UNIVERSITÉ DE NANTES FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

ÉCOLE DOCTORALE MATÉRIAUX MATIÈRE MOLÉCULE EN PAYS DE LOIRE

Année : 2011

N° attribué par la bibliothèque

Simulation de l'expansion et la transition de phase d'un plasma de quarks et d'antiquarks

THÈSE DE DOCTORAT Discipline : Physique Spécialité : Physique Subatomique

Présentée et soutenue publiquement par

Rudy MARTY

Le 17 Février 2012, devant le jury ci-dessous

PrésidentM. SEBILLE François, Professeur, Subatech, Université de NantesRapporteursMme BRATKOVSKAYA Elena, Chercheur, FIASM. CARBONELL Jaume, Professeur, LPSC, Université de GrenobleExaminateursM. HANSEN Hubert, Maître de Conférence, IPNL, Université de LyonM. BLEICHER Marcus, Professeur, ITPF, Université de FrancfortM. AICHELIN Jörg, Professeur, Subatech, Université de Nantes

Directeur de thèse : M. AICHELIN Jörg, Professeur, Subatech, Université de Nantes

 $\rm N^{\circ}$ ED 500

Remerciements

M ES premiers remerciements sont incontestablement pour mon directeur de thèse, Jörg. Bien que j'ai depuis toujours le goût de la recherche et la soif de connaissance, il m'a permis d'entrer dans ce monde incroyable qu'est le monde de la recherche. Après avoir effectué avec lui mes stages de master 1 et 2, j'ai achevé cette thèse de doctorat. C'est grâce à lui que j'ai pu enfin soutenir cette thèse, puis trouver un post-doctorat à Francfort. Mon cher Jörg, c'est grâce à toi que j'ai pu acquérir mon autonomie en tant que docteur, et que j'ai pu ainsi réaliser mon rêve d'enfant. Merci.

- E NSUITE je dois bien entendu dire un grand merci à ceux qui m'ont permis d'arriver là où j'en suis après tant d'années. Tout d'abord mes parents, qui ont toujours été présents pour me faire aimer l'école et qui m'ont acheté des tonnes de jouets et de livres m'ayant permis de prendre goût à la science et à la recherche de la vérité. Il y a 8 ans, c'est Charlotte qui est entrée dans ma vie. Avec sa sœur Margaux (et son copain Kevin), ses parents Cathy et Jean-Luc, sans oublier leur petit frère à 4 pattes alias Sam, ils m'ont soutenu et aidé dans bien des épreuves de la vie. Sans ce soutien de tous les jours, je ne serais jamais arrivé au bout de toutes ces épreuves. Merci infiniment.
- R IEN ne vaut le soutien des amis durant cette rude épreuve qu'est la thèse. Je remercie d'abord mes collègues et amis thésards et post-docs : Marcus, Marlène, Sascha, Antoine, Alexis, Ludivine, Swensy, Witold, Van Minh, Vincent, Éric, Thibault, Sarah, Ahmed, et tous les autres que je n'ai plus la place de mettre mais qui gardent leur place dans mon cœur. Je n'oublie pas non plus les plus importants entre tous : Hamza et Mickael. Ils ont partagé ma vie et mon bureau pendant ma thèse et nos longues discussions sur la physique, la philosophie, la politique et bien d'autres sujets me manquent beaucoup. Je tiens également à remercier mes amis du collège et du lycée avec lesquels j'ai passé de bons moments au fil de toutes ces années : Vincent, Alexandre, Jérémy, Benjamin, Jérôme, David, Antoine et Marion. À vous tous, merci.

E qui m'a le plus touché pendant cette thèse, c'est aussi le soutien et l'amitié des permanents du laboratoire. Stéphane, Taklit, Pol-Bernard, François, Christelle, Tanja, j'espère vous revoir le plus souvent possible dans l'avenir, et j'espère que nous continuerons ensemble cette longue route que suit la recherche. Merci.

I^N fine j'aimerais n'oublier personne, mais j'ai trop de monde à remercier. J'espère vous avoir fait honneur avec ce manuscrit, et je vous souhaite à tous le meilleur pour la suite. Une dernière fois : un grand merci à tous.

Table des matières

	Ren	nercier	nents	i					
	Tab	le des	matières	iii					
	Intr	roducti La ma	i on tière nucléaire	$\frac{1}{2}$					
		Les di	arks et les gluons	3					
		Les qu La pro	blématique	4					
		Notes	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	5					
1	Tra	Transition de phase de l'interaction forte7							
	1.1	Les ét	ats de la matière nucléaire	8					
	1.2	La Ch	romodynamique Quantique	10					
		1.2.1	Les bases	10					
		1.2.2	Phénoménologie et symétries	11					
		1.2.3	L'essentiel	17					
	1.3	La tra	nsition de phase	17					
		1.3.1	Les types de transition	18					
		1.3.2	La QCD sur réseau	20					
	1.4	Une a	utre approche	24					
2	Leı	e modèle NJL 25							
	2.1	Préser	ntation du modèle	26					
		2.1.1	Lagrangien et symétries	27					
		2.1.2	Interactions et états liés	28					
	2.2	Masse	s NJL	30					
		2.2.1	Masses des quarks	31					
		2.2.2	Température et potentiel chimique fini	33					
		2.2.3	Masses des mésons	35					
		2.2.4	Paramètres du modèle	39					
		2.2.5	Masse des baryons	40					
	2.3	Section	ns efficaces NJL	41					
		2.3.1	Sections efficaces élastiques	42					
		2.3.2	Sections efficaces inélastiques	44					

	2.4	De NJL à PNJL : la boucle de Polyakov
	2.5	Thermodynamique du modèle
	2.6	Points importants
3	Had	Ironisation & transport : approches existantes 53
	3.1	Collisions d'ions lourds
	3.2	Particules émises : variables & observables
		3.2.1 Variables
		3.2.2 Observables
	3.3	Conditions initiales
		3.3.1 Modèles théoriques
		3.3.2 Comparaison
	3.4	Modèles de transport
		3.4.1 Modèles théoriques
		3.4.2 Comparaison 77
	3.5	Hadronisation
		3.5.1 Modèles théoriques
		3.5.2 Comparaison
	3.6	État de l'art
4	Dvr	amique Relativiste 87
_	4.1	Vers une dynamique moléculaire relativiste
		4.1.1 Dynamique moléculaire classique
		4.1.2 Dynamique moléculaire quantique
		4.1.3 Le groupe de Poincaré
		4.1.4 Dynamique moléculaire relativiste
	4.2	Dynamique sous contraintes
		4.2.1 Le Principe de moindre action
		4.2.2 Méthodologie Hamiltonienne I
		4.2.3 Le formalisme de Dirac
		4.2.4 Méthodologie Hamiltonienne II
		4.2.5 Hamiltonien relativiste
	4.3	Conditions sur les contraintes
		4.3.1 Type de contraintes
		4.3.2 Multiplicateurs de Lagrange
		4.3.3 Équations de mouvement $\dots \dots \dots$
		4.3.4 Potentiel relativiste
		4.3.5 No Interaction Theorem
	4.4	Contraintes relativistes
		4.4.1 Distance transverse
		4.4.2 Séparabilité des particules
		4.4.3 Contrainte sur l'énergie
		4.4.4 Contrainte sur le temps $\ldots \ldots \ldots$
		4.4.5 Matrice de contraintes
	4.5	Cas pratique

	4.6 4.7	4.5.1Le cas de deux particules124.5.2Le cas de N particules12Méthode de collision relativiste124.6.1De l'interaction aux collisions124.6.2Algorithme standard124.6.3Méthode invariante12Conclusion12	14 15 18 18 19 21 22
5	INT 5.1 5.2	EGRAL 12 Présentation du modèle 12 Modèle de transport 12 5.2.1 Dynamique quantique relativiste 12 5.2.2 Milita di actualizzation 12	23 24 24 25
	5.3 5.4 5.5 5.6	5.2.2 Milieu thermodynamique 12 Hadronisation 13 5.3.1 Libre parcours moyen 13 5.3.2 Les problèmes de l'hadronisation 13 Conditions initiales 14 Optimisations du code 14 Conclusion 14	29 32 34 36 36 40 43
6	Rés 6.1 6.2 6.3 6.4 6.5	ultats de simulations 14 Organisation 14 Conditions initiales 14 Transport et thermodynamique 14 Hadronisation et transition de phase 15 Conclusion 16	15 16 16 16 18 55 52
	Con	clusion 16	i5
A	Acr	in the second se	57 50
В	Mat	rices usuelles	59
C	Tra	isformation de Fierz 17	′ 1 •
D	Sect	ions efficaces 17	′3
E	Bou	cles de fermions 17	′7
F	Obs	ervables 17	'9
G	Cal	culs relativistes 18	31
Η	Alg	orithmes d'INTEGRAL 18	33
	Bib	iographie 20)7

Introduction

« Physics is becoming so unbelievably complex that it is taking longer and longer to train a physicist. It is taking so long, in fact, to train a physicist to the place where he understands the nature of physical problems that he is already too old to solve them. »

Eugene Wigner (1902-1995)



FIG. 1– Zoom sur la matière nucléaire : de l'atome aux quarks et gluons.

La matière nucléaire

A constitution fondamentale de la matière est une question soulevée depuis la Grèce antique. Au XIX^e siècle, ces éléments fondamentaux appelés atomes ¹ ont été classés selon leur propriétés chimiques dans une table qui porte le même nom que son auteur : la table de Mendeleïev.

Cependant, le concept d'atome a évolué rapidement entre la fin du XIX^e et le début du XX^e siècle. La découverte du **noyau atomique** par Rutherford en 1911 a mis fin au débat. Ce noyau est constitué de protons et de neutrons, qui appartiennent à la famille des **hadrons**. Le fait de sonder ces noyaux en effectuant des collisions avec d'autres éléments a permis de découvrir de plus en plus de hadrons.

