [Bér77]. Concentrons-nous donc sur la situation Euclidienne.

Premièrement, si $s \leq 10r$ alors, par la propriété de propagation à vitesse finie et les estimations de Davies-Gaffney, on a

$$\begin{aligned} \|\cos(s\sqrt{H})\psi(r^2H)\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} &\leq \|\psi(r^2H)\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(10\tilde{B})} \lesssim e^{-\frac{d(B,10\tilde{B})^2}{4r^2}} \\ &\lesssim \left(1 + \frac{d(B, \tilde{B})}{r}\right)^{-\frac{d+1}{2}} = \left(1 + \frac{L - s + s}{r}\right)^{-\frac{d+1}{2}} \\ &\lesssim \left(\frac{r}{r+s}\right)^{\frac{d-1}{2}} \left(1 + \frac{|L-s|}{r}\right)^{-\frac{d+1}{2}}, \end{aligned}$$

car $s \lesssim r$; ce qui est l'estimation souhaitée.

On se concentre maintenant sur le cas $s \geq 10r$ et on considère un recouvrement borné de X par des boules $(B_k)_k$ de rayon r . Soit χ_{B_k} une partition lisse de l'unité,

adaptée au recouvrement : c'est-à-dire que χ_{B_k} est supportée dans $2B_k$, prend ses valeurs dans $[0, 1]$ et satisfait pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|\nabla^n \chi_{B_k}\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{r^n}. \quad (2.6.3)$$

On décompose

$$\|\cos(s\sqrt{H})\psi(r^2 H)\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} \leq \sum_{B_k} \|\cos(s\sqrt{H})(\chi_{B_k} \cdot \psi(r^2 H))\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})}.$$

Grâce à (2.6.1), la somme est restreinte aux boules B_k telles que $d(B_k, \tilde{B}) \leq s + 2r$.

Étape 1 : Le cas $d(B_k, \tilde{B}) \leq s - 10r$.

En utilisant (2.6.2) et les estimations de Davies-Gaffney, il vient

$$\begin{aligned} & \sum_{d(B_k, \tilde{B}) \leq s - 10r} \|\cos(s\sqrt{H})(\chi_{B_k} \cdot \psi(r^2 H))\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} \\ & \leq \sum_{d(B_k, \tilde{B}) \leq s - 10r} \|\cos(s\sqrt{H})\|_{L^2(B_k) \rightarrow L^2(\tilde{B})} \|\psi(r^2 H)\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(B_k)} \\ & \lesssim \sum_{d(B_k, \tilde{B}) \leq s - 10r} \left(\frac{r}{r+s}\right)^{\frac{d-1}{2}} \left(1 + \frac{s - d(B_k, \tilde{B})}{r}\right)^{-\frac{d+1}{2}} e^{-\frac{d(B, B_k)^2}{4r^2}}. \end{aligned}$$

Remarquons que $s - d(B_k, \tilde{B}) \geq 10r \geq 0$.

On peut évaluer la somme suivante

$$\sum_k e^{-\frac{d(B, B_k)^2}{4r^2}} \leq \sum_{l=0}^{+\infty} e^{-2^{2l}} \#\{k, \frac{d(B, B_k)}{2r} \sim 2^l\} \lesssim \sum_{l=0}^{+\infty} 2^{ld} e^{-2^{2l}} < +\infty. \quad (2.6.4)$$

On distingue deux cas. Si $s - d(\tilde{B}, B_k) \geq \frac{1}{2}|s - d(B, \tilde{B})| = \frac{1}{2}|s - L|$ alors

$$\begin{aligned} & \sum_{d(B_k, \tilde{B}) \leq s - 10r} \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{d-1}{2}} \left(1 + \frac{s - d(B_k, \tilde{B})}{r}\right)^{-\frac{d+1}{2}} e^{-\frac{d(B, B_k)^2}{4r^2}} \\ & \leq \sum_k \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{d-1}{2}} \left(1 + \frac{|s - L|}{2r}\right)^{-\frac{d+1}{2}} e^{-\frac{d(B, B_k)^2}{4r^2}} \\ & \lesssim \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{d-1}{2}} \left(1 + \frac{|s - L|}{r}\right)^{-\frac{d+1}{2}}. \end{aligned}$$

Si par contre $s - d(\tilde{B}, B_k) \leq \frac{1}{2}|s - d(B, \tilde{B})|$ alors

$$d(B, B_k) \geq |d(B_k, \tilde{B}) - d(B, \tilde{B})| = |(s - L) - (s - d(\tilde{B}, B_k))| \geq \frac{1}{2}|s - L|.$$

D'où

$$\begin{aligned}
 & \sum_{d(B_k, \tilde{B}) \leq s-10r} \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{d-1}{2}} \left(1 + \frac{s - d(B_k, \tilde{B})}{r}\right)^{-\frac{d+1}{2}} e^{-\frac{d(B, B_k)^2}{4r^2}} \\
 & \lesssim \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{d-1}{2}} \sum_{d(B_k, \tilde{B}) \leq s-10r} \left(1 + \frac{10r}{r}\right)^{-\frac{d+1}{2}} e^{-\frac{d(B, B_k)^2}{8r^2}} \underbrace{e^{-\frac{d(B, B_k)^2}{8r^2}}}_{\leq e^{-\frac{|s-L|^2}{16r^2}}} \\
 & \lesssim \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{d-1}{2}} \left(1 + \frac{|s-L|}{r}\right)^{-\frac{d+1}{2}},
 \end{aligned}$$

parce que pour tout $x \geq 0$, $e^{-x^2} \lesssim (1+x)^{-\alpha}$ pour tout $\alpha > 1$.

Étape 2 : Le cas $s - 10r \leq d(B_k, \tilde{B}) \leq s + 2r$ en dimension impaire $d \geq 3$.

Dans ce cas, on doit utiliser une expression précise du noyau du propagateur des ondes. Il est connu que le comportement de ce noyau est différent selon la parité de la dimension. On commence par le cas de la dimension impaire $d \geq 3$. Dans le cas Euclidien, on a une représentation exacte du noyau (voir [Fol95] par exemple) : pour tout $s \geq 0$ et toute fonction g suffisamment lisse :

$$\begin{aligned}
 \cos(s\sqrt{H})g(x) &= \partial_s \left(\frac{1}{s}\partial_s\right)^{\frac{d-3}{2}} \left(s^{d-2} \int_{|y|=1} g(x+sy) dy\right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{d-1}{2}} c_n s^n \int_{|y|=1} \partial_s^n (g(x+sy)) dy,
 \end{aligned}$$

où les c_n sont des constantes numériques.

On considère $g = \chi_{B_k} \psi(r^2 H) f$ qui satisfait alors l'estimation de régularité suivante (avec un léger abus de notation) : pour tout entier $n \geq 0$

$$|\partial_s^n (\chi_{B_k}(x+sy) \psi(r^2 H) f(x+sy))| \lesssim \frac{1}{r^n} \tilde{\chi}_{B_k}(x+sy) \tilde{\psi}(r^2 H) f(x+sy).$$

Éclairons ce point. En effet on peut contrôler les dérivées de χ_{B_k} par (2.6.3). Il reste à expliquer le comportement des dérivées de $\psi(r^2 H) f(x+sy)$. Le noyau du semi-groupe de la chaleur dans $\mathbb{R}^d$, pour $t > 0$, est

$$p_t(x, y) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}.$$

Ainsi pour tout $r > 0$:

$$\partial_s(p_{r^2}(x+sy, z)) = \frac{1}{(4\pi r^2)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x+sy-z|^2}{4r^2}} \frac{(x+sy-z)y}{2r^2}.$$

D'où

$$\begin{aligned}
 |\partial_s(p_{r^2}(x + sy, z))| &\lesssim \frac{1}{(4\pi r^2)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{2r^2} e^{-\frac{|x+sy-z|^2}{4r^2}} |x + sy - z| \\
 &= \frac{1}{r} \frac{1}{(4\pi r^2)^{\frac{d}{2}}} \frac{|x + sy - z|}{2r} e^{-\left(\frac{|x+sy-z|}{2r}\right)^2} \\
 &\lesssim \frac{1}{r} \frac{1}{(4\pi r^2)^{\frac{d}{2}}} e^{-\frac{|x+sy-z|^2}{8r^2}},
 \end{aligned}$$

ce qui signifie, qu'à des constantes numériques près, la $n^{\text{ième}}$ dérivée de $\psi(r^2 H)f(x + sy)$ se comporte comme $\frac{1}{r^n} \psi(r^2 H)f(x + sy)$ au sens où leur noyaux ont tous les deux une décroissance Gaussienne similaire. Une telle propriété est aussi valable sur une variété Riemannienne compacte.

Donc pour $f \in L^2(B)$ une fonction supportée dans B :

$$\begin{aligned}
 &\| \cos(s\sqrt{H})(\chi_{B_k} \cdot \psi(r^2 H)f) \|_{L^2(\tilde{B})} \\
 &\lesssim \sum_{n=0}^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{s}{r}\right)^n \int_{|y|=1} \| \tilde{\chi}_{B_k}(x + sy) \tilde{\psi}(r^2 H)f(\cdot + sy) \|_{L^2(\tilde{B})} dy \\
 &\lesssim \sum_{n=0}^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{s}{r}\right)^n \int_{S(0,1) \cap A} \| \tilde{\psi}(r^2 H)f \|_{L^2(B_k)} dy,
 \end{aligned}$$

où $S(0, 1)$ est la sphère unité et $A = \frac{1}{s}(B_k - \tilde{B})$. Ainsi, par la décroissance exponentielle du noyau de $\tilde{\psi}(r^2 H)$, on a

$$\begin{aligned}
 \| \cos(s\sqrt{H})(\chi_{B_k} \cdot \psi(r^2 H)f) \|_{L^2(\tilde{B})} &\lesssim \sum_{n=0}^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{s}{r}\right)^n |S(0, 1) \cap A| e^{-c \frac{d(B, B_k)^2}{r^2}} \|f\|_{L^2(B)} \\
 &\lesssim \|f\|_{L^2(B)} \sum_{n=0}^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{r}{s}\right)^{d-1-n} e^{-c \frac{d(B, B_k)^2}{r^2}} \\
 &\lesssim \|f\|_{L^2(B)} \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{d-1}{2}} e^{-c \frac{d(B, B_k)^2}{r^2}}
 \end{aligned}$$

où on a utilisé que le volume $(d-1)$ -dimensionnel de $S(0, 1) \cap A = S(0, 1) \cap \frac{1}{s}(B_k - \tilde{B})$ est équivalent à $\left(\frac{r}{s}\right)^{d-1}$ et $\left(\frac{r}{s}\right)^{d-1-n} \leq \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{d-1}{2}}$. Donc, il reste à évaluer la somme

$$\sum_{s-10r \leq d(\tilde{B}, B_k) \leq s+2r} e^{-c \frac{d(B, B_k)^2}{r^2}}.$$

Puisque

$$d(B, B_k) \geq |d(B, \tilde{B}) - d(\tilde{B}, B_k)| - 2r \geq |L - s| - 4r,$$

alors

$$|L - s|^2 \leq 2(d(B, B_k)^2 + 16r^2)$$

c'est-à-dire

$$d(B, B_k)^2 \geq \frac{|L - s|^2}{2} - 16r^2.$$

Ainsi on en déduit

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{B_k \\ s-10r \leq d(\tilde{B}, B_k) \leq s+2r}} e^{-c \frac{d(B, B_k)^2}{r^2}} &\leq \sum_{B_k} e^{-c \frac{d(B, B_k)^2}{2r^2}} e^{-c \frac{|L-s|^2}{2r^2}} \\ &\lesssim \left(1 + \frac{|L-s|}{r}\right)^{-\frac{d+1}{2}}. \end{aligned}$$

Finalement on a obtenu

$$\begin{aligned} \sum_{s-10r \leq d(\tilde{B}, B_k) \leq s+2r} \|\cos(s\sqrt{H})(\chi_{B_k} \cdot \psi(r^2 H)f)\|_{L^2(\tilde{B})} \\ \lesssim \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{d-1}{2}} \left(1 + \frac{|L-s|}{r}\right)^{-\frac{d+1}{2}} \|f\|_{L^2(B)} \end{aligned}$$

qui est l'estimation souhaitée (pour la dimension impaire).

Étape 3 : Le cas $s - 10r \leq d(B_k, \tilde{B}) \leq s + 2r$ en dimension paire $d \geq 2$.

Dans ce cas le propagateur des ondes est donné par

$$\begin{aligned} \cos(s\sqrt{H})g(x) &= \partial_s \left(\frac{1}{s} \partial_s\right)^{\frac{d-2}{2}} \left(s^{d-1} \int_{|y|<1} g(x+sy) \frac{dy}{\sqrt{1-|y|^2}}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{d}{2}} c_n s^n \int_{|y|<1} \partial_s(g(x+sy)) \frac{dy}{\sqrt{1-|y|^2}}, \end{aligned}$$

pour des constantes numériques c_n . Les mêmes arguments qu'à l'étape 2 donnent

$$\begin{aligned} \|\cos(s\sqrt{H})(\chi_{B_k} \cdot \psi(r^2 H)f)\|_{L^2(\tilde{B})} \\ \lesssim \|f\|_{L^2(B)} \sum_{n=0}^{\frac{d}{2}} \left(\frac{s}{r}\right)^n e^{-c \frac{d(B_k, B)^2}{r^2}} \int_{y \in A \cap B(0,1)} \frac{dy}{\sqrt{1-|y|^2}}, \end{aligned}$$

où $A = \frac{1}{s}(B_k - \tilde{B})$. De plus

$$\begin{aligned} \int_{A \cap B(0,1)} \frac{dy}{\sqrt{1-|y|^2}} &\leq \int_{A \cap B(0,1-\frac{r}{s})} \frac{dy}{\sqrt{1-|y|^2}} + \int_{1-\frac{r}{s}}^1 |S(0,\rho) \cap A| \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ &\leq \int_{A \cap B(0,1)} \left(\frac{s}{r}\right)^{\frac{1}{2}} dy + \left(\frac{r}{s}\right)^{d-1} \int_{1-\frac{r}{s}}^1 \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ &\lesssim \left(\frac{r}{s}\right)^{d-\frac{1}{2}} + \left(\frac{r}{s}\right)^{d-1} [\sqrt{1-\rho}]_{1-\frac{r}{s}}^1 \lesssim \left(\frac{r}{s}\right)^{d-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{s-10r \leq d(\tilde{B}, B_k) \leq s+2r} \|\cos(s\sqrt{H})(\chi_{B_k} \cdot \psi(r^2 H) f)\|_{L^2(\tilde{B})} \\ \lesssim \sum_{B_k} \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{d-1}{2}} e^{-c \frac{d(B, B_k)^2}{r^2}} \|f\|_{L^2(B)} \\ \lesssim \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{d-1}{2}} \left(1 + \frac{|s-L|}{r}\right)^{-\frac{d+1}{2}} \|f\|_{L^2(B)}, \end{aligned}$$

ce qui est l'estimation voulue.

On remarque que puisque $r \lesssim s$, on a $\frac{r}{s} \lesssim \frac{r}{r+s}$ donc en toute dimension $d > 1$:

$$\|\cos(s\sqrt{H})\psi(r^2 H)\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} \lesssim \left(\frac{r}{r+s}\right)^{\frac{d-1}{2}} \left(1 + \frac{|L-s|}{r}\right)^{-\frac{d+1}{2}}.$$

□

2.7 Propagation des ondes dans l'espace Euclidien

Dans cet section, on souhaite vérifier (2.6.2) dans le cas Euclidien, à partir d'une formule globale exacte pour l'opérateur des ondes. On considère l'espace Euclidien $X = \mathbb{R}^d$, équipé de sa structure canonique $H = -\Delta$.

Proposition 2.7.1. *Pour toutes boules $B_r, \tilde{B}_r$ de rayon $r > 0$ et tout $s > 0$, si $L := d(B_r, \tilde{B}_r) \leq s - 10r$ alors*

$$\|\cos(s\sqrt{H})\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\tilde{B}_r)} \lesssim \left(\frac{r}{r+s}\right)^{\frac{d-1}{2}} \left(1 + \frac{|L-s|}{r}\right)^{-\frac{d+1}{2}}.$$

Démonstration. Soit $f \in L^2(B_r)$. Si $d \geq 3$ est impaire, le propagateur des ondes est donné par

$$\cos(s\sqrt{H})f(x) = \sum_{n=0}^{\frac{d-1}{2}} c_n s^n \int_{|y|=1} \partial_s(f(x+sy)) dy,$$

pour des constantes numériques c_n . Si $x \in \widetilde{B}_r$ et $x+sy \in B_r$ alors $y = \frac{x+sy-x}{s} \in \frac{B-\widetilde{B}}{s}$ donc

$$|y| \leq \frac{d(B, \widetilde{B}) + 2r}{s} \leq \frac{s-8r}{s} < 1. \quad (2.7.1)$$

Ainsi

$$\cos(s\sqrt{H})f(x) = 0.$$

Si $d \geq 2$ est paire, le propagateur des ondes est donné par

$$\cos(s\sqrt{H})f(x) = \partial_s \left(\frac{1}{s} \partial_s \right)^{\frac{d-2}{2}} \left(s^{d-1} \int_{|y|<1} f(x+sy) \frac{dy}{\sqrt{1-|y|^2}} \right).$$

On pose

$$I_{n,m} := \int_{|y|<1} f(x+sy) \frac{|y|^{2m}}{(1-|y|^2)^n} dy.$$

Puisque

$$\cos(s\sqrt{H})f(x) = \partial_s \left(\frac{1}{s} \partial_s \right)^{\frac{d-2}{2}} (s^{d-1} I_{\frac{1}{2},0}),$$

on veut évaluer

$$\partial_s I_{n,m} = \int_{|y|<1} \nabla f(x+sy) \cdot y \frac{|y|^{2m}}{(1-|y|^2)^n} dy.$$

Par (2.7.1), le terme de bord dans la formule de Green est nul, et donc

$$\partial_s I_{n,m} = - \int_{|y|<1} \frac{f(x+sy)}{s} \nabla \cdot \left(\frac{y|y|^{2m}}{(1-|y|^2)^n} \right) dy.$$

Par conséquent, avec des constantes numérique $\alpha_{n,m}, \alpha_{n+1,m+1}$, il vient

$$\partial_s I_{n,m} = \frac{1}{s} (\alpha_{n,m} I_{n,m} + \alpha_{n+1,m+1} I_{n+1,m+1}).$$

On en déduit (où on ne change pas la notation pour les coefficients pour simplifier la lecture)

$$\left(\frac{1}{s} \partial_s \right) (s^{d-1} I_{n,m}) = s^{d-3} (\alpha_{n,m} I_{n,m} + \alpha_{n+1,m+1} I_{n+1,m+1}).$$

2.7. Propagation des ondes dans l'espace Euclidien

En itérant cette formule, on obtient que pour $n = \frac{1}{2}$ et $m = 0$

$$\left(\frac{1}{s}\partial_s\right)^{\frac{d-2}{2}}(s^{d-1}I_{\frac{1}{2},0}) = s^{d-1-(d-2)}(\alpha_{\frac{1}{2},0}I_{\frac{1}{2},0} + \cdots + \alpha_{\frac{1}{2}+\frac{d-2}{2},\frac{d-2}{2}}I_{\frac{1}{2}+\frac{d-2}{2},\frac{d-2}{2}}).$$

Donc

$$\cos(s\sqrt{H})f(x) = \alpha_{\frac{1}{2},0}I_{\frac{1}{2},0} + \cdots + \alpha_{\frac{d+1}{2},\frac{d}{2}}I_{\frac{d+1}{2},\frac{d}{2}},$$

où les coefficients $\alpha_{n,m}$ sont des constantes numériques, qui peuvent changer de valeurs de ligne en ligne sans impacter l'estimation finale.

Puisque $\frac{1}{1-|y|^2} \geq 1$ et $|y| \leq 1$, on a

$$\begin{aligned} \|\cos(s\sqrt{H})f\|_{L^2(\widetilde{B}_r)} &\lesssim \left\| \int_{|y|<1} |f(x+sy)| \frac{dy}{(1-|y|^2)^{\frac{d+1}{2}}} \right\|_{L^2(\widetilde{B}_r)} \\ &\lesssim \int_{B(0,1) \cap A} \|f(\cdot + sy)\|_{L^2(\widetilde{B}_r)} \frac{dy}{((1+|y|)(1-|y|))^{\frac{d+1}{2}}} \end{aligned}$$

où $A := \frac{1}{s}(B_r - \widetilde{B}_r)$ de sorte que $|y| \geq \frac{d(B_r, \widetilde{B}_r) - 2r}{s}$. De plus

$$\|f(\cdot + sy)\|_{L^2(\widetilde{B}_r)} \leq \|f\|_{L^2(B_r)}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \|\cos(s\sqrt{H})\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\widetilde{B})} &\lesssim \frac{1}{\left(1 - \frac{L-2r}{s}\right)^{\frac{d+1}{2}}} |B(0,1) \cap A| \\ &\lesssim \left(\frac{s-L+2r}{s}\right)^{-\frac{d+1}{2}} \left(\frac{r}{s}\right)^d \lesssim \left(1 + \frac{|s-L|}{r}\right)^{-\frac{d+1}{2}} \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{d-1}{2}} \\ &\lesssim \left(\frac{r}{r+s}\right)^{\frac{d-1}{2}} \left(1 + \frac{|s-L|}{r}\right)^{-\frac{d+1}{2}}, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est vraie si $r \leq s$. Dans le cas où $s \leq r$ on utilise alors que $|B(0,1) \cap A| \leq |B(0,1)| \lesssim 1$ pour obtenir la même inégalité avec $1 \lesssim \frac{r}{r+s}$ à la place de $\frac{r}{s}$. $\square$

Estimations de dispersion faibles et application à des inégalités de Strichartz avec perte de dérivées

Dans ce chapitre, on se propose d'étendre les résultats du deuxième chapitre en allégeant les hypothèses sur le propagateur des ondes. Plus précisément, les hypothèses du théorème principal de cette partie encodent la dispersion pour l'équation des ondes uniquement au bord du cône de lumière. Dans de nombreuses situations, les phénomènes qui apparaissent près du bord du cône de lumière sont les plus compliqués. On ne fait pas d'hypothèse particulière à l'intérieur du cône (là où le comportement est le plus simple). La méthode que nous présentons ici permet en ce sens de considérer la pire des situations. On se propose de montrer quelles propriétés subsistent par rapport au Chapitre 2. Le premier résultat de ce chapitre montre comment obtenir une estimation de dispersion microlocalisée $L^2 - L^2$ à partir d'hypothèses faibles sur le propagateur des ondes. Dans la suite on montre comment en déduire des inégalités de Strichartz avec pertes de dérivées. Le cadre de travail dans lequel on se place est assez général pour nous permettre d'appliquer ces résultats à une large variété d'exemples (espaces métriques infinis, variétés Riemanniennes avec une métrique non régulière, certains groupes, ...) pour lesquels notre manque de connaissance sur l'équation des ondes est un obstacle à la compréhension du phénomène de dispersion et nécessiterait, dans chaque cas, de mener une étude précise du problème à la fois pour les estimations de dispersion et pour les inégalités de Strichartz.

3.1 Introduction

La famille des inégalités dites de Strichartz est un outil puissant pour étudier des équations de Schrödinger non linéaires. Ces inégalités donnent un contrôle de la taille de la solution d'un problème linéaire en fonction de la taille de la donnée initiale. La notion de taille étant habituellement donnée par un espace fonctionnel adapté $L_t^p L_x^q$. De telles inégalités furent initialement introduites par Strichartz dans [Str77] pour des ondes dans l'espace Euclidien. Elles furent ensuite étendues par Ginibre et Velo dans [GV92] et enfin Keel et Tao dans [KT98] pour le propagateur associé à l'équation de Schrödinger linéaire dans $\mathbb{R}^d$. Ainsi pour une donnée initiale u_0 , on s'intéresse au contrôle de la solution au temps t $u(t, \cdot) = e^{it\Delta}u_0$ de l'équation de Schrödinger linéaire suivante :

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases}$$

Il est bien connu aujourd'hui que le groupe unitaire $(e^{it\Delta})_{t \in \mathbb{R}}$ vérifie les inégalités de Strichartz suivantes :

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^p L^q([-T, T] \times \mathbb{R}^d)} \leq C_T \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

pour toute paire (p, q) d'exposants admissibles, c'est-à-dire : $2 \leq p, q \leq \infty$, $(p, q, d) \neq (2, \infty, 2)$, et

$$\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2}. \quad (3.1.1)$$

Les inégalités des Strichartz se déduisent, via un argument TT^* , de l'estimation de dispersion $L^1 - L^\infty$

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \lesssim |t|^{-\frac{d}{2}} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}. \quad (3.1.2)$$

Si $\sup_{T>0} C_T < +\infty$, on dira que les inégalités de Strichartz sont globales en temps. De telles inégalités globales en temps ont été prouvés par Strichartz pour le Laplacien usuel sur $\mathbb{R}^d$ tandis que les inégalités locales en temps sont connues dans plusieurs situations géométriques où la variété est non piégeante (asymptotiquement Euclidienne, conique, ou hyperbolique) ou pour le groupe de Heisenberg par exemple ; voir [BT07, Bou11, HTW06, ST02, BGX00] ou [RZ05, Tat06] pour une équation à coefficients variables.

Le cas des variétés compactes présente une nouvelle difficulté puisqu'en considérant la donnée initiale constante $u_0 = 1 \in L^2(\mathbb{T})$ sur le tore, on aboutit à une contradiction dans (3.1.2) lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Burq, Gérard, et Tzvetkov [BGT04b] ainsi que Staffilani et Tataru [ST02] ont prouvés que des inégalités de Strichartz étaient valables sur une variété compacte

3.1. Introduction

$\mathcal{M}$ pour un temps fini si on considère une donnée initiale régulière $u_0 \in W^{1/p,2}$. Ces inégalités sont appelées “avec perte de dérivées” :

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^pL^q([-T,T]\times\mathcal{M})} \leq C_T\|u_0\|_{W^{1/p,2}(\mathcal{M})}.$$

Une question intéressante est de déterminer, dans une situation spécifique donnée, quelle est la perte de dérivées optimale (voir par exemple le travail de Bourgain [Bou93] sur le tore plat ou celui [TT01] de Takaoka et Tzvetkov). Par exemple, la perte de $\frac{1}{p}$ dérivées dans [BGT04b] est optimale pour l'équation posée sur une sphère.

Une remarque importante est que, par injection de Sobolev, la perte de $2/p$ dérivées est automatique. En effet, par injection de Sobolev $W^{\frac{2}{p},2} \hookrightarrow L^q$ puisque $\frac{2}{p} - \frac{d}{2} = 0 - \frac{d}{q}$ de sorte que

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^q} \lesssim \|e^{it\Delta}u_0\|_{W^{\frac{2}{p},2}} \leq \|u_0\|_{W^{\frac{2}{p},2}} \quad (3.1.3)$$

et en prenant la norme $L^p([-T,T])$ on obtient

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^pL^q} \leq C_T\|u_0\|_{W^{\frac{2}{p},2}}.$$

Ainsi les inégalités de Strichartz avec perte de dérivées sont intéressantes pour une perte plus petite que $2/p$.

Posons maintenant le cadre de travail de notre étude. On considère un espace métrique mesuré (X, d, μ) équipé d'une mesure de Borel positive et σ -finie μ . On suppose de plus que μ est de régularité Ahlfors, c'est-à-dire qu'il existe une dimension d , et deux constantes positives c et C telles que pour tous $x \in X$ et $r > 0$

$$cr^d \leq \mu(B(x, r)) \leq Cr^d, \quad (3.1.4)$$

où $B(x, r)$ désigne la boule ouverte de centre $x \in X$ et de rayon $0 < r < \text{diam}(X)$. Ainsi, nos résultats ont vocation à s'appliquer dans de nombreux cas d'espaces métriques comme des ouverts de $\mathbb{R}^d$, des variétés lisses de dimension d , certains ensembles fractaux, des groupes de Lie, le groupe de Heisenberg, ...

En gardant en tête l'exemple de l'opérateur Laplacien sur $\mathbb{R}^d$: $\Delta = \sum_{1 \leq j \leq d} \partial_j^2$, nous serons plus général au sens suivant : on considère un opérateur positif auto-adjoint H à domaine dense dans $L^2 = L^2(X, \mu)$, ce qui signifie que l'on suppose que son domaine

$$\mathcal{D}(H) := \{f \in L^2, Hf \in L^2\}$$

est dense dans L^2 .

Une des motivations de ce chapitre est d'étudier les liens entre l'équation des ondes et l'équation de Schrödinger. On définit le propagateur des ondes au temps

$t \cos(t\sqrt{H})$ de la façon suivante : pour tout $f \in L^2$, $u(t, \cdot) := t \mapsto \cos(t\sqrt{H})f$ est l'unique solution du problème des ondes linéaire

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + Hu = 0 \\ u|_{t=0} = f \\ \partial_t u|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (3.1.5)$$

On peut trouver des formulations explicites des solution à un tel problème dans [Fol95] pour le cas d'un espace Euclidien et dans [Bér77] pour le cas d'une variété Riemannienne à travers des formulation précises du noyau de l'opérateur des ondes. À notre connaissance, ces solutions explicites ne sont pas connues dans notre cadre général de travail. Il serait très intéressant d'être capable de calculer explicitement l'expression de la solution de l'équation des ondes dans un cas si général.

La propriété remarquable de cet opérateur vient de sa propagation à vitesse finie : pour deux ouverts disjoints $U_1, U_2 \subset X$, et deux fonctions $f_i \in L^2(U_i)$, $i = 1, 2$, alors

$$\langle \cos(t\sqrt{H})f_1, f_2 \rangle = 0 \quad (3.1.6)$$

pour tout $0 < t < d(U_1, U_2)$. Si $\cos(t\sqrt{H})$ est un opérateur intégral de noyau K_t , alors (3.1.6) veut simplement dire que K_t est supporté dans le cône de lumière :

$$\mathcal{D}_t := \{(x, y) \in X^2, d(x, y) \leq t\}.$$

On suppose que H vérifie (3.1.6). Dans [CS08], Coulhon et Sikora ont prouvé que cette propriété est équivalente aux estimations de Davies-Gaffney :

$$\|e^{-tH}\|_{L^2(E) \rightarrow L^2(F)} \lesssim e^{-\frac{d(E,F)^2}{4t}} \quad (3.1.7)$$

pour tous sous-ensembles E et F de X , et $t > 0$.