Comme pour les atomes et leurs propriétés chimiques, on a pu classer les hadrons selon leur caractéristiques intrinsèques : charge électrique, masse, et spin. Ce classement montre que la force fondamentale qui régit ces hadrons respecte certaines **symétries**. C'est ce qui a permis à Gell-Mann et Zweig de prédire l'existence d'une sous-structure des hadrons en 1964 : les **quarks**.



FIG. 2– Les 6 saveurs de quarks.

Ces quarks ont été mis en évidence en 1969 lors d'expériences de collisions électronproton où les diffusions profondément inélastiques ont permis d'observer le recul d'une plus petite particule. Le **modèle standard** de la physique des particules compte **6 quarks** (FIG. 2) qui sont considérés comme les **briques élémentaires** de la matière nucléaire.

Définition : Les particules nucléaires

Les particules fondamentales de la matière nucléaire sont les quarks. Ils sont au nombre de 6, et seuls les quarks u et d sont stables et sont présents dans les protons (uud) et neutrons (udd). Les particules composées de 3 quarks sont les **baryons**, et celles constituées d'un quark et d'un antiquark sont les **mésons**. L'ensemble des mésons et baryons forme le groupe des hadrons.

^{1.} provient du grec *atomos*, qui veut dire insécable

Les quarks et les gluons

Es quarks interagissent entre eux avec des **gluons** (FIG. 1). Ces gluons sont les médiateurs de l'**interaction forte**. La théorie de l'interaction forte introduite en 1973 par H. Fritzsch, M. Gell-Mann et H. Leutwyler [1] s'appelle la **Chromo-Dynamique Quantique** (en anglais : Quantum ChromoDynamics (**QCD**)).



FIG. 3– Mécanisme de confinement des quarks.

Un particularité intéressante des quarks et des gluons est qu'ils ne se montrent jamais tous seuls : ils sont toujours confinés dans des hadrons dans le vide. Ce comportement unique parmi les autres types de particules fondamentales est appelé le **confinement**.

Définition : Confinement des quarks

On peut expliquer le phénomène de confinement entre un quark et un anti-quark de la manière suivante : si on essaye d'écarter les deux particules il se forme entre eux une corde de gluons qui tend à les rapprocher. Si on tire encore plus fort sur les quarks, la corde finit par se rompre en formant une nouvelle paire de quarks et antiquarks qui sont nés de l'énergie de tension de la corde (FIG. 3).

Ce comportement peut être vu comme analogue à l'impossibilité d'observer un monopole magnétique. Si l'on coupe un aimant, on obtiendra deux aimants dipolaires plutôt que les deux pôles de l'aimant séparément.

On s'accorde à dire que l'univers primordial était très chaud et très dense, suffisamment pour que les quarks et les gluons soient mélangés et déconfinés dans une même phase appelée : le **plasma de quarks et de gluons** (en anglais : Quark-Gluon Plasma (QGP)). La QCD reproduit ce comportement à haute énergie que l'on appelle la **liberté asymptotique**. En revanche, le mécanisme de confinement reste encore inexpliqué.

L'existence des deux états de la matière nucléaire (on parle de **phase** confinée et déconfinée) nous amène à la description de deux nouveaux phénomènes :

- tout d'abord l'hadronisation, qui est l'action de transformer les quarks et les gluons en hadrons,
- et ensuite la transition de phase, qui doit décrire en même temps le phénomène de confinement et l'hadronisation, ainsi que d'autres phénomènes qui seront décrits par la suite.



FIG. 4– Schéma de la transition de phase.

Si la transition de phase implique nécessairement une hadronisation, cela n'implique pas nécessairement le confinement. On sait juste que le confinement doit certainement jouer un rôle dans le processus d'hadronisation de manière à s'assurer qu'il n'existe pas de quarks ou de gluons libres dans la Nature, cependant ce n'est pas une certitude. Nous n'allons pas tenter de proposer une solution au phénomène de confinement dans nos simulations. Nous faisons l'hypothèse que le phénomène d'hadronisation seul suffira à décrire la transition de phase entre un plasma de quarks et d'antiquarks vers des hadrons.

La problématique

N peut schématiser la transition de phase sur la FIG. 4 : on y voit bien les deux phases de la matière –confinée et déconfinée– qui subissent une hadronisation en mésons et baryons. La question que l'on va se poser et tenter d'élucider dans cette thèse est la manière dont cette transition de phase se déroule, notamment la **description microscopique** de ce phénomène.

Pour décrire la transition de phase, on doit utiliser un modèle physique qui utilise à la fois les quarks et les hadrons. De plus, ce modèle doit permettre de décrire une **transition de manière dynamique**. Pour cela, on doit extraire les masses et les sections efficaces du modèle physique utilisé afin de les incorporer dans un **modèle de transport**.

Nous allons présenter les bases de la QCD dans le **premier chapitre**, ainsi que la notion de symétrie, qui joue un rôle essentiel en physique. Nous décrirons également les différentes phases de la matière nucléaire, ainsi que la phénoménologie de la transition entre ces phases. Malheureusement, la QCD en elle-même ne permet pas d'expliquer le mécanisme du confinement puis la formation des hadrons via la transition de phase. En effet, les interactions sont très complexes à calculer à haute énergie, et deviennent impossibles à calculer directement à basse énergie.

Afin de décrire les conditions de la transition de phase, nous allons donc utiliser un modèle de basse énergie : le **modèle de Nambu et Jona-Lasinio** (**NJL**). Nous présenterons ce modèle dans le **deuxième chapitre**. Il partage de nombreux points communs avec

la QCD, et il tend à décrire la même physique au niveau de la transition. Sa facilité d'utilisation comparée à celle la QCD, ainsi que le fait qu'on puisse en tirer des **masses** et des **sections efficaces** en font un candidat idéal pour nos simulations.

D'autres approches phénoménologiques existent dans **d'autres programmes** de simulations. Nous allons présenter certains modèles de manière succincte dans le **troisième chapitre**, avec leurs principaux avantages (les résultats remarquables) et inconvénients (les phénomènes qui ne sont pas encore inclus). Ne pouvant faire une liste de tous les programmes de simulation existants, nous avons sélectionné ceux dont les résultats sont proches mais dont le fonctionnement est assez différent, afin de couvrir un large éventail de méthodes qui ont été adoptées pour expliquer la transition de phase.

Un des points importants qui nous intéresse et qui n'est pas inclus dans ces programmes est la notion de **dynamique relativiste**. Comme son nom l'indique, il s'agit d'une description des particules relativistes (c'est-à-dire qui ont des vitesses proches de celle de la vitesse de la lumière) et de leur dynamique (c'est-à-dire des interactions possibles modifiant leur mouvement). Nous présenterons en détail ce formalisme dans le **quatrième chapitre**. Ce formalisme nous donnera au final des équations de mouvement pour chaque particule du plasma.

L'utilisation de ces équations de mouvement est le point central des simulations, cependant, ce n'est pas tout. De nombreux **détails techniques** et phénomènes doivent être pris en compte en pratique. Le **cinquième chapitre** est une revue détaillée de notre **code de simulation** où l'on explique justement la manière dont le modèle NJL est incorporé dans un code de transport, et quels sont les détails qui rendent notre approche innovante (la description de l'hadronisation notamment). Ensuite nous discuterons des optimisations du code, et des différentes méthodes numériques et leur applicabilité à notre type de simulation.

Les **résultats** de nos simulations seront présentés dans le **sixième chapitre**. Nous présenterons les résultats importants en les comparant avec les autres modèles et/ou avec l'expérience. Les résultats intrinsèques aux simulations (c'est-à-dire non observables expérimentalement) seront plutôt comparés aux autres modèles de simulation, tandis que les résultats plutôt phénoménologiques seront plutôt comparés à l'expérience, de manière qualitative.

Enfin, nous conclurons cette thèse et nous donnerons les perspectives à venir.

Notes

Tout au long de ce rapport nous utiliserons le système des **unités naturelles** ($\hbar = c = k_B = 1$), afin de simplifier les notations et les formules. Les vecteurs seront indiqués par des caractères gras (plutôt que le symbole fléché usuel). Attention cependant la réciproque n'est pas forcément vraie.

Comme nous l'avons déjà présenté, nous indiquerons les définitions usuelles par un encadré **Définition**, et les points importants seront marqués d'un **point d'exclamation rouge**.

Pour le détail des calculs, la liste des acronymes, ou des présentations techniques telles que les codes de simulations, le lecteur peut se référer aux **annexes**.



Transition de phase de l'interaction forte

« Even if there is only one possible unified theory, it is just a set of rules and equations. What is it that breathes fire into the equations and makes a universe for them to describe? »

Stephen Hawking (1942)



FIG. 1.1– Diagramme des phases de la matière nucléaire.

1.1 Les états de la matière nucléaire

A VANT de discuter des transitions entre les différentes phases de la matière nucléaire, nous allons présenter les caractéristiques générales de ces phases. On peut schématiser le diagramme de phase de la matière nucléaire comme sur la FIG. 1.1. Ce diagramme ne vient pas de l'expérience (comme par exemple pour le diagramme de phase de l'eau), il vient de modèles théoriques. Par conséquent, il a beaucoup évolué depuis ces dernières décennies. Les modèles les plus récents s'accordent sur le fait que le diagramme de phase ressemble à la FIG. 1.1, c'est-à-dire qu'on a trois principales phases ayant chacune leurs propres degrés de liberté selon la température et la densité baryonique. On a :

- à haute température : le plasma de quarks et de gluons (QGP),
- à haute densité et faible température : la phase de **superconductivité de couleur** (en anglais : Color Superconducting phase (**CS**)),
- à faible température et densité : la **phase hadronique** qui englobe les noyaux atomiques et le gaz de hadrons (en anglais : Hadron Gaz (**HG**)).

Le plasma de quarks et de gluons est l'état qui était probablement présent au tout début l'univers, à très haute température. Les quarks et les gluons sont libres dans cette phase que l'on peut reproduire en très petite quantité dans les accélérateurs de particules modernes, comme le **RHIC** ou le **LHC** (FIG. 1.2), en faisant collisionner des noyaux suffisamment gros (on parle de **collisions d'ions lourds**).



FIG. 1.2– A gauche : le Large Hadron Collider (LHC), à droite : le Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC).

La phase de superconductivité de couleur est plus difficile à atteindre. Certaines expériences comme **FAIR** (Facility for Antiproton and Ion Research) vont tenter d'atteindre cette zone du diagramme de phase en faisant des collisions de moindre énergie, mais de plus grande densité. La phase de superconductivité de couleur est caractérisée par la possibilité d'avoir des paires de quarks liés que l'on appelle **diquarks**. De la même manière que les paires de Cooper (électron-trou) décrivent la superconductivite électrique, les diquarks propagent en théorie la couleur de manière superfluide. A la limite entre les noyaux atomiques et cette phase de superconductivité se trouvent les **étoiles à neutrons**, dont la structure fait toujours l'objet d'études intensives [2].



FIG. 1.3– A gauche : octet des mésons pseudo-scalaires (spin 0), à droite : octet des baryons (spin -1/2), et en bas : décuplet des baryons (spin -3/2), en fonction de l'étrangeté S, de la charge Q et de l'isospin I_3 .

Enfin, la phase la plus simple que l'on connait déjà est la phase hadronique. Les expériences de collisions d'ions lourds ont permis de détecter la plupart des hadrons créés lors des interactions entres les nucléons. On peut les **classer en famille**, selon leur nature (mésons, baryons) leur charge électrique, leur composition en quarks, etc. La FIG. 1.3 montre un exemple de classification des hadrons. On peut extraire certaines de cette classification des informations très importantes. Par exemple les particules fondamentales de la matière, les quarks, obéissent à des règles de combinaison qui impliquent qu'ils soient regroupés en paires quarks-antiquarks ou bien par trois. Ce qui a permis à Gell-Mann dans les années 1960 d'identifier le **groupe de symétrie** de l'interaction forte : le groupe SU(3).

Définition : Groupe de symétrie

Le groupe de symétrie d'un objet est le groupe des **transformations** sous lesquelles cet objet est invariant. Cette invariance peut être **locale ou globale**. Pour aller plus loin, le **théorème de Noether** énonce que : pour tout système obéissant à une propriété de symétrie correspond une **quantité conservée**.

1.2 La Chromodynamique Quantique

A charge portée par l'interaction forte a été nommée la **couleur**¹. La théorie correspondant à ces échanges de couleurs s'appelle donc logiquement la **Chromodynamique Quantique** (**QCD**).

Les théories et modèles physiques qui permettent de produire le diagramme de phase utilisent des notions de symétries pour décrire les interactions fondamentales. Si les mésons et les baryons sont les particules standards que l'on mesure dans les détecteurs, les quarks et les gluons ne sont pas observés directement. C'est là que les théories comme la QCD nous aident à comprendre les choses grâce au calcul.

1.2.1 Les bases

La Chromodynamique Quantique se base, comme toute théorie, sur un **Lagrangien** qui décrit les champs de quarks et de gluons ainsi que les interactions possibles via les couplages entre les particules.

Définition : Lagrangien QCD

Dans le cas à trois saveurs de quarks les plus légères u, d, et s, on exprime le Lagrangien de QCD par :

$$\mathscr{L}_{QCD} = \bar{\psi}(i\gamma^{\mu}D_{\mu} - m_0)\psi - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a$$
(1.2.1)

où l'on a les champs de quarks et d'antiquarks, respectivement :

$$\psi(x) = (u(x), d(x), s(x))$$

et $\bar{\psi}(x) = (\bar{u}(x), \bar{d}(x), \bar{s}(x))$, (1.2.2)

ainsi que les champs de gluons $A^a_{\mu}(x)$ aussi appelés **champs de jauge**.

Ces champs de gluons sont présents dans deux termes :

• la dérivée covariante :

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - i\alpha_s A^a_{\mu} \frac{\lambda^a}{2} , \qquad (1.2.3)$$

qui est utilisée à la place du simple ∂_{μ} pour tenir compte de l'invariance de jauge. Nous avons une théorie à N_c couleurs, dont le groupe de symétrie est $SU(N_c)$. Les matrices λ^a sont les générateurs de ce groupe de symétrie (matrices de Pauli si $N_c = 2$ et matrices de Gell-Mann si $N_c = 3$).

• on a aussi la **courbure de jauge** :

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + \alpha_s f_{abc} A^b_\mu A^c_\nu \tag{1.2.4}$$

où f_{abc} représente la constante de structure de SU(3). Le terme α_s représente la constante de couplage de l'interaction forte.

^{1.} Ceci en raison de la ressemblance avec le cercle chromatique, dont la combinaison des trois couleurs primaires donne le blanc (c'est-à-dire un état neutre en couleur).

On voit donc que ce Lagrangien est composé de plusieurs termes (FIG. 1.4) [3] : le premier terme $\bar{\psi}(i\gamma^{\mu}D_{\mu} - m_0)\psi$ représente simplement la propagation d'un champ de quarks de masse m_0 dans un champ de jauge; le deuxième terme $-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a$ est appelé **densité Lagrangienne de Yang-Mills**. La combinaison de ces termes contient toute la physique de l'interaction forte.



FIG. 1.4– Propagateur du champ de quarks (a) et de gluons (b), et interactions entre quark et gluon (c) et entre gluons (d et e).

1.2.2 Phénoménologie et symétries

Afin de présenter les principaux phénomènes physiques qui apparaissent dans la Nature, on doit présenter les différentes symétries de la QCD. Plus précisément, ce qui nous intéresse est l'effet physique qu'engendre la **brisure de symétrie**.

Définition : Brisure de symétrie

On a vu qu'un groupe de symétrie comprend certaines **transformations** qui laissent l'objet du groupe invariant. Lorsque l'on change certains paramètres physiques, il est alors possible d'observer un changement de l'objet pour une ou plusieurs transformations. La symétrie (transformation) est dite brisée.

Un exemple simple pour illustrer cette brisure est la toupie. Le paramètre physique qui change est la vitesse de rotation, et la quantité conservée qui représente la symétrie par rotation est le moment angulaire. Lorsque la vitesse diminue puis tend vers zéro, on viole la symétrie de rotation, et le moment angulaire n'est plus conservé : la toupie tombe. Cette chute peut s'effectuer aléatoirement dans n'importe quelle direction.

En physique des particules, la brisure de symétrie est souvent représentée par la **modification de l'état fondamental**. Cette modification peut changer son énergie, sa masse, son spin, ...etc. Ce changement d'état est schématisé sur la FIG. 1.5 : ici la brisure de symétrie change le minimum central en un cercle de minima. La particule peut alors prendre n'importe quel état selon l'angle de "chute".

A priori, le Lagrangien de QCD (1.2.1) respecte les symétries de couleur $SU(3)_c$ et de saveur $U(3)_f$ (f pour flavor). Cependant, certains comportements de la matière nucléaire laissent à penser que ces symétries sont **partiellement brisées**, c'est-à-dire que certains groupes de symétrie ne sont plus respectés. Nous allons maintenant présenter plus en détails ces symétries et les phénomènes physiques qui conduisent à leurs brisures.



FIG. 1.5– Potentiel effectif : pas de brisure spontanée de symétrie (à gauche), et brisure spontanée de symétrie (à droite).

Confinement de couleur et centre de symétrie \mathbb{Z}_3

Commençons par la symétrie de couleur $SU(3)_c$. Le phénomène qui est associé à la couleur est le **confinement** des partons (les quarks et les gluons). Comme on l'a expliqué en introduction (FIG. 3), ce phénomène de confinement interdit d'avoir un parton seul dans le vide. De manière opposée, on peut obtenir des quarks et de gluons libres lorsque la température du milieu est grande : c'est le **plasma de quarks et de gluons** (QGP). On parle alors de **liberté asymptotique**.



La liberté asymptotique ne veut pas dire que le confinement disparaît, mais cela signifie que l'interaction forte entre deux partons est écrantée par les multiples constituants du plasma.

Ce phénomène découvert en 1974 par David Politzer, Frank Wilczek et David Gross leur valut le prix Nobel 2004. Les phénomènes de liberté asymptotique et de confinement sont liés au **couplage** entre les partons. Ce couplage change en fonction de l'énergie mise en jeu dans les réactions. Un moyen simple de représenter ces phénomènes est de tracer la valeur de la **constante de couplage** α_s en fonction de l'énergie échangée Q (FIG. 1.6).

Définition : Constante de couplage α_s

La constante de couplage α_s est liée à l'intensité de l'interaction. En QCD cette constante de couplage porte mal son nom puisqu'elle n'est **pas constante**. On peut définir une expression analytique qui ne dépend que de l'énergie Q [4] :

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{4\pi}{(11N_c - 2N_f)/3 \ln\left(Q^2/\Lambda_{\rm QCD}^2\right)}$$
(1.2.5)

où N_c est le nombre de couleur, N_f est le nombre de saveurs de quarks, et enfin le cut-off $\Lambda_{\rm QCD} \simeq 217$ MeV lui-même, qui est fixé avec la masse du boson Z (M_Z) pour laquelle la valeur de constante de couplage est assez bien connue expérimentalement.



FIG. 1.6– Récapitulatif des mesures de $\alpha_s(Q)$ en fonction de l'énergie Q [4].

On sait que le groupe de symétrie de l'interaction forte est $SU(3)_c$. Cependant à basse température les hadrons ne possèdent pas de charge colorée apparente. A haute température, les partons sont déconfinés et on peut ainsi observer des processus où la couleur intervient.