On sait que $-H$ est le générateur d'une semi-groupe L^2 -holomorphe $(e^{-tH})_{t \geq 0}$ (voir [Dav97]). On supposera de plus que le semi-groupe de la chaleur $(e^{-tH})_{t \geq 0}$ vérifie les estimations diagonales typiques (pour un opérateur du second ordre) : pour tout $t > 0$, l'opérateur e^{-tH} admet un noyau p_t tel que :

$$|p_t(x, x)| \lesssim \frac{1}{\mu(B(x, \sqrt{t}))}, \quad \forall t > 0, \text{ p.p. } x \in X. \quad (DUE)$$

On sait que ces estimations sur la diagonale s'auto-améliorent en des estimations Gaussiennes complètes ponctuelles (voir [Gri97, Théorème 1.1] ou [CS08, Section 4.2] par exemple) :

$$|p_t(x, y)| \lesssim \frac{1}{\mu(B(x, \sqrt{t}))} \exp\left(-c \frac{d(x, y)^2}{t}\right), \quad \text{p.p. } x, y \in X. \quad (UE)$$

On a déjà mentionné dans le chapitre 2 (voir aussi [BS14] et les autres références de ce chapitre) des exemples pour lesquels les estimations précédentes sont valables.

Lorsque l'on traite de l'équation de Schrödinger sur une variété ou un espace métrique plus général, l'estimation de dispersion $L^1 - L^\infty$ (3.1.2) semble hors d'atteinte. Dans [BS14], les auteurs ont montré comment la remplacer par une estimation $H^1 - \text{BMO}$, avec un espace de Hardy H^1 et un espace BMO ("Bounded Mean Oscillations") tous les deux adaptés au semi-groupe de la chaleur avec lequel on travaille. On ne rappelle pas ici les définitions de ces espaces. On renvoie à [BS14] pour plus de détails.

Pour un entier $m \geq 0$, on pose $\psi_m(x) = x^m e^{-x}$. C'est une famille de fonctions lisse $\psi_m \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ qui s'annulent en 0 (sauf pour $m = 0$) et à l'infini, ce qui nous permet de considérer une partition lisse de l'unité, en utilisant le calcul fonctionnel holomorphe (nécessitant un calcul fonctionnel C_0^∞).

L'hypothèse principale de ce travail est la suivante :

Hypothèse 3.1.1. *Il existe $\kappa \in (0, \infty]$ et un entier m tels que pour tout $s \in (0, \kappa)$, le propageur des ondes $\cos(s\sqrt{H})$ au temps s vérifie la propriété de dispersion suivante :*

$$\|\cos(s\sqrt{H})\psi_m(r^2 H)\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} \lesssim \left(\frac{r}{r+s}\right)^{\frac{d-1}{2}}, \quad (3.1.8)$$

pour toutes boules $B, \tilde{B}$ de rayon $r > 0$.

Cette estimation est microlocalisée dans l'espace physique à travers les boules B et $\tilde{B}$ à l'échelle r et en fréquence à l'échelle $\frac{1}{r}$ par les opérateurs $\psi_m(r^2 H)$, respectant ainsi le principe d'incertitude de Heisenberg. Le paramètre κ est lié à la géométrie de l'espace X (son rayon d'injectivité par exemple).

Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^d$, le phénomène de dispersion $L^2(B) - L^2(\tilde{B})$ semble ne dépendre que de la distance $d(B, \tilde{B})$. En effet, notre intuition est que, dans un milieu isotrope, une onde se propage de la même façon dans toutes les directions. C'est ce qui nous amène à penser que l'Hypothèse 3.1.1 pourrait être prouvée sans utiliser de formule explicite ponctuelle pour le noyau de l'opérateur des ondes ; mais par une approche plus générale, utilisant uniquement des outils de calcul fonctionnel, et qui pourrait donc s'étendre à des situations très variées. À notre connaissance, l'étude d'un tel comportement n'est pas connu, et serait une branche intéressante à étudier.

On a mentionné que la propriété de propagation à vitesse finie (3.1.6) nous donne l'intuition qu'après un temps s , la solution au problème des ondes (3.1.5) avec une donnée initiale supportée dans une boule de rayon r est supportée dans une boule de rayon $r + s$. Étant donné qu'on peut supposer que $r \leq s$ (sinon le calcul fonctionnel borné donne directement l'Hypothèse 3.1.1) et qu'une onde se propage de la même façon dans toutes les directions dans un milieu isotrope, si on

recouvre la sphère de rayon $r + s$ par $N \simeq \left(\frac{r+s}{r}\right)^{d-1}$ boules de rayon r et qu'on utilise le Théorème 3.2.1, on peut conjecturer que le terme $\left(\frac{r}{r+s}\right)^{\frac{d-1}{2}}$ est le terme naturel de dispersion que l'on peut espérer pour de telles ondes; si l'on cherche une estimation uniforme (qui dépend seulement de r et s).

En effet, on insiste sur le fait que l'hypothèse 3.1.1 est plus faible que celle de [BS14], que l'on rappelle ici pour les comparer :

Il existe $\kappa \in (0, \infty]$ et un entier m tel que pour tout $s \in (0, \kappa)$ on a :

$$\|\cos(s\sqrt{H})\psi_m(r^2H)\|_{L^2(B)\rightarrow L^2(\tilde{B})} \lesssim \left(\frac{r}{r+s}\right)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{r}{r+|s-L|}\right)^{\frac{d+1}{2}}, \quad (3.1.9)$$

où $L = d(B, \tilde{B})$. Cette hypothèse décrit plus précisément la dispersion à l'intérieur du cône de lumière.

Cependant (3.1.9) peut s'avérer difficile à prouver dans un cadre général. C'est pourquoi on s'intéresse à l'Hypothèse 3.1.1 et qu'on cherche à prouver ce qu'elle entraîne en terme d'inégalité de Strichartz pour l'équation de Schrödinger. L'estimation (3.1.8) devrait en effet être beaucoup plus facile à montrer dans des exemples concrets.

Pour plus d'informations sur l'hypothèse 3.1.1, on renvoie à la section 3.2.4. Par conséquent, les résultats qui découleront de cette hypothèse seront naturellement plus faibles. On rappelle le Théorème 1.3 de [BS14] pour mettre en relief ses différences avec le présent Théorème 3.1.4.

Théorème 3.1.2 ([BS14]). *Supposons (3.1.4) pour $d > 1$, (DUE) et l'hypothèse (3.1.9) avec $\kappa \in (0, \infty]$. Alors pour tout entier $m \geq \max(\frac{d}{2}, m_0 + \lceil \frac{d-1}{2} \rceil)$ on a :*

- *si $\kappa = \infty$, alors on obtient des inégalités de Strichartz sans perte de dérivées ;*
- *si $\kappa < \infty$, alors pour tout $0 < \varepsilon < 1$, tout $0 < h \leq 1$ tels que $h^2 \leq |t| < h^{1+\varepsilon}$ et tout entier $m' \geq 0$, on obtient des inégalités de Strichartz avec perte de $\frac{1+\varepsilon}{p}$ dérivées.*

La preuve de ce théorème repose sur la réduction de l'estimation de dispersion $H^1 - \text{BMO}$ à une estimation microlocalisée $L^2 - L^2$, puis sur la façon de relier la dispersion pour le propagateur des ondes à la dispersion pour le groupe de Schrödinger.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer notre premier théorème.

Théorème 3.1.3. *Supposons (3.1.4) pour $d > 2$, $m \geq \lceil \frac{d}{2} \rceil$, (DUE) et que l'Hypothèse (3.1.1) est satisfaite, alors pour toutes boules $B, \tilde{B}$ de même rayon $r > 0$ et pour tout $0 < h \leq 1$:*

$$\|e^{itH}\psi_{m'}(h^2H)\psi_m(r^2H)\|_{L^2(B)\rightarrow L^2(\tilde{B})} \lesssim \frac{r^d}{|t|^{\frac{d-2}{2}}h^2}, \quad (3.1.10)$$

3.1. Introduction

où $m' \geq 0$ et $0 < |t| \leq 1$ si $\kappa = +\infty$, et $h^2 \leq |t| \leq h^{1+\varepsilon}$ si $\kappa < +\infty$.

Ce résultat montre comment la dispersion pour le propagateur des ondes implique la dispersion pour le groupe de Schrödinger dans notre cas. L'outil principal qui fait le lien entre ces deux opérateurs est la formule de transmutation d'Hadamard :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0, e^{-zH} = \int_0^{+\infty} \cos(s\sqrt{H}) e^{-\frac{s^2}{4z}} \frac{ds}{\sqrt{\pi z}}. \quad (3.1.11)$$

On l'obtient à partir d'un théorème de Cauchy d'analyse complexe et du calcul fonctionnel holomorphe pour l'opérateur H .

Le second théorème suit la méthode de [BS14] pour déduire des inégalités de Strichartz à partir des estimations $L^2 - L^2$ précédentes.

Théorème 3.1.4. *Supposons (3.1.4) pour $d > 2$, (DUE), et l'Hypothèse 3.1.1. Alors pour tous $2 \leq p \leq +\infty$ et $2 \leq q < +\infty$ vérifiant*

$$\frac{2}{p} + \frac{d-2}{q} = \frac{d-2}{2},$$

et toute solution $u(t, \cdot) = e^{itH}u_0$ du problème

$$\begin{cases} i\partial_t u + Hu = 0 \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases}$$

on a :

- *si $\kappa = \infty$, alors u satisfait des inégalités de Strichartz locales en temps avec perte de dérivées*

$$\|u\|_{L^p([-1,1], L^q)} \lesssim \|u_0\|_{W^{2(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}), 2}}; \quad (3.1.12)$$

- *si $\kappa < \infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, u satisfait des inégalités de Strichartz locales en temps avec perte de dérivées*

$$\|u\|_{L^p([-1,1], L^q)} \lesssim \|u_0\|_{W^{\frac{1+\varepsilon}{p}+2(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}), 2}}. \quad (3.1.13)$$

On voudrait souligner le fait que la perte de dérivées triviale donnée par les injections de Sobolev lorsque

$$\frac{2}{p} + \frac{d-2}{q} = \frac{d-2}{2}$$

est

$$\frac{2}{p} + 1 - \frac{2}{q}.$$

Ainsi la perte est non triviale ici. Pour plus d'information sur la perte de dérivées, on renvoie aux Remarques 3.3.7 et 3.3.8. Il est intéressant de voir comment une telle propriété faible de dispersion implique une propriété de dispersion, donc des inégalités de Strichartz, pour l'équation de Schrödinger.

L'idée de la preuve est similaire à celle de [BS14]. Plus précisément, l'amélioration principale est due à un suivi précis des constantes dans certaines estimations clés (dans les résultats de [KT98] par exemple).

Le but de ce chapitre est de donner une meilleure compréhension du lien entre la dispersion pour le propagateur des ondes et la dispersion qu'elle implique pour l'équation de Schrödinger, ainsi que les inégalités de Strichartz qui en découlent, dans certains contextes où on ne connaît pas d'estimations de dispersion précises pour le propagateur des ondes. En d'autres termes, si on peut donner une information même imprécise sur le propagateur des ondes, dans un cadre très général, cela permettrait d'en déduire de l'information sur l'équation de Schrödinger dans ce cadre.

L'organisation du chapitre est la suivante : Dans la Section 3.2 on pose les notations utilisées tout au long du chapitre et on rappelle quelques faits préliminaires concernant le semi-groupe, les espaces de Hardy et BMO, ainsi que les motivations derrière l'Hypothèse 3.1.1. Ensuite, la Section 3.3 est dédiée aux preuves des Théorèmes 3.1.3 et 3.1.4.

3.2 Définitions et préliminaires

3.2.1 Notations

On note $\text{diam}(X) := \sup_{x,y \in X} d(x,y)$ le diamètre d'un espace métrique X . Pour $B(x, r)$ une boule ouverte de centre $x \in X$ et de rayon $r > 0$, et tout paramètre $\lambda > 0$, on note $\lambda B(x, r) := B(x, \lambda r)$ la boue dilatée et concentrique. Une conséquence de (3.1.4) est qu'une boule $B(x, \lambda r)$ peut être recouverte par $C\lambda^d$ boules de rayon r , uniformément en $x \in X$, $r > 0$ et $\lambda > 1$ (C est une constante dépendant uniquement de l'espace ambiant). Si aucune confusion n'est permise, on notera L^p à la place de $L^p(X, \mu)$ pour $p \in [1, +\infty]$.

Pour $s > 0$ et $p \in [1, +\infty]$, on désigne par $W^{s,p}$ l'espace de Sobolev d'ordre s basé sur L^p , équipé de la norme

$$\|f\|_{W^{s,p}} := \|(1 + H)^{\frac{s}{2}} f\|_{L^p}.$$

On utilisera la notation $u \lesssim v$ pour dire qu'il existe une constante C (indépendante des paramètres importants) telle que $u \leq Cv$ et $u \simeq v$ pour signifier qu'à la fois

$u \lesssim v$ et $v \lesssim u$. Si Ω est un ensemble, $\mathbf{1}_\Omega$ est la fonction indicatrice de l'ensemble Ω , définie par

$$\mathbf{1}_\Omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega \end{cases}.$$

tout au long de ce chapitre, sauf mention expresse du contraire, on supposera que $d > 2$, (3.1.4), (DUE), (3.1.7), et l'Hypothèse 3.1.1 sont vérifiées.

3.2.2 Le semi-groupe de la chaleur et le calcul fonctionnel associé

On considère un opérateur positif auto-adjoint H sur $L^2 = L^2(X, \mu)$ à domaine dense. On rappelle le théorème de calcul fonctionnel borné de [RS72] :

Théorème 3.2.1. *H admet un calcul fonctionnel L^∞ . C'est-à-dire, si $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, alors on peut considérer l'opérateur $f(H)$ comme un opérateur borné sur L^2 et :*

$$\|f(H)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \|f\|_{L^\infty}.$$

À partir des estimations Gaussiennes du noyau de la chaleur (UE) et de l'analyticité du semi-groupe (voir [CCO02]) on peut montrer que pour tout entier $m \in \mathbb{N}$ et tout $t > 0$, l'opérateur $\psi_m(tH)$ a un noyau $p_{m,t}$ vérifiant aussi les estimations Gaussiennes :

$$|p_{m,t}(x, y)| \lesssim \frac{1}{\mu(B(x, \sqrt{t}))} \exp\left(-c \frac{d(x, y)^2}{t}\right), \quad \text{p.p. } x, y \in X. \quad (3.2.1)$$

On donne maintenant quelques résultats de base à propos du semi-groupe de la chaleur sous nos hypothèses. Les preuves de ces résultats peuvent être trouvées à la Section 2 de [BS14].

Proposition 3.2.2. *Sous les hypothèses (3.1.4) et (DUE), le semi-groupe de la chaleur est uniformément borné sur tous les espaces L^p pour $p \in [1, \infty]$. Plus précisément pour tout $f \in L^p$, on a :*

$$\sup_{t>0} \|e^{-tH} f\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p}.$$

De plus, pour $m \in \mathbb{N}$ et $t > 0$, puisque $\psi_m(tH)$ vérifie aussi (DUE) on a :

$$\sup_{t>0} \|\psi_m(tH)\|_{L^p \rightarrow L^p} \lesssim 1.$$

On définit maintenant quelques outils utiles à la théorie de Littlewood-Paley dont nous auront besoin par la suite. Pour tout $\lambda > 0$ on pose :

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) &:= \int_{\lambda}^{+\infty} \psi_m(u) \frac{du}{u}, \\ \tilde{\varphi}(\lambda) &:= \int_0^{\lambda} \psi_m(v) \frac{dv}{v} = \int_0^1 \psi_m(\lambda u) \frac{du}{u}.\end{aligned}$$

Remarque 3.2.3. *Il est à noter que φ est, par intégration par parties, une combinaison linéaire finie de fonctions ψ_k pour $k \in \{0, \dots, m\}$. De plus, pour tout $\lambda > 0$:*

$$\tilde{\varphi}(\lambda) + \varphi(\lambda) = \int_0^{+\infty} u^{m-1} e^{-u} du = \Gamma(m).$$

Le théorème suivant sera utile pour estimer les normes L^p à travers le semi-groupe de la chaleur.

Théorème 3.2.4. *Supposons (3.1.4) et (DUE). Pour tout entier $m \geq 1$ et tout $p \in (1, \infty)$, on a :*

$$\|f\|_{L^p} \simeq \|\varphi(H)f\|_{L^p} + \left\| \left(\int_0^1 |\psi_m(uH)f|^2 \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}.$$

Donc, si $q \geq 2$,

$$\|f\|_{L^q} \lesssim \|\varphi(H)f\|_{L^q} + \left(\int_0^1 \|\psi_m(uH)f\|_{L^q}^2 \frac{du}{u} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il faut comprendre un tel résultat comme une version “semi-groupe” de la caractérisation de Littlewood-Paley des espaces de Lebesgue. Une preuve de ce théorème est donnée dans [BS14] (Théorème 2.8).

3.2.3 Espaces de Hardy et BMO

On définit dans cette partie l’espace de Hardy adapté à notre situation (c’est-à-dire à la structure de semi-groupe) en utilisant la construction atomique introduite dans [BZ08]. Encore une fois nous résumons les définitions et propriétés qui nous seront utiles par la suite, sans en donner de preuves. Celles-ci, ainsi qu’une explication plus détaillée de la construction peut être trouvée dans [BS14].

On note $\mathcal{Q}$ la collection de toutes les boules de X :

$$\mathcal{Q} := \{B(x, r), x \in X, r > 0\}.$$

3.2. Définitions et préliminaires

On définit une famille d'opérateurs $(B_Q)_{Q \in \mathcal{Q}}$ par

$$\forall Q \in \mathcal{Q}, B_Q := (1 - e^{-r^2 H})^M,$$

où r désigne le rayon d'une boule Q et M est un entier technique (assez grand). Ces opérateurs sont bornés sur L^2 uniformément en $r > 0$. En effet, en développant, B_Q est une combinaison linéaire finie d'opérateurs $e^{-kr^2 H}$ pour $k \in \{0, \dots, M\}$ et le Théorème 3.2.1 donne

$$\|e^{-kr^2 H}\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \|x \mapsto e^{-kr^2 x}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \leq 1,$$

puisque H est positif.

Définition 3.2.5. Une fonction $a \in L^1_{loc}$ est un atome associé à la boule Q s'il existe une fonction f_Q dont le support est inclus dans Q telle que $a = B_Q(f_Q)$, avec

$$\|f_Q\|_{L^2(Q)} \leq (\mu(Q))^{-\frac{1}{2}}.$$

Cette condition de taille nous permet de normaliser f_Q dans L^1 . En effet, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\|f_Q\|_{L^1} \leq \|f_Q\|_{L^2(Q)} \mu(Q)^{\frac{1}{2}} \leq 1.$$

De plus, B_Q est borné sur L^1 donc chaque atome est dans L^1 ; et ils sont aussi normalisés dans L^1 :

$$\sup_a \|a\|_{L^1} \lesssim 1, \tag{3.2.2}$$

on où prend la borne supérieure sur l'ensemble des atomes.

On donne donc la définition de l'espace de Hardy par décomposition atomique.

Définition 3.2.6. Une fonction mesurable h appartient à l'espace de Hardy H^1 s'il existe une décomposition

$$h = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i a_i \quad \mu - p.p.$$

où les $(a_i)_i$ sont des atomes et les $(\lambda_i)_i$ des nombres réels vérifiant

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} |\lambda_i| < +\infty.$$

On équipe l'espace H^1 de la norme

$$\|h\|_{H^1} := \inf_{h = \sum_i \lambda_i a_i} \sum_{i \in \mathbb{N}} |\lambda_i|,$$

où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des décompositions atomiques.

Pour une définition plus générale et des propriétés sur les espaces atomiques on renvoie à [Ber10, BZ08], et les autres références du chapitre. De (3.2.2), on déduit :

Corollaire 3.2.7. *L'espace de Hardy H^1 s'injecte continument dans L^1 :*

$$\|f\|_{L^1} \lesssim \|f\|_{H^1}.$$

Par [BZ08, Corollaire 7.2], l'espace de Hardy H^1 est aussi un espace de Banach.

On renvoie le lecteur à [BZ08, Section 8], pour plus de détail sur le problème d'identification de l'espace dual $(H^1)^*$ avec l'espace BMO. Pour une fonction de L^∞ , on définit la norme BMO par :

$$\|f\|_{\text{BMO}} := \sup_Q \left(\int_Q |B_Q(f)|^2 d\mu \right)^{1/2},$$

où la borne supérieure est prise sur toutes les boules. Si $f \in L^\infty$ alors $B_Q(f)$ est aussi uniformément borné (par rapport à la boule Q), puisque le semi-groupe de la chaleur est uniformément borné sur L^∞ (voir Proposition 3.2.2), donc $\|f\|_{\text{BMO}}$ est finie.

Définition 3.2.8. *L'espace fonctionnel BMO est défini comme l'adhérence*

$$\text{BMO} := \overline{\{f \in L^\infty + L^2, \|f\|_{\text{BMO}} < \infty\}}$$

pour la norme BMO.

En suivant [BZ08, Section 8], on montre que BMO s'injecte continument dans l'espace dual $(H^1)^*$ et contient L^∞ :

$$L^\infty \hookrightarrow \text{BMO} \hookrightarrow (H^1)^*.$$

D'où

$$\|T\|_{H^1 \rightarrow (H^1)^*} \lesssim \|T\|_{H^1 \rightarrow \text{BMO}}, \quad (3.2.3)$$

et on a le résultat d'interpolation suivant :

$$\forall \theta \in (0, 1), \quad (L^2, \text{BMO})_\theta \hookrightarrow (L^2, (H^1)^*)_\theta. \quad (3.2.4)$$

Le théorème d'interpolation entre espace de Hardy et espace de Lebesgue est une des clés de voûte de notre méthode.

Théorème 3.2.9. *Pour tout $\theta \in (0, 1)$, on considère les exposants $p \in (1, 2)$ $q = p' \in (2, \infty)$ donnés par*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{2} + \theta \quad \text{et} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{2}.$$

Alors (en utilisant les notation de la théorie de l'interpolation), on a :

$$(L^2, H^1)_\theta = L^p \quad \text{et} \quad (L^2, (H^1)^*)_\theta \hookrightarrow L^q,$$

si l'espace ambiant X est non borné et

$$L^p \hookrightarrow L^2 + (L^2, H^1)_\theta \quad \text{et} \quad L^2 \cap (L^2, (H^1)^*)_\theta \hookrightarrow L^q,$$

si l'espace X est borné.

Le même résultat est vrai en remplaçant $(H^1)^*$ par BMO grâce à (3.2.4).

Remarque 3.2.10. On ne fera pas mention du cas d'un espace X borné dans les preuves qui suivent car l'interpolation est plus délicate dans ce cas. Le lecteur intéressé pourra trouver le théorème d'interpolation correspondant (Théorème 2.17) dans [BS14] et vérifier que les résultats s'appliquent aussi à ce cas.

3.2.4 Motivation de l'hypothèse

Cette section est dédiée à l'explication des motivations de l'Hypothèse principale 3.1.1.

Comme on l'a dit en introduction de ce chapitre, l'Hypothèse 3.1.1 est plus faible que l'hypothèse de [BS14] sur la dispersion pour l'opérateur des ondes :

$$\|\cos(s\sqrt{H})\psi_m(r^2H)\|_{L^2(B)\rightarrow L^2(\tilde{B})} \lesssim \left(\frac{r}{r+s}\right)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{r}{r+|s-L|}\right)^{\frac{d+1}{2}}, \quad (3.2.5)$$

où $L = d(B, \tilde{B})$. Ainsi dans toutes les situation où (3.2.5) est satisfaite, on peut assurer que l'Hypothèse 3.1.1 est automatiquement valide. Lorsque l'on a une bonne connaissance de l'opérateur des ondes, on peut aussi montrer que l'Hypothèse 3.1.1 est vérifiée. C'est le cas grâce à une parametrix donnée par [Bér77] dans les cas suivants :

- L'espace Euclidien $\mathbb{R}^d$ muni du Laplacien usuel $H = -\Delta = -\sum_{j=1}^d \partial_j^2$;
- une variété Riemannienne compacte de dimension d munie de l'opérateur de Laplace-Beltrami ;
- une variété Riemannienne lisse non compacte de dimension d avec une géométrie bornée C_b^∞ munie de l'opérateur de Laplace-Beltrami ;
- l'espace Euclidien $\mathbb{R}^d$ équipé de la mesure $d\mu = \rho dx$ et $H = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div}(A \nabla)$, où ρ est une fonction uniformément non dégénérée et A une matrice dont les coefficients ont des dérivées bornées.

De plus on peut vérifier que pour une variété non piégeante asymptotiquement conique munie de $H = -\Delta + V$, l'hypothèse est vraie. On retrouve ainsi, avec une preuve différente, le résultat de [HZ16].

Néanmoins dans [ILP14], Ivanovici, Lebeau, et Planchon ont prouvé que pour le Laplacien dans un domaine convexe de dimension $d \geq 2$ de $\mathbb{R}^d$, il y avait une perte inévitable de $s^{\frac{1}{4}}$ dans le terme de dispersion, à savoir :

$$\|\cos(s\sqrt{H})\psi_m(r^2H)\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} \lesssim \left(\frac{r}{r+s}\right)^{\frac{d-1}{2}-\frac{1}{4}} \left(\frac{r}{r+|s-L|}\right)^{\frac{d+1}{2}}. \quad (3.2.6)$$

Cette perte indique une difficulté lorsque l'on s'approche du bord d'un domaine. Les auteurs ont utilisés des techniques d'intégrales oscillantes et une étude minutieuse des réflexions sur le bord du domaine pour montrer ce résultat.

Une remarque de J.-M. Bouclet pour contourner l'utilisation d'une parametrix (inconnue dans de nombreux cas) nous a amené à étudier la méthode des champs de vecteurs de Klainerman. Elle peut être trouvée en détail dans [Kla01] et [Sog95]. Brièvement, il s'agit d'obtenir une estimation de dispersion pour le propagateur des ondes en utilisant les "symétries" du problèmes à travers des champs de vecteurs commutant avec l'opérateur des ondes. Si on peut trouver assez de champs de vecteurs qui commutent avec le propagateur des ondes, en utilisant une version des inégalités de Sobolev, aussi connues sous le nom d'inégalités de Klainerman-Sobolev, on peut montrer (voir [Sog95, Remarque 1.4]) ce qui, avec nos notations, donnerait la dispersion suivante :

$$\|\cos(s\sqrt{H})\psi_m(r^2H)\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} \lesssim \left(\frac{r}{r+s}\right)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{r}{r+|s-L|}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.2.7)$$

Cette estimation est très proche de notre hypothèse 3.1.1, mais elle prend en compte une part de la dispersion à l'intérieur du cône de lumière. Dans ce sens, cette estimation est intermédiaire entre notre Hypothèse 3.1.1 et l'estimée (3.2.5). Une question que nous aimerions poursuivre d'étudier est de trouver assez de champs de vecteurs bien adaptés pour appliquer cette méthode dans un cadre général. Les cadres de travail pour lesquels on espère vérifier (3.2.7) sont quand H est un opérateur sous forme divergence, c'est-à-dire

$$H = -\operatorname{div}(A\nabla).$$

Lorsque $A = I_d$ est la matrice identité de taille d , H est le Laplacien usuel. Dans ce cas, et lorsque A a des coefficients $C^{1,1}$ (dérivables avec des premières dérivées lipschitziennes), Klainerman a obtenu dans [Kla01] une propriété de dispersion de la forme (3.2.7). Ce n'est pas un résultat nouveau puisque l'estimation est déjà prouvée dans [Smi98]. La nouveauté dans [Kla01] est de contourner l'utilisation d'une parametrix, qui, on le rappelle, n'est connu qu'en de rares cas.

3.3 Preuves des Théorèmes

Cette section est consacrée aux preuves des résultats 3.1.3 et 3.1.4 annoncés. Le premier théorème montre quelle propriété de dispersion $L^2 - L^2$ on peut obtenir grâce à l'Hypothèse 3.1.1. Le second résultat montre quelles inégalités de Strichartz découlent de ces estimations de dispersion. On rappelle que notre but est de traiter une hypothèse assez faible de dispersion sur l'opérateur des ondes, pour savoir quelles propriétés sur l'opérateur de Schrödinger en découlent.

3.3.1 Estimations de dispersion pour l'opérateur de Schrödinger

Le résultat principal de cette partie est le suivant :

Théorème 3.3.1. *Si on suppose que $d > 2$, $m \geq \lceil \frac{d}{2} \rceil$, et que l'Hypothèse 3.1.1 est vérifiée, alors pour toutes boules $B, \tilde{B}$ de même rayon $r > 0$ et tout $0 < h \leq 1$:*

$$\|e^{itH}\psi_{m'}(h^2H)\psi_m(r^2H)\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} \lesssim \frac{r^d}{|t|^{\frac{d-2}{2}}h^2}, \quad (3.3.1)$$

pour tout $m' \geq 0$ et où $0 < |t| \leq 1$ si $\kappa = +\infty$ et $h^2 \leq |t| \leq h^{1+\varepsilon}$ si $\kappa < +\infty$.

Démonstration. Fixons deux boules B et $\tilde{B}$ de rayon $r > 0$. On commence la preuve en faisant quelques réductions élémentaires.