Dans la limite où les quarks ont une très grande masse, on a une théorie de Yang-Mills pure (c'est-à-dire une théorie de pure jauge, avec seulement des champs de gluons $A^a_{\mu}(x)$). On peut alors indiquer le deconfinement par la brisure spontanée de la symétrie $\mathbb{Z}(3)$ [5, 6], qui est le centre de symétrie de SU(3). Le Lagrangien de QCD inclut cette symétrie \mathbb{Z}_{N_c} , pour $N_c = 3$ couleurs.

Le centre de symétrie $\mathbb{Z}(3)$ agit sur un champ de boson ϕ^2 tel que :

$$\phi \to \mathbf{z} \ \phi = \exp\left(2\pi i \frac{n}{N_c}\right) \ \phi$$
 (1.2.6)

avec $n = 1, ..., N_c$. On peut représenter cette transformation comme le changement d'état sur un cercle trichromique :



2. En théorie quantique des champs, on indique souvent les champs de fermions (quarks, baryons) par ψ ou Ψ , et les champs de boson (gluons, mesons) par ϕ ou Φ

On peut utiliser cette symétrie pour obtenir un **paramètre d'ordre**, c'est-à-dire un indicateur de la brisure de symétrie. A haute température, on doit avoir des éléments colorés, et donc $|\phi| \neq 0$ et la symétrie $\mathbb{Z}(3)$ est brisée. A l'inverse, dans le vide, les états sont singlet (neutre) de couleur. On doit donc nécessairement avoir $|\phi| = 0$. Comme on l'a mentionné précédemment, une théorie de Yang-Mills (pure jauge) contient uniquement des champs de gluons $A^a_{\mu}(x)$. Dans ce cas, la **boucle de Wilson** représente en QCD le paramètre d'ordre du (de)confinement :

$$W(\mathcal{C}) = \operatorname{Tr} \mathcal{P} \exp\left(i \int_{\mathcal{C}} A_{\mu} \mathrm{d}x^{\mu}\right) , \qquad (1.2.7)$$

avec Tr la trace, \mathcal{P} le *path ordering* et \mathcal{C} un contour ferme d'espace-temps. Cependant, on s'intéresse à la transition de phase en fonction de la température. En utilisant l'espace euclidien à la place de celui de Minkowski, on peut redéfinir la boucle de Wilson et obtenir la **boucle de Polyakov**, qui est le paramètre d'ordre à température finie.

Définition : Boucle de Polyakov

On définit le paramètre d'ordre du de confinement à température finie ${\cal T}$ pour une théorie de Yang-Mills par la boucle de Polyakov :

$$P(\mathbf{x}) = \mathcal{T} \exp\left(i \int_0^{1/T} A_4(\mathbf{x}, t) dt\right) , \qquad (1.2.8)$$

avec \mathcal{T} le time ordering, et $A_4 = iA_0$ la quatrième composante du champ de jauge euclidien $A^a_{\mu}(x)$. La boucle de Polyakov est dérivée de la boucle de Wilson en utilisant la **rotation de Wick**, pour avoir un temps imaginaire, puis le **formalisme de Mastubara** [7] pour passer du temps imaginaire à une température finie.

Pour décrire la transition entre un état confiné et déconfiné de couleur, on utilise plutôt le champ effectif ϕ

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{N_c} \operatorname{Tr}_c P(\mathbf{x}) \tag{1.2.9}$$

où Tr_c désigne la trace sur la couleur. On peut ensuite définir un **potentiel effectif** $\mathcal{U}(\Phi, T)$ afin de visualiser la brisure de symétrie, un peu comme sur la FIG. 1.5.

Masse effective et symétrie chirale

Il existe un phénomène tout aussi important que le confinement. Il s'agit de la **géné**ration spontanée de masse des hadrons dans le vide. En effet, la masse des constituants combinés reste très inférieure à la masse mesurée dans l'expérience. Si on prend par exemple le cas du proton, la masse des quarks est d'environ 10 MeV, alors que la masse du proton est de 938 MeV [8]. Encore une fois, c'est une brisure de symétrie qui est responsable de ce phénomène : la brisure de symétrie chirale (en anglais : Chiral Symmetry Breaking (CSB)) [9].



FIG. 1.7– Illustration des particules d'hélicités droite (ψ_R) et gauche (ψ_L).

Le Lagrangien de QCD (1.2.1) est invariant sous une transformation chirale (dans la limite où $m_0 = 0$), dont le groupe de symétrie s'écrit :

$$U(3)_L \otimes U(3)_R = SU(3)_L \otimes SU(3)_R \otimes U(1)_V \otimes U(1)_A$$
. (1.2.10)

Les groupes $U(3)_L$ et $U(3)_R$ représentent les trois saveurs possibles de quarks, ayant une **chiralité** gauche (*L* pour left-handed) ou droite (*R* pour right-handed).

Définition : *Chiralité*

La chiralité d'une particule massive est liée à son **hélicité** sous l'action d'un opérateur de chiralité :

$$P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \qquad P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} .$$
 (1.2.11)

L'hélicité concerne les **fermions**, c'est-à-dire les particules dont le spin n'est pas entier (contrairement aux bosons). Ce spin, qui est le **moment magnétique** de la particule, peut alors s'aligner avec l'impulsion de la particule dans le même sens ou dans le sens opposé. Si on considère le spin de la particule comme une rotation (ce qui est faux, mais facile à visualiser), alors on peut définir les particules d'hélicité gauche ou droite comme sur la FIG. 1.7. On a donc :

$$\begin{aligned} \psi_L = P_L \psi & \psi_R = P_R \psi \\ \bar{\psi}_L = \bar{\psi} P_R & \bar{\psi}_R = \bar{\psi} P_L \end{aligned}$$
(1.2.12)

Le groupe de symétrie $U(3)_L \otimes U(3)_R$ peut se décomposer en 4 sous-groupes qui sont listés dans la TABLE 1.1. En dehors de la **symétrie baryonique** $U(1)_V$ qui est conservée pour des raisons évidentes (la matière ne peut pas "disparaître"), toutes les autres symétries sont brisées.

Symétrie	Nom	Transformation	Courant	Manifestation
$SU(3)_V$	isospin	$\psi \to e^{(-i\omega\lambda_a/2)}\psi$	$\bar{\psi} \gamma_{\mu} \lambda_a \psi$	Brisée $(m_u \simeq m_d \neq m_s)$
$U(1)_V$	baryonique	$\psi \to e^{(-i\alpha\lambda_a)}\psi$	$\bar{\psi} \ \gamma_{\mu} \ \psi$	Conservée
$SU(3)_A$	chirale	$\psi \to e^{(-i\theta\gamma_5\lambda_a/2)}\psi$	$\bar{\psi} \gamma_{\mu} \gamma_5 \lambda_a \psi$	Brisure spontanée
$U(1)_A$	axiale	$\psi \to e^{(-i\beta\gamma_5\lambda_a)}\psi$	$ar{\psi} \; \gamma_\mu \gamma_5 \; \psi$	Anomalie axiale (η')

TABLE 1.1– Symétries avec leurs propriétés de transformation, leurs courants conservés associés, et leurs manifestations dans la Nature [10].

Il y a deux types de brisure de symétrie : **explicite et spontanée**. La brisure est dite explicite lorsque l'on pose "à la main" un terme dans le Lagrangien qui rend les transformations non-invariantes. On parle de brisure spontanée quand un facteur du milieu (par exemple la température) brise l'invariance des transformations du groupe, alors que le Lagrangien reste invariant. Revenons aux symétries qui sont brisées :

- La symétrie d'isospin $SU(3)_V$ est explicitement brisée par le fait que l'on prenne des masses $m_u \simeq m_d \neq m_s$. Une des conséquences visibles de cette brisure de symétrie est la légère différence de masse entre le proton et le neutron, ou encore la différence de masse entre le pion et le kaon.
- La symétrie chirale $SU(3)_A$ [9] est brisée explicitement par l'ajout d'une masse nue $m_0 \neq 0$ dans le Lagrangien de QCD, mais elle est également brisée spontanément à basse température. La symétrie chirale est restaurée quand les particules d'hélicité gauche ou droite n'interagissent qu'avec les partenaires de même chiralité. Lorsque l'on mixe les interactions, on brise alors cette symétrie chirale, et la conséquence de cette brisure est l'apparition d'une masse effective pour les hadrons.



La brisure de symétrie chirale est un phénomène totalement indépendant du confinement. C'est une propriété liée exclusivement aux quarks, tandis que la confinement s'applique à tous les partons.

• La symétrie axiale $U(1)_A$ [11] est brisée spontanément dans tous les cas. On connait ce processus sous le nom d'anomalie axiale ou anomalie de Adler-Bell-Jackiw. Cela se traduit en pratique par une grande masse des mesons pseudoscalaires η et η' par rapport a celle du pion. En principe, ces mesons sont des **bosons de Nambu-Goldstone** lors de l'interaction entre les nucléons. Cela veut dire qu'ils sont les partenaires chiraux des quarks à basse température, lorsque la symétrie chirale est brisée. Ils doivent en principe, comme les quarks, conserver une masse faible par rapport à celle du proton. Ce n'est pas le cas à cause de l'anomalie axiale.

La brisure qui nous intéresse principalement est celle de la symétrie chirale, et notamment la physique cachée sous ce concept. On a dit que cette brisure amène les particules gauches et droites à interagir ensemble à basse température. De la même manière que pour le confinement et la boucle de Polyakov, il existe aussi un paramètre d'ordre qui indique la brisure de symétrie chirale. Ce paramètre est le **condensat chiral**.

Définition : Condensat chiral

Le vide de QCD est quelque chose de très complexe [12, 13]. Sa description est liée à la solution de l'équation de Yang-Mills. Une des **propriétés de ce vide** est de briser la symétrie chirale avec la présence de condensats chiraux. Ces condensats sont des **paires virtuelles** de quarks et d'antiquarks qui apparaissent spontanément dans le vide. On les note :

$$\langle\langle\psi\psi\rangle\rangle$$
 (1.2.13)

C'est l'interaction des particules avec ces condensats qui va leur donner une **masse effective**, un peu comme une force de freinage lors d'un mouvement dans un fluide visqueux. Les condensats chiraux sont présents dans la **phase hadronique** $(\langle \langle \bar{\psi}\psi \rangle \rangle \neq 0)$, et donnent leurs masses aux hadrons, puis ils **disparaissent à haute température**, c'esta-dire lorsque la symétrie chirale est restaurée $(\langle \langle \bar{\psi}\psi \rangle \rangle = 0)$. Des condensats similaires appelés condensats de diquarks $\langle \langle \psi\psi \rangle \rangle$ sont prédits par certains modèles [14] pour apparaître à haute densité et basse température, dans la phase de superconductivité de couleur.

1.2.3 L'essentiel

On rappelle que l'on s'intéresse dans notre cas à l'étude de la transition entre les noyaux et le QGP et vice-versa (c'est-à-dire en augmentant puis baissant la température). Le paramètre d'ordre qui permet de distinguer les différentes phases de la QCD doit porter sur le confinement de couleur. Mais cela n'est pas suffisant car on sait que les hadrons créés doivent avoir une grande masse dans le vide via la brisure de symétrie chirale. Si la description des deux phases (QGP et hadronique) ne pose pas de problème, c'est la **description de la transition** qui est plus complexe.

A priori, il n'y a aucune raison pour que la transition de phase chirale et le confinement se produisent en même temps. Cependant, il serait dérangeant que ces transitions soient vraiment décorrélées. Un moyen "simple" de vérifier comment se passe la transition de phase est d'observer le comportement des condensats chiraux et de la boucle de Polyakov en fonction de la température. On peut ainsi apprécier le type de transition de phase.

1.3 La transition de phase

UNE approche assez générale pour décrire la transition de phase est le point de vue thermodynamique. Dans cette optique, on doit aussi pouvoir décrire la transition de phase en utilisant les paramètres thermodynamiques tels que la température ou le potentiel chimique. C'est là qu'intervient la notion de **classe d'universalité**.

Définition : Classe d'universalité

Lorsque l'on a affaire à une transition continue, ne présentant pas de chaleur latente (= énergie de transition), on peut définir des **lois de puissance** afin de décrire le comportement de certaines quantités thermodynamiques. Ces lois de puissance possèdent alors des exposants fixes au voisinage de la transition de phase : les **exposants critiques**.

L'universalité est une prédiction de la théorie du groupe de renormalisation [15] qui explique que les **propriétés thermodynamiques** d'un système proche de la transition de phase dépendent seulement de quelques caractéristiques (telles que la dimensionnalité et les symétries), et sont **insensibles aux propriétés microscopiques intrinsèques** du système.

Deux théories qui possèdent une description microscopique complètement différente, mais qui ont les mêmes lois de puissance avec les mêmes exposants critiques sont dites de **même classe d'universalité**.



FIG. 1.8– Schéma montrant le comportement des condensats chiraux normalisés pour : un cross-over, une transition de 2^{e} ordre, et enfin une transition de 1^{er} ordre.

On s'intéresse au diagramme de phase de QCD en fonction de la température T et du potentiel chimique μ . On peut y définir des observables de la transition, comme par exemple la **chaleur spécifique** C:

$$C = \frac{T}{V} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{\mu} \sim \left| \frac{T - T_c}{T_c} \right|^{-\alpha}$$
(1.3.1)

avec le volume V, l'entropie S et l'exposant critique α correspondant à une température critique de transition T_c . Ensuite, on a la **susceptibilité baryonique** pour le potentiel chimique :

$$\chi = \left(\frac{\partial \rho_B}{\partial \mu}\right)_T \sim \left|\frac{\mu - \mu_c}{\mu_c}\right|^{-\varepsilon}$$
(1.3.2)

avec la densité baryonique ρ_B et l'exposant critique ε associé au potentiel chimique de transition μ_c .

Ces lois de puissance ne sont valables que pour une **transition continue**, sans chaleur latente. Il faut maintenant préciser quels sont les différents types de transition possibles dans un milieu thermodynamique.

1.3.1 Les types de transition

Lorsque l'on regarde la FIG. 1.1, ce diagramme de phase présente trois types de transition entre la phase hadronique et le QGP. On peut aisément comprendre le type de transition en regardant l'évolution des condensats chiraux $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ en fonction de la température (FIG. 1.8), pour ces trois types de transition.

- Le **cross-over** est une évolution douce entre deux phases, qui apparaissent donc **mélangées**,
- Le **point critique** qui est une **transition de 2**^e **ordre**, où il y a une discontinuité des dérivées du paramètre d'ordre, mais pas de lui-même,

• La transition "dure" qui est une **transition de 1**^{er} **ordre** où il y a discontinuité du paramètre d'ordre directement.

Chacun de ces trois types de transition de phase s'accompagne de différentes particularités. Par exemple, le cross-over est un **mélange des deux phases** : hadronique et partonique, ce qui laisse penser que des **pré-hadrons** peuvent se former durant l'**hadronisation**. Cette hadronisation est donc **progressive** et accompagnée d'interactions entre partons et hadrons.

En explorant un peu plus loin le diagramme de phase en densité baryonique, on arrive au point critique. Ce point est une transition de 2^e ordre, ce qui veut dire qu'il montre un maximum de **fluctuations** liées au phénomène d'**opalescence critique** [15] (c'est-à-dire que la longueur de corrélation est de l'ordre de la taille du système à ce point).

Pour finir, la transition de 1^{er} ordre après le point critique doit être assez semblable à la transition de phase de l'eau (qui présente une chaleur latente). Dans le cas de l'eau, des bulles de **taille finie** se forment lorsque l'on chauffe le liquide au point d'ébullition. Le QGP doit lui aussi présenter une transition de 1^{er} ordre où les phases sont bien délimitées, et où des structures apparaissent [2]. C'est ce qu'on appelle la **phase mixte**.

Le fait que l'on ait un cross-over est en partie **dû à la masse des quarks** m_0 . On peut voir sur la FIG. 1.9 qu'avec des masses des quarks u, d, s trop petites ou trop grandes, on revient à une transition brutale de 1^{er} ordre. Le fait d'avoir de faibles masses pour les quarks u et d, et une grande masse pour le quark s est donc très important si l'on veut avoir un cross-over et la formation de pré-hadrons dans le milieu.

Avoir un cross-over ne signifie pas nécessairement que le point critique et la transition de 1^{er} ordre disparaissent à μ fini! La position du point critique est juste décalée vers les grands potentiels chimiques.



FIG. 1.9– Type de transition de phase (à la température critique) pour différentes masses nues des quarks u, d et s [16].



FIG. 1.10– Représentation en 2 dimensions d'un réseau de QCD avec les fermions $\psi(x)$, et les opérateurs d'évolutions U(x, y). On représente ici une plaquette qui est une boucle de Wilson (1.2.7) discrétisée.

1.3.2 La QCD sur réseau

Afin d'étudier les phases de la matière nucléaire, ainsi que les transitions de phase, on doit trouver une **autre méthode** que le calcul analytique. Les termes de self-interactions entre les gluons présents dans le lagrangien de QCD donnent à la théorie un caractère confinant, et il faudrait calculer une infinité de diagrammes de Feynman pour obtenir le résultat exact à basse énergie. On peut contourner le problème en utilisant les outils numériques modernes : la **QCD sur réseau** (en anglais : Lattice QCD (**LQCD**)).

Définition : QCD sur réseau

La QCD sur réseau est une technique de calcul numérique qui utilise un espace temps (de volume $V = L^3 \times T$) qui est **discrétisé** par un réseau de maille *a* (FIG. 1.10). On a donc :

$$x_{\mu} \to n_{\mu}a$$
 avec $n \in [0, L-1]^3 \times [0, T-1]$. (1.3.3)

Les nœuds du réseau sont les fermions $\psi(x)$ et les lignes sont les opérateurs d'évolution qui s'expriment :

$$U(x,y) = \mathcal{P} \exp\left(-ig \int_x^y A_\mu(z) dz\right) , \qquad (1.3.4)$$

avec l'opérateur \mathcal{P} d'ordonnancement des champs le long du chemin (x, y), la constante de couplage g, le champ de jauge $A_{\mu}(z)$, et en notant que U(x, x) = 1. Cette quantité est très utile pour avoir une **théorie** invariante de jauge. On peut également fermer la ligne d'évolution pour obtenir une boucle de Wilson (1.2.7) discrétisée.

Ce type de simulation est inspiré des **modèles d'Ising** où on a un réseau de spins afin d'étudier la transition de phase magnétique à température finie. Le réseau de QCD est aussi élémentaire, tout en considérant que la largeur de la maille du réseau a doit tendre vers une valeur nulle pour reproduire la réalité (continuum). Ce qui est beaucoup plus difficile, c'est la formulation d'une **théorie des champs discrétisée sur un réseau** [17, 18].