On remarque d'abord que l'on peut se restreindre à prouver le théorème pour $h \leq r$. En effet, si le théorème est vrai pour $h \leq r$ alors pour tout $h > r$,

$$\begin{aligned} & \|e^{itH}\psi_{m'}(h^2H)\psi_m(r^2H)\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} \\ &= \frac{r^{2m}}{(\frac{h^2}{2} + r^2)^m} \|e^{itH}\psi_{m'}(\frac{h^2}{2}H)\psi_m((\frac{h^2}{2} + r^2)H)\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} \\ &\lesssim \left(\frac{r}{h}\right)^{2m} \|e^{itH}\psi_{m'}(\frac{h^2}{2}H)\psi_m((\frac{h^2}{2} + r^2)H)\|_{L^2(B_\rho) \rightarrow L^2(\tilde{B}_\rho)} \end{aligned}$$

où $\rho = \frac{h^2}{2} + r^2 > r$, $B_\rho = \frac{\rho}{r}B$ et $\tilde{B}_\rho = \frac{\rho}{r}\tilde{B}$ sont de rayon ρ . Puisque $\frac{h^2}{2} + r^2 \geq \frac{h^2}{2}$, on obtient alors

$$\|e^{itH}\psi_{m'}(h^2H)\psi_m(r^2H)\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} \lesssim \left(\frac{r}{h}\right)^{2m} \frac{\rho^d}{|t|^{\frac{d-2}{2}}h^2}.$$

On conclut en utilisant que $\rho \lesssim h$ et

$$\frac{r^{2m}h^d}{h^{2m}} = r^d \left(\frac{r}{h}\right)^{2m-d} \leq r^d.$$

De plus on n'a besoin de prouver le théorème que pour $m' = 0$. En effet, si on montre que

$$\|e^{itH}\psi_0(h^2H)\psi_m(r^2H)\|_{L^2(B)\rightarrow L^2(\tilde{B})} \lesssim \frac{r^d}{|t|^{\frac{d-2}{2}}h^2},$$

alors pour tout $m' \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} & \|e^{itH}\psi_{m'}(h^2H)\psi_m(r^2H)\|_{L^2(B)\rightarrow L^2(\tilde{B})} \\ &= \left(\frac{h}{r}\right)^{2m'} \|e^{itH}\psi_0(h^2H)\psi_{m+m'}(r^2H)\|_{L^2(B)\rightarrow L^2(\tilde{B})} \\ &\lesssim \frac{r^d}{|t|^{\frac{d-2}{2}}h^2} \end{aligned}$$

car $h \leq r$.

Enfin, il suffit de considérer $r^2 \leq t$ puisque si $r^2 > t$, alors le calcul fonctionnel borné montre que

$$\|e^{itH}\psi_{m'}(h^2H)\psi_m(r^2H)\|_{L^2(B)\rightarrow L^2(\tilde{B})} \lesssim 1 \leq \left(\frac{r^2}{|t|}\right)^{\frac{d-2}{2}} \leq \frac{r^d}{|t|^{\frac{d-2}{2}}h^2}.$$

En résumé, on fixe $h \leq r$, $m' = 0$, et $r^2 \leq t$.

Dans le but d'éviter des termes de bords non nuls dans les intégrations par parties à venir, on introduit une fonction technique $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ telle que

$$\begin{cases} 0 \leq \chi \leq 1 \\ \chi(x) = 1 \text{ si } x \in [0, \frac{|t|}{r}] \\ \chi(x) = 0 \text{ si } x \in [2\frac{|t|}{r}, +\infty] \end{cases}.$$

De plus, on suppose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+, |\chi^{(n)}(x)| \lesssim \left(\frac{r}{|t|}\right)^n$.

On sépare l'intégrale (3.1.11) en deux :

$$e^{-zH} =$$

$$\int_0^{+\infty} \chi(s) \cos(s\sqrt{H}) e^{-\frac{s^2}{4z}} \frac{ds}{\sqrt{\pi z}} + \int_0^{+\infty} (1 - \chi(s)) \cos(s\sqrt{H}) e^{-\frac{s^2}{4z}} \frac{ds}{\sqrt{\pi z}}. \quad (3.3.2)$$

On traite le premier par intégration par parties. En faisant $2n$ intégrations par parties (avec n à déterminer plus tard) on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \cos(s\sqrt{H}) \psi_m(r^2H) \chi(s) e^{-\frac{s^2}{4z}} ds = \\ & \int_0^\infty \cos(s\sqrt{H}) r^{2n} \psi_{m-n}(r^2H) \sum_{k=0}^{2n} \chi^{(2n-k)}(s) e^{-\frac{s^2}{4z}} \left(c_k \frac{s^k}{z^k} + \dots + c_{n-2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{s^{k-2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}}{z^{k-\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} \right) ds, \end{aligned}$$

3.3. Preuves des Théorèmes

pour des constantes numériques $(c_i)_i$ ne jouant aucun rôle significatif. En ne gardant que les termes extrémaux (un lorsque $k = 0$ et deux quand $k = 2n$) on doit estimer :

$$\int_0^{2\frac{|t|}{r}} \|\cos(s\sqrt{H})\psi_{m-n}(r^2H)\|_{L^2(B)\rightarrow L^2(\tilde{B})} r^{2n} \left(\left(\frac{r}{|t|} \right)^{2n} + \frac{s^{2n}}{|t|^{2n}} + \frac{1}{|t|^n} \right) \frac{ds}{\sqrt{|t|}}.$$

Par continuité de nos opérateurs

$$\|\cos(s\sqrt{H})\psi_{m-n}(r^2H)\|_{L^2(B)\rightarrow L^2(\tilde{B})} \lesssim 1,$$

on peut estimer

$$\begin{aligned} \int_0^{2\frac{|t|}{r}} \left(\frac{r^2}{|t|} \right)^{2n} \frac{ds}{\sqrt{|t|}} &\lesssim \left(\frac{r^2}{|t|} \right)^{2n-\frac{1}{2}}; \\ \int_0^{2\frac{|t|}{r}} \frac{r^{2n}}{|t|^n} \frac{ds}{\sqrt{|t|}} &\lesssim \left(\frac{r^2}{|t|} \right)^{n-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En utilisant l'Hypothèse 3.1.1 on a donc

$$\int_0^{2\frac{|t|}{r}} \left(\frac{r}{r+s} \right)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{rs}{|t|} \right)^{2n} \frac{ds}{\sqrt{|t|}} \leq \int_0^{2\frac{|t|}{r}} \frac{r^{\frac{d-1}{2}+2n}}{|t|^{2n+\frac{1}{2}}} s^{2n-\frac{d-1}{2}} ds \simeq \left(\frac{r^2}{|t|} \right)^{\frac{d-2}{2}}.$$

Ainsi, le comportement des termes intermédiaires donnant le même comportement, pour n assez grand on a

$$\left\| \int_0^\infty \cos(s\sqrt{H})\psi_m(r^2H)\chi(s)e^{-\frac{s^2}{4z}} \frac{ds}{\sqrt{z}} \right\|_{L^2(B)\rightarrow L^2(\tilde{B})} \lesssim \left(\frac{r^2}{|t|} \right)^{\frac{d-2}{2}}.$$

Puisque $h \leq r$

$$\left(\frac{r^2}{|t|} \right)^{\frac{d-2}{2}} \leq \frac{r^d}{|t|^{\frac{d-2}{2}} h^2}.$$

Pour estimer le second terme de (3.3.2), on traite séparément les cas $s < \kappa$ et $s > \kappa$.

$$\int_0^{+\infty} (1 - \chi(s)) \cos(s\sqrt{H}) e^{-\frac{s^2}{4z}} \frac{ds}{\sqrt{\pi z}} = \int_{\frac{|t|}{r}}^\kappa \cos(s\sqrt{H}) e^{-\frac{s^2}{4z}} \frac{ds}{\sqrt{\pi z}} + I_\kappa,$$

où

$$I_\kappa = \begin{cases} 0 & \text{si } \kappa = +\infty \\ \int_\kappa^{+\infty} \cos(s\sqrt{H}) e^{-\frac{s^2}{4z}} \frac{ds}{\sqrt{\pi z}} & \text{si } \kappa < +\infty \end{cases}.$$

On utilise la décroissance exponentielle pour $s > \kappa$. En notant $z = h^2 - i|t|$, et en utilisant le calcul fonctionnel borné pour l'opérateur $\cos(s\sqrt{H})\psi_m(r^2H)$, si $\kappa > +\infty$:

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\kappa}^{+\infty} \cos(s\sqrt{H})\psi_m(r^2H) e^{-\frac{s^2}{4z}} \frac{ds}{\sqrt{z}} \right\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} &\lesssim \int_{\kappa}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{8} \operatorname{Re} \frac{1}{z}} e^{-\frac{s^2}{8} \operatorname{Re} \frac{1}{z}} \frac{ds}{\sqrt{|z|}} \\ &\lesssim \int_{\frac{\kappa}{8} \sqrt{\operatorname{Re} \frac{1}{z}}}^{+\infty} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{|z|} \operatorname{Re} \frac{1}{z}} e^{-\frac{\kappa^2 \operatorname{Re} \frac{1}{z}}{8}} \\ &\lesssim \left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \right) \frac{\sqrt{|t|}}{h} e^{-\frac{\kappa^2 h^2}{16t^2}} \\ &\lesssim \left(\frac{h^2}{t^2} \right)^{-N} \frac{\sqrt{|t|}}{h} \end{aligned}$$

pour tout $N \geq 1$ aussi grand que l'on veut et où on a utilisé que $|z| \simeq |t|$ et $\operatorname{Re} \frac{1}{z} \geq \frac{h^2}{2t^2}$. De plus

$$\frac{|t|^{2N+\frac{1}{2}}}{h^{2N+1}} \leq \frac{h^d}{|t|^{\frac{d-2}{2}} h^2} \leq \frac{r^d}{|t|^{\frac{d-2}{2}} h^2}$$

dés que $|t|^{2N+\frac{d-2}{2}+\frac{1}{2}} \leq h^{2N+d-1}$ c'est-à-dire $|t| \leq h^{1+\frac{\frac{d-1}{2}}{2N+\frac{d-1}{2}}}$. Ce qui est vrai puisque

$$|t| \leq h^{1+\varepsilon} \leq h^{1+\frac{\frac{d-1}{2}}{2N+\frac{d-1}{2}}}$$

pour N assez grand.

Remarque 3.3.2. On fait remarquer que c'est le seul moment de la preuve qui utilise que $|t| \leq h^{1+\varepsilon}$. C'est pourquoi on n'en a pas besoin lorsque $\kappa = +\infty$ et que la perte de dérivées dans les inégalités de Strichartz de Théorème 3.1.4 est meilleure lorsque $\kappa = +\infty$.

On utilise l'Hypothèse 3.1.1 quand $s < \kappa$. En effet elle implique

$$\left\| \int_{\frac{|t|}{r}}^{\kappa} \cos(s\sqrt{H})\psi_m(r^2H) e^{-\frac{s^2}{4z}} \frac{ds}{\sqrt{z}} \right\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} \lesssim \int_{\frac{|t|}{r}}^{\kappa} \left(\frac{r}{r+s} \right)^{\frac{d-1}{2}} e^{-\frac{s^2}{4} \operatorname{Re} \frac{1}{z}} \frac{ds}{\sqrt{|t|}}.$$

Lorsque $\frac{d-1}{2} > 1$ (i.e. $d > 3$) on a

$$\begin{aligned} \int_{\frac{|t|}{r}}^{\kappa} \left(\frac{r}{r+s} \right)^{\frac{d-1}{2}} \frac{ds}{\sqrt{|t|}} &\leq \frac{r^{\frac{d-1}{2}}}{\sqrt{|t|}} \int_{\frac{|t|}{r}}^{\kappa} s^{-\frac{d-1}{2}} ds \lesssim \frac{r^{\frac{d-1}{2}}}{\sqrt{|t|}} \left(\frac{|t|}{r} \right)^{-\frac{d-1}{2}} \left(\kappa - \frac{|t|}{r} \right) \\ &\leq \kappa \frac{r^{d-1}}{|t|^{\frac{d}{2}}} \lesssim \frac{r^d}{|t|^{\frac{d-2}{2}} h^2} h^2 \frac{|t|}{r} \leq \frac{r^d}{|t|^{\frac{d-2}{2}} h^2} \end{aligned}$$

car $h^2 \leq 1$.

Lorsque $\frac{d-1}{2} < 1$ (i.e. $d < 3$), puisque $\operatorname{Re} \frac{1}{z} \gtrsim \frac{h^2}{t^2}$ on a

$$\begin{aligned} \int_{\frac{|t|}{r}}^{\kappa} \left(\frac{r}{r+s} \right)^{\frac{d-1}{2}} e^{-c \frac{s^2 h^2}{t^2}} \frac{ds}{\sqrt{|t|}} &\lesssim \frac{r^{\frac{d-1}{2}}}{\sqrt{|t|}} \int_{\frac{h}{r}}^{\infty} e^{-u^2} \left(\frac{|t|u}{h} \right)^{-\frac{d-1}{2}} \frac{|t|}{h} du \\ &\lesssim \frac{r^{\frac{d-1}{2}} h^{\frac{d-3}{2}}}{|t|^{\frac{d-2}{2}}} \int_0^{\infty} u^{-\frac{d-1}{2}} e^{-u^2} du \\ &\lesssim \frac{r^d}{|t|^{\frac{d-2}{2}} h^2} \frac{h^{\frac{d-3}{2}} h^2}{r^{\frac{d+1}{2}}} \leq \frac{r^d}{|t|^{\frac{d-2}{2}} h^2} \end{aligned}$$

car $h \leq r$.

Lorsqu'enfin $\frac{d-1}{2} = 1$ (i.e. $d = 3$) on a

$$\begin{aligned} \int_{\frac{|t|}{r}}^{\kappa} \frac{r}{r+s} e^{-\frac{s^2}{4} \operatorname{Re} \frac{1}{z}} \frac{ds}{\sqrt{|t|}} &\lesssim \frac{r}{\sqrt{|t|}} \int_{\frac{h}{r}}^{\kappa \frac{h}{|t|}} \left(\frac{|t|u}{h} \right)^{-1} e^{-u^2} \frac{|t|}{h} du \leq \frac{r}{\sqrt{|t|}} e^{-\frac{h^2}{2r^2}} \frac{r}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &\lesssim \frac{r^2}{\sqrt{|t|h}} \left(\frac{h}{r} \right)^{-1} = \frac{r^3}{\sqrt{|t|h^2}} = \frac{r^d}{|t|^{\frac{d-2}{2}} h^2}. \end{aligned}$$

Finalement, en sommant toutes les parties, on obtient :

$$\|e^{itH} \psi_{m'}(h^2 H) \psi_m(r^2 H)\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} \lesssim \frac{r^d}{|t|^{\frac{d-2}{2}} h^2}.$$

□

3.3.2 Inégalités de Strichartz

Pour obtenir des inégalités de Strichartz, on va utiliser le Théorème 1.1 de [BS14], que l'on rappelle ici avec une légère modification venant du fait que la mesure vérifie (3.1.4) dans notre contexte :

Théorème 3.3.3. *Supposons (3.1.4) et (DUE). Considérons un opérateur T auto-adjoint borné sur L^2 (avec $\|T\|_{L^2 \rightarrow L^2} \lesssim 1$), qui commute avec H et vérifie*

$$\|T \psi_m(r^2 H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\tilde{B}_r)} \lesssim A \mu(B_r)^{\frac{1}{2}} \mu(\tilde{B}_r)^{\frac{1}{2}} \quad (H_m(A))$$

pour un certain $m \geq \frac{d}{2}$. Alors T est borné de H^1 dans BMO et de L^p dans $L^{p'}$ pour tout $p \in (1, 2)$ avec

$$\|T\|_{H^1 \rightarrow BMO} \lesssim A \quad \text{et} \quad \|T\|_{L^p \rightarrow L^{p'}} \lesssim A^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}}$$

si l'espace ambiant X n'est pas borné et

$$\|T\|_{H^1 \rightarrow BMO} \lesssim \max(A, 1) \quad \text{et} \quad \|T\|_{L^p \rightarrow L^{p'}} \lesssim \max(A^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}}, B)$$

si X est borné; et où, pour la dernière inégalité, on a supposé de plus que $\|T\|_{L^p \rightarrow L^2} \lesssim B$.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, nous n'utiliserons pas la partie où X est borné. On applique ce théorème à $T = e^{itH} \psi_{m'}(h^2 H)$ et $A = |t|^{-\frac{d-2}{2}} h^{-2}$. Au vue de (3.1.4) on peut reformuler ($H_m(A)$) (voir [BS14]) comme

$$\|e^{itH} \psi_{m'}(h^2 H) \psi_m(r^2 H)\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} \lesssim \frac{r^d}{|t|^{\frac{d-2}{2}} h^2} \quad (3.3.3)$$

que nous venons de démontrer à la section précédente sous les hypothèses de ce chapitre. On obtient donc

$$\|e^{itH} \psi_{m'}(h^2 H)\|_{H^1 \rightarrow BMO} \lesssim |t|^{-\frac{d-2}{2}} h^{-2},$$

et pour tout $p \in (1, 2)$

$$\|e^{itH} \psi_{m'}(h^2 H)\|_{L^p \rightarrow L^{p'}} \lesssim \left[h^{-2} |t|^{-\frac{d-2}{2}} \right]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}}.$$

On rappelle maintenant une version légèrement modifié d'un résultat de Keel et Tao dans [KT98] :

Théorème 3.3.4. *Si $(U(t))_{t \in \mathbb{R}}$ satisfait*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|U(t)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \lesssim 1$$

et pour un certain $\sigma > 0$

$$\forall t \neq s, \quad \|U(t)U(s)^*\|_{H^1 \rightarrow BMO} \leq C|t - s|^{-\sigma}.$$

Alors, pour tous $2 \leq p \leq +\infty$ et $2 \leq q < +\infty$ vérifiant

$$\frac{1}{p} + \frac{\sigma}{q} = \frac{\sigma}{2},$$

on a

$$\|U(t)f\|_{L_t^p L_x^q} \lesssim C^{\frac{1}{2} - \frac{1}{q}} \|f\|_{L^2}.$$

Démonstration. On résume juste brièvement les principales étapes de la preuve de [KT98] pour suivre la valeur particulière d'une constante dans l'estimation.

- Par symétrie et un argument T^*T , il suffit de montrer que

$$\left| \int_{s < t} \langle U(s)^* F(s), U(t)^* G(t) \rangle ds dt \right| \lesssim C^2 \|F\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}} \|G\|_{L_t^{p'} L_x^{q'}}.$$

- En utilisant le Théorème d'interpolation 3.2.9 on a

$$\|U(t)U(s)^*\|_{L^{q'} \rightarrow L^q} \lesssim C^{1-\frac{2}{q}} |t-s|^{-\frac{2}{p}}.$$

- On conclut en utilisant les inégalités de Hölder et Hardy-Littlewood-Sobolev. □

On utilise ici ce théorème avec $C = \frac{1}{h^2}$ et $\sigma = \frac{d-2}{2}$ pour obtenir le résultat suivant.

Théorème 3.3.5. *Supposons que l'Hypothèse 3.1.1 soit satisfaite. Si $2 \leq p \leq +\infty$ et $2 \leq q < +\infty$ vérifient*

$$\frac{2}{p} + \frac{d-2}{q} = \frac{d-2}{2},$$

et si $f \in L^2$ et $0 < h \leq 1$, on a

- si $\kappa = +\infty$, alors pour tout $m' \in \mathbb{N}$

$$\|e^{itH} \psi_{m'}(h^2 H) f\|_{L^p([-1,1], L^q)} \lesssim \frac{1}{h^{2(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}} \|\psi_{m'}(h^2 H) f\|_{L^2};$$

- si $\kappa < +\infty$, alors pour tous $0 < \varepsilon < 1$ et $m' \in \mathbb{N}$

$$\|e^{itH} \psi_{m'}(h^2 H) f\|_{L^p([-1,1], L^q)} \lesssim \frac{1}{h^{\frac{1+\varepsilon}{p}} h^{2(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}} \|\psi_{m'}(h^2 H) f\|_{L^2}.$$

Démonstration. La preuve suivante est une légère modification de celles des Théorèmes 4.2 et 4.3 de [BS14]. On la réécrit ici pour plus de lisibilité. On ne traite que le cas $\kappa < +\infty$ puisqu'il est un peu plus technique. On laisse les modifications mineures pour obtenir le cas $\kappa = +\infty$ au lecteur.

On fixe un intervalle $J \subset [-1, 1]$ de longueur $|J| = h^{1+\varepsilon}$, $m' \in \mathbb{N}$, et on considère

$$U(t) = \mathbf{1}_J(t) e^{itH} \psi_{m'}(h^2 H).$$

On veut appliquer le Théorème 3.3.4 avec $C = \frac{1}{h^2}$ et $\sigma = \frac{d-2}{2}$. Par calcul fonctionnel, on a

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|U(t)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \lesssim 1.$$

L'estimation (3.3.3) que l'on a prouvé au Théorème 3.3.1 va mener à la seconde hypothèse du Théorème 3.3.4. D'une part

$$\begin{aligned} U(t)U(s)^* &= \mathbf{1}_J(t)\mathbf{1}_J(s)e^{itH}\psi_{m'}(h^2H)(e^{isH}\psi_{m'}(h^2H))^* \\ &= \mathbf{1}_J(t)\mathbf{1}_J(s)e^{i(t-s)H}\psi_{2m'}(2h^2H) \end{aligned}$$

parce que H est auto-adjoint. Puisque J est de longueur $h^{1+\varepsilon}$, alors $U(t)U(s)^*$ s'annule en dehors de $|t-s| \leq h^{1+\varepsilon}$. Ainsi par le Théorème 3.3.1 on déduit

$$\|U(t)U(s)^*\|_{H^1 \rightarrow (H^1)^*} \lesssim \frac{1}{h^2} \frac{1}{|t-s|^{\frac{d-2}{2}}}.$$

Quitte à changer $2m'$ en m' , le Théorème 3.3.4 (avec $C = h^{-2}$ et $\sigma = (d-2)/2$) montre alors que

$$\left(\int_J \|e^{itH}\psi_{m'}(h^2H)f\|_{L^q}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \lesssim \frac{1}{h^{2(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}} \|f\|_{L^2}.$$

On subdivise $[-1, 1]$ en $N \simeq \frac{1}{h^{1+\varepsilon}}$ intervalles J_k de longueur $h^{1+\varepsilon}$ pour obtenir

$$\int_{-1}^1 \|e^{itH}\psi_{m'}(h^2H)f\|_{L^q}^p dt \leq \sum_{k=1}^N \int_{J_k} \|e^{itH}\psi_{m'}(h^2H)f\|_{L^q}^p dt \leq N \left(\frac{1}{h^{2(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}} \|f\|_{L^2} \right)^p.$$

D'où

$$\|e^{itH}\psi_{m'}(h^2H)f\|_{L^p([-1,1],L^q)} \lesssim \frac{1}{h^{\frac{1+\varepsilon}{p}} h^{2(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}} \|\psi_{m'}(h^2H)f\|_{L^2}.$$

□

Nous sommes à présent en mesure d'établir les inégalités de Strichartz avec perte de dérivées annoncées.

Théorème 3.3.6. *Si l'Hypothèse 3.1.1 est satisfaite. Alors, pour tous $2 \leq p \leq +\infty$ et $2 \leq q < +\infty$ vérifiant*

$$\frac{2}{p} + \frac{d-2}{q} = \frac{d-2}{2},$$

et toute solution $u(t, \cdot) = e^{itH}u_0$ du problème linéaire de Schrödinger

$$\begin{cases} i\partial_t u + Hu = 0 \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases}$$

on a

3.3. Preuves des Théorèmes

- si $\kappa = +\infty$, alors u satisfait des inégalités de Strichartz locales en temps avec perte de dérivées

$$\|u\|_{L^p([-1,1],L^q)} \lesssim \|u_0\|_{W^{2(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}),2}}; \quad (3.3.4)$$

- si $\kappa < +\infty$, alors pour tous $0 < \varepsilon < 1$ et $0 < h \leq 1$, u satisfait des inégalités de Strichartz locales en temps avec perte de dérivées

$$\|u\|_{L^p([-1,1],L^q)} \lesssim \|u_0\|_{W^{\frac{1+\varepsilon}{p}+2(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}),2}}. \quad (3.3.5)$$

Remarque 3.3.7. La perte de dérivées dans (3.3.5) est intéressante si elle est plus petite que la perte donnée directement par injections de Sobolev. La relation $\frac{2}{p} + \frac{d-2}{q} = \frac{d-2}{2}$ donne l'injection

$$W^{\frac{2}{p}+1-\frac{2}{q},2} \hookrightarrow L^q.$$

Ainsi

$$\|e^{itH}u_0\|_{L^q} \lesssim \|e^{itH}u_0\|_{W^{\frac{2}{p}+1-\frac{2}{q},2}} \leq \|u_0\|_{W^{\frac{2}{p}+1-\frac{2}{q},2}}$$

et en prenant la norme $L^p([-1,1])$ on obtient

$$\|e^{itH}u_0\|_{L^p([-1,1],L^q)} \lesssim \|u_0\|_{W^{\frac{2}{p}+1-\frac{2}{q},2}}.$$

C'est-à-dire, la perte de dérivées est intéressante lorsqu'elle est plus petite que $\frac{2}{p} + 1 - \frac{2}{q}$. D'où, pour tout $\varepsilon \in (0,1)$, la perte obtenue dans le Théorème 3.3.6 est meilleure que la perte triviale. La perte de dérivées dans (3.3.4) est aussi non triviale par le même argument.

Remarque 3.3.8. On pourrait obtenir des estimations avec

$$\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2}.$$

Pour ce faire, remarquons que dans (3.3.3) on pourrait écrire

$$\frac{r^d}{t^{\frac{d-2}{2}}h^2} = \left(\frac{r^2}{t}\right)^{\frac{d}{2}} \frac{t}{h^2} \leq \left(\frac{r^2}{t}\right)^{\frac{d}{2}} \frac{1}{h}.$$

Alors, la perte de dérivées obtenue dans (3.3.5) serait $\frac{1+\varepsilon}{p} + 1(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})$ que l'on doit comparer avec la perte triviale pour cette relation entre p et q , à savoir $\frac{2}{p}$. Puisque $\frac{1}{2} - \frac{1}{q} = \frac{2}{dp}$, la perte est plus petite que $\frac{2}{p}$ si et seulement si

$$d \geq \frac{2}{1-\varepsilon}.$$

C'est-à-dire, dès que $d > 2$, on peut trouver $\varepsilon \in (0, 1)$ tel que la perte soit non triviale.

On a choisit de présenter la présente version du Théorème puisqu'elle permet d'obtenir une plage d'exposants q plus large. En effet, d'une part

$$p \geq 2 \Rightarrow \frac{d-2}{q} = \frac{d-2}{2} - \frac{2}{p} \geq \frac{d-2}{2} - 1$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{q} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{d-2}.$$

D'autre part $p \geq 2$ et $\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = \frac{d}{2}$ impliquent

$$\frac{1}{q} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{d},$$

et pour tout $d > 2$,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{d-2} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{d}.$$

C'est pourquoi la relation

$$\frac{2}{p} + \frac{d-2}{q} = \frac{d-2}{2}$$

donne une plus grande plage d'exposants q .

Démonstration. Encore une fois, on ne détaille que le cas plus compliqué $\kappa < +\infty$.

On applique le Théorème 3.2.4 à $u(t) = e^{itH}u_0$. Cela nous amène à

$$\|u(t)\|_{L^q} \lesssim \|\varphi(H)u(t)\|_{L^q} + \left\| \left(\int_0^1 |\psi_{m'}(s^2 H)u(t)|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^q},$$

avec $m' \geq 1$.

En prenant la norme $L^p([-1, 1])$ en temps de cette expression, d'après l'inégalité de Minkowski, on a

$$\begin{aligned} & \|u(t)\|_{L^p([-1, 1], L^q)} \\ & \lesssim \|\varphi(H)u(t)\|_{L^p([-1, 1], L^q)} + \left\| \left(\int_0^1 \|\psi_{m'}(s^2 H)u(t)\|_{L^q}^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p([-1, 1])}. \end{aligned}$$

Grâce aux estimations Gaussiennes ponctuelles de $\varphi(H)$, le premier terme s'estime de la façon suivante :

$$\|\varphi(H)u(t)\|_{L^p([-1, 1], L^q)} \lesssim \|e^{itH}u_0\|_{L^p([-1, 1], L^2)} \lesssim \|u_0\|_{L^2} \lesssim \|u_0\|_{W^{\frac{1+\varepsilon}{p} + 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}), 2}}.$$

3.3. Preuves des Théorèmes

Puisque $p \geq 2$, le Théorème 3.3.5 et l'inégalité de Minkowski généralisée nous permettent de borner le second terme :

$$\begin{aligned}
& \left\| \left(\int_0^1 \|\psi_{m'}(s^2 H)u(t)\|_{L^q}^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p([-1,1])} \\
& \lesssim \left(\int_0^1 \|\psi_{m'}(s^2 H)u\|_{L^p([-1,1], L^q)}^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \lesssim \left(\int_0^1 s^{-\frac{1+\varepsilon}{p} - 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})} \|\psi_{m'}(s^2 H)u_0\|_{L^2}^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \lesssim \left\| \left(\int_0^1 s^{-\frac{1+\varepsilon}{p} - 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})} |\psi_{m'}(s^2 H)u_0|^2 \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2} \\
& \lesssim \|u_0\|_{W^{\frac{1+\varepsilon}{p} + 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}), 2}},
\end{aligned}$$

où on a utilisé $m' \geq \frac{1}{4}[\frac{1+\varepsilon}{p} + 2(1 - \frac{2}{q})]$ car $m' \geq 1$ et $\frac{1+\varepsilon}{p} + 2(1 - \frac{2}{q}) < 2$ et le fait que

$$s^{-\frac{1+\varepsilon}{p} - 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})} |\psi_{m'}(s^2 H)|^2 = \psi_{m' - \frac{1}{4}[\frac{1+\varepsilon}{p} + 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})]}(s^2 H) H^{\frac{1}{2}[\frac{1+\varepsilon}{p} + 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{q})]}.$$

Finalement, on obtient :

$$\|u\|_{L^p([-1,1], L^q)} \lesssim \|u_0\|_{W^{\frac{1+\varepsilon}{p} + 2(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}), 2}}.$$

□

Estimations de dispersion localisées sur la diagonale

4.1 Introduction

Ce chapitre a pour but de donner des estimations de dispersion localisées autour de la diagonale. Plus précisément on veut, pour une boule B_0 fixée, obtenir des estimations de dispersion $L^p(B_0) - L^{p'}(B_0)$ pour tout $p \in (1, 2)$. Pour ce faire nous définirons des espaces de Hardy et BMO adaptés à cette localisation “sur la diagonale”. Nous donnerons dans un premier temps un résultat d’interpolation entre ces nouveaux espaces et les espaces de Lebesgue usuels. Ensuite, nous appliquerons ce résultat pour montrer des estimations de dispersion $H^1 - \text{BMO}$ et $L^p(B_0) - L^{p'}(B_0)$. Enfin nous verrons qu’un bon choix pour la boule B_0 (via son rayon) nous permet de montrer qu’à l’instar des résultats du chapitre 2, une propriété relativement faible de dispersion sur l’opérateur des ondes permet de prouver une estimation de dispersion microlocalisée $L^2(B) - L^2(\tilde{B})$ qui assure les estimations de dispersion $H^1 - \text{BMO}$ et $L^p(B_0) - L^{p'}(B_0)$.

Posons maintenant le cadre de travail de notre étude. On considère un espace métrique mesuré (X, d, μ) équipé d’une mesure de Borel positive et σ -finie μ . On suppose de plus que μ est intérieurement régulière, c’est-à-dire qu’on peut calculer la mesure de tout sous-ensemble $A \subset X$ de la façon suivante :

$$\mu(A) = \sup_{K \subset A} \mu(K),$$

où la borne supérieure porte sur tous les sous-ensembles compacts de A . On suppose que μ est Alfhors régulière, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes positives c et C telles que pour tous $x \in X$ et $r > 0$

$$cr^d \leq \mu(B(x, r)) \leq Cr^d, \quad (4.1.1)$$

où $B(x, r)$ désigne la boule ouverte de centre $x \in X$ et de rayon $0 < r < \text{diam}(X)$. Ainsi, nos résultats ont vocation à s'appliquer dans de nombreux cas d'espaces métriques comme des ouverts de $\mathbb{R}^d$, des variétés lisses de dimension d , certains ensembles fractaux, des groupes de Lie, le groupe de Heisenberg, ...

En gardant en tête l'exemple de l'opérateur Laplacien sur $\mathbb{R}^d$: $\Delta = \sum_{1 \leq j \leq d} \partial_j^2$, nous serons plus général au sens suivant : on considère un opérateur positif auto-adjoint H à domaine dense dans $L^2 = L^2(X, \mu)$, ce qui signifie que l'on suppose que son domaine

$$\mathcal{D}(H) := \{f \in L^2, Hf \in L^2\}$$

est dense dans L^2 .

On définit le propagateur des ondes $\cos(t\sqrt{H})$ de la façon suivante : pour tout $f \in L^2$, $u(t, \cdot) := t \mapsto \cos(t\sqrt{H})f$ est l'unique solution du problème des ondes linéaire suivant :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + Hu = 0 \\ u|_{t=0} = f \\ \partial_t u|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (4.1.2)$$

La propriété remarquable de cet opérateur vient de sa propagation à vitesse finie. Pour deux ouverts disjoints $U_1, U_2 \subset X$, et deux fonctions $f_i \in L^2(U_i)$, $i = 1, 2$, alors

$$\langle \cos(t\sqrt{H})f_1, f_2 \rangle = 0 \quad (4.1.3)$$

pour tout $0 < t < d(U_1, U_2)$. Si $\cos(t\sqrt{H})$ est un opérateur intégral de noyau K_t , alors (4.1.3) veut simplement dire que K_t est supporté dans le cône de lumière : $\mathcal{D}_t := \{(x, y) \in X^2, d(x, y) \leq t\}$. On suppose que H vérifie (4.1.3). Dans [CS08], Coulhon et Sikora ont prouvé que cette propriété est équivalente aux estimations de Davies-Gaffney :

$$\|e^{-tH}\|_{L^2(E) \rightarrow L^2(F)} \lesssim e^{-\frac{d(E, F)^2}{4t}} \quad (DG)$$

pour tous sous-ensembles E et F de X , et $t > 0$.

On sait que $-H$ est le générateur d'un semi-groupe L^2 -holomorphe $(e^{-tH})_{t \geq 0}$ (voir [Dav97]). On supposera de plus que le semi-groupe de la chaleur $(e^{-tH})_{t \geq 0}$ vérifie les estimations diagonales typiques (pour un opérateur du second degré) : pour tout $t > 0$, l'opérateur e^{-tH} admet un noyau p_t tel que :

$$|p_t(x, x)| \lesssim \frac{1}{\mu(B(x, \sqrt{t}))}, \quad \forall t > 0, \text{ p.p. } x \in X. \quad (DUE)$$

4.1. Introduction

On sait que ces estimations sur la diagonale s'auto-améliorent en des estimations Gaussiennes complètes ponctuelles (voir [Gri97, Théorème 1.1] ou [CS08, Section 4.2] par exemple) :

$$|p_t(x, y)| \lesssim \frac{1}{\mu(B(x, \sqrt{t}))} \exp\left(-c \frac{d(x, y)^2}{t}\right), \quad \forall t > 0, \text{ p.p. } x, y \in X. \quad (UE)$$

On peut trouver dans [BS14] et dans les autres références de ce chapitre des exemples pour lesquelles les estimations précédentes sont valables.

Les trois résultats principaux de ce chapitre sont les Théorèmes 4.4.3, 4.5.8, et 4.6.5. Le Théorème 4.4.3 caractérise les espaces d'interpolation entre les nouveaux espaces H_0^1 et BMO_0 avec les espaces de Lebesgue usuels en terme d'espaces de Lebesgue. Le Théorème 4.5.8 montre quelles estimations de dispersion $L^p(B_0) - L^{p'}(B_0)$ on peut obtenir à partir de l'estimation $L^2 - L^2$ microlocalisée (H_m). Le Théorème 4.6.5 montre cette estimation (H_m) à partir d'une hypothèse de dispersion pour le propagateur des ondes 4.6.1. Si on résume ces trois résultats, ce chapitre nous permet d'obtenir le théorème suivant :

Théorème 4.1.1. *Soient $d > 1$, M assez grand, et m un entier dans $[\frac{d}{2}, \frac{4M}{3}]$. S'il existe $\kappa \in (0, +\infty]$ tel que pour tout $s > 0$, le propagateur des ondes $\cos(s\sqrt{H})$ admet un noyau $K_{\cos(s\sqrt{H})}$ vérifiant :*

$$|K_{\cos(s\sqrt{H})}| \leq s^{-d} \quad \text{si} \quad d(x, y) \leq \frac{s}{2} \quad \text{et} \quad s \leq \kappa.$$

Alors, pour tous $m' \in \mathbb{N}$, et tout $p \in (1, 2)$, on a :

$$\|\mathbb{1}_{B_0} e^{itH} \psi_{m'}(h^2 H)\|_{L^p(B_0) \rightarrow L^{p'}(B_0)} \lesssim |t|^{-\frac{d}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right)}, \quad (4.1.4)$$

où B_0 désigne une boule fixée de rayon $\sqrt{t}$, et le temps t pour lequel l'estimation précédente est valide est donné par :

- si $\kappa = +\infty$, alors on a (4.1.4) pour tout $t \neq 0$;
- si $\kappa < +\infty$, alors on a (4.1.4) pour tous $\varepsilon > 0$, $0 < h \leq 1$ et $h^2 \leq |t| \leq h^{1+\varepsilon}$.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans la première partie 4.2, après avoir rappelé quelques notations utiles à ce chapitre, on donne les définitions des espaces H_0^1 et BMO_0 particuliers à la boule B_0 en vue des estimations localisées autour de B_0 . Dans la seconde partie 4.3, on montre une version d'inégalités aux bons lambda à deux paramètres qui nous servira pour démontrer le résultat d'interpolation de la Section 4.4. La Section 4.5 montre les estimations de dispersion que l'on peut déduire de l'estimation microlocalisée $L^2(B) - L^2(\tilde{B})$ (H_m). Enfin, nous montrons en Section 4.6 comment prouver l'inégalité (H_m) à partir d'hypothèses sur le propagateur des ondes.

4.2 Définitions et préliminaires

4.2.1 Notations

On rappelle tout d'abord les notations qui seront utilisées tout au long de ce chapitre.

Pour une boule B dans X on désigne $r(B)$ son rayon et $c(B)$ son centre. Pour toute boule B et tout paramètre $\lambda > 0$, λB désigne la boule de centre $c(B)$ et de rayon $\lambda r(B)$. On pose $C_0(B) := B$ et pour tout $j \geq 1$,

$$C_j(B) := 2^j B \setminus 2^{j-1} B$$

la $j^{\text{ième}}$ couronne dyadique autour de B . Pour tout sous-ensemble $A \subset X$, on note A^c son complémentaire dans X . $\mathbb{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A , définie par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}.$$

Si A est de mesure finie, et si f est une fonction ad hoc, on note

$$\int_A f := \frac{1}{\mu(A)} \int_A f(x) d\mu(x).$$

On utilise les notations M_{HL} et $M_{HL,c}$ pour, respectivement, la fonction maximale de Hardy-Littlewood usuelle et la fonction maximale centrée de Hardy-Littlewood, définies par :

$$M_{HL}f(x) = \sup_{B \ni x} \int_B |f| d\mu \quad \text{et} \quad M_{HL,c}f(x) = \sup_{B, c(B)=x} \int_B |f| d\mu,$$

les bornes supérieures étant prises sur l'ensemble des boules, respectivement, contenant x et de centre x . On rappelle que ces deux opérateurs sont équivalents au sens où il existe une constante $c > 0$ tel que

$$\frac{1}{c} M_{HL} \leq M_{HL,c} \leq c M_{HL}.$$

On notera $\text{supp } f$ le support d'une fonction f . On utilisera la notation $u \lesssim v$ pour dire qu'il existe une constante c (indépendante des paramètres importants) telle que $u \leq cv$ et $u \simeq v$ pour signifier qu'à la fois $u \lesssim v$ et $v \lesssim u$. Si aucune confusion n'est permise, on notera L^p à la place de $L^p(X, \mu)$ pour $p \in [1, +\infty]$. De plus, pour un sous-ensemble $A \subset X$, on définit

$$L^p(A) := \{f, \text{supp } f \subset A, \|f\|_{L^p(A)} := \left(\int_A |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty\}.$$

On remarque que l'on peut tout de même calculer la norme $\|g\|_{L^p(A)}$ d'une fonction g qui n'est pas nécessairement supportée sur g lorsque cela fait sens. Pour deux sous-espaces vectoriels normés F et G d'un espaces E , on dira

$$F \hookrightarrow G$$

lorsque l'application identité $\text{id}: F \rightarrow G$ est bien définie et continue. Pour une fonction f , on notera aussi f l'opérateur de multiplication par f . On utilisera la notation suivante lorsque l'on parle des espaces intermédiaires d'interpolation : si A et B sont deux espaces fonctionnels et $\theta \in (0, 1)$, on note $(A, B)_\theta = (A, B)_{\theta, p_\theta}$ lorsque $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{2}$.

4.2.2 Espaces de Hardy et BMO

Pour $x_0 \in X$ et $t > 0$ donnés, on fixe une boule $B_0 = B(x_0, \sqrt{t})$ dans X . Pour une certaine constante $C > 0$, on définit

$$\mathcal{Q}_{B_0} = \{B = B(x, r), x \in X, 0 < r \leq C\sqrt{t}, d(B, B_0) \leq C\sqrt{t}\}.$$

On remarque que si $B \in \mathcal{Q}_{B_0}$ alors $B \subset KB_0$ où $K \simeq 1 + 2C$. Nous allons maintenant définir des espaces de Hardy et BMO associés à cette collection.

On rappelle que l'on travaille avec les opérateurs suivants : Pour une boule $Q \in \mathcal{Q}_{B_0}$ de rayon r on note

$$B_Q = (1 - e^{-r^2 H})^M \quad \text{et} \quad A_Q = 1 - B_Q.$$

L'entier M est un paramètre technique assez grand ($M \geq \max(3, \frac{d}{2}, \frac{3}{4} + \frac{3d}{8})$ est suffisant). En développant par la formule du binôme de Newton, on remarque que B_Q est une combinaison linéaire d'opérateurs de la forme $e^{-kr^2 H}$ pour $k \in \{0, \dots, M\}$. La même chose se produit pour A_Q avec $k \in \{1, \dots, M\}$.

Remarque 4.2.1. On choisit $M \geq \frac{3}{4} + \frac{3d}{8}$ pour assurer l'existence d'un entier $m \in [\frac{d}{2}, \frac{4M}{3}]$, ce qui sera utile à la Section 4.5.

Définition 4.2.2. Une fonction $a \in L^1_{loc}$ est un atome associé à la boule $Q \in \mathcal{Q}_{B_0}$ s'il existe une fonction réelle f_Q telle que

$$a = B_Q(f_Q),$$

avec

$$\text{supp } f_Q \subset Q \quad \text{et} \quad \|f_Q\|_{L^2(Q)} \leq \mu(Q)^{-\frac{1}{2}}.$$

Définition 4.2.3. Une fonction mesurable h est une fonction de l'espace de Hardy H_0^1 s'il existe une décomposition

$$h = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i a_i \quad \mu\text{-p.p.},$$

où pour tout $i \in \mathbb{N}$, a_i est un atome et $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle de $l^1(\mathbb{N})$. C'est-à-dire

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} |\lambda_i| < +\infty.$$

On équipe H_0^1 de la norme

$$\|h\|_{H_0^1} := \inf_{h = \sum_{i \in \mathbb{N}} \lambda_i a_i} \sum_i |\lambda_i|,$$

où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des décompositions.

On définit une fonction maximale dièse adaptée à nos opérateurs et à la collection $\mathcal{Q}_{B_0}$:

$$\forall x \in X, \quad M^\sharp f(x) := \sup_{\substack{Q \in \mathcal{Q}_{B_0} \\ x \in Q}} \left(\int_Q |B_Q(f)|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 4.2.4. On définit la norme BMO_0 d'une fonction de L^∞ par

$$\|f\|_{BMO_0} := \|M^\sharp f\|_{L^\infty}.$$

L'espace BMO_0 est défini comme l'adhérence

$$BMO_0 := \overline{\{f \in L^\infty + L^2, \|f\|_{BMO_0} < +\infty\}},$$

pour la norme $\|\cdot\|_{BMO_0}$.

Propriété 4.2.5. Si $f \in L^2$, alors

$$\|f\|_{BMO_0} = \sup_{a \text{ atome}} |\langle f, a \rangle|,$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des atomes. De plus f appartient à BMO_0 si et seulement si le membre de droite de l'égalité ci-dessus est fini.

Démonstration. Soit $f \in L^2$. Pour toute boule $Q \in \mathcal{Q}_{B_0}$:

$$\begin{aligned} \mu(Q)^{-\frac{1}{2}} \|B_Q(f)\|_{L^2(Q)} &= \mu(Q)^{-\frac{1}{2}} \sup_{\substack{g \in L^2(Q) \\ \|g\|_{L^2(Q)} \leq 1}} |\langle B_Q(f), g \rangle| \\ &= \sup_{\substack{g \in L^2(Q) \\ \|g\|_{L^2(Q)} \leq 1}} |\langle f, B_Q(\mu(Q)^{-\frac{1}{2}} g) \rangle|. \end{aligned}$$

4.2. Définitions et préliminaires

On vérifie aisément que la collection des atomes correspond exactement à l'ensemble des fonctions du type $B_Q(\mu(Q)^{-\frac{1}{2}}g)$ avec $g \in L^2(Q)$, $\|g\|_{L^2(Q)} \leq 1$, et $Q \in \mathcal{Q}_{B_0}$. $\square$

Propriété 4.2.6. *BMO_0 contient L^∞ et est continument inclus dans le dual $(H_0^1)^*$:*

$$L^\infty \hookrightarrow BMO_0 \hookrightarrow (H_0^1)^*.$$

Démonstration. La première inclusion est directe :

$$B_Q: L^\infty \rightarrow L^\infty$$

avec une norme $\lesssim 1$.

Pour la seconde, on prend $\phi \in BMO_0$ et $f = \sum_i \lambda_i a_i \in H_0^1$ où pour tout $i \in \mathbb{N}$, $a_i = B_{Q_i}(f_{Q_i})$, $Q_i \in \mathcal{Q}_{B_0}$. Alors, pour tout entier N :

$$\langle \phi, \sum_{i=0}^N \lambda_i a_i \rangle = \sum_{i=0}^N \lambda_i \int_{Q_i} B_{Q_i}(\phi) f_{Q_i} d\mu.$$

D'où :

$$\begin{aligned} |\langle \phi, \sum_{i=0}^N \lambda_i a_i \rangle| &\leq \sum_{i=1}^N |\lambda_i| \|B_{Q_i}(\phi)\|_{L^2(Q_i)} \|f\|_{L^2(Q_i)} \\ &\leq \sum_{i=1}^N |\lambda_i| \|M^\sharp \phi\|_{L^\infty} \lesssim \|\phi\|_{BMO_0}, \end{aligned}$$

où la constante implicite ne dépend pas de N . De plus $(|\langle \phi, \sum_{i=0}^N \lambda_i a_i \rangle|)_{N \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy car $(\lambda_i)_i \in l^1$ donc converge. Ainsi, pour tout $f \in H_0^1$ il existe une constante $C = C(f)$ qui ne dépend pas de la décomposition atomique telle que

$$|\langle \phi, f \rangle| = \lim_{N \rightarrow +\infty} |\langle \phi, \sum_{i=0}^N \lambda_i a_i \rangle| \leq C \|\phi\|_{BMO_0}$$

et $\phi \in (H_0^1)^*$. $\square$

Propriété 4.2.7. *Pour tout $Q \in \mathcal{Q}_{B_0}$, l'opérateur B_Q (défini sur L^2) s'étend en un opérateur agissant de $(H_0^1)^*$ vers L_{loc}^1 . En gardant la notation B_Q pour l'extension, pour tout $f \in (H_0^1)^*$ on a :*

$$\|M^\sharp f\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{(H_0^1)^*}.$$

Ainsi :

$$(H_0^1)^* \hookrightarrow BMO_0.$$

Démonstration. Soient $Q \in \mathcal{Q}_{B_0}$ et $f \in (H_0^1)^*$. Pour tout $h \in L^2(Q)$ à support dans Q et vérifiant $\|h\|_{L^2(Q)} = 1$, on pose $\phi_Q = \mu(Q)^{-\frac{1}{2}}h$. Alors $a = B_Q(\phi_Q)$ est un atome associé à Q et

$$\langle f, B_Q(\phi_Q) \rangle \leq \|f\|_{(H_0^1)^*} \underbrace{\|B_Q(\phi_Q)\|_{H_0^1}}_{\leq 1}.$$

Si $h \neq 0$ on pose $h' = \frac{h}{\|h\|_{L^2(Q)}}$ de sorte que :

$$|\langle f, B_Q(h') \rangle| \leq \|f\|_{(H_0^1)^*} \mu(Q)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi

$$|\langle f, B_Q(h) \rangle| \leq \mu(Q)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{(H_0^1)^*} \|h\|_{L^2(Q)}.$$

On peut donc définir $B_Q(f) \in L^2(Q)$ par

$$\langle B_Q f, h \rangle = \langle f, B_Q(h) \rangle$$

et

$$\|B_Q(f)\|_{L^2(Q)} \leq \mu(Q)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{(H_0^1)^*},$$

c'est-à-dire

$$\|M^\sharp f\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{(H_0^1)^*}.$$

□

4.3 Inégalités aux bons lambdas

Nous allons suivre et adapter les preuves du Lemme 2.4 et de la Proposition 2.5 de [Aus07] pour montrer des “inégalités aux bons lambdas” dans le but d’obtenir une caractérisation pratique des espaces d’interpolation (voir Section 4.4) entre l’espace de Hardy H_0^1 et les espaces de Lebesgue usuels. On trouve une démonstration similaire dans [AM07].

On travaille avec la fonction maximale M et la fonction maximale centrée M_c associées à la collection $\mathcal{Q}_{B_0}$, définies en posant :

$$Mf(x) = \sup_{\substack{Q \in \mathcal{Q}_{B_0} \\ x \in Q}} \int_Q |f| d\mu \quad \text{et} \quad M_c f(x) = \sup_{\substack{Q \in \mathcal{Q}_{B_0} \\ x = c(Q)}} \int_Q |f| d\mu.$$

On montre tout d’abord le lemme de localisation suivant :

Lemme 4.3.1. *Il existe $K_0 > 0$ dépendant uniquement de la constante de doublement tel que pour tout $f \in L^1_{loc}$, toute boule Q et tout $\lambda > 0$ pour lequel il existe $\bar{x} \in 4Q$ tel que $Mf(\bar{x}) \leq \lambda$, on a :*

$$\forall K \geq K_0, \quad \{ \mathbf{1}_Q Mf > K\lambda \} \subset \{ M(f \mathbf{1}_{8Q}) > \frac{K}{K_0} \lambda \}.$$

Remarque 4.3.2. *Les constantes 4 et 8 qui apparaissent dans le lemme précédent dépendent en fait de la constante de doublement. On choisit de laisser ces valeurs (qui donnent une bonne intuition de ce qui se passe puisqu'elles sont correctes dans $\mathbb{R}^d$ par exemple) afin de ne pas nuire à la lisibilité.*

Démonstration. On utilise le fait que M est comparable à la fonction maximale centrée M_c ; c'est-à-dire qu'il existe K_0 dépendant uniquement de la constante de doublement tel que

$$M \leq K_0 M_c.$$

Soit $x \in Q$ tel que $Mf(x) > K\lambda$. Alors $M_c f(x) > \frac{K}{K_0} \lambda$. On en déduit qu'il existe une boule B centrée en x et de rayon $r > 0$ telle que :

$$\int_B |f| > \frac{K}{K_0} \lambda.$$

On a $\frac{K}{K_0} \geq 1$, donc $\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| > \lambda$. $\bar{x} \notin B(x, r)$ puisque $Mf(\bar{x}) \leq \lambda$. De plus $x \in Q$ et $\bar{x} \in 4Q$, donc $r \leq 2r(4Q)$. On en déduit donc que $B(x, r) \subset 8Q$. Ainsi :

$$\frac{K}{K_0} \lambda < \int_B |f| \leq \int_B |f \mathbf{1}_{8Q}| \leq M(f \mathbf{1}_{8Q})(x).$$

□

On montre à présent un lemme de recouvrement (du type recouvrement de Whitney) qui servira pour montrer le Théorème 4.3.4.

Lemme 4.3.3. *Soit $F \in L^1$. Pour tout $\lambda \geq \lambda_0 := \frac{c}{\mu(B_0)} \|F\|_{L^1}$, on peut recouvrir l'ensemble de niveau $E_\lambda = \{MF > \lambda\}$ par une collection de boules $(Q_i)_{i \in I}$ telles que :*

1. $\forall i \in I, 8Q_i \in \mathcal{Q}_{B_0}$;
2. $\forall i \in I, 4Q_i \cap E_\lambda^c \neq \emptyset$;
3. la famille $(Q_i)_{i \in I}$ a la propriété de recouvrement borné, c'est-à-dire que tout point de E_λ n'appartient qu'à un nombre fini de boules Q_i .

Démonstration. Soit $x \in E_\lambda$. Il existe donc une boule B_x contenant x telle que $B_x \in \mathcal{Q}_{B_0}$ et

$$\int_{B_x} |F| > \lambda.$$

On va extraire le recouvrement souhaité du recouvrement trivial

$$E_\lambda \subset \bigcup_{x \in E_\lambda} B_x,$$

ce qui assure le premier point du lemme.

On sait que E_λ est de mesure finie car, en notant c_1 la borne de continuité $L^1 - L^{1,\infty}$ de M on a :

$$\mu(E_\lambda) \leq \frac{c_1}{\lambda} \|F\|_{L^1} \leq \frac{c_1}{c} \mu(B_0)$$

puisque $\lambda \geq \lambda_0$. Pour chaque $x \in E_\lambda$, on considère l'ensemble ordonné des boules B_x précédentes. Tout sous-ensemble totalement ordonné de cet ensemble admet un majorant. Ainsi, d'après le Lemme de Zorn, il existe une boule Q_x maximale dans $\mathcal{Q}_{B_0}$ telle que $x \in Q_x$ et

$$\int_{Q_x} |F| > \lambda.$$

Q_x est maximale, donc quand on considère la boule $4Q_x$, ou bien $4Q_x \notin \mathcal{Q}_{B_0}$, ou bien $x \notin 4Q_x$, ou bien $\int_{4Q_x} |F| \leq \lambda$. D'une part $x \notin 4Q_x$ est impossible. D'autre part, si $4Q_x \notin \mathcal{Q}_{B_0}$, alors :

$$4r(Q_x) > C\sqrt{t}.$$

En effet, on a nécessairement $d(4Q_x, B_0) \leq d(Q_x, B_0) \leq C\sqrt{t}$. Donc il existe une constante $C' > 0$ telle que $B_0 \subset C'Q_x$. Alors on a :

$$\int_{Q_x} |F| \leq \frac{C'^d}{\mu(B_0)} \|F\|_{L^1} \leq \frac{C'^d}{\mu(B_0)} \frac{\lambda_0}{c} \mu(B_0) \leq \frac{C'^d}{c} \lambda.$$

On choisit alors $c > 0$ de sorte que $\frac{C'^d}{c} \leq 1$ d'où

$$\int_{Q_x} |F| \leq \lambda,$$

ce qui est impossible par définition de Q_x . Donc on a nécessairement

$$\int_{4Q_x} |F| \leq \lambda,$$

avec $4Q_x \in \mathcal{Q}_{B_0}$. Ainsi $4Q_x \cap E_\lambda^c \neq \emptyset$. Ce qui assure le deuxième point du lemme.

Il reste à prouver la propriété de recouvrement borné. Pour cela on se donne un compact K dans E_λ . En utilisant la méthode ci-dessus, on le recouvre par des

boules qui vérifient les deux premiers points du lemme à prouver. Par compacité on extrait de ce recouvrement un sous-recouvrement fini. D'après le Lemme de recouvrement de Vitali ([Gra08, Lemme 2.1.5]), on peut extraire de ce recouvrement fini un sous-recouvrement qui satisfait le dernier point du lemme. Les propriétés du recouvrement étant vraies uniformément par rapport au compact K , on obtient le résultat final en passant à la limite en approchant E_λ par une suite de compacts inclus dans E_λ . C'est possible parce que la mesure μ est intérieurement régulière. Le recouvrement obtenu vérifie donc les trois propriétés du lemme. $\square$

Nous sommes à présent en mesure d'établir les "inégalités aux bons lambdas" qui nous seront utiles :

Théorème 4.3.4. *Soit $1 < q \leq +\infty$. Il existe $K'_0 = K'_0(\lambda, a) \geq 1$ et $C = C(q, d, a)$ tels que : si $F \in L^1$, G , et H sont des fonctions mesurables positives vérifiant pour tout $Q \in \mathcal{Q}_{B_0}$:*

$$p.p. x \in Q, \quad F \leq G_Q + H_Q; \quad (4.3.1)$$

$$\forall x \in Q, \quad \int_Q G_Q d\mu \leq G(x); \quad (4.3.2)$$

$$\forall x, \bar{x} \in Q, \quad \left(\int_Q H_Q^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \leq MF(x) + H(\bar{x}); \quad (4.3.3)$$

alors pour tous $\lambda > \lambda_0$, $K > K'_0$, et $\gamma < 1$:

$$\mu(\{MF > K\lambda, G + H \leq \gamma\lambda\}) \leq C \left(\frac{1}{K^q} + \frac{\gamma}{K} \right) \mu(\{MF > \lambda\}),$$

où $\lambda_0 := \frac{100c_1 \|F\|_{L^1}}{\mu(B_0)}$ et c_1 désigne la borne de continuité du type faible $(1, 1)$ de l'opérateur M .

Remarque 4.3.5. Si $q = +\infty$, la moyenne en norme L^q est à comprendre comme un sup essentiel. Dans ce cas on pose $\frac{1}{K^q} := 0$.

Démonstration. Cette preuve s'inspire de celle de [AM07]. Il suffit de considérer le cas où $H = G$. En effet si on note $\tilde{G} = G + H$, alors (4.3.2) est valable avec $\tilde{G}$ à la place de G et (4.3.3) est valable avec $\tilde{G}$ à la place de H . On suppose donc que $G = H$ pour le reste de la preuve.