La FIG. 1.10 montre le réseau de base tel qu'il est utilisé en QCD. Afin d'extraire des informations de ce réseau, il est nécessaire –comme dans toute théorie lagrangienne– de **calculer l'action** S entre deux points :

$$S_{QCD} = \int \mathscr{L}_{QCD} \, d^4x = S_g(U) + S_F(U, \psi, \bar{\psi}) \,. \tag{1.3.5}$$

On note que l'on peut écrire l'action de QCD comme la somme des contributions des gluons S_g et des fermions S_F . Avant de calculer cette action, il faut tenir compte de la **discrétisation du Lagrangien** de QCD. Par exemple, l'opérateur d'évolution (1.3.4) devient :

$$U(x, x + a\hat{\mu}) \equiv U_{\mu}(x) = \exp\left(-igA_{\mu}(x + \frac{a}{2}\hat{\mu})a\right)$$
 (1.3.6)

On peut ensuite exprimer la dérivée d'un champ de fermion telle que

$$\nabla_{\mu}\psi(x) = \frac{1}{a} \left(U_{\mu}(x)\psi(x+a\hat{\mu}) - \psi(x) \right) , \qquad (1.3.7)$$

puis utiliser cette définition dans le terme cinétique du lagrangien de QCD. On peut alors réécrire l'action discrétisée pour les fermions comme :

$$S_F(U,\psi,\bar{\psi}) = \int \bar{\psi}(x)(i\gamma^{\mu}D_{\mu} - m_0)\psi(x) \, \mathrm{d}^4x$$

= $\sum_x \bar{\psi}(x) \left(\gamma^{\mu} \left(\frac{\nabla_{\mu} + \nabla^{\dagger}_{\mu}}{2}\right) - m_0\right)\psi(x) ,$ (1.3.8)

ce qui est correct dans la **limite du continuum** $a \rightarrow 0$. On peut également exprimer la contribution des gluons avec la boucle de Wilson discrète en utilisant une plaquette comme sur la FIG. 1.10 :

$$W_{\hat{\mu},\hat{\nu}}(x) = U_{\mu}(x)U_{\nu}(x+a\hat{\mu})U_{\mu}^{\dagger}(x+a\hat{\nu})U_{\nu}^{\dagger}(x) . \qquad (1.3.9)$$

L'action du champ de jauge s'écrit alors [19] :

$$S_{g}(U) = \frac{1}{4} \int F_{\mu\nu}^{a} F_{a}^{\mu\nu} d^{4}x$$

= $\frac{6}{g^{2}} \sum_{x} \sum_{\mu < \nu} \Re e \frac{1}{N_{c}} \operatorname{Tr}_{c}(1 - W_{\hat{\mu},\hat{\nu}}(x)) .$ (1.3.10)

La combinaison des deux actions discrétisées est ensuite utilisée pour extraire des informations sur le milieu.



On note que l'action pour le champ de jauge possède différentes définitions [20], ce qui donne parfois des résultats différents [21], mais cela n'enlève rien à la valeur qualitative des phénomènes décrits.



FIG. 1.11– Condensat chiral normalisé (ici noté $\Delta_{l,s}$) et boucle de Polyakov renormalisée en fonction de la température, extraits de QCD sur réseau [22].

Pour estimer la valeur d'une observable $\mathcal{O}(U, \psi, \bar{\psi})$ dans le vide, on doit calculer

$$\langle 0|\mathcal{O}(U,\psi,\bar{\psi})|0\rangle \equiv \langle \mathcal{O}\rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{O} \ e^{-S_{QCD}} \ \mathscr{D}U\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\psi} \ , \qquad (1.3.11)$$

avec la fonction de partition :

$$Z = \int e^{-S_{QCD}} \mathscr{D}U \mathscr{D}\psi \mathscr{D}\bar{\psi} , \qquad (1.3.12)$$

qui représente la **somme de toutes les configurations** possibles du réseau (des fermions et des champs de jauge), en ayant [23] :

$$\mathscr{D}U\mathscr{D}\psi\mathscr{D}\bar{\psi} = \prod_{x,\mu} \mathrm{d}U_{\mu}(x)\mathrm{d}\psi(x)\mathrm{d}\bar{\psi}(x) \ . \tag{1.3.13}$$

Quelles sont les observables $\mathcal{O}(U, \psi, \bar{\psi})$ que l'on peut extraire du réseau en pratique? Avec une température finie, on peut avoir de nombreux renseignements [23], tels que :

- le propagateur du quark $\langle \psi(x)\overline{\psi}(y)\rangle$,
- le propagateur de hadron (en utilisant des courants $\psi(x)\Gamma\overline{\psi}(x)$),
- la boucle de Polyakov $\mathcal{P}(T)$,
- le condensat chiral $\langle \langle \bar{\psi}\psi \rangle \rangle$,
- la densité d'énergie $\varepsilon(T)$,
- le potentiel inter-quarks V(x,T),
- . . .

La FIG. 1.11 montre par exemple les indicateurs de la transition de phase qui sont : la boucle de Polyakov pour le deconfinement de couleur, et le condensat chiral pour la brisure de symétrie chirale. Le comportement est une **transition douce** entre 0 et 1, ce qui indique un **cross-over**.



FIG. 1.12– Masses des hadrons dans le vide, extraites de QCD sur réseau [24].

On note qu'ici les résultats présentent une "température critique" (température pour laquelle la quantité est à 1/2) différente pour les deux transitions, bien qu'elles soient proches.



Il est relativement impropre de parler de température critique pour un cross-over, mais cependant le terme reste usité par commodité afin de décrire ce phénomène.

L'augmentation de la **taille du réseau** permet d'avoir des valeurs de plus en plus précises des observables. En fixant la masse des quarks de manière judicieuse [24], on peut reconstruire correctement les masses des hadrons dans le vide (FIG. 1.12). Cependant, ce n'est pas la masse des hadrons qui est directement reconstruite, mais c'est la masse multipliée par la maille du réseau *a*. Cette maille joue donc une rôle très important qui est d'ailleurs lié à la régularisation de la QCD sur réseau car on doit, en principe, retrouver le cut-off de QCD en prenant [18] :

$$\Lambda_{QCD} = \lim_{a \to 0} \frac{1}{a} g(a) .$$
 (1.3.14)

Après avoir décrit succinctement ce qu'est la QCD sur réseau, revenons à ce qui nous intéresse : la transition de phase de la matière nucléaire. La LQCD a permis d'explorer différentes parties du diagramme de phase, même si la densité baryonique finie est assez difficile à implémenter [25]. La LQCD a notamment permis de savoir trois éléments très importants :

- la transition de phase à $\mu = 0$ est en fait un **cross-over** [26],
- la valeur de la **température critique** T_c [22] et sa définition,
- ainsi que l'équation d'état [25].

Il est très difficile d'interpréter les résultats provenant de QCD sur réseau, notamment car la discrétisation de l'action n'est jamais parfaite, mais ces résultats sont très importants car ils permettent de vérifier le comportement des **autres modèles effectifs** et leur description du diagramme de phase.

1.4 Une autre approche

OURQUOI utiliser d'autres modèles effectifs si la QCD sur réseau donne de bons résultats? Parce que malheureusement la LQCD utilise l'action dans l'espace Euclidien (pour obtenir des résultats à température finie), au lieu de l'espace de Minkowski, ce qui interdit toute approche dynamique (évolution temporelle).

Nous nous intéressons tout particulièrement à l'aspect **dynamique** de la transition de phase. En effet, on sait que lors de la création d'un QGP, la détection des particules hadroniques créées ne nous donne pas d'information sur le plasma directement : on **perd l'information quantique** lors de l'hadronisation. La seule manière possible de remonter à cette information est donc de prendre le problème à l'envers : c'est-a-dire qu'il faut **simuler** un système quantique et sa transition de phase afin de voir si l'on retrouve bien les données expérimentales.

La solution que l'on va adopter est l'utilisation d'un **modèle effectif** pour décrire les phases de basse température. Ne pouvant utiliser la QCD directement à basse énergie, il faut utiliser un modèle dont le Lagrangien décrit les mêmes symétries, et qui puisse donner des résultats dans le vide. Ces modèles sont en général non-renormalisables, ce qui leur donne le statut de modèle plutôt que de théorie à proprement parler (comme la QCD).

Le modèle de Nambu et Jona-Lasinio va être notre choix pour décrire la matière nucléaire à basse énergie. Nous allons présenter ce modèle dans le prochain chapitre, avec ses résultats importants qui nous permettrons de l'utiliser dans un programme de simulation de la transition de phase. Ce modèle ainsi que le programme devront tenir compte de toutes les particularités de la physique de la transition de phase : le cross-over, la brisure de symétrie chirale, le confinement, les multiples collisions qui thermalisent (ou non?) le système, ...



Le modèle NJL

« A new scientific truth does not triumph by convincing its opponents and making them see the light, but rather because its opponents eventually die, and a new generation grows up that is familiar with it. »

Max Planck (1858–1947)



FIG. 2.1– Masses du quark u, du quark s, du méson π , et du méson K en fonction de (T, μ) avec le modèle NJL.

2.1 Présentation du modèle

E modèle de type Nambu-Jona-lasinio (NJL) a été formulé en 1961 [27, 28] afin de décrire les interactions locales (de courte portée) entre les nucléons d'un noyau. De manière plus générale, ce modèle est un modèle de **fermions relativistes** qui interagissent via un **couplage local**. Ce couplage rend le modèle **non renormalisable** [10], et il nécessite donc une **régularisation** (on a donc une limite en énergie appelée : **cut-off**).



FIG. 2.2– Utilisation du modèle NJL : échange d'un pion entre les nucléons (à gauche), et échange d'états liés $q\bar{q}$ entre des quarks constituants (à droite).

La FIG. 2.2 montre les deux utilisations du modèle NJL : dans un cas on utilise des nucléons comme degré de liberté, avec les pions échangés jouant le rôle de bosons de Goldstone, et dans l'autre cas, on utilise directement les quarks et on construit les mésons comme la propagation d'un état lié $q\bar{q}$. La seconde définition est celle qui est utilisée dans notre contexte [29]. Elle permet de décrire aussi bien les quarks et les hadrons.

Un point important qui n'est pas mentionné jusqu'à présent est la présence des gluons : ils ne sont pas pris en compte dans le modèle. On peut immédiatement critiquer ce choix en disant que l'**absence des gluons** prive le modèle du phénomène de **confinement**. Cependant, il faut noter que le modèle NJL utilise une interaction locale et que par conséquent, le couplage entre fermions se fait avec l'**approximation statique**. Cela veut dire que l'on ne considère que des interactions de **basse énergie**, avec de faibles échanges d'impulsion (par rapport à la masse). La FIG. 2.3 montre que l'impulsion d'un gluon échangé est faible devant sa **masse effective** [30] (cette masse est de l'ordre du GeV). Les gluons sont alors "gelés" et absorbés dans le couplage de l'interaction locale.