Pour $\lambda > \lambda_0$, on note $E_\lambda = \{MF > \lambda\}$. On suppose que c'est un sous-ensemble non vide de X sinon il n'y a rien à montrer. On recouvre E_λ en utilisant le Lemme 4.3.3. On dispose donc d'une famille de boules $(Q_i)_{i \in I}$ qui a la propriété de recouvrement borné, telle que pour tout $i \in I$, $8Q_i \in \mathcal{Q}_{B_0}$, telle que

$$E_\lambda \subset \bigcup_{i \in I} Q_i,$$

et avec $4Q_i$ qui contient au moins un point $\bar{x}_i$ en dehors de E_λ pour tout $i \in I$, c'est-à-dire :

$$MF(\bar{x}_i) \leq \lambda.$$

On pose $B_\lambda = \{MF > K\lambda, 2G \leq \gamma\lambda\}$. Si $K \geq 1$ alors $B_\lambda \subset E_\lambda$, d'où :

$$\mu(B_\lambda) \leq \sum_{i \in I} \mu(B_\lambda \cap Q_i).$$

Soit $i \in I$. Si $B_\lambda \cap Q_i = \emptyset$ il n'y a rien à faire. Sinon, il existe $\bar{y}_i \in Q_i$ tel que

$$2G(\bar{y}_i) \leq \gamma\lambda.$$

Par le Lemme de localisation 4.3.1 appliqué à F sur Q_i , si $K \geq K_0$, alors

$$\mu(B_\lambda \cap Q_i) \leq \mu(\{MF > K\lambda\} \cap Q_i) \leq \mu(\{M(F\mathbf{1}_{8Q_i}) > \frac{K}{K_0}\lambda\}).$$

Comme on a, $8Q_i \in \mathcal{Q}_{B_0}$, on peut donc décomposer presque partout sur X

$$F\mathbf{1}_{8Q_i} \leq G_{8Q_i}\mathbf{1}_{8Q_i} + H_{8Q_i}\mathbf{1}_{8Q_i}.$$

On a alors

$$\mu(B_\lambda \cap Q_i) \leq \mu(\{M(G_{8Q_i}\mathbf{1}_{8Q_i}) > \frac{K}{2K_0}\lambda\}) + \mu(\{M(H_{8Q_i}\mathbf{1}_{8Q_i}) > \frac{K}{2K_0}\lambda\}).$$

En utilisant le type faible $(1, 1)$ et (q, q) de la fonction maximale avec les bornes de continuité respectives c_1 et c_q , on a d'une part :

$$\begin{aligned} \mu(\{M(G_{8Q_i}\mathbf{1}_{8Q_i}) > \frac{K}{2K_0}\lambda\}) &\leq \frac{2K_0c_1}{K\lambda} \int_{8Q_i} G_{8Q_i} d\mu \\ &\leq \frac{2K_0c_1}{K\lambda} \mu(8Q_i) G(\bar{y}_i) \leq \frac{4K_0c_1}{K} \mu(8Q_i) \gamma, \end{aligned}$$

car $\bar{y}_i \in Q_i \subset 8Q_i$. D'autre part, si $q < +\infty$:

$$\begin{aligned} \mu(\{M(H_{8Q_i}\mathbf{1}_{8Q_i}) > \frac{K}{2K_0}\lambda\}) &\leq \left(\frac{2K_0c_q}{K\lambda}\right)^q \int_{8Q_i} H_{8Q_i}^q d\mu \\ &\leq \left(\frac{2K_0c_q}{K\lambda}\right)^q \mu(8Q_i) (MF(\bar{x}_i))^q \leq \left(\frac{2K_0c_q}{K}\right)^q \mu(8Q_i), \end{aligned}$$

car $\bar{x}_i \in 4Q_i \subset 8Q_i$.

Ainsi, en sommant sur $i \in I$ on obtient :

$$\mu(B_\lambda) \leq \sum_{i \in I} C \left(\frac{1}{K^q} + \frac{\gamma}{K} \right) \mu(8Q_i) \lesssim \left(\frac{1}{K^q} + \frac{\gamma}{K} \right) \mu(E_\lambda).$$

Si $q = +\infty$ alors pour tout $i \in I$:

$$\|M(H_{8Q_i}\mathbf{1}_{8Q_i})\|_{L^\infty} \leq \|H_{8Q_i}\mathbf{1}_{8Q_i}\|_{L^\infty} \leq MF(\bar{x}_i) \leq \lambda.$$

En choisissant $K \geq 2K_0$ on a donc $\{M(H_{8Q_i}\mathbf{1}_{8Q_i}) > \frac{K}{2K_0}\lambda\} = \emptyset$. □

Remarque 4.3.6. On aura besoin par la suite d'une estimation du volume de $B_\lambda = \{MF > K\lambda, 2G \leq \gamma\lambda\} \subset \{MF > K\lambda\}$. Avec les notations de la preuve précédente on a :

$$\mu(B_\lambda) \lesssim \frac{c_1}{K\lambda} \|F\|_{L^1} \lesssim \frac{\lambda_0}{K\lambda} \mu(B_0). \quad (4.3.4)$$

On peut maintenant prouver l'estimation suivante :

Théorème 4.3.7. Sous les hypothèses et les notations du Théorème 4.3.4, pour tout $p \in (1, q)$, si $F \in L^1$, alors :

$$\|F\|_{L^p(B_0)} \lesssim \mu(B_0)^{-\frac{1}{p}} \|F\|_{L^1} + \|G\|_{L^p} + \|H\|_{L^p}.$$

Démonstration. On découpe l'intégrale suivante en deux parties :

$$\int_0^{+\infty} p\lambda^{p-1} \mu(B_\lambda) d\lambda = \int_0^{\lambda_0} p\lambda^{p-1} \mu(B_\lambda) d\lambda + \int_{\lambda_0}^{+\infty} p\lambda^{p-1} \mu(B_\lambda) d\lambda.$$

On utilise le Théorème 4.3.4 lorsque $\lambda > \lambda_0$:

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0}^{+\infty} p\lambda^{p-1} \mu(B_\lambda) d\lambda &\lesssim \int_{\lambda_0}^{+\infty} p\lambda^{p-1} \left(\frac{1}{K^q} + \frac{\gamma}{K} \right) \mu(E_\lambda) d\lambda \\ &\lesssim \left(\frac{1}{K^q} + \frac{\gamma}{K} \right) \|MF\|_{L^p}^p. \end{aligned}$$

Lorsque $\lambda \leq \lambda_0$, d'après (4.3.4) on a :

$$\int_0^{\lambda_0} p\lambda^{p-1} \mu(B_\lambda) d\lambda \lesssim \int_0^{\lambda_0} p\lambda^{p-2} \frac{\lambda_0}{K} \mu(B_0) d\lambda = \frac{p}{p-1} \frac{\lambda_0^p}{K} \mu(B_0).$$

Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} p\lambda^{p-1} \mu(B_\lambda) d\lambda \lesssim p' \frac{\lambda_0^p}{K} \mu(B_0) + \left(\frac{1}{K^q} + \frac{\gamma}{K} \right) \|MF\|_{L^p}^p.$$

D'où :

$$\frac{1}{K^p} \|MF\|_{L^p}^p - \frac{1}{\gamma^p} (\|G\|_{L^p}^p + \|H\|_{L^p}^p) \lesssim \frac{\lambda_0^p}{K} \mu(B_0) + \left(\frac{1}{K^q} + \frac{\gamma}{K} \right) \|MF\|_{L^p}^p.$$

C'est-à-dire :

$$\|MF\|_{L^p}^p \lesssim K^{p-1} \lambda_0^p \mu(B_0) + K^p \left(\frac{1}{K^q} + \frac{\gamma}{K} \right) \|MF\|_{L^p}^p + \frac{K^p}{\gamma^p} (\|G\|_{L^p}^p + \|H\|_{L^p}^p).$$

On choisit $K > 1$ assez grand et $\gamma < 1$ assez petit pour que $K^p \left(\frac{1}{K^q} + \frac{\gamma}{K} \right) < 1 - 2^{-p}$, ce qui est possible car $q > p$. On en déduit donc

$$\|MF\|_{L^p} \lesssim \lambda_0 \mu(B_0)^{\frac{1}{p}} + \|G\|_{L^p} + \|H\|_{L^p}.$$

Si le membre de droite est infini, l'estimation précédente est triviale. Sinon, lorsque $\|G\|_{L^p} + \|H\|_{L^p} < +\infty$, on va montrer que cette inégalité a un sens dès que $F \in L^1$. On pose pour $\lambda > 0$:

$$f(\lambda) = p\lambda^p \mu(\{MF > \lambda\}).$$

On remarque que pour tout $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < +\infty$,

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} f(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda}$$

existe et est fini (car $\lesssim \|MF\|_{L^1} \lesssim \|F\|_{L^1}$). On remarque que

$$\begin{aligned} & \mu(\{MF > K\lambda\}) \leq \\ & \leq \mu(\{MF > K\lambda, G + H \geq \gamma\lambda\}) + \mu(\{MF > K\lambda, G + H < \gamma\lambda\}) \\ & \leq \mu(\{MF > K\lambda, G + H \geq \gamma\lambda\}) + \mu(\{G + H < \gamma\lambda\}). \end{aligned}$$

De plus

$$\int_{\frac{\lambda_0}{K}}^{\frac{\lambda_1}{K}} p\lambda^p \mu(\{G + H > \gamma\lambda\}) \frac{d\lambda}{\lambda} \leq \frac{2^p}{\gamma^p} (\|G\|_{L^p}^p + \|H\|_{L^p}^p).$$

Par le Théorème 4.3.4, et en utilisant que $\frac{\lambda_0}{2K} \leq \frac{\lambda_0}{K}$, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} f(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} &= \int_{\frac{\lambda_0}{K}}^{\frac{\lambda_1}{K}} f(K\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} \\ &\leq CK^p \left(\frac{1}{K^q} + \frac{\gamma}{K} \right) \int_{\frac{\lambda_0}{2K}}^{\frac{\lambda_1}{K}} f(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{2^p K^p}{\gamma^p} (\|G\|_{L^p}^p + \|H\|_{L^p}^p) \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\frac{\lambda_0}{2K}}^{\frac{\lambda_1}{K}} f(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} + R, \end{aligned}$$

où on a choisi $K \geq 1$ assez grand et γ assez petit et $R = \|G\|_{L^p}^p + \|H\|_{L^p}^p < +\infty$ par hypothèse. On prend $\lambda_0 = K^{-n}$ et $\lambda_1 = K^m$ pour $n, m \geq 1$ de sorte que l'estimation précédente donne :

$$\begin{aligned} \int_{K^{-n}}^{K^{m-1}} f(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} &\leq \int_{K^{-n}}^{K^m} f(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} \leq \frac{1}{2} \int_{\frac{K^{-n-1}}{2}}^{K^{m-1}} f(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} + R \\ &\leq \frac{1}{2} \int_{\frac{K^{-n-1}}{2}}^{K^{-n}} f(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{1}{2} \int_{K^{-n}}^{K^{m-1}} f(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} + R. \end{aligned}$$

D'où :

$$\int_{K^{-n}}^{K^{m-1}} f(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} \leq \int_{\frac{K^{-n-1}}{2}}^{K^{-n}} f(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} + 2R.$$

En utilisant le type faible $(1, 1)$ de M :

$$\int_{\frac{K^{-n-1}}{2}}^{K^{-n}} f(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} \lesssim \|F\|_{L^1},$$

ce qui ne dépend pas de m et n . On en déduit que

$$\|MF\|_{L^p}^p = \int_0^\infty f(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} = \lim_{n, m \rightarrow +\infty} \int_{K^{-n}}^{K^{n-1}} f(\lambda) \frac{d\lambda}{\lambda} < +\infty,$$

de sorte que $MF \in L^p$ dès que $F \in L^1$.

On remarque de plus par le Théorème de différentiation de Lebesgue sur B_0 (on autorise toutes les petites boules autour de N_0 dans la collection $\mathcal{Q}_{B_0}$), que puisque $\|F\|_{L^p(B_0)} \leq \|MF\|_{L^p}$ et $\lambda_0 = \frac{100c_1\|F\|_{L^1}}{\mu(B_0)}$, on a finalement montré que :

$$\|F\|_{L^p(B_0)} \lesssim \mu(B_0)^{-\frac{1}{p'}} \|F\|_{L^1} + \|G\|_{L^p} + \|H\|_{L^p}.$$

□

4.4 Interpolation

Le but de cette section est de montrer que l'on peut caractériser les espaces d'interpolations intermédiaires (L^2, H_0^1) et (L^2, BMO_0) en terme d'espaces de Lebesgue. On rappelle que

$$\text{BMO}_0 = \overline{\{f \in L^2 + L^\infty, M^\# f \in L^\infty\}}.$$

Ainsi on a la continuité suivante :

$$M^\#: \text{BMO}_0 \rightarrow L^\infty.$$

De plus $L^2 \subset \{f \in L_{loc}^1, M^\# f \lesssim (M(|f|^2))^{\frac{1}{2}} \in L^{2,\infty}\}$ d'où on en déduit

$$M^\#: L^2 \rightarrow L^{2,\infty}.$$

Ce qui implique que pour tout $\theta \in (0, 1)$:

$$M^\#: (L^2, \text{BMO}_0)_\theta \rightarrow (L^{2,\infty}, L^\infty)_\theta.$$

Théorème 4.4.1. *Si $1 < q \leq +\infty$ et $p \in (1, q)$, alors pour tout $f \in L^2$ on a :*

$$\|f\|_{L^{2p}(B_0)} \lesssim \mu(B_0)^{-\frac{1}{2p'}} \|f\|_{L^2} + \|M^\# f\|_{L^{2p}}.$$

Démonstration. Nous allons appliquer le Théorème 4.3.7 à $F = |f|^2$. Pour toute boule $Q \in \mathcal{Q}_{B_0}$ et tout $x \in Q$, on a :

$$F(x) \leq G_Q(x) + H_Q(x),$$

où

$$G_Q := 2|B_Q f|^2 \quad \text{et} \quad H_Q := 2|A_Q f|^2.$$

De plus pour toute boule $Q \in \mathcal{Q}_{B_0}$ et tout $x \in Q$ on a d'une part :

$$\int_Q G_Q d\mu \leq 2M^\sharp(f)(x)^2 := G(x).$$

D'autre part :

$$\left(\int_Q H_Q^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \leq 2 \left(\int_Q |A_Q(f)|^{2q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Or d'après les estimations Gaussiennes du semi-groupe de la chaleur et en utilisant un découpage en couronnes dyadiques autour de Q , pour tout $x' \in Q$ on a :

$$\begin{aligned} |A_Q(f)(x')| &\lesssim \sum_{k=1}^M \left| \int_X \frac{1}{\mu(B(x', r))} e^{-k \frac{d(x', y)^2}{r}} f(y) d\mu(y) \right| \\ &\lesssim \int_Q \frac{1}{\mu(B(x', r))} |f(y)| d\mu(y) \\ &\quad + \sum_{j \geq 1} \sum_{k=1}^M \int_{C_j(Q)} \frac{1}{\mu(B(x', r))} e^{-k4^j} |f(y)| d\mu(y) \\ &\lesssim \int_Q f d\mu + \sum_{k=1}^M \sum_{j \geq 1} \frac{1}{\mu(Q)} e^{-k4^j} \int_{2^j Q} |f| d\mu \\ &\lesssim \left(\int_Q |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{k=1}^M \sum_{j \geq 1} 2^{jd} e^{-k4^j} \left(\int_{2^j Q} |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Puisque $Q \in \mathcal{Q}_{B_0}$ on a alors

$$\left(\int_Q |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \leq M(|f|^2)(x')^{\frac{1}{2}}.$$

De même, si $2^j Q \in \mathcal{Q}_{B_0}$, alors

$$\sum_{k=1}^M \sum_{\substack{j \geq 1 \\ 2^j Q \in \mathcal{Q}_{B_0}}} 2^{jd} e^{-k4^j} \left(\int_{2^j Q} |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim M(|f|^2)(x')^{\frac{1}{2}}.$$

4.4. Interpolation

Reste à étudier le cas $2^j Q \notin \mathcal{Q}_{B_0}$. On a d'une part $d(2^j Q, B_0) \leq d(Q, B_0) \leq C\sqrt{t}$ donc $2^j Q \notin \mathcal{Q}_{B_0}$ implique que $r(2^j Q) > C\sqrt{t}$. Ainsi

$$B_0 \subset 82^j Q.$$

Comme $x \in Q$ et $Q \in \mathcal{Q}_{B_0}$, on a $x \in KB_0$ (on rappelle que $K \simeq 1 + C$). Donc pour tout $y \in B_0$:

$$\sum_{k=1}^M \sum_{\substack{j \geq 1 \\ 2^j Q \notin \mathcal{Q}_{B_0}}} 2^{jd} e^{-k4^j} \left(\int_{2^j Q} |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim M_{HL}(|f|)(y) \mathbb{1}_{KB_0}(x).$$

D'où

$$\left(\int_Q H_Q^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \lesssim MF(x) + H(x),$$

où $H(x) := \inf_{y \in B_0} M_{HL}(|f|)^2(y) \mathbb{1}_{KB_0}(x)$. Ainsi le Théorème 4.3.7 donne :

$$\|F\|_{L^p(B_0)} \lesssim \mu(B_0)^{-\frac{1}{p'}} \|F\|_{L^1} + \|G\|_{L^p} + \|H\|_{L^p}.$$

C'est-à-dire :

$$\|f\|_{L^{2p}(B_0)}^2 \lesssim \mu(B_0)^{-\frac{1}{p'}} \|f\|_{L^2}^2 + \|M^\sharp f\|_{L^{2p}}^2 + \|H\|_{L^p}.$$

De plus

$$\|H\|_{L^p} \leq \mu(B_0)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_0} M_{HL}(|f|) d\mu \right)^2 \leq \mu(B_0)^{\frac{1}{p}-1} \|M_{HL}(|f|)\|_{L^2}^2 \lesssim \mu(B_0)^{-\frac{1}{p'}} \|f\|_{L^2}^2$$

en utilisant le type fort $(2, 2)$ de la fonction maximale usuelle de Hardy-Littlewood M_{HL} . D'où l'estimation annoncée :

$$\|f\|_{L^{2p}(B_0)} \lesssim \mu(B_0)^{-\frac{1}{2p'}} \|f\|_{L^2} + \|M^\sharp f\|_{L^{2p}}.$$

□

Nous sommes maintenant en mesure de caractériser l'espace intermédiaire (L^2, BMO_0) en terme d'espace de Lebesgue.

Théorème 4.4.2. *Pour tout $s \in (2, \infty)$, l'espace d'interpolation entre L^2 et BMO_0 est déterminé de la façon suivante :*

$$\mathbb{1}_{B_0} id: L^2 \cap (L^2, BMO_0)_\theta \hookrightarrow L^s(B_0),$$

pour tout $\theta \in (0, 1)$ tel que $\frac{1-\theta}{2} = \frac{1}{s}$.

Démonstration. Pour tout $\theta \in (0, 1)$, on a :

$$M^\sharp: (L^2, \text{BMO}_0)_\theta \rightarrow (L^{2,\infty}, L^\infty)_\theta.$$

On se donne θ tel que $\frac{1-\theta}{2} = \frac{1}{s}$. Alors

$$(L^{2,\infty}, L^\infty)_\theta = L^s.$$

Ainsi

$$M^\sharp: (L^2, \text{BMO}_0)_\theta \rightarrow L^s,$$

c'est-à-dire

$$L^2 \cap (L^2, \text{BMO}_0)_\theta \hookrightarrow \{f \in L^2, M^\sharp f \in L^s\}.$$

On applique alors le Théorème 4.4.1 avec $q = +\infty$, $s = 2p$ et $f \in \{f \in L^2, M^\sharp f \in L^s\}$, ce qui nous permet d'obtenir :

$$\|f\|_{L^s(B_0)} \lesssim \mu(B_0)^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{s}} \|f\|_{L^2} + \|M^\sharp f\|_{L^s}.$$

Ainsi $\mathbb{1}_{B_0} id: \{f \in L^2, M^\sharp f \in L^s\} \hookrightarrow L^s(B_0)$ et

$$\mathbb{1}_{B_0} id: L^2 \cap (L^2, \text{BMO}_0)_\theta \hookrightarrow L^s(B_0). \quad (4.4.1)$$

□

Par dualité, nous pouvons maintenant caractériser l'espace intermédiaire (L^2, H_0^1) . En utilisant le Théorème 4.4.2 et la Propriété 4.2.6 on a :

$$\forall s \in (2, +\infty), \exists \theta \in (0, 1), \mathbb{1}_{B_0} id: L^2 \cap (L^2, (H_0^1)^*)_\theta \hookrightarrow L^s(B_0),$$

où $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$.

On rappelle que si l'ensemble diagonal $\{(x, x), x \in A \cap B\}$ est fermé dans $A \times B$ alors pour tout $\theta \in (0, 1)$ et $s \in [1, +\infty]$, on a :

$$((A, B)_{\theta, s})^* = (A^*, B^*)_{\theta, s'},$$

Ici $L^2 \cap (H_0^1)^*$ est fermé dans $L^2 \times (H_0^1)^*$. D'où

$$\mathbb{1}_{B_0} id: L^{s'}(B_0) \hookrightarrow L^2 + (L^2, H_0^1)_{\theta, s'}. \quad (4.4.2)$$

On rappelle que $\frac{1}{s_\theta} = \frac{1-\theta}{2}$ de sorte que $\frac{1}{s'_\theta} = \frac{1+\theta}{2}$.

On récapitule (4.4.1) et (4.4.2) dans l'énoncé suivant :

Théorème 4.4.3. *Pour tout $\theta \in (0, 1)$, on considère les exposants $p \in (1, 2)$ et $q = p' \in (2, +\infty)$ donnés par*

$$\frac{1}{p} = \frac{1+\theta}{2} \quad ; \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{2}.$$

Alors, avec les notations de la théorie de l'interpolation, on a :

$$\mathbb{1}_{B_0} id: L^p(B_0) \hookrightarrow L^2 + (L^2, H_0^1)_{\theta, p} \quad \text{et} \quad \mathbb{1}_{B_0} id: L^2 \cap (L^2, \text{BMO}_0)_{\theta, p'} \hookrightarrow L^{p'}(B_0).$$

4.5 Estimations de dispersion pour le propagateur de Schrödinger

Le but de cette section est de donner un analogue aux inégalités de dispersion $H^1 - \text{BMO}$ obtenues dans [BS14] pour le propagateur de Schrödinger dans le cas particulier des espaces de Hardy et BMO définis à la Section 4.2. Dans cette partie, on montre que l'on peut se ramener à prouver des estimations microlocalisées $L^2(B) - L^2(\tilde{B})$ pour en déduire les inégalités $H_0^1 - \text{BMO}_0$. Par interpolation, on pourra en déduire des estimations de dispersion $L^p(B_0) - L^{p'}(B_0)$.

Pour $m \in \mathbb{N}$ on définit la propriété H_m par :

$$\|T\psi_m(r^2H)\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} \lesssim |t|^{-\frac{d}{2}} \mu(B)^{\frac{1}{2}} \mu(\tilde{B})^{\frac{1}{2}}, \quad (H_m)$$

où B et $\tilde{B}$ sont deux boules de même rayon r de la collection $\mathcal{Q}_{B_0}$, où $\psi_m(x) = x^m e^{-x}$, et $T = e^{itH} \psi_{m'}(h^2H)$, $m' \in \mathbb{N}$. De la même façon que dans [BS14] on se place dans le régime $h^2 \leq |t| \leq h^{1+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$.

La mesure étant Ahlfors régulière on peut réécrire la propriété (H_m) :

$$\|T\psi_m(r^2H)\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} \lesssim \left(\frac{r^2}{|t|} \right)^{\frac{d}{2}}.$$

On montre d'abord l'équivalent du Théorème 2.20 de [BS14].

Théorème 4.5.1. *Pour $t > 0$, on pose*

$$\mathcal{Q}'_{B_0} = \{B = B(x, r), 0 < r \leq \frac{\sqrt{2}}{2} C \sqrt{t}, d(B, B_0) \leq 6C \sqrt{t}\}.$$

Soient $m \geq m' \geq 0$ deux entiers. Si $(H_{m'})$ est satisfaite pour la collection $\mathcal{Q}'_{B_0}$, alors (H_m) est satisfaite pour la collection $\mathcal{Q}_{B_0}$.

Remarque 4.5.2. *Le théorème est à comprendre comme une certaine “croissance” dans la propriété (H_m) par rapport à m quitte à changer les constantes dans la définition de la collection des boules sur lesquelles on travaille. Il faut retenir que moralement :*

$$\forall m \geq m', (H_{m'}) \Rightarrow (H_m).$$

Démonstration. On suppose que $m \geq m' \geq 0$ et $(H_{m'})$ est satisfaite pour la collection $\mathcal{Q}'_{B_0}$. Soit B_1 et B_2 deux boules de rayon $r > 0$ dans la collection $\mathcal{Q}_{B_0}$. Comme $m \geq m'$, on a

$$\|T\psi_m(r^2H)\|_{L^2(B_1) \rightarrow L^2(B_2)} = 2^m \|T\psi_{m'}(\frac{r^2}{2}H)\psi_{m-m'}(\frac{r^2}{2}H)\|_{L^2(B_1) \rightarrow L^2(B_2)}.$$

On recouvre alors B_1 par des boules $(B_j)_{j \in J}$ de rayon $\frac{r}{\sqrt{2}}$, B_2 par des boules $(B_l)_{l \in L}$ de rayon $\frac{r}{\sqrt{2}}$, et X par des boules $(B_k)_{k \in K}$ de rayon $\frac{r}{\sqrt{2}}$. On suppose que les trois recouvrements vérifient la propriété de recouvrement borné. On a donc

$$|J| \simeq 1 \quad \text{et} \quad |L| \simeq 1.$$

Par contre, il peut y avoir une infinité de boules B_k . On a alors :

$$\begin{aligned} & \|T\psi_m(r^2 H)\|_{L^2(B_1) \rightarrow L^2(B_2)} \leq \\ & \sum_{j,k,l} 2^m \|T\psi_{m'}(\frac{r^2}{2} H)\|_{L^2(B_k) \rightarrow L^2(B_l)} \|\psi_{m-m'}(\frac{r^2}{2} H)\|_{L^2(B_j) \rightarrow L^2(B_k)}. \end{aligned}$$

Pour tout $l \in L$, d'une part

$$r(B_l) = \frac{r}{\sqrt{2}} \leq \frac{C\sqrt{t}}{\sqrt{2}}.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} d(B_l, B_0) & \leq d(B_l, B_2) + d(B_2, B_0) + 2r(B_2) \\ & \leq 0 + C\sqrt{t} + 2C\sqrt{t} \leq 6C\sqrt{t} \end{aligned}$$

Donc pour tout $l \in L$,

$$B_l \in \mathcal{Q}'_{B_0}.$$

D'après les estimations de Davies-Gaffney pour le semi-groupe de la chaleur, on a

$$\|\psi_{m-m'}(\frac{r^2}{2} H)\|_{L^2(B_j) \rightarrow L^2(B_k)} \lesssim e^{-2\frac{d(B_j, B_k)^2}{r^2}}.$$

Deux cas de figure se produisent.

Premier cas : $B_k \in \mathcal{Q}'_{B_0}$.

Dans ce cas, d'après l'hypothèse $(H_{m'})$, on a :

$$\|T\psi_m(r^2 H)\|_{L^2(B_1) \rightarrow L^2(B_2)} \lesssim \sum_{j,k,l} \left(\frac{r^2/2}{t}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-2\frac{d(B_j, B_k)^2}{r^2}}.$$

Deuxième cas : $B_k \notin \mathcal{Q}'_{B_0}$.

On remarque que

$$r(B_k) = \frac{r}{\sqrt{2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} C\sqrt{t}.$$

Donc nécessairement

$$d(B_k, B_0) > 6C\sqrt{t}.$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire renversée, vu que B_j et B_k ont le même rayon, on a

$$\begin{aligned} d(B_j, B_k) &\geq d(B_k, B_0) - d(B_0, B_j) - 2r(B_k) \\ &\geq 6C\sqrt{t} - (d(B_0, B_1) + d(B_1, B_j) + 2r(B_1)) - 2\frac{r}{\sqrt{2}} \\ &\geq 6C\sqrt{t} - (0 + C\sqrt{t} + 2C\sqrt{t}) - \sqrt{2}C\sqrt{t} \\ &\geq (3 - \sqrt{2})C\sqrt{t}, \end{aligned}$$

où $(3 - \sqrt{2})C = c > 0$. De sorte que, par le calcul fonctionnel borné et l'estimation précédente :

$$\|T\psi_m(r^2H)\|_{L^2(B_1) \rightarrow L^2(B_2)} \lesssim \sum_{j,k,l} e^{-\frac{d(B_j, B_k)^2}{r^2}} e^{-c^2 \frac{t}{r^2}} \lesssim \sum_{j,k,l} e^{-2\frac{d(B_j, B_k)^2}{r^2}} \left(\frac{t}{r^2}\right)^{-N},$$

pour tout $N \geq 1$ entier aussi grand qu'on le veut. Lorsque N est assez grand, on a

$$\left(\frac{t}{r^2}\right)^{-N} \leq \left(\frac{r^2}{t}\right)^{\frac{d}{2}}.$$

Ainsi, les sommes sur j et l étant finie, il ne reste qu'à estimer uniformément en j une somme de la forme :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in K} e^{-\frac{d(B_j, B_k)^2}{r^2}} &\lesssim \sum_{n \geq 0} e^{-n^2} \#\{B_k, d(B_j, B_k) \simeq nr\} \\ &\lesssim \sum_{n \geq 0} e^{-n^2} n^d < +\infty. \end{aligned}$$

Donc finalement :

$$\|T\psi_m(r^2H)\|_{L^2(B_1) \rightarrow L^2(B_2)} \lesssim \left(\frac{r^2}{t}\right)^{\frac{d}{2}},$$

et la propriété (H_m) est montrée pour la collection $\mathcal{Q}_{B_0}$. $\square$

On suit la démarche de [BS14] et établit donc tout d'abord la continuité voulue sur l'ensemble des atomes.

Théorème 4.5.3. *Si T vérifie la propriété (H_m) pour un certain $m \leq \frac{4M}{3}$ avec M assez grand ($M \geq \max(\frac{d}{2}, 3, \frac{3}{4} + \frac{d}{8})$), alors on a :*

$$\sup_{a,b} |\langle Ta, b \rangle| \lesssim |t|^{-\frac{d}{2}},$$

où la borne supérieure est prise sur tous les atomes a, b .

Remarque 4.5.4. On a choisit M assez grand pour assurer l'existence d'un entier $m \in [\frac{d}{2}, \frac{4M}{3}]$.

Démonstration. On se donne deux atomes a et b . Par définition il existe deux boules B_1 et B_2 dans $\mathcal{Q}_{B_0}$ de rayons respectifs r_1 et r_2 , et $f \in L^2(B_1)$, $g \in L^2(B_2)$ telles que

$$\begin{cases} a &= (1 - e^{-r_1^2 H})^M f & \text{avec} & \|f\|_{L^2(B_1)} \leq \mu(B_1)^{-\frac{1}{2}} \\ b &= (1 - e^{-r_2^2 H})^M g & \text{avec} & \|g\|_{L^2(B_2)} \leq \mu(B_2)^{-\frac{1}{2}} \end{cases}.$$

Comme dans la preuve du Théorème 3.1 de [BS14] on montre que, si $u \in [0, Mr_1^2]$ et $v \in [0, Mr_2^2]$ avec $u \leq v$, en recouvrant l'espace X par des boules B_j et B_k de rayon $\sqrt{u + \frac{v}{3}} \lesssim \sqrt{|t|}$, alors :

$$\begin{aligned} & |\langle Ta, b \rangle| \\ & \lesssim \iint \sum_{j,k} \left(\frac{u}{v}\right)^M \|T\psi_{\frac{4M}{3}}((u + \frac{v}{3})H)\mathbf{1}_{B_j}\psi_{\frac{M}{3}}(vH)f\|_{L^2(B_k)} \|\psi_{\frac{M}{3}}(vH)g\|_{L^2(B_k)} \frac{du}{u} \frac{dv}{v} \\ & = U + V, \end{aligned}$$

où U correspond à la somme lorsque les boules B_j et B_k sont dans la collection $\mathcal{Q}_{B_0}$, et V correspond à la somme dès que l'une des boules B_j ou B_k au moins n'est pas dans la collection $\mathcal{Q}_{B_0}$. On traite U de la même façon que dans [BS14] et obtient :

$$\sup_{a,b} |\langle Ta, b \rangle| \lesssim |t|^{-\frac{d}{2}}.$$

Il faut noter ici qu'on a besoin d'utiliser $(H_{\frac{4M}{3}})$. On peut le faire puisqu'on a supposé (H_m) vraie pour un $m \leq \frac{4M}{3}$ quitte à changer légèrement les constantes dans la définition de $\mathcal{Q}_{B_0}$ comme explicité au Théorème 4.5.1.

Pour traiter V on remarque que

$$\|T\psi_{\frac{4M}{3}}((u + \frac{v}{3})H)\|_{L^2 \rightarrow L^2} \lesssim 1$$

donc :

$$V \lesssim \iint \sum_{B_j \text{ ou } B_k \notin \mathcal{Q}_{B_0}} \left(\frac{u}{v}\right)^M \|\psi_{M/3}(vH)f\|_{L^2(B_j)} \|\psi_{M/3}(vH)g\|_{L^2(B_k)} \frac{du}{u} \frac{dv}{v}.$$

En notant $\psi_{\frac{M}{3}} = \psi$, on estime le terme portant sur la somme en j : $\sum_j \|\psi(vH)f\|_{L^2(B_j)}$. D'une part si $B_j \in \mathcal{Q}_{B_0}$, les estimations de Davies-Gaffney

pour le semi-groupe de la chaleur montrent que :

$$\begin{aligned}
\sum_j \|\psi(vH)f\|_{L^2(B_j)} &\lesssim \sum_j e^{-\frac{d(B_j, B_0)^2}{v}} \|f\|_{L^2(B_1)} \\
&\lesssim \|f\|_{L^2(B_1)} \sum_{l=0}^{+\infty} e^{-4^l} \#\{j, d(B_j, B_0) \sim \sqrt{v}2^l\} \\
&\lesssim \mu(B_1)^{-\frac{1}{2}} \sum_{l=0}^{+\infty} e^{-4^l} \left(2^l \frac{\sqrt{|t|}}{\sqrt{v}}\right)^d \\
&\lesssim \mu(B_1)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{|t|}{v}\right)^{\frac{d}{2}}.
\end{aligned}$$

D'autre part si $B_j \notin \mathcal{Q}_{B_0}$ alors $d(B_j, B_0) > C\sqrt{|t|}$ (quitte à changer encore une fois les constantes dans la définition de $\mathcal{Q}_{B_0}$, on peut supposer que c'est la condition sur la distance que fait défaut). Un calcul similaire donne :

$$\begin{aligned}
\sum_j \|\psi(vH)f\|_{L^2(B_j)} &\lesssim \sum_j e^{-\frac{d(B_j, B_0)^2}{v}} \|f\|_{L^2(B_1)} \\
&\lesssim \mu(B_1)^{-\frac{1}{2}} \sum_j e^{-\frac{d(B_j, B_0)^2}{v}} \\
&\lesssim \mu(B_1)^{-\frac{1}{2}} \sum_j e^{-\frac{|t|}{2v}} e^{-\frac{d(B_j, B_0)^2}{2v}} \\
&\lesssim \mu(B_1)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{|t|}{2v}} \left(\frac{|t|}{v}\right)^{\frac{d}{2}}.
\end{aligned}$$

On estime la somme sur k : $\sum_k \|\psi(vH)g\|_{L^2(B_k)}$ de la même manière. Ainsi :

$$V \lesssim \iint \left(\frac{u}{v}\right)^M \mu(B_1)^{-\frac{1}{2}} \mu(B_2)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{|t|}{v}\right)^d e^{-\frac{|t|}{v}} \frac{du}{u} \frac{dv}{v},$$

On s'intéresse d'abord au cas V_1 où $0 \leq u \leq v \leq R := \min(Mr_1^2, Mr_2^2)$:

$$\begin{aligned}
V_1 &\lesssim \int_0^R \int_0^v \left(\frac{u}{v}\right)^{M-1} \frac{u}{v} r_1^{-\frac{d}{2}} r_2^{-\frac{d}{2}} \left(\frac{|t|}{v}\right)^d e^{-\frac{|t|}{v}} \frac{du}{u} \frac{dv}{v} \\
&\lesssim (r_1 r_2)^{-\frac{d}{2}} \int_0^R \left(\frac{|t|}{v}\right)^d \left(\frac{v}{|t|}\right)^{3\frac{d}{2}} \frac{dv}{v} \\
&\lesssim (|t| r_1 r_2)^{-\frac{d}{2}} \int_0^R v^{\frac{d}{2}-1} dv = |t|^{-\frac{d}{2}} \left(\frac{R}{r_1 r_2}\right)^{\frac{d}{2}} \lesssim |t|^{-\frac{d}{2}}.
\end{aligned}$$

Ensuite, pour le cas V_2 où $0 \leq u \leq Mr_1^2 \leq v \leq Mr_2^2$:

$$\begin{aligned}
 V_2 &\lesssim \int_{Mr_1^2}^{Mr_2^2} \int_0^{Mr_1^2} \left(\frac{u}{v}\right)^M r_1^{-\frac{d}{2}} r_2^{-\frac{d}{2}} \left(\frac{|t|}{v}\right)^d e^{-\frac{|t|}{v}} \frac{du}{u} \frac{dv}{v} \\
 &\lesssim (r_1 r_2)^{-\frac{d}{2}} \int_{Mr_1^2}^{Mr_2^2} \frac{(Mr_1^2)^M}{M} \frac{1}{v^M} \left(\frac{v}{|t|}\right)^{\frac{d}{2}} \frac{dv}{v} \\
 &\lesssim |t|^{-\frac{d}{2}} \frac{r_1^{2M}}{(r_1 r_2)^{\frac{d}{2}}} \int_{Mr_1^2}^{+\infty} v^{\frac{d}{2}-M-1} dv \\
 &\lesssim |t|^{-\frac{d}{2}} \frac{r_1^{2M}}{(r_1 r_2)^{\frac{d}{2}}} r_1^{d-2M} \simeq |t|^{-\frac{d}{2}} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{\frac{d}{2}} \lesssim |t|^{-\frac{d}{2}},
 \end{aligned}$$

puisque $r_1 \leq r_2$ et $\frac{d}{2} - M - 1 < -1$. Ainsi on obtient

$$V \lesssim |t|^{-\frac{d}{2}}$$

et on en déduit

$$|\langle Ta, b \rangle| \lesssim |t|^{-\frac{d}{2}}$$

uniformément par rapport aux atomes a et b . □

Toujours en suivant la même démarche que dans [BS14], on montre :

Théorème 4.5.5. *Si T vérifie la propriété (H_m) pour un certain $m \in [\frac{d}{2}, \frac{4M}{3}]$, alors, uniformément par rapport à $s > 0$, l'opérateur Te^{-sH} vérifie la propriété (H_m) et le Théorème 4.5.3 nous assure donc que :*

$$\sup_{s>0} \sup_{a,b} |\langle Te^{-sH} a, b \rangle| \lesssim |t|^{-\frac{d}{2}},$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des atomes a et b .

Démonstration. On pose $U_s := Te^{-sH}$. Il suffit de montrer que U_s vérifie la propriété (H_m) uniformément en $s < s_0$, avec s_0 à définir. C'est-à-dire

$$\|U_s \psi_m(r^2 H)\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} \lesssim |t|^{-\frac{d}{2}} \mu(B)^{\frac{1}{2}} \mu(\tilde{B})^{\frac{1}{2}},$$

pour toutes boules B et $\tilde{B}$ de rayon r dans $\mathcal{Q}_{B_0}$. Premièrement on remarque que

$$U_s \psi_m(r^2 H) = Te^{-sH} (r^2 H)^m e^{-r^2 H} = T \psi_m((r^2 + s)H) \left(\frac{r^2}{r^2 + s}\right)^m,$$

de sorte que

$$\|U_s \psi_m(r^2 H)\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} = \left(\frac{r^2}{r^2 + s}\right)^m \|T \psi_m((r^2 + s)H)\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})}.$$

Comme $r^2 < r^2 + s$, les boules de rayons r sont incluses dans les boules de même centre et de rayon $\sqrt{r^2 + s}$ notées $B_{\sqrt{r^2+s}}$ et $\widetilde{B_{\sqrt{r^2+s}}}$. On a $d(B_{\sqrt{r^2+s}}, B_0) \leq d(B, B_0)$ et $d(\widetilde{B_{\sqrt{r^2+s}}}, B_0) \leq d(\widetilde{B}, B_0)$. Donc les boules $B_{\sqrt{r^2+s}}$ et $\widetilde{B_{\sqrt{r^2+s}}}$ sont dans la collection $\mathcal{Q}_{B_0}$ si et seulement si $\sqrt{r^2 + s} \leq C\sqrt{|t|}$. On suppose d'abord que c'est le cas, et les deux boules sont dans la collection $\mathcal{Q}_{B_0}$. Ainsi, par la propriété (H_m) pour T et la condition de doublement, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \|U_s \psi_{m,1}(r^2 H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B_r})} \\
& \leq \left(\frac{r^2}{r^2 + s} \right)^m \|T \psi_{m,1}((r^2 + s)H)\|_{L^2(B_{\sqrt{r^2+s}}) \rightarrow L^2(\widetilde{B_{\sqrt{r^2+s}}})} \\
& \leq \left(\frac{r^2}{r^2 + s} \right)^m |t|^{-\frac{d}{2}} \mu(B_{\sqrt{r^2+s}})^{\frac{1}{2}} \mu(\widetilde{B_{\sqrt{r^2+s}}})^{\frac{1}{2}} \\
& \lesssim \left(\frac{r^2}{r^2 + s} \right)^m |t|^{-\frac{d}{2}} \sqrt{\frac{r^2 + s}{r^2}}^{\frac{d}{2}} \mu(B_r)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{r^2 + s}{r^2}}^{\frac{d}{2}} \mu(\widetilde{B_r})^{\frac{1}{2}} \\
& \leq |t|^{-\frac{d}{2}} \left(\frac{r^2}{r^2 + s} \right)^{m-\frac{d}{2}} \mu(B_r)^{\frac{1}{2}} \mu(\widetilde{B_r})^{\frac{1}{2}} \leq |t|^{-\frac{d}{2}} \mu(B_r)^{\frac{1}{2}} \mu(\widetilde{B_r})^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité résulte du fait que $m \geq \frac{d}{2}$.

Si maintenant $\sqrt{r^2 + s} > C\sqrt{|t|}$, et les boules $B_{\sqrt{r^2+s}}$ et $\widetilde{B_{\sqrt{r^2+s}}}$ ne sont donc pas dans la collection $\mathcal{Q}_{B_0}$, par calcul fonctionnel borné, on a :

$$\begin{aligned}
& \|U_s \psi_{m,1}(r^2 H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B_r})} \\
& \leq \left(\frac{r^2}{r^2 + s} \right)^m \|T \psi_{m,1}((r^2 + s)H)\|_{L^2(B_{\sqrt{r^2+s}}) \rightarrow L^2(\widetilde{B_{\sqrt{r^2+s}}})} \\
& \lesssim \left(\frac{r^2}{r^2 + s} \right)^m 1 = \left(\frac{r^2}{r^2 + s} \right)^m |t|^{-\frac{d}{2}} |t|^{\frac{d}{4}} |t|^{\frac{d}{4}} \\
& \lesssim \left(\frac{r^2}{r^2 + s} \right)^m |t|^{-\frac{d}{2}} \mu(B_{\sqrt{r^2+s}})^{\frac{1}{2}} \mu(\widetilde{B_{\sqrt{r^2+s}}})^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

et le même calcul que précédemment montre le résultat. Ceci montre la propriété (H_m) pour l'opérateur U_s et toutes les estimées sont uniformes en $s > 0$. $\square$

La preuve du Théorème 3.4 de [BS14] reste la même (en supposant que $s < s_0$) donc :

Théorème 4.5.6. *Pour tout $0 < s < s_0$, Te^{-sH} est continu de L^1 dans L^∞ avec*

$$\|Te^{-sH}\|_{L^1 \rightarrow L^\infty} \lesssim s^{-\frac{d}{2}}.$$

Nous pouvons maintenant prouver la continuité sur l'espace de Hardy tout entier.

Théorème 4.5.7. *Supposons que T vérifie la propriété (H_m) pour un certain $m \in [\frac{d}{2}, \frac{4M}{3}]$. Alors T et Te^{-sH} pour tout $0 < s < s_0$, s'étendent en des opérateurs continus de H_0^1 dans BMO_0 et, en gardant la même notations pour les extensions, on a :*

$$\|T\|_{H_0^1 \rightarrow BMO_0} + \sup_{0 < s < s_0} \|Te^{-sH}\|_{H_0^1 \rightarrow BMO_0} \lesssim |t|^{-\frac{d}{2}}.$$

Démonstration. D'après les Théorèmes 4.5.3, 4.5.5, et 4.5.6, la preuve du Théorème 3.5 de [BS14] s'applique. $\square$

Nous sommes donc en mesure de formuler une estimation de dispersion $L^p(B_0) - L^{p'}(B_0)$ en utilisant le résultat d'interpolation 4.4.3 de la section précédente.

Théorème 4.5.8. *Si T vérifie (H_m) pour un certain $m \in [\frac{d}{2}, \frac{4M}{3}]$, et que $T: L^2 \rightarrow L^2$ avec borne de continuité $\lesssim 1$, alors pour tout $p \in (1, 2)$:*

$$\mathbb{1}_{B_0} T \mathbb{1}_{B_0}: L^p(B_0) \rightarrow L^{p'}(B_0) \quad \text{avec} \quad \|\mathbb{1}_{B_0} T \mathbb{1}_{B_0}\|_{L^p(B_0) \rightarrow L^{p'}(B_0)} \lesssim |t|^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'})}.$$

4.6 Dispersion pour Schrödinger à partir de l'opérateur des ondes

Le but de cette partie est de montrer comment déduire la propriété (H_m) à partir, essentiellement, de la vitesse finie de propagation de l'opérateur des ondes. Puisque H est un opérateur positif, si $\operatorname{Re}(z) \geq 0$, on peut, d'après la formule de Cauchy, écrire :

$$e^{-zH} = \int_0^{+\infty} \cos(s\sqrt{H}) e^{-\frac{s^2}{4z}} \frac{ds}{\sqrt{\pi z}}. \quad (4.6.1)$$

On veut montrer, en notant $z = h^2 - it$ pour tout $h \in]0, 1]$, que sous de bonnes hypothèses :

$$\|e^{-zH} \psi_m(r^2 H)\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} \lesssim \left(\frac{r^2}{t}\right)^{\frac{d}{2}},$$

pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Comme le suggère la formule (4.6.1), nous montrerons l'estimation précédente grâce à des hypothèses sur le propagateur des ondes $\cos(s\sqrt{H})$.

Hypothèse 4.6.1. *Il existe $\kappa \in (0, +\infty]$ tel que pour tout $s > 0$, le propagateur des ondes $\cos(s\sqrt{H})$ admet un noyau $K_{\cos(s\sqrt{H})}$ qui vérifie :*

$$|K_{\cos(s\sqrt{H})}(x, y)| \leq s^{-d} \quad \text{si} \quad d(x, y) \leq \frac{s}{2} \quad \text{et} \quad s \leq \kappa.$$

Remarque 4.6.2. 1. κ est un paramètre qui dépend de la géométrie de l'espace X . Il est par exemple donné par le rayon d'injectivité lorsque X est une variété Riemannienne.

2. Cette hypothèse est motivée par la Propriété 27 de [Bér77].

3. Le Théorème 3.4 de [CS08] montre que les estimations de Davies-Gaffney pour le semi-groupe sont équivalentes à la condition suivante sur le support du noyau :

$$\text{supp } K_{\cos(s\sqrt{H})} \subset \{(x, y) \in X^2, d(x, y) \leq s\}.$$

4. On fait une hypothèse uniquement dans la région $\{(x, y) \in X^2, d(x, y) \leq \frac{s}{2}\}$ c'est-à-dire à l'intérieur strictement du cône de lumière. Ainsi on ne fait aucune hypothèse sur ce qui se passe près du bord du cône de lumière (où les phénomènes les plus compliqués peuvent apparaître).

Cette remarque nous amène à décomposer le propagateur des ondes en deux parties :

$$\cos(s\sqrt{H}) = I_s + II_s$$

où I_s et II_s ont des noyaux respectifs K_{I_s} et K_{II_s} tels que :

- $\text{supp } K_{I_s} \subset \{(x, y) \in X^2, d(x, y) \leq \frac{s}{2}\}$ et $K_{I_s} = K_{\cos(s\sqrt{H})}$ sur le support de K_{I_s} ;
- $\text{supp } K_{II_s} \subset \{(x, y) \in X^2, \frac{s}{2} \leq d(x, y)\}$.

Remarque 4.6.3. 1. I_s encode la dispersion loin du bord du cône de lumière. On fait l'hypothèse qu'on connaît bien la dispersion pour les ondes dans cette région. Moralement c'est la région dans laquelle le comportement des ondes est le plus simple.

2. II_s encode la dispersion près du bord du cône de lumière. On ne fait pas d'hypothèse particulière sur la dispersion dans cette région. Comme le montre la Proposition 4.6.4 suivante, on n'utilise qu'une continuité L^2-L^2 avec borne $\lesssim 1$ pour cet opérateur.

Pour mieux cerner les opérateurs en questions, on prouve d'abord la proposition suivante :

Proposition 4.6.4. Pour tout $0 < s \leq \kappa$ les opérateurs I_s et II_s sont bornés de $L^2(X)$ dans $L^2(X)$ uniformément en s .

Démonstration. Par le calcul fonctionnel borné, pour tout $s \geq 0$:

$$\|\cos(s\sqrt{H})\|_{L^2 \rightarrow L^2} \leq \|\cos(s\sqrt{\cdot})\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \leq 1.$$

Soit $f \in L^2$ et $0 < s \leq \kappa$. La régularité Ahlfors de la mesure implique :

$$\begin{aligned} \|I_s f\|_{L^2} &\leq \left\| \int_{\{y \in X, d(x,y) \leq \frac{s}{2}\}} s^{-d} |f(y)| d\mu(y) \right\|_{L_x^2} \\ &\lesssim \left\| \frac{1}{\mu(B(x, \frac{s}{2}))^d} \int_{B(x, \frac{s}{2})} |f(y)| d\mu(y) \right\|_{L_x^2} \\ &\leq \|Mf\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{L^2}. \end{aligned}$$

La deuxième continuité résulte du fait que :

$$\|II_s f\|_{L^2} = \|\cos(s\sqrt{H})f - I_s f\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{L^2}.$$

□

Le théorème principal de cette partie est le suivant :

Théorème 4.6.5. *Si $d > 1$, $m \geq \lceil \frac{d}{2} \rceil$, et si l'Hypothèse (4.6.1) est vérifiée, alors pour toutes boules $(B, \tilde{B}) \in \mathcal{Q}_{B_0}^2$ de rayon r et $m' \in \mathbb{N}$:*

$$\|e^{itH} \psi_{m'}(h^2 H) \psi_m(r^2 H)\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} \lesssim \left(\frac{r^2}{|t|} \right)^{\frac{d}{2}}, \quad (4.6.2)$$

où on distingue deux cas :

- $\kappa = +\infty$ et l'estimation (4.6.2) est valide pour tout $t \neq 0$.
- $\kappa < +\infty$ et l'estimation (4.6.2) est valide pour tout $\varepsilon > 0$, $0 < h \leq 1$ et $h^2 \leq |t| \leq h^{1+\varepsilon}$.

Autrement dit, $e^{itH} \psi_{m'}(h^2 H)$ vérifie l'estimation (H_m) .

Démonstration. Première étape : Quelques simplifications.

On remarque tout d'abord que $r \lesssim \sqrt{|t|}$ puisque B et $\tilde{B}$ sont deux boules de la collection $\mathcal{Q}_{B_0}$.

Supposons que (4.6.2) soit vraie pour tout $h \in (0, r]$. On va prouver que (4.6.2) est alors automatiquement vérifiée pour $h > r$. On fixe donc $r < h$. La structure de semi-groupe nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} &\|e^{itH} \psi_{m'}(h^2 H) \psi_m(r^2 H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\tilde{B}_r)} \\ &\lesssim \frac{r^{2m}}{(\frac{h^2}{2} + r^2)^m} \|e^{itH} \psi_{m'}(\frac{h^2}{2} H) \psi_m((\frac{h^2}{2} + r^2) H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\tilde{B}_r)} \\ &\lesssim \left(\frac{r}{h} \right)^{2m} \|e^{itH} \psi_{m'}(\frac{h^2}{2} H) \psi_m((\frac{h^2}{2} + r^2) H)\|_{L^2(B_\rho) \rightarrow L^2(\tilde{B}_\rho)}, \end{aligned}$$

où $\rho = \sqrt{\frac{h^2}{2} + r^2} \geq r$, $\rho \simeq h$ et $B_\rho = \frac{\rho}{r} B_r$ désigne la boule dilatée (même notation pour $\widetilde{B}_\rho$). Puisque $h^2 \leq |t|$ on a $\rho \lesssim \sqrt{|t|}$ donc, quitte à changer les constantes dans la définition de la collection $\mathcal{Q}_{B_0}$, B_ρ et $\widetilde{B}_\rho$ sont dans la collection $\mathcal{Q}_{B_0}$. En utilisant (4.6.2) à l'échelle ρ (car $\rho \geq h/\sqrt{2}$) on obtient :

$$\begin{aligned} \|e^{itH} \psi_{m'}(h^2 H) \psi_m(r^2 H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B}_r)} &\lesssim \left(\frac{r}{h}\right)^{2m} \left(\frac{\rho^2}{|t|}\right)^{\frac{d}{2}} \\ &\lesssim \left(\frac{r}{h}\right)^{2m} \left(\frac{h^2}{|t|}\right)^{\frac{d}{2}} \\ &\lesssim \left(\frac{r^2}{|t|}\right)^{\frac{d}{2}}, \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $m \geq d/2$, comme $r \leq h$:

$$\frac{r^{2m}}{h^{2m}} h^d = r^d \frac{r^{2m-d}}{h^{2m-d}} \leq r^d.$$

Ainsi, dès que (4.6.2) est prouvée pour $h \leq r$, on en déduit qu'elle est aussi vraie pour $h > r$.

Il suffit donc de prouver le théorème pour $h \leq r$ et $r^2 \leq |t|$, ce qui est supposé dans la suite.

Pour un entier $m' \neq 0$, on a :

$$e^{itH} \psi_{m'}(h^2 H) \psi_m(r^2 H) = \left(\frac{h^2}{r^2}\right)^{m'} e^{itH} e^{-h^2 H} \psi_{m'+m}(r^2 H).$$

Or $h \leq r$, donc :

$$\|e^{itH} \psi_{m'}(h^2 H) \psi_m(r^2 H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B}_r)} \lesssim \|e^{(it-h^2)H} \psi_{m'+m}(r^2 H)\|_{L^2(B_r) \rightarrow L^2(\widetilde{B}_r)}.$$

Ainsi, si (4.6.2) est prouvée pour $m' = 0$ et un certain entier m , alors par le Théorème 4.5.1, quitte à changer les constantes dans la définition de la collection $\mathcal{Q}_{B_0}$, l'estimation (4.6.2) est aussi vraie pour $m' = 0$ et n'importe quel entier $m'' \geq m$. L'observation précédente montre qu'alors (4.6.2) sera satisfaite pour tout $m' = m'' - m \geq 0$.

En conclusion, on peut se restreindre à montrer (4.6.2) pour $m' = 0$ avec $h \leq r$ et $r^2 \leq |t|$, ce que nous supposons donc pour le reste de la preuve.

Remarque 4.6.6. On s'autorise à changer les constantes dans la définition de la collection $\mathcal{Q}_{B_0}$ puisque cela ne change pas la nature du résultat final. Le point important est de ne changer ces constantes qu'un nombre fini de fois, pour ne pas avoir la situation où n'importe quelle boule serait dans $\mathcal{Q}_{B_0}$.

Deuxième étape : Décomposition en deux régimes.

Fixons deux boules B et $\tilde{B}$ de rayon r dans $\mathcal{Q}_{B_0}$. On sait que $d(B, B_0) \leq C\sqrt{|t|}$ et $d(\tilde{B}, B_0) \leq C\sqrt{|t|}$. On pose $C' := 2(2 + 2C)$.

Pour éviter les termes de bords (non nuls) dans les intégrations par parties à venir, on introduit la fonction $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ suivante :

$$\begin{cases} 0 \leq \chi \leq 1 \\ \chi(x) = 1 \text{ si } x \in [0, C'\sqrt{|t|}] \\ \chi(x) = 0 \text{ si } x \in [2C'\sqrt{|t|}, +\infty] \end{cases}.$$

On suppose aussi que : $\forall n \in \mathbb{N}, |\chi^{(n)}(x)| \lesssim \left(\frac{1}{\sqrt{|t|}}\right)^n$.

On sépare donc l'intégrale suivante en deux :

$$e^{-zH} \simeq \int_0^{+\infty} \cos(s\sqrt{H})e^{-\frac{s^2}{4z}}(1 - \chi(s))\frac{ds}{\sqrt{z}} + \int_0^{+\infty} \cos(s\sqrt{H})e^{-\frac{s^2}{4z}}\chi(s)\frac{ds}{\sqrt{z}}.$$

Pour le premier terme, on peut supposer sans perdre de généralité que $\kappa \geq C'\sqrt{|t|}$ puisque t est petit. Donc :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{+\infty} \cos(s\sqrt{H})(1 - \chi(s))e^{-\frac{s^2}{4z}}\frac{ds}{\sqrt{z}} \right| \\ & \leq \int_{C'\sqrt{|t|}}^{+\infty} |\cos(s\sqrt{H})|e^{-s^2 \operatorname{Re}(\frac{1}{4z})}\frac{ds}{\sqrt{|z|}} \\ & \leq \int_{C'\sqrt{|t|}}^{\kappa} |\cos(s\sqrt{H})|\frac{ds}{\sqrt{|z|}} + \int_{\kappa}^{+\infty} |\cos(s\sqrt{H})|e^{-\frac{s^2}{4} \operatorname{Re}(\frac{1}{z})}\frac{ds}{\sqrt{|z|}}. \end{aligned}$$

Soit $f \in L^2(B)$, alors

$$\begin{aligned} & \int_{C'\sqrt{|t|}}^{\kappa} |\cos(s\sqrt{H})\psi(r^2H)f|e^{-\frac{s^2}{4} \operatorname{Re} \frac{1}{z}}\frac{ds}{\sqrt{|z|}} \\ & \leq \int_{C'\sqrt{|t|}}^{\kappa} |I_s\psi(r^2H)f|\frac{ds}{\sqrt{|z|}} + \int_{C'\sqrt{|t|}}^{\kappa} |II_s\psi(r^2H)f|e^{-\frac{s^2}{4} \operatorname{Re} \frac{1}{z}}\frac{ds}{\sqrt{|z|}}. \end{aligned}$$

D'une part :

$$\begin{aligned}
 \int_{C' \sqrt{|t|}}^{\kappa} \|I_s(\psi(r^2 H)f)\|_{L^2(\tilde{B})} \frac{ds}{\sqrt{|z|}} &\leq \int_{C' \sqrt{|t|}}^{\kappa} \mu(\tilde{B})^{\frac{1}{2}} \|I_s(\psi(r^2 H)f)\|_{L^\infty(\tilde{B})} \frac{ds}{\sqrt{|z|}} \\
 &\leq \mu(\tilde{B})^{\frac{1}{2}} \int_{C' \sqrt{|t|}}^{\kappa} s^{-d} \|\psi(r^2 H)f\|_{L^1} \frac{ds}{\sqrt{|z|}} \\
 &\lesssim \mu(\tilde{B})^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^1} \int_{C' \sqrt{|t|}}^{+\infty} s^{-d} \frac{ds}{\sqrt{t}} \\
 &\lesssim \mu(\tilde{B})^{\frac{1}{2}} \mu(B)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(B)} \sqrt{|t|}^{-d} \\
 &\lesssim \left(\frac{r^2}{|t|}\right)^{\frac{d}{2}} \|f\|_{L^2(B)},
 \end{aligned}$$

puisque $d > 1$.

D'autre part, en faisant une décomposition de X en couronnes dyadiques autour de B :

$$\begin{aligned}
 &\left\| \int_{C' \sqrt{|t|}}^{\kappa} II_s(\psi(r^2 H)f) e^{-\frac{s^2}{4} \operatorname{Re} \frac{1}{z}} \frac{ds}{\sqrt{|z|}} \right\|_{L^2(\tilde{B})} \\
 &\leq \sum_{j=0}^{+\infty} \left\| \int_{C' \sqrt{|t|}}^{\kappa} II_s(\mathbf{1}_{C_j(B)} \cdot \psi(r^2 H)f) e^{-\frac{s^2}{4} \operatorname{Re} \frac{1}{z}} \frac{ds}{\sqrt{|z|}} \right\|_{L^2(\tilde{B})}.
 \end{aligned}$$

On utilise maintenant l'information sur le support de K_{II_s} .