FIG. 2.3– A gauche : échange de gluon standard entre deux quarks, et à droite : approximation statique de basse énergie $(k \ll m)$.

Nous allons voir tout d'abord comment se définit le modèle, son Lagrangien et ses caractéristiques. Ensuite, nous allons voir comment construire les masses des quarks et des hadrons, puis les calculs de sections efficaces. Pour finir, nous discuterons des améliorations de ce modèle pour une application à la transition de phase.

2.1.1 Lagrangien et symétries

Le modèle NJL moderne utilise, comme la QCD, des champs de quarks comme degrés de liberté, et les mésons pseudoscalaires comme bosons de Goldstone. Le but premier du modèle est de **décrire correctement les hadrons dans le vide**, et aussi la **transition de phase chirale** via la brisure spontanée de cette symétrie. Le lagrangien du modèle NJL se base donc sur les champs de fermions $\psi = (u, d, s)$ et d'antifermions $\bar{\psi} = (\bar{u}, \bar{d}, \bar{s})$. Ce Lagrangien est composé de trois parties :

• Tout d'abord le **terme cinétique** usuel :

$$\mathscr{L}_2 = \bar{\psi} \left(i \partial \!\!\!/ - m_0 \right) \psi , \qquad (2.1.1)$$

qui permet de propager les fermions entre deux points. Ce terme respecte les même symétries que la QCD :

$$U(3)_L \otimes U(3)_R = SU(3)_L \otimes SU(3)_R \otimes U(1)_V \otimes U(1)_A , \qquad (2.1.2)$$

et il brise explicitement la symétrie chirale $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ en donnant une masse nue m_0 aux fermions.

• Ensuite un terme d'interaction à 4 fermions (2 entrants et 2 sortants) :

$$\mathscr{L}_{4} = G \sum_{a=0}^{8} \left[\left(\bar{\psi} \lambda^{a} \psi \right)^{2} + \left(\bar{\psi} i \gamma_{5} \lambda^{a} \psi \right)^{2} \right]$$
(2.1.3)

qui fait intervenir l'interaction locale avec la constante de couplage G. ce terme respecte la symétrie chirale mais la brise spontanément à basse température. Le mécanisme de cette brisure va être présenté dans la prochaine section.

• et finalement un **terme de mixage des saveurs à 6 fermions** appelé terme de Kobayashi-Maskawa-'t Hooft :

$$\mathscr{L}_{6} = K \left[\det \bar{\psi} \left(1 - \gamma_{5} \right) \psi + \det \bar{\psi} \left(1 + \gamma_{5} \right) \psi \right] , \qquad (2.1.4)$$

avec la constante de couplage K, qui a été introduite à la fin des années 1980 [29] afin de briser explicitement la symétrie $U_A(1)$ pour reproduire la masse du méson η' .

La définition de ce Lagrangien permet donc de respecter et de briser les **mêmes symétries que la QCD**. On espère ainsi décrire la même physique : c'est-à-dire le même diagramme de phase et les mêmes propriétés thermodynamiques. Nous allons voir cela plus en détail dans la suite du chapitre.

Définition : Lagrangien du modèle NJL

Le Lagrangien final que nous utilisons pour nos calculs est le suivant :

$$\mathscr{L}_{NJL} = \bar{\psi} \left(i \partial \!\!\!/ - m_0 \right) \psi + G \sum_{a=0}^{8} \left[\left(\bar{\psi} \lambda^a \psi \right)^2 + \left(\bar{\psi} i \gamma_5 \lambda^a \psi \right)^2 \right] + K \left[\det \bar{\psi} \left(1 - \gamma_5 \right) \psi + \det \bar{\psi} \left(1 + \gamma_5 \right) \psi \right] .$$
(2.1.5)



FIG. 2.4– Propagateur et différentes interactions présentes dans le modèle NJL.

Le Lagrangien NJL défini par :

$$\mathscr{L}_{NJL} = \mathscr{L}_2 + \mathscr{L}_4 + \mathscr{L}_6 \tag{2.1.6}$$

peut se symboliser en diagrammes de Feynman comme sur la FIG. 2.4. Cependant, on peut toujours jouer avec cette définition et ajouter certains éléments, comme nous allons le voir dans la dernière section de ce chapitre. Mais avant cela, on peut utiliser les interactions déjà présentées dans le Lagrangien pour savoir ce que l'on peut faire de ce modèle.

2.1.2 Interactions et états liés

Le Lagrangien du modèle NJL permet de décrire les quarks et leurs interactions. C'est de ces interactions entre fermions que l'on va "construire" les états liés, dont ceux qui sont neutres en couleur deviendront des hadrons. Nous avons présenté une version simplifiée du Lagrangien NJL pour 3 saveurs où l'on peut identifier des interactions scalaires 1 et pseudoscalaires $i\gamma^5$ entre fermions dans le terme \mathscr{L}_4 . Cependant, on connait d'autres types d'interactions qui donnent d'autres types de mésons (cf. TABLE 2.1).

Couplage	Vertex	Mésons
Pseudoscalaire (P)	$i\gamma^5$	π, K, η, η'
Scalaire (S)	1	a_0, K_0^*, f_0, f_0'
Vecteur (V)	γ^{μ}	$ ho, K^*, \omega, \phi$
Axial (A)	$i\gamma^5\gamma^\mu$	a_1, K_1^*, f_1, f_1'
Tenseur (T)	$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]$	a_2, K_2^*, f_2, f_2'

TABLE 2.1– Types de couplages avec le vertex associé et les mésons correspondants [31].

Le Lagrangien (2.1.5) que nous avons défini est incomplet car il n'inclut pas les interactions axiale $i\gamma^5\gamma^{\mu}$ (pseudovecteur) et vectorielle γ^{μ} (nous ne prenons pas en compte les mésons tenseurs $\sigma^{\mu\nu}$ car ils apparaissent très rarement dans les collisions d'ions lourds). Les mésons vecteurs jouent pourtant un rôle important dans la description du QGP, car il sont les principaux "producteurs" de dileptons (c-à-d de paires leptons-antileptons) qui sont mesurés en expérience [32]. Afin de tenir compte de ces mésons, on peut modifier le terme \mathscr{L}_4 pour avoir :

$$\mathscr{L}_{4 \ \bar{q}q} = G_S \sum_{a=0}^{8} \left[\left(\bar{\psi} \lambda^a \psi \right)^2 + \left(\bar{\psi} i \gamma_5 \lambda^a \psi \right)^2 \right] - G_V \sum_{a=0}^{8} \left[\left(\bar{\psi} \gamma_\mu \lambda^a \psi \right)^2 + \left(\bar{\psi} i \gamma_5 \gamma_\mu \lambda^a \psi \right)^2 \right] .$$
(2.1.7)
Le Lagrangien complet reste alors invariant chiral $(SU(3)_L \otimes SU(3)_R)$ et invariant sous $SU(3)_{color}$. On peut encore discuter d'une autre propriété intéressante et importante : la décomposition en singulet et octet de couleur sous une **transformation de Fierz**.



où les coefficients c_{km} sont à déterminer, pour obtenir l'expression finale de la transformation de Fierz. Pour de plus amples informations sur la transformation de Fierz, voir l'Annexe C.

La transformation de Fierz appliquée au Lagrangien de QCD permet de séparer l'interaction en une partie singulet de couleur et une partie octet de couleur. On peut donc ajouter au modèle NJL une partie colorée qui peut être utilisée pour décrire un autre type d'état lié coloré composé de deux quarks : les **diquarks** [33]. On peut écrire le Lagrangien pour les diquarks [14, 31] :

$$\mathscr{L}_{4 qq} = D_{S} \sum_{a=2,5,7} \left(\bar{\psi} i \gamma_{5} \lambda^{a} \mathcal{C} \bar{\psi}^{T} \right) \left(\psi^{T} \mathcal{C}^{-1} i \gamma_{5} \lambda^{a} \psi \right) + D_{S} \sum_{a=2,5,7} \left(\bar{\psi} \lambda^{a} \mathcal{C} \bar{\psi}^{T} \right) \left(\psi^{T} \mathcal{C}^{-1} \lambda^{a} \psi \right) + D_{V} \sum_{a=2,5,7} \left(\bar{\psi} i \gamma_{5} \gamma_{\mu} \lambda^{a} \mathcal{C} \bar{\psi}^{T} \right) \left(\psi^{T} \mathcal{C}^{-1} i \gamma_{5} \gamma_{\mu} \lambda^{a} \psi \right) + D_{V} \sum_{a=0,1,3,4,6,8} \left(\bar{\psi} \gamma_{\mu} \lambda^{a} \mathcal{C} \bar{\psi}^{T} \right) \left(\psi^{T} \mathcal{C}^{-1} \gamma_{\mu} \lambda^{a} \psi \right) .$$

$$(2.1.10)$$

avec $C = 1\gamma^0\gamma^2$ la matrice conjugaison de charge. Le modèle NJL utilise une interaction de contact entre fermions. On peut redéfinir le Lagrangien NJL tel qu'il soit invariant

sous une transformation de Fierz (c-à-d symétrique sous un échange de quarks) :

$$\mathscr{L}_4 \to \frac{1}{2} \left[\mathscr{L}_4 + \mathscr{F}[\mathscr{L}_4] \right] , \qquad (2.1.11)$$

de manière à avoir les relations entre les différentes constantes de couplage grâce aux identités de Fierz :

$$G_S = 2G_V = G$$

 $D_S = 4D_V = 3/4G$. (2.1.12)

La même procédure peut être appliquée à \mathscr{L}_6 pour le cas à 6 fermions [34], mais nous n'en tenons pas compte dans notre étude.

2.2 Masses NJL

A PRÈS avoir décrit les bases du modèle NJL et la possibilité de former des états liés, il faut maintenant extraire des informations de ce modèle. La première quantité qui nous intéresse est la masse des particules.