Si $x \in \tilde{B}$ et $y \in C_j(B)$ alors $d(x, y) \lesssim 2^j r + d(B, \tilde{B})$. De plus, comme $B \in \mathcal{Q}_{B_0}$ et $\tilde{B} \in \mathcal{Q}_{B_0}$, on a :

$$d(B, \tilde{B}) \leq d(B, B_0) + d(B_0, \tilde{B}) + 2\sqrt{|t|} \leq (2C + 2)\sqrt{|t|}.$$

Si $2^j r + (2C + 2)\sqrt{|t|} < \frac{s}{2}$, alors $K_{II_s}(x, y) = 0$ car $d(x, y) < \frac{s}{2}$. Donc, pour tous $x \in \tilde{B}$ et $j \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 &\int_{C' \sqrt{|t|}}^{\kappa} II_s(\mathbf{1}_{C_j(B)} \cdot \psi(r^2 H)f)(x) e^{-\frac{s^2}{4} \operatorname{Re} \frac{1}{z}} \frac{ds}{\sqrt{|z|}} \\
 &= \int_{C' \sqrt{|t|}}^{\min(2(2^j r + (2C + 2)\sqrt{|t|}), \kappa)} II_s(\mathbf{1}_{C_j(B)} \cdot \psi(r^2 H)f)(x) e^{-\frac{s^2}{4} \operatorname{Re} \frac{1}{z}} \frac{ds}{\sqrt{|z|}}.
 \end{aligned}$$

On traite les cas où $2(2^j r + (2C + 2)\sqrt{|t|}) \leq \kappa$ et $2(2^j r + (2C + 2)\sqrt{|t|}) > \kappa$ simultanément en considérant les termes suivant :

$$\int_{C' \sqrt{|t|}}^{2(2^j r + (2C + 2)\sqrt{|t|})} + \int_{2(2^j r + (2C + 2)\sqrt{|t|})}^{\kappa}, \quad (4.6.3)$$

où la première intégrale est plus grande que celle que l'on obtient dans le cas $2(2^j r + (2C + 2)\sqrt{|t|}) > \kappa$; et ajoutée à la deuxième nous permet d'obtenir le cas où $2(2^j r + (2C + 2)\sqrt{|t|}) \leq \kappa$.

Premièrement, si j est assez petit pour que $2(2^j r + (2C + 2)\sqrt{|t|}) \leq \kappa$, on utilise la Proposition 4.6.4, pour en déduire :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{j \geq 0} \int_{C' \sqrt{|t|}}^{2(2^j r + (2C + 2)\sqrt{|t|})} \|II_s(\mathbf{1}_{C_j(B)} \cdot \psi(r^2 H)f)\|_{L^2(\tilde{B})} \frac{ds}{\sqrt{|z|}} \\
 & \lesssim \sum_{j \geq 0} \int_{C' \sqrt{|t|}}^{2(2^j r + (2C + 2)\sqrt{|t|})} \|\psi(r^2 H)f\|_{L^2(C_j(B))} \frac{ds}{\sqrt{|z|}} \\
 & \leq \sum_{j \geq 0} \int_{C' \sqrt{|t|}}^{2(2^j r + (2C + 2)\sqrt{|t|})} \mu(C_j(B))^{\frac{1}{2}} \|\psi(r^2 H)f\|_{L^\infty(C_j(B))} \frac{ds}{\sqrt{|z|}} \\
 & \lesssim \sum_{j \geq 0} \int_{C' \sqrt{|t|}}^{2(2^j r + (2C + 2)\sqrt{|t|})} (2^j r)^{\frac{d}{2}} \left\| \int_{y \in B} \frac{e^{-\frac{d(\cdot, y)^2}{r^2}}}{r^d} |f(y)| d\mu(y) \right\|_{L^\infty(C_j(B))} \frac{ds}{\sqrt{|z|}} \\
 & \leq \sum_{j \geq 0} \int_{C' \sqrt{|t|}}^{2(2^j r + (2C + 2)\sqrt{|t|})} (2^j r)^{\frac{d}{2}} e^{-2^{2j}} r^{-d} \|f\|_{L^1(B)} \frac{ds}{\sqrt{|z|}} \\
 & \lesssim \sum_{j \geq 0} \int_{C' \sqrt{|t|}}^{2(2^j r + (2C + 2)\sqrt{|t|})} (2^j)^{\frac{d}{2}} e^{-2^{2j}} \|f\|_{L^2(B)} \frac{ds}{\sqrt{|z|}}.
 \end{aligned}$$

Or on rappelle que $\frac{1}{2}s \leq 2^j r + (2C + 2)\sqrt{|t|}$ et $s \geq C' \sqrt{|t|}$, c'est-à-dire

$$2^j \geq \frac{\frac{1}{2}s - (2C + 2)\sqrt{|t|}}{r} \geq \frac{\sqrt{|t|}}{r} > 0.$$

Ainsi

$$e^{-2^{2j}} \lesssim \left(\frac{\sqrt{|t|}}{r} \right)^{-d+1}.$$

En sommant sur j , on obtient donc :

$$\left(\sum_{j \geq 0} 2^{2j} 2^{j \frac{d}{2}} e^{-\frac{2^{2j}}{2}} \right) \frac{r}{\sqrt{|t|}} \left(\frac{\sqrt{|t|}}{r} \right)^{-d+1} \|f\|_{L^2(B)} \lesssim \left(\frac{r^2}{|t|} \right)^{\frac{d}{2}} \|f\|_{L^2(B)}.$$

Deuxièmement, lorsque j est assez grand pour que $2(2^j r + (2C + 2)\sqrt{|t|}) > \kappa$,

d'après (4.6.3) il nous reste à traiter l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} & \sum_j \int_{2(2^j r + (2C+2)\sqrt{|t|})}^{\kappa} \|II_s(\mathbf{1}_{C_j(B)} \cdot \psi(r^2 H)f)\|_{L^2(\tilde{B})} e^{-s^2 \operatorname{Re}(\frac{1}{z})} \frac{ds}{\sqrt{|z|}} \\ & \lesssim \sum_j \int_{2(2^j r + (2C+2)\sqrt{|t|})}^{\kappa} e^{-s^2 \operatorname{Re}(\frac{1}{z})} \frac{ds}{\sqrt{|z|}} \\ & \leq \sum_j e^{-\frac{4(2^j r + (2C+2)\sqrt{|t|})^2}{2} \operatorname{Re}(\frac{1}{z})} \int_{2(2^j r + (2C+2)\sqrt{|t|})}^{\kappa} e^{-\frac{s^2}{2} \operatorname{Re}(\frac{1}{z})} \frac{ds}{\sqrt{|z|}}, \end{aligned}$$

où la première inégalité vient juste du calcul fonctionnel borné puisque $s \leq \kappa$. On effectue le changement de variable $u = \frac{s}{\sqrt{2}} \sqrt{\operatorname{Re}(\frac{1}{z})}$ dans l'intégrale :

$$\int_{2(2^j r + (2C+2)\sqrt{|t|})}^{\kappa} e^{-\frac{s^2}{2} \operatorname{Re}(\frac{1}{z})} \frac{ds}{\sqrt{|z|}} \leq \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \frac{du}{\sqrt{|z|} \operatorname{Re}(\frac{1}{z})} \lesssim \frac{1}{\sqrt{|z|} \operatorname{Re}(\frac{1}{z})}.$$

On rappelle que $|z| \simeq |t|$ et que $\operatorname{Re}(\frac{1}{z}) = \frac{h^2}{h^4 + t^2} \geq \frac{h^2}{2t^2} \gtrsim 1$ puisque $h^2 \leq |t| \leq h$. Donc

$$\frac{1}{\sqrt{|z|} \operatorname{Re}(\frac{1}{z})} \lesssim \frac{1}{|t|}.$$

Pour la somme en j on a :

$$\sum_j e^{-2(2^j r + (2C+2)\sqrt{|t|})^2 \operatorname{Re}(\frac{1}{z})} = \sum_j e^{-2 \operatorname{Re}(\frac{1}{z}) (4^j r^2 + (2C+2)^2 |t| + 2 \cdot 2^j r (2C+2) \sqrt{|t|})}.$$

Or $r^2 \leq |t|$ donc :

$$\begin{aligned} \sum_j e^{-2(2^j r + (2C+2)\sqrt{|t|})^2 \operatorname{Re}(\frac{1}{z})} & \leq \sum_j e^{-2 \operatorname{Re}(\frac{1}{z}) [4^j + (2C+2)^2 + 2 \cdot 2^j (2C+2)] r^2} \\ & = e^{-2 \operatorname{Re}(\frac{1}{z}) (2C+2)^2 r^2} \sum_j e^{-2 \operatorname{Re}(\frac{1}{z}) [4^j + 2(2C+2) 2^j] r^2}. \end{aligned}$$

De plus t et r sont petits et $2^j r$ est grand car on ne considère que les j tels que $2(2^j r + (2C+2)\sqrt{|t|}) > \kappa$ donc :

$$\begin{aligned} \sum_j e^{-2(2^j r + (2C+2)\sqrt{|t|})^2 \operatorname{Re}(\frac{1}{z})} & \leq e^{-c \operatorname{Re}(\frac{1}{z}) r^2} \sum_j e^{-2 \operatorname{Re}(\frac{1}{z}) 4^j r^2 (1 + \frac{2(2C+2)}{2^j})} \\ & \leq e^{-c \operatorname{Re}(\frac{1}{z}) r^2} \sum_j e^{-c' \operatorname{Re}(\frac{1}{z}) 4^j r^2}, \end{aligned}$$

pour des constantes numériques $c > 0$ et $c' > 0$. D'après le Lemme 3.2 de [BS14], on a donc pour tout $N \geq 1$ aussi grand que l'on veut :

$$\sum_j e^{-2(2^j r + (2C+2)\sqrt{|t|})^2 \operatorname{Re}(\frac{1}{z})} \leq C_N \left(r^2 \operatorname{Re} \frac{1}{z} \right)^{-N}.$$

De plus $r^2 \operatorname{Re}(\frac{1}{z}) = \frac{r^2 h^2}{h^4 + t^2} \geq \frac{h^4}{2t^2}$. Donc

$$\left(\operatorname{Re}(\frac{1}{z}) r^2 \right)^{-N} \lesssim \left(\frac{|t|}{h} \right)^{2N},$$

et

$$\left(\frac{|t|}{h} \right)^{2N} \leq \left(\frac{h}{\sqrt{|t|}} \right)^d \leq \left(\frac{r}{\sqrt{|t|}} \right)^d$$

dés que $|t|^{2N+\frac{d}{2}} \leq h^{d+2N}$ c'est-à-dire

$$|t| \leq h^{1+\frac{\frac{d}{2}}{2N+\frac{d}{2}}}$$

ce qui est vrai pour N assez grand puisque $|t| \leq h^{1+\varepsilon}$.

Finalement :

$$\left\| \int_{C'\sqrt{|t|}}^{+\infty} II_s(\psi(r^2 H)f) e^{-\frac{s^2}{4} \operatorname{Re} \frac{1}{z}} \frac{ds}{\sqrt{z}} \right\|_{L^2(\tilde{B})} \lesssim \left(\frac{r^2}{|t|} \right)^{\frac{d}{2}} \|f\|_{L^2(B)}.$$

De plus :

$$\begin{aligned} & \int_{\kappa}^{+\infty} \|\cos(s\sqrt{H})\psi(r^2 H)f\|_{L^2(\tilde{B})} e^{-\frac{s^2}{4} \operatorname{Re}(\frac{1}{z})} \frac{ds}{\sqrt{|z|}} \\ & \lesssim \|\psi(r^2 H)f\|_{L^2} \int_{\kappa \operatorname{Re}(\frac{1}{z})}^{+\infty} e^{-u^2} \frac{du}{\operatorname{Re}(\frac{1}{z})\sqrt{|z|}} \\ & \lesssim \|f\|_{L^2(B)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \frac{e^{-\frac{(\kappa \operatorname{Re}(\frac{1}{z}))^2}{2}}}{\operatorname{Re}(\frac{1}{z})\sqrt{|t|}}. \end{aligned}$$

Étant donné que $\operatorname{Re}(\frac{1}{z}) = \frac{h^2}{h^4 + t^2} \geq \frac{h^2}{t^2}$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\kappa}^{+\infty} \|\cos(s\sqrt{H})\psi(r^2 H)f\|_{L^2(\tilde{B})} e^{-\frac{s^2}{4z}} \frac{ds}{\sqrt{z}} \\ & \lesssim \frac{|t|^{\frac{3}{2}}}{h^2} \left(\frac{h^4}{t^4} \right)^{-N} \|f\|_{L^2(B)}, \end{aligned}$$

pour un entier $N > 0$ aussi grand que l'on veut puisque $\frac{h}{|t|} \geq 1$ (en effet $|t| \leq h^{1+\varepsilon} \leq h$ vu que $h \in (0, 1]$).

Comme $h \leq r$, on a alors

$$\frac{|t|^{\frac{3}{2}}}{h^2} \left(\frac{|t|}{h} \right)^N \leq \left(\frac{h}{\sqrt{|t|}} \right)^d \leq \left(\frac{r}{\sqrt{|t|}} \right)^d$$

dès que

$$|t|^{\frac{3}{2}+N+\frac{d}{2}} \leq h^{2+N+d},$$

c'est-à-dire

$$|t| \leq h^{\frac{2+N+d}{\frac{3}{2}+N+\frac{d}{2}}} = h^{1+\frac{\frac{1}{2}+\frac{d}{2}}{\frac{3}{2}+N+\frac{d}{2}}}$$

ce qui est vrai pour N grand puisque $|t| \leq h^{1+\varepsilon}$.

Pour le second terme nous allons procéder à des intégrations par parties comme annoncé.

En faisant $2n$ intégrations par parties (avec n à déterminer plus tard) on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \cos(s\sqrt{H})\psi_m(r^2H)\chi(s)e^{-\frac{s^2}{4z}}ds = \\ & \int_0^\infty \cos(s\sqrt{H})r^{2n}\psi_{m-n}(r^2H) \sum_{k=0}^{2n} \chi^{(2n-k)}(s)e^{-\frac{s^2}{4z}} \left(c_k \frac{s^k}{z^k} + \dots + c_{n-2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{s^{k-2\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}}{z^{k-\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}} \right) ds, \end{aligned}$$

où les $(c_i)_i$ sont des constantes numériques qui ne jouent pas de rôle significatif dans cette preuve. On isole les termes extrémaux (pour $k = 0$ et $k = 2n$) de la somme pour comprendre le comportement général de celle-ci vis-à-vis de l'estimation voulue.

$$\begin{aligned} & \left\| \int_0^\infty \cos(s\sqrt{H})\psi_m(r^2H)f\chi(s)e^{-\frac{s^2}{4z}} \frac{ds}{\sqrt{z}} \right\|_{L^2(\tilde{B})} \\ & \lesssim \int_0^{2^{C'}\sqrt{|t|}} \|\cos(s\sqrt{H})\psi_{m-n}(r^2H)f\|_{L^2(\tilde{B})} r^{2n} \left(\frac{1}{\sqrt{|t|}^{2n}} + \frac{s^{2n}}{|t|^{2n}} + \frac{1}{|t|^n} \right) \frac{ds}{\sqrt{|t|}}. \end{aligned}$$

Premièrement, par continuité on a :

$$\|\cos(s\sqrt{H})\psi_{m-n}(r^2H)f\|_{L^2(\tilde{B})} \leq \|f\|_{L^2(B)}.$$

On estime alors les termes restant.

$$\begin{aligned} \int_0^{2C'\sqrt{|t|}} r^{2n} \left(\frac{1}{\sqrt{|t|}} \right)^{2n} \frac{ds}{\sqrt{|t|}} &\simeq \left(\frac{r^2}{|t|} \right)^n ; \\ \int_0^{2C'\sqrt{|t|}} r^{2n} \frac{s^{2n}}{|t|^{2n}} \frac{ds}{\sqrt{|t|}} &= \left(\frac{r}{|t|} \right)^{2n} \frac{1}{\sqrt{|t|}} \int_0^{2C'\sqrt{|t|}} s^{2n} ds \simeq \left(\frac{r^2}{|t|} \right)^n ; \\ \int_0^{2C'\sqrt{|t|}} \frac{r^{2n}}{|t|^n} \frac{ds}{\sqrt{|t|}} &\simeq \left(\frac{r^2}{|t|} \right)^n . \end{aligned}$$

En prenant $n = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ on a donc :

$$\left\| \int_0^\infty \cos(s\sqrt{H}) \psi_m(r^2 H) \chi(s) e^{-\frac{s^2}{4z}} \frac{ds}{\sqrt{z}} \right\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} \lesssim \left(\frac{r^2}{|t|} \right)^{\frac{d}{2}} .$$

Finalement, la propriété (H_m) est satisfaite sous l'Hypothèse 4.6.1. $\square$

Exemples

Les résultats des chapitres précédents donnent une façon d'obtenir des estimations de dispersion $H^1 - \text{BMO}$ et $L^p - L^{p'}$ ainsi que des inégalités de Strichartz dans un cadre général sous des hypothèses sur le semi-groupe de la chaleur et le propagateur des ondes associé. Ce chapitre a pour but de donner des exemples d'application pour lesquels on peut effectivement vérifier les différentes hypothèses des théorèmes principaux de cette thèse, ainsi que quelques perspectives d'étude

5.1 Espaces de type homogène

On rappelle qu'un espace métrique (X, d) muni d'une mesure μ est dit de type homogène si μ vérifie la propriété de doublement suivante : il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $x \in X$ et $r > 0$

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C\mu(B(x, r)).$$

Selon la définition de Coifman et Weiss, les espaces de type homogènes sont ceux pour lesquels la théorie de Littlewood-Paley s'étend naturellement en analyse harmonique.

Donnons quelques exemples d'espaces de type homogène :

1. L'espace Euclidien à d dimensions $\mathbb{R}^d$ équipé de la distance Euclidienne usuelle et de la mesure de Lebesgue.
2. Le bord d'un domaine Lipschitzien dans $\mathbb{R}^d$ pour la distance Euclidienne et la mesure (surfacique) de Lebesgue.

3. N'importe quelle variété Riemannienne compacte lisse (C^∞) équipée de la distance et du volume Riemanniens.
4. Un groupe de Lie nilpotent G équipé d'une métrique Riemannienne invariante à gauche et la mesure induite μ .
5. Pour un entier $n \geq 1$ et un réel $d \in (0, n]$, on considère $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble fermé de mesure de Hausdorff (d -dimensionnelle) $\lambda_d(E)$ finie et positive. S'il existe $c > 0$ tel que pour tout $x \in E$ et tout $r > 0$, $c^{-1}r^d \leq \lambda_d(E \cap B(x, r)) \leq cr^d$ (i.e. λ_d est Ahlfors régulière), alors E est de type homogène (pour la distance Euclidienne et la mesure λ_d).
6. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $X_1, \dots, X_k$ des champs de vecteurs C^∞ sur Ω . On suppose que $(X_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$ vérifie la condition de Hörmander, c'est-à-dire que les champs de vecteurs X_i avec tous leurs commutateurs engendrent l'espace tangent à $\mathbb{R}^d$ en tout $x \in \Omega$. On dit qu'une courbe Lipschitzienne $\gamma: [0, r] \rightarrow \Omega$ est admissible si pour presque tout t ,

$$\frac{d\gamma}{dt} = \sum_{i=1}^k c_i(t) X_i(\gamma(t))$$

où $\sum_i |c_i(t)|^2 \leq 1$. On définit $d(x, y)$ comme la borne inférieure de l'ensemble des réels r pour lesquels il existe une courbe admissible γ avec $\gamma(0) = x$ et $\gamma(r) = y$. Alors (Ω, d) muni de la mesure de Lebesgue est un espace de type homogène.

Citons un exemple d'espace qui n'est pas de type homogène. On considère l'ensemble

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}.$$

On muni X de la distance Euclidienne et de la mesure de Lebesgue induite. Pour tout $(x, y) \in X$ et $r > 0$ on a :

$$\mu(B((x, y), x)) \leq 2x \frac{1}{x+x} = 1,$$

et

$$\mu(B((x, y), 2x)) \geq 4x \frac{1}{x+2x} = \frac{4}{3} > 1.$$

Ainsi X n'est pas de type homogène.

Pour plus d'informations et d'autres exemples on renvoie à [DH09], [CW77] ou [Chr90].

5.2 Estimations sur le semi-groupe

Dans cette section, on s'intéresse aux propriétés que l'on suppose sur le semi-groupe de la chaleur.

5.2.1 Estimations du noyau de la chaleur

Les estimations sur le noyau du semi-groupe jouent un rôle crucial dans notre démarche. On rappelle que l'on suppose les estimations sur la diagonale

$$|p_t(x, x)| \lesssim \mu(B(x, \sqrt{t}))^{-1} \quad (\text{DUE})$$

qui s'auto-améliorent en des estimations complètes ponctuelles Gaussiennes

$$|p_t(x, y)| \lesssim \mu(B(x, \sqrt{t}))^{-1} e^{-\frac{d(x, y)^2}{4t}}. \quad (\text{UE})$$

On peut montrer que (DUE) $\Rightarrow$ (UE) grâce à des théorèmes de type Phragmén-Lindelöf (voir [CS08]) quitte à changer la constante $1/4$ dans l'exponentielle ou via une normalisation *ad hoc* de l'opérateur.

On sait vérifier (DUE) dans les cas suivants :

1. Pour l'opérateur Laplacien sur un domaine avec des conditions au bord (de Dirichlet ou de Neumann) (voir [GSC11]).
2. Pour un semi-groupe engendré par un opérateur auto-adjoint elliptique $H = -\text{div}(A\nabla)$ (où A est une matrice elliptique et bornée sur $\mathbb{R}^d$) (voir [AT98]).
3. Pour l'opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété Riemannienne (voir [Gri97, CLY81, CGT82, Gus82, LY86] par exemple).

En plus des cas précédents, l'estimation (UE) est vérifiée dans les cas suivants :

1. Si $H = -\sum_i X_i$ où les X_i sont des champs de vecteurs vérifiant la condition de Hörmander sur un groupe de Lie ou sur une variété Riemannienne à géométrie bornée (voir par exemple [CRTN01]).
2. Pour l'opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété Riemannienne (on renvoie à [Gri97] et les nombreuses références de cet article pour plus d'informations sur ce cas particulier).

Pour le lien entre les estimations (DG), (DUE) et (UE), on renvoie à [CS08] où les auteurs montrent les implications dans le cas général d'un espace métrique de type homogène.

5.2.2 Estimations de Davies-Gaffney

Pour deux sous-ensembles E et F de X , les estimations de Davies-Gaffney $L^2 - L^2$ pour un opérateur du second ordre sont de la forme :

$$\|e^{-tH}\|_{L^2(E) \rightarrow L^2(F)} \lesssim e^{-\frac{d(E,F)^2}{4t}}. \quad (\text{DG})$$

La constante 4 dans l'estimation précédente ne joue pas de rôle dans notre travail. Elle représente le facteur de normalisation que l'on obtient pour l'opérateur Laplacien dans $\mathbb{R}^d$ de sorte que l'opérateur des ondes associé propage à vitesse 1.

Comme (UE) $\Rightarrow$ (DG), l'estimation (DG) est vérifiée dans les exemples de la section précédente. Donnons quelques situations pour lesquelles les estimations de Davies-Gaffney sont aussi satisfaites :

1. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ pour l'opérateur Laplacien usuel grâce à une formulation exacte du noyau de la chaleur.
2. Pour l'opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété Riemannienne complète (voir [Dav92, Gri99]).
3. Pour un semi-groupe engendré par un opérateur de Schrödinger avec un potentiel réel et un champ magnétique ([Sik97, CS08]).
4. Dans le cas d'un opérateur Laplacien agissant sur un fibré vectoriel (voir [Sik04]).
5. Dans le cadre des formes locales de Dirichlet (voir [HR03, Stu95, Stu98]).

En résumé (DG) est vérifiée pour toute sorte d'opérateurs auto-adjoints elliptiques du second ordre.

5.3 Hypothèses sur le propagateur des ondes

Les résultats de cette thèse reposent sur une bonne connaissance du propagateur des ondes. En effet, d'après les Théorèmes A, B, et C, une connaissance d'estimations de dispersion pour le propagateur des ondes permet d'obtenir des estimations de dispersion et des inégalités de Strichartz pour le propagateur de Schrödinger.

On connaît une parametrix pour l'opérateur des ondes dans les cas suivants :

1. L'espace Euclidien $\mathbb{R}^d$ pour le Laplacien usuel (voir [Fol95]).
2. Les variétés Riemanniennes compactes avec des points conjugués et l'opérateur de Laplace-Beltrami (voir [Bér77]).

3. L'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ et l'opérateur $H = -\operatorname{div}(A\nabla)$ lorsque $A \in C^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ c'est-à-dire que A est dérivable de première dérivée Lipschitzienne (voir [Smi98, Bla06]).

De plus, on trouve dans [Kla01] des estimations de dispersion que les résultats de Smith [Smi98] et Blair [Bla06] donnent déjà mais qui ont l'avantage de se passer de l'usage d'une parametrix grâce à la méthode des champs de vecteurs commutants.

Ainsi, comme on l'a déjà explicité dans les Sections 2.6 et 2.7, l'hypothèse du Théorème A est valide lorsque :

1. $H = -\Delta$ dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^d$.
2. L'opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété Riemannienne compacte lisse.
3. L'opérateur de Laplace-Beltrami sur une variété Riemannienne non compacte lisse à géométrie bornée.
4. $H = -\frac{1}{\rho}\operatorname{div}(A\nabla)$ pour une fonction non dégénérée ρ et une matrice A à dérivées bornées, dans $\mathbb{R}^d$ pour la mesure $d\mu(x) = \rho(x)dx$.

Cependant Ivanovici, Lebeau et Planchon ont obtenu dans [ILP14] une perte inévitable d'un exposant $1/4$ dans l'estimation de dispersion pour le Laplacien sur un domaine convexe de dimension $d \geq 2$ de $\mathbb{R}^d$. Dans ce cas, on ne peut pas appliquer le Théorème A, mais en s'inspirant du Théorème B, on peut espérer montrer tout de même certaines inégalités de Strichartz.

5.4 Inégalités de Strichartz

Comme on l'a annoncé dès l'introduction, ce sont les estimations de dispersion $L^1 - L^\infty$ du type du Lemme 1.2.1 qui ont motivé notre travail. Cependant l'estimation $L^1 - L^\infty$ semble faire défaut dans certaine situation à cause de paires de points conjugués (voir [HW05]). On trouve dans [Kla01] l'idée qu'une estimation $H^1 - \operatorname{BMO}$ est aussi bien adapté pour montrer des inégalités de Strichartz. De plus une telle estimation est plus facile à obtenir. On trouve dans [MT12] et [Tay09] des estimations de dispersion $H^1 - \operatorname{BMO}$, mais celles-ci font intervenir les espaces de Hardy et BMO classiques, et non ceux qui sont adaptés à un semi-groupe de la chaleur comme on le propose dans cette thèse.

On regroupe ici quelques références sur différents exemples de situations où des inégalités de Strichartz sont connues. On renvoie le lecteur intéressé aux références des différents chapitre (notamment l'introduction du Chapitre 2).

1. Pour le Laplacien usuel dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^d$ (voir [KT98] par exemple pour des résultats optimaux).
2. Pour l'équation de Schrödinger associée à un opérateur elliptique du second ordre à coefficients variables C^2 (voir [ST02]).
3. Dans le cas des variétés Riemanniennes compactes lisses dans [BGT04b].
4. À l'extérieur d'un domaine compacte de $\mathbb{R}^d$ dans [BGT04a].
5. Pour des variétés asymptotiquement hyperboliques dans [Bou11].
6. Pour des variétés à bord (voir [BSS08]).
7. Dans le cas du groupe de Heisenberg (voir [BGX00]).
8. Pour les variétés asymptotiquement coniques.

En effet, Hassell et Zhang ont montré dans [HZ16] des inégalités de Strichartz globales en temps sans perte de dérivées dans le cas des variétés Riemannienne non compactes de dimension $d \geq 2$ asymptotiquement coniques. Ils considèrent l'opérateur de Laplace-Beltrami sur une telle variété M , possiblement perturbé par un potentiel C^∞ . Leur méthode repose sur une estimation de la mesure spectrale $dE_{\sqrt{H}}$. On peut prouver que ces propriétés impliquent les hypothèses du chapitre 2 sur le propagateur des ondes et nous permettent donc d'obtenir une autre démonstration de leur résultat. Plus précisément, la Proposition 3.3 de [Zha15] montre que les estimations de dispersion de l'Hypothèse 2.1.2 sont valables. On rappelle, avec les notations de [Zha15] :

Proposition 5.4.1. *Soit $Q(\lambda)$ l'opérateur Q_i^{low} ou Q_i^{high} , construit comme dans la Proposition 2.1 de [Zha15] et supposons que $\phi \in C_c^\infty([1/2, 2])$ est à valeurs dans $[0, 1]$. Alors l'estimation*

$$\left| \int_0^\infty e^{it\lambda} \phi(2^{-j}\lambda) (Q(\lambda) dE_{\sqrt{H}}(\lambda) Q^*(\lambda))(z, z') d\lambda \right| \leq C 2^{j(d+1)/2} (2^{-j} + |t|)^{-(d-1)/2} \quad (5.4.1)$$

est valable pour une constante C indépendante de $j \in \mathbb{Z}$ et de $z, z' \in M$.

On va utiliser une estimation légèrement plus précise, que l'on trouve dans la preuve de cette proposition : pour tout entier $N \geq 1$, si Q est égal à Q_0^{low} , Q_1^{low} , ou Q_1^{high} on a

$$\left| \int_0^\infty e^{it\lambda} \phi(2^{-j}\lambda) (Q(\lambda) dE_{\sqrt{H}}(\lambda) Q^*(\lambda))(z, z') d\lambda \right| \leq C_N 2^{jd} (1 + 2^j |t|)^{-N}.$$

Lorsque Q est égal à Q_i^{low} ou Q_i^{high} pour $i \geq 2$, on a

$$\left| \int_0^\infty e^{it\lambda} \phi(2^{-j}\lambda) (Q(\lambda) dE_{\sqrt{H}}(\lambda) Q^*(\lambda))(z, z') d\lambda \right| \leq C_N 2^{jd} (1 + 2^j |t - d(z, z')|)^{-N} (1 + 2^j d(z, z'))^{-(d-1)/2}.$$

Ainsi, on en déduit que le noyau du propagateur des ondes $K_{\cos(s\sqrt{H})\psi_{m_0}(r^2H)}$ vérifie

$$|K_{\cos(s\sqrt{H})\psi_{m_0}(r^2H)}(z, z')| \lesssim \min \left(\frac{r^{-d}}{(1 + \frac{s}{r})^N}, \frac{r^{-d}}{(1 + \frac{|s-d(z, z')|}{r})^N (1 + \frac{d(z, z')}{r})^{\frac{d-1}{2}}} \right)$$

où $r \simeq 2^{-j}$. D'où

$$\|\cos(s\sqrt{H})\psi_{m_0}(r^2H)\|_{L^2(B) \rightarrow L^2(\tilde{B})} \lesssim \min(I, II)$$

avec

$$I = \frac{r^{-d} r^d}{(1 + \frac{s}{r})^N}$$

et

$$II = \frac{r^{-d} r^d}{(1 + \frac{|s-L|}{r})^N (1 + \frac{L}{r})^{\frac{d-1}{2}}},$$

où on rappelle que $L = d(B, \tilde{B})$. En prenant $N = d$, le premier terme se majore par

$$I \leq \left(\frac{r}{r+s} \right)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{r}{r+s} \right)^{\frac{d+1}{2}} \leq \left(\frac{r}{r+s} \right)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{r}{r+|L-s|} \right)^{\frac{d+1}{2}}$$

puisque par propagation à vitesse finie on a $L \leq s$ donc $|L-s| \leq s$. Pour le deuxième terme, on distingue deux cas.

Premier cas : si $L \leq s/2$ alors en prenant $N = d$ on a

$$\begin{aligned} II &\leq \left(\frac{r}{r+|L-s|} \right)^d \left(\frac{r}{r+L} \right)^{\frac{d-1}{2}} \leq \left(\frac{r}{r+|L-s|} \right)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{r}{r+|L-s|} \right)^{\frac{d+1}{2}}. \\ &\lesssim \left(\frac{r}{r+s} \right)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{r}{r+|L-s|} \right)^{\frac{d+1}{2}}. \end{aligned}$$

Deuxième cas : si $L \geq s/2$ alors $N = \frac{d+1}{2}$ donne

$$II \leq \left(\frac{r}{r+L} \right)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{r}{r+|L-s|} \right)^{\frac{d+1}{2}} \lesssim \left(\frac{r}{r+s} \right)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{r}{r+|L-s|} \right)^{\frac{d+1}{2}}.$$

Donc enfin on obtient

$$\|\cos(s\sqrt{H})\psi_{m_0}(r^2H)\|_{L^2(B)\rightarrow L^2(\tilde{B})} \lesssim \left(\frac{r}{r+s}\right)^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{r}{r+|L-s|}\right)^{\frac{d+1}{2}}$$

qui est l'estimation dans l'Hypothèse 2.1.2. On remarque que cette estimation est plus forte que (3.1.8) donc on peut aussi appliquer les résultats du chapitre 3 aux cas des variétés Riemannienne compacte asymptotiquement coniques.

5.5 Perspectives

Pour finir ce chapitre, on propose quelques pistes d'études qui pourraient suivre les travaux de cette thèse.

Une préoccupation majeure dans cette thèse a été l'affaiblissement des hypothèses sur le propagateur des ondes. En effet, c'est la partie la plus délicate de la méthode. Dans l'espace Euclidien $\mathbb{R}^d$, une étude de l'application $t \mapsto \|\cos(t\sqrt{H})\|_{L^2(B)\rightarrow L^2(\tilde{B})}$ permet d'obtenir des estimations (peu précises) de dispersion. Dans un milieu isotrope, on peut conjecturer que $\|\cos(t\sqrt{H})\|_{L^2(B)\rightarrow L^2(\tilde{B})}$ ne dépend principalement que de la distance $d(B, \tilde{B})$. Ainsi, on espère qu'uniquement à l'aide d'outils abstraits d'analyse fonctionnelle on peut obtenir une certaine propriété de dispersion $L^2(B) - L^2(\tilde{B})$ pour le propagateur des ondes et que les résultats de cette thèse permettent de l'exploiter pour en déduire, dans des situations variées, des inégalités de Strichartz.

Une direction motivante est l'étude précise du lien entre la propagation à vitesse finie de l'opérateur des ondes et les estimations de Davies-Gaffney pour le semi-groupe de la chaleur. En effet le Théorème 3.4 de [CS08] montre que ces deux propriétés sont équivalentes. En s'inspirant des technique d'analyse complexe (Théorèmes de Phragmén-Lindelöf et de Paley-Weiner) mis en jeu dans la démonstration de ce résultat, on est en mesure d'essayer de prouver que les estimations gaussiennes pour le semi-groupe de la chaleur impliquent une certaine propriété de dispersion pour le propagateur des ondes (en plus de la propagation à vitesse finie).

Toujours en s'inspirant de cette preuve, on remarque que c'est ici la transformée de Laplace qui fait le lien entre l'équation des ondes et l'équation de Schrödinger. En étudiant la transformée de Laplace inverse, on peut donc espérer obtenir des informations sur la dispersion pour le propagateur des ondes à partir de la dispersion pour l'opérateur de Schrödinger (résultat "réciproque" de ceux de cette thèse en quelque sorte). La méthode est robuste, mais semble nécessiter de fortes hypothèses sur le semi-groupe de la chaleur.

Dans le chapitre 4 de cette thèse, on a décomposé l'opérateur des ondes en une somme de deux opérateurs. Un premier qui encode la dispersion loin du bord du

cône de lumière, dont on connaît bien la décroissance; et un second qui contient l'information de ce qui se passe au bord du cône de lumière, sur lequel on ne fait aucune hypothèse. Cette décomposition semble naturelle d'un point de vue de l'analyse fonctionnelle. En effet, si on remarque que la régularité d'un symbole est équivalente à de la décroissance en fréquence, on espère pouvoir montrer une estimation $L^1 - L^\infty$ localisée pour le propagateur des ondes. Il s'agit pour cela de considérer le symbole $x \mapsto \cos(tx)$ dont la transformée de Fourier a une bonne décroissance en dehors de $|x| = t$. En s'appuyant sur les techniques de multiplicateurs de Fourier de [KU15], il est raisonnable de penser pouvoir montrer de bonnes estimations pour le propagateur des ondes dans le cadre d'un espace métrique doublant.

Un exemple d'opérateur qui semble convenir pour appliquer nos résultats est celui des opérateurs sous forme divergence. Pour une matrice A donnée, on considère $H = -\operatorname{div}(A\nabla)$. Le cas où la matrice A est constante égale à l'identité correspond à l'opérateur Laplacien usuel. Lorsque la matrice A est elliptique, on peut renvoyer à [Aus07]. Pour une matrice régulière, ces opérateurs sont déjà largement étudiés, et on peut citer la méthode des champs de vecteurs commutants de Klainerman (voir [Kla01]) qui permet d'obtenir des estimations intéressantes. Dans un cadre différentiel, cette méthode semble assez robuste, et permet de se passer d'une étude explicite du noyau de l'opérateur des ondes associé. Un objectif motivant serait de trouver assez de champs de vecteurs commutants avec le d'Alembertien pour étudier le cas où la matrice A n'est pas régulière.

Enfin, Vodev a étudié dans [Vod06a, Vod06b] les estimations de dispersion pour le propagateur des ondes et le propagateur de Schrödinger lorsque H est perturbé par un potentiel régulier V . Pour prolonger ces travaux et montrer des inégalités de Strichartz dans le cas d'un opérateur perturbé non nécessairement régulier, il convient d'utiliser une bonne formule de perturbation. Les difficultés sont alors de comprendre comment le potentiel modifie le cône de lumière afin de pouvoir découper l'espace en des régions "loin du bord du cône" et "près du bord du cône" pour lesquelles les informations sont très différentes.

Bibliographie

- [ACDH04] Pascal AUSCHER, Thierry COULHON, Xuan Tinh DUONG et Steve HOFMANN : Riesz transform on manifolds and heat kernel regularity. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 37(6):911–957, 2004. [13](#), [15](#), [29](#), [40](#)
- [ADM05] Pascal AUSCHER, Xuan Tinh DUONG et Alan MCINTOSH : Boundedness of banach space valued singular integral operators and hardy spaces. *Unpublished preprint*, 3, 2005. [15](#)
- [AM07] Pascal AUSCHER et José María MARTELL : Weighted norm inequalities, off-diagonal estimates and elliptic operators. I. General operator theory and weights. *Adv. Math.*, 212(1):225–276, 2007. [118](#), [121](#)
- [Ant08] Ramona ANTON : Strichartz inequalities for Lipschitz metrics on manifolds and nonlinear Schrödinger equation on domains. *Bull. Soc. Math. France*, 136(1):27–65, 2008. [11](#), [25](#)
- [AT98] Pascal AUSCHER et Philippe TCHAMITCHIAN : Square root problem for divergence operators and related topics. *Astérisque*, (249):viii+172, 1998. [13](#), [27](#), [149](#)
- [Aus07] Pascal AUSCHER : On necessary and sufficient conditions for L^p -estimates of Riesz transforms associated to elliptic operators on $\mathbb{R}^n$ and related estimates. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 186(871):xviii+75, 2007. [13](#), [15](#), [29](#), [39](#), [40](#), [41](#), [118](#), [155](#)
- [BBR12] Nadine BADR, Frédéric BERNICOT et Emmanuel RUSS : Algebra properties for Sobolev spaces—applications to semilinear PDEs on manifolds. *J. Anal. Math.*, 118(2):509–544, 2012. [37](#), [39](#), [42](#)
- [Bér77] Pierre H. BÉRARD : On the wave equation on a compact Riemannian manifold without conjugate points. *Math. Z.*, 155(3):249–276, 1977. [16](#), [31](#), [75](#), [76](#), [88](#), [97](#), [137](#), [150](#)

-
- [Ber10] Frédéric BERNICOT : Use of abstract Hardy spaces, real interpolation and applications to bilinear operators. *Math. Z.*, 265(2):365–400, 2010. [15](#), [29](#), [44](#), [46](#), [96](#)
- [BFHM12] Matthew D. BLAIR, G. Austin FORD, Sebastian HERR et Jeremy L. MARZUOLA : Strichartz estimates for the Schrödinger equation on polygonal domains. *J. Geom. Anal.*, 22(2):339–351, 2012. [11](#), [13](#), [25](#), [27](#)
- [BGT04a] Nicolas BURQ, Patrick GÉRARD et Nicolay TZVETKOV : On nonlinear Schrödinger equations in exterior domains. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 21(3):295–318, 2004. [11](#), [25](#), [152](#)
- [BGT04b] Nicolas BURQ, Patrick GÉRARD et Nicolay TZVETKOV : Strichartz inequalities and the nonlinear Schrödinger equation on compact manifolds. *Amer. J. Math.*, 126(3):569–605, 2004. [11](#), [12](#), [18](#), [20](#), [23](#), [24](#), [25](#), [28](#), [31](#), [33](#), [60](#), [76](#), [86](#), [87](#), [152](#)
- [BGX00] Hajer BAHOURI, Patrick GÉRARD et Chao-Jiang XU : Espaces de Besov et estimations de Strichartz généralisées sur le groupe de Heisenberg. *J. Anal. Math.*, 82:93–118, 2000. [24](#), [86](#), [152](#)
- [BL76] Jöran BERGH et Jörgen LÖFSTRÖM : *Interpolation spaces. An introduction*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223. [15](#)
- [Bla06] Matthew BLAIR : Strichartz estimates for wave equations with coefficients of sobolev regularity. *Communications in Partial Differential Equations*, 31(5):649–688, 2006. [33](#), [151](#)
- [BO13] Frédéric BERNICOT et El Maati OUHABAZ : Restriction estimates via the derivatives of the heat semigroup and connection with dispersive estimates. *Math. Res. Lett.*, 20(6):1047–1058, 2013. [74](#)
- [Bou93] Jean BOURGAIN : Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. I. Schrödinger equations. *Geom. Funct. Anal.*, 3(2):107–156, 1993. [11](#), [25](#), [87](#)
- [Bou11] Jean-Marc BOUCLET : Strichartz estimates on asymptotically hyperbolic manifolds. *Anal. PDE*, 4(1):1–84, 2011. [10](#), [24](#), [86](#), [152](#)
- [Bow05] Marcin BOWNIK : Boundedness of operators on Hardy spaces via atomic decompositions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 133(12):3535–3542 (electronic), 2005. [56](#)

- [BS14] Frederic BERNICOT et Valentin SAMOYEAU : Dispersive estimates with loss of derivatives via the heat semigroup and the wave operator. [arXiv:1407.4086](#), To appear in *Annali Scuola Normale Superiore di Pisa*, juillet 2014. 48 pages. [22](#), [89](#), [90](#), [91](#), [92](#), [93](#), [94](#), [97](#), [103](#), [104](#), [105](#), [113](#), [129](#), [131](#), [132](#), [134](#), [135](#), [136](#), [144](#)
- [BSS08] Matthew D. BLAIR, Hart F. SMITH et Christopher D. SOGGE : On Strichartz estimates for Schrödinger operators in compact manifolds with boundary. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136(1):247–256 (electronic), 2008. [11](#), [25](#), [152](#)
- [BT07] Jean-Marc BOUCLET et Nikolay TZVETKOV : Strichartz estimates for long range perturbations. *Amer. J. Math.*, 129(6):1565–1609, 2007. [24](#), [86](#)
- [BZ08] Frédéric BERNICOT et Jiman ZHAO : New abstract Hardy spaces. *J. Funct. Anal.*, 255(7):1761–1796, 2008. [15](#), [21](#), [29](#), [39](#), [40](#), [42](#), [44](#), [45](#), [59](#), [94](#), [96](#)
- [BZ12] Frédéric BERNICOT et Jiman ZHAO : Abstract framework for John-Nirenberg inequalities and applications to Hardy spaces. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 11(3):475–501, 2012. [15](#), [29](#)
- [CCO02] Gilles CARRON, Thierry COULHON et El-Maati OUHABAZ : Gaussian estimates and L^p -boundedness of Riesz means. *J. Evol. Equ.*, 2(3):299–317, 2002. [36](#), [93](#)
- [CD99] Thierry COULHON et Xuan Thinh DUONG : Riesz transforms for $1 \leq p \leq 2$. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 351(3):1151–1169, 1999. [13](#)
- [CDL03] Thierry COULHON, Xuan Thinh DUONG et Xiang Dong LI : Littlewood-Paley-Stein functions on complete Riemannian manifolds for $1 \leq p \leq 2$. *Studia Math.*, 154(1):37–57, 2003. [40](#)
- [CGT82] Jeff CHEEGER, Mikhail GROMOV et Michael TAYLOR : Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds. *J. Differential Geom.*, 17(1):15–53, 1982. [149](#)
- [Chr90] Michael CHRIST : *Lectures on singular integral operators*, volume 77 de *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC ; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1990. [148](#)

- [Chr08] Hans CHRISTIANSON : Dispersive estimates for manifolds with one trapped orbit. *Comm. Partial Differential Equations*, 33(7-9):1147–1174, 2008. [11](#), [25](#)
- [CLY81] Siu Yuen CHENG, Peter LI et Shing Tung YAU : On the upper estimate of the heat kernel of a complete Riemannian manifold. *Amer. J. Math.*, 103(5):1021–1063, 1981. [149](#)
- [CRTN01] Thierry COULHON, Emmanuel RUSS et Valérie TARDIVEL-NACHEF : Sobolev algebras on Lie groups and Riemannian manifolds. *Amer. J. Math.*, 123(2):283–342, 2001. [13](#), [27](#), [149](#)
- [CS08] Thierry COULHON et Adam SIKORA : Gaussian heat kernel upper bounds via the Phragmén-Lindelöf theorem. *Proc. Lond. Math. Soc.* (3), 96(2):507–544, 2008. [13](#), [16](#), [27](#), [31](#), [88](#), [112](#), [113](#), [137](#), [149](#), [150](#), [154](#)
- [CW77] Ronald R. COIFMAN et Guido WEISS : Extensions of Hardy spaces and their use in analysis. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83(4):569–645, 1977. [14](#), [29](#), [148](#)
- [Dav92] Edward B. DAVIES : Heat kernel bounds, conservation of probability and the Feller property. *J. Anal. Math.*, 58:99–119, 1992. Festschrift on the occasion of the 70th birthday of Shmuel Agmon. [150](#)
- [Dav97] Edward B. DAVIES : Non-Gaussian aspects of heat kernel behaviour. *J. London Math. Soc.* (2), 55(1):105–125, 1997. [13](#), [26](#), [36](#), [88](#), [112](#)
- [DH09] Donggao DENG et Yongsheng HAN : *Harmonic analysis on spaces of homogeneous type*, volume 1966 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2009. With a preface by Yves Meyer. [148](#)
- [DY05a] Xuan Thinh DUONG et Lixin YAN : Duality of Hardy and BMO spaces associated with operators with heat kernel bounds. *J. Amer. Math. Soc.*, 18(4):943–973 (electronic), 2005. [15](#), [29](#)
- [DY05b] Xuan Thinh DUONG et Lixin YAN : New function spaces of BMO type, the John-Nirenberg inequality, interpolation, and applications. *Comm. Pure Appl. Math.*, 58(10):1375–1420, 2005. [29](#)
- [Fol95] Gerald B. FOLLAND : *Introduction to partial differential equations*. Princeton University Press, Princeton, NJ, second édition, 1995. [16](#), [31](#), [78](#), [88](#), [150](#)

- [Gra08] Loukas GRAFAKOS : *Classical fourier analysis*, volume 2. Springer, 2008. [121](#)
- [Gri97] Alexander GRIGOR'YAN : Gaussian upper bounds for the heat kernel on arbitrary manifolds. *J. Differential Geom.*, 45(1):33–52, 1997. [13](#), [27](#), [88](#), [113](#), [149](#)
- [Gri99] Alexander GRIGOR'YAN : Estimates of heat kernels on Riemannian manifolds. In *Spectral theory and geometry (Edinburgh, 1998)*, volume 273 de *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 140–225. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999. [150](#)
- [GSC11] Pavel GYRYA et Laurent SALOFF-COSTE : Neumann and Dirichlet heat kernels in inner uniform domains. *Astérisque*, (336):viii+144, 2011. [13](#), [27](#), [149](#)
- [Gus82] Anotolii K. GUSHCHIN : Uniform stabilization of solutions of the second mixed problem for a parabolic equation. *Mat. Sb. (N.S.)*, 119(161)(4):451–508, 590, 1982. [149](#)
- [GV92] Jean GINIBRE et Giorgio VELO : Smoothing properties and retarded estimates for some dispersive evolution equations. *Comm. Math. Phys.*, 144(1):163–188, 1992. [10](#), [24](#), [86](#)
- [HM09] Steve HOFMANN et Svitlana MAYBORODA : Hardy and BMO spaces associated to divergence form elliptic operators. *Math. Ann.*, 344(1): 37–116, 2009. [15](#), [29](#)
- [HR03] Masanori HINO et José A. RAMÍREZ : Small-time Gaussian behavior of symmetric diffusion semigroups. *Ann. Probab.*, 31(3):1254–1295, 2003. [150](#)
- [HTW06] Andrew HASSELL, Terence TAO et Jared WUNSCH : Sharp Strichartz estimates on nontrapping asymptotically conic manifolds. *Amer. J. Math.*, 128(4):963–1024, 2006. [24](#), [86](#)
- [HW05] Andrew HASSELL et Jared WUNSCH : The Schrödinger propagator for scattering metrics. *Ann. of Math. (2)*, 162(1):487–523, 2005. [151](#)
- [HZ16] Andrew HASSELL et Junyong ZHANG : Global-in-time Strichartz estimates on nontrapping, asymptotically conic manifolds. *Anal. PDE*, 9(1):151–192, 2016. [33](#), [98](#), [152](#)

-
- [ILP14] Oana IVANOVICI, Gilles LEBEAU et Fabrice PLANCHON : Dispersion for the wave equation inside strictly convex domains I : the Friedlander model case. *Ann. of Math. (2)*, 180(1):323–380, 2014. [76](#), [98](#), [151](#)
 - [IP08] Oana IVANOVICI et Fabrice PLANCHON : Square function and heat flow estimates on domains. *arXiv preprint arXiv :0812.2733*, 2008. [28](#), [38](#)
 - [JN61] Fritz JOHN et Louis NIRENBERG : On functions of bounded mean oscillation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 14:415–426, 1961. [14](#), [29](#)
 - [Kla01] Sergiu KLAINERMAN : A commuting vectorfields approach to Strichartz-type inequalities and applications to quasi-linear wave equations. *Internat. Math. Res. Notices*, (5):221–274, 2001. [14](#), [98](#), [151](#), [155](#)
 - [KT98] Markus KEEL et Terence TAO : Endpoint Strichartz estimates. *Amer. J. Math.*, 120(5):955–980, 1998. [10](#), [12](#), [14](#), [21](#), [24](#), [60](#), [61](#), [86](#), [92](#), [104](#), [152](#)
 - [KU15] Peer Christian KUNSTMANN et Matthias UHL : Spectral multiplier theorems of Hörmander type on Hardy and Lebesgue spaces. *J. Operator Theory*, 73(1):27–69, 2015. [13](#), [28](#), [38](#), [155](#)
 - [LY86] Peter LI et Shing-Tung YAU : On the parabolic kernel of the Schrödinger operator. *Acta Math.*, 156(3-4):153–201, 1986. [149](#)
 - [Med95] Stefano MEDA : On the Littlewood-Paley-Stein g -function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(6):2201–2212, 1995. [39](#)
 - [MT12] Jason METCALFE et Michael TAYLOR : Dispersive wave estimates on 3D hyperbolic space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 140(11):3861–3866, 2012. [29](#), [151](#)
 - [Rob91] Derek W. ROBINSON : *Elliptic operators and Lie groups*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1991. Oxford Science Publications. [13](#), [27](#)
 - [RS72] Michael REED et Barry SIMON : *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis*. Academic Press, New York-London, 1972. [35](#), [93](#)
 - [RZ05] Luc ROBBIANO et Claude ZUILY : Strichartz estimates for Schrödinger equations with variable coefficients. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)*, (101-102):vi+208, 2005. [24](#), [86](#)

- [Sam16] Valentin SAMOYEAU : Strichartz estimates with loss of derivatives under a weak dispersion property for the wave operator. [arXiv:1605.01250](#), avril 2016. 22
- [Sik97] Adam SIKORA : On-diagonal estimates on Schrödinger semigroup kernels and reduced heat kernels. *Comm. Math. Phys.*, 188(1):233–249, 1997. 150
- [Sik04] Adam SIKORA : Riesz transform, Gaussian bounds and the method of wave equation. *Math. Z.*, 247(3):643–662, 2004. 150
- [Smi98] Hart F. SMITH : A parametrix construction for wave equations with $C^{1,1}$ coefficients. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 48(3):797–835, 1998. 98, 151
- [Smi06] Hart F. SMITH : Spectral cluster estimates for $C^{1,1}$ metrics. *Amer. J. Math.*, 128(5):1069–1103, 2006. 33, 73, 74
- [Sog88] Christopher D. SOGGE : Concerning the L^p norm of spectral clusters for second-order elliptic operators on compact manifolds. *J. Funct. Anal.*, 77(1):123–138, 1988. 73
- [Sog95] Christopher D. SOGGE : *Lectures on nonlinear wave equations*. Monographs in Analysis, II. International Press, Boston, MA, 1995. 98
- [ST02] Gigliola STAFFILANI et Daniel TATARU : Strichartz estimates for a Schrödinger operator with nonsmooth coefficients. *Comm. Partial Differential Equations*, 27(7-8):1337–1372, 2002. 11, 23, 24, 33, 76, 86, 152
- [Ste70] Elias M. STEIN : *Topics in harmonic analysis related to the Littlewood-Paley theory*. Annals of Mathematics Studies, No. 63. Princeton University Press, Princeton, N.J. ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1970. 39
- [Str77] Robert S. STRICHARTZ : Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations. *Duke Math. J.*, 44(3):705–714, 1977. 10, 24, 86
- [Stu95] Karl-Theodor STURM : Analysis on local Dirichlet spaces. II. Upper Gaussian estimates for the fundamental solutions of parabolic equations. *Osaka J. Math.*, 32(2):275–312, 1995. 150
- [Stu98] Karl-Theodor STURM : The geometric aspect of Dirichlet forms. *In New directions in Dirichlet forms*, volume 8 de *AMS/IP Stud. Adv. Math.*, pages 233–277. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998. 150

- [Tat06] Daniel TATARU : Outgoing parametrices and global Strichartz estimates for Schrödinger equations with variable coefficients. *In Phase space analysis of partial differential equations*, volume 69 de *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 291–313. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006. [24](#), [86](#)
- [Tay09] Michael TAYLOR : Hardy spaces and BMO on manifolds with bounded geometry. *J. Geom. Anal.*, 19(1):137–190, 2009. [29](#), [151](#)
- [TDOS02] Xuan THINH DUONG, El Maati OUHABAZ et Adam SIKORA : Plancherel-type estimates and sharp spectral multipliers. *J. Funct. Anal.*, 196(2):443–485, 2002. [13](#)
- [TT01] Hideo TAKAOKA et Nikolay TZVETKOV : On 2D nonlinear Schrödinger equations with data on $\mathbb{R} \times \mathbb{T}$. *J. Funct. Anal.*, 182(2):427–442, 2001. [11](#), [25](#), [87](#)
- [Vod06a] Georgi VODEV : Dispersive estimates of solutions to the Schrödinger equation in dimensions $n \geq 4$. *Asymptot. Anal.*, 49(1-2):61–86, 2006. [155](#)
- [Vod06b] Georgi VODEV : Dispersive estimates of solutions to the wave equation with a potential in dimensions $n \geq 4$. *Comm. Partial Differential Equations*, 31(10-12):1709–1733, 2006. [155](#)
- [Zha15] Junyong ZHANG : Strichartz estimates and nonlinear wave equation on nontrapping asymptotically conic manifolds. *Adv. Math.*, 271:91–111, 2015. [33](#), [152](#)

Thèse de Doctorat

Valentin SAMOYEAU

Autour des inégalités de dispersion via le semi-groupe de la chaleur

About dispersive inequalities via the heat semigroup

Résumé

Dans cette thèse, on s'intéresse aux propriétés du semi-groupe de la chaleur qui assurent de retrouver des inégalités de Strichartz dans un cadre général. Plus précisément, on considère un espace métrique muni d'une mesure doublante et équipé d'un opérateur auto-adjoint positif qui engendre un semi-groupe. Le semi-groupe est dit de la chaleur puisqu'on suppose qu'il vérifie des estimations Gaussiennes et de Davies-Gaffney typiques. Dans un premier temps on définit des espaces de Hardy et BMO associés au semi-groupe et on prouve que l'on peut interpoler avec les espaces de Lebesgue usuels. En adaptant les outils classiques de la théorie de Littlewood-Paley au semi-groupe de la chaleur on démontre des estimations de dispersion $L^p - L^{p'}$ pour $p \in (1, 2)$ et des inégalités de Strichartz à partir d'estimations de dispersion $H^1 - \text{BMO}$. On montre ensuite que l'on peut ramener cette estimation $H^1 - \text{BMO}$ à une estimation microlocalisée $L^2 - L^2$. Une étude des phénomènes de dispersion pour le propagateur des ondes selon les régions du cône de lumière permet de prouver ces estimations $L^2 - L^2$. Les différents résultats de ce travail mettent en lumière les liens entre la dispersion pour l'équation des ondes et la dispersion pour l'équation de Schrödinger. On donne ainsi une méthode unifiée pour obtenir des estimations de dispersion et des inégalités de Strichartz dans un cadre, associé au semi-groupe de la chaleur, très général.

Mots clés

Inégalités de Strichartz, estimations de dispersion, semi-groupe de la chaleur, espaces de Hardy et BMO, propagateur des ondes.

Abstract

In this PhD thesis, we are interested in properties of a heat semigroup that ensure to recover Strichartz estimates in a general framework. More precisely, we consider a metric space with a doubling measure, equipped with a nonnegative self-adjoint operator generating a semigroup. The semigroup is said to be a heat semigroup since we assume that it satisfies typical Gaussian and Davies-Gaffney estimates. Firstly we define Hardy and BMO spaces associated with the semigroup and prove that we can interpolate with the usual Lebesgue spaces. By an adaptation of the classical tools of Littlewood-Paley theory to the heat semigroup setting, we show $L^p - L^{p'}$ dispersive estimates for $p \in (1, 2)$ and Strichartz inequalities from a $H^1 - \text{BMO}$ dispersive estimate. We then prove that this estimate can be reduced to microlocalized $L^2 - L^2$ one. A study of the dispersive phenomena for the wave propagator according to the region of the light cone allows to prove those $L^2 - L^2$ estimates. The different results of this work highlight the connections between dispersion for the wave equation and dispersion for Schrödinger equation. Thus we propose a new and unified way to prove dispersive estimates and Strichartz inequalities in a very abstract setting, adapted to a heat semigroup.

Key Words

Strichartz inequalities, dispersive estimates, heat semigroup, Hardy and BMO spaces, wave propagator.