La description de la masse des hadrons dans le vide est un des buts premiers du modèle NJL. Mais avant de décrire la masse des hadrons, il faut commencer par décrire la masse des constituants élémentaires du modèle. Il existe une manière simple de décrire la plupart des masses dans le modèle : il faut utiliser l'**approximation de champ moyen** (en anglais : Mean Field Approximation (**MFA**)).

Définition : Approximation de champ moyen

L'approximation de champ moyen consiste à considérer que le vide du modèle (c-à-d son état fondamental) n'est pas vide. Ce vide est composé de **condensats** $\langle \langle \bar{\psi} \Gamma \psi \rangle \rangle$ (paires virtuelles de quarks et antiquarks), où Γ est le type de couplage. Ces condensats interagissent avec les particules du modèle qui se propagent dans le milieu. Pour une interaction à 4 fermions, on représente l'approximation de champ moyen par

$$(\bar{\psi}\Gamma\psi)^2 = 2(\bar{\psi}\Gamma\psi)\langle\langle\bar{\psi}\Gamma\psi\rangle\rangle - \langle\langle\bar{\psi}\Gamma\psi\rangle\rangle^2 \qquad (2.2.1)$$

en considérant que $(\bar{\psi}\Gamma\psi) = \langle \langle \bar{\psi}\Gamma\psi \rangle \rangle$. On dit alors qu'on **linéarise l'in**teraction (en fait on boucle les lignes fermioniques qui sont supplémentaires au simple propagateur).

Ce champ moyen est par définition composé de particules neutres en couleur, en saveur et en spin. Cela ne laisse comme choix de couplage que les condensats chiraux (c.-a-d. scalaires et pseudoscalaires). Les contributions pseudoscalaires doivent également disparaitre pour des raisons d'invariance de Lorentz et de conservation de parité dans le vide [29]. Il ne nous reste donc que les **condensats scalaires**, qui vont interagir avec les quarks et les mésons en leur donnant une **masse effective**.

2.2.1 Masses des quarks

Avant de discuter le définition de la masse des quarks, il est important de rappeler que les condensats qui créent la masse effective de ces quarks proviennent uniquement de la **brisure de symétrie chirale**. Cette brisure va nous permettre de reproduire la masse des hadrons en suivant le même principe, cependant, il n'est pas question de parler de confinement au sens propre.



FIG. 2.5– Contribution de Hartree (a) et Fock (b) dans la construction de la masse des quarks.

L'absence des gluons du modèle NJL fait que ce modèle inclut la possibilité d'avoir des **quarks isolés et colorés**. L'interaction du quark avec un milieu coloré est décrite par les diagrammes de Hartree et de Fock (FIG. 2.5). Avec l'approximation statique, on peut obtenir (c). On reconnait alors un diagramme d'interaction à 4 fermions dont deux des fermions sont "bouclés" sur eux-même. Cette vision du propagateur d'un quark correspond en fait à l'approximation de champ moyen, où la boucle représente un condensat chiral. On rappelle le Lagrangien :

$$\mathscr{L}_{NJL} = \mathscr{L}_2 + \mathscr{L}_4 + \mathscr{L}_6 . \qquad (2.2.2)$$

On peut utiliser l'approximation de champ moyen afin d'exprimer \mathscr{L}_4 (2.1.3), mais aussi \mathscr{L}_6 (2.1.4) avec des condensats. On peut schématiser cela avec la FIG. 2.6. L'expression de ces termes devient alors [10] :

$$\mathscr{L}_{4 MFA} = G \left[2(\bar{\psi}\psi) \langle \langle \bar{\psi}\psi \rangle \rangle - \langle \langle \bar{\psi}\psi \rangle \rangle^2 \right] .$$
(2.2.3)

Pour le terme \mathscr{L}_6 , les choses sont un peu plus compliquées à cause du mixage des saveurs (det). On a [29] :

$$\mathscr{L}_{6} = K \left[\det[\bar{\psi}(1-\gamma_{5})\psi] + \det[\bar{\psi}(1+\gamma_{5})\psi] \right]$$

= $K \left[(\bar{\psi}\lambda^{i}\psi)(\bar{\psi}\lambda^{j}\psi) - (\bar{\psi}i\gamma^{5}\lambda^{i}\psi)(\bar{\psi}i\gamma^{5}\lambda^{j}\psi) \right] (\bar{\psi}\lambda^{k}\psi)\varepsilon_{ijk} ,$ (2.2.4)



FIG. 2.6– Approximation de champ moyen pour l'interaction locale à 4 et 6 fermions.



FIG. 2.7– Construction de la masse des quarks : équation de Schwinger-Dyson.

avec ε_{ijk} le tenseur de Levi-Civita. On peut, encore une fois, négliger le terme pseudoscalaire. On peut donc finalement linéariser ce terme en [35] :

$$\mathscr{L}_{6 MFA} = -K \left[\sum_{i,j,k \ cyclic} \langle \langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle \rangle \langle \langle \bar{\psi}_j \psi_j \rangle \rangle (\bar{\psi}_k \psi_k) - 2 \langle \langle \bar{\psi}_i \psi_i \rangle \rangle \langle \langle \bar{\psi}_j \psi_j \rangle \rangle \langle \langle \bar{\psi}_k \psi_k \rangle \rangle + \mathcal{O}((\bar{\psi}\psi)^2) \right].$$

$$(2.2.5)$$

On se limite au développement au premier ordre en $\mathcal{O}(\bar{\psi}\psi)$, les termes d'ordre supérieur ne contribuant pas à la masse, mais aux interactions à 4 fermions. Nous reviendrons à cette définition lorsque nous aborderons la définition de la masse des mésons.

Finalement, on peut réécrire le Lagrangien NJL avec l'approximation de champ moyen :

$$\mathscr{L}_{NJL} = \mathscr{L}_2 + \mathscr{L}_4 \,_{MFA} + \mathscr{L}_6 \,_{MFA} \tag{2.2.6}$$

qui devient par conséquent (en enlevant les indices i, j, k de $\mathcal{L}_{6\ MFA}$ pour plus de lisibilité) :

$$\mathscr{L}_{NJL} = \bar{\psi} \Big(i \partial \!\!\!/ - m_0 + 2G \langle \langle \bar{\psi}\psi \rangle \rangle - K \langle \langle \bar{\psi}\psi \rangle \rangle^2 \Big) \psi -G \langle \langle \bar{\psi}\psi \rangle \rangle^2 + 2K \langle \langle \bar{\psi}\psi \rangle \rangle^3 .$$
(2.2.7)

Le premier terme du Lagrangien fait apparaître une masse effective dans le terme cinétique (générée par les condensats scalaires), que l'on peut réécrire tel que :

$$\bar{\psi} \left(i\partial \!\!\!/ - M \right) \psi \tag{2.2.8}$$

avec M la masse chirale des quarks.

Définition : Masse chirale des quarks

La masse totale des quarks pour chaque saveur f = u, d, s est composée de la masse nue m_{0f} ainsi que d'une masse effective qui provient de l'interaction du quark avec les condensats du milieu. Au final, la masse totale est :

$$M_i = m_{0i} - 2G\langle\langle\psi_i\psi_i\rangle\rangle + K\langle\langle\psi_j\psi_j\rangle\rangle\langle\langle\psi_k\psi_k\rangle\rangle$$
(2.2.9)

avec $i \neq j \neq k$ les trois saveurs possibles de quarks. On peut représenter cette masse par une équation de Schwinger-Dyson [36] qui décrit la masse effective d'un fermion dans le milieu (FIG. 2.7).

Il faut maintenant s'intéresser à l'expression plus précise du condensat $\langle \langle \bar{\psi}\psi \rangle \rangle$. Ce terme vient des contributions de Hartree et Fock (FIG. 2.5), cependant du fait de l'interaction de contact et de la définition de ces contributions [10], on peut simplifier l'expression des condensats en :

$$\langle \langle \bar{\psi}\psi \rangle \rangle = -i \ N_c \ \lim_{y \to x} \left[\operatorname{Tr}(S(x,y)) \right] = -i \ N_c \ \operatorname{Tr}(S(x,x))$$
(2.2.10)

avec Tr la trace de la matrice S(x, y) qui est la fonction de Green pour un fermion :

$$S(x,y) = \int \frac{e^{ip(x-y)}}{\not p - M + i\varepsilon} \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \,. \tag{2.2.11}$$

Cette fonction de Green décrit l'évolution du fermion en temps, entre deux points x et y, et elle doit donc respecter

$$[i\partial - M]S(x,y) = \delta^4(x-y)$$
. (2.2.12)

Avec le modèle NJL, l'interaction est de contact : on utilise donc S(x, x) qui permet d'avoir une expression qui ne dépend que de l'impulsion [10] :

$$\langle \langle \bar{\psi}\psi \rangle \rangle = -2N_c \int_0^\Lambda \frac{M}{E} \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \quad \text{avec} \quad E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2} .$$
 (2.2.13)

On remarque que l'intégrale (2.2.13) est bornée avec Λ , le cut-off du modèle NJL. En effet, cette intégrale est divergente et nécessite d'être régularisée par ce cut-off. Ce cut-off indique alors un certain niveau de densité de condensats dans le vide du modèle. Nous allons revenir après sur la façon dont on fixe les paramètres du modèle tels que ce cut-off.

2.2.2 Température et potentiel chimique fini

La prise en compte de la température T et du potentiel chimique μ passe par deux transformations. Tout d'abord, le potentiel chimique : il agit comme un déséquilibre entre le nombre de particules et d'antiparticules. Afin de prendre en compte un potentiel chimique, il convient donc d'ajouter au Lagrangien NJL le terme :

$$\mathscr{L}_{NJL} \to \mathscr{L}_{NJL} + \mu \bar{\psi} \gamma^0 \psi$$
 (2.2.14)

La fonction de Green (2.2.11) propageant le fermion se trouve alors modifiée par :

$$S(x,y) = \int \frac{e^{ip(x-y)}}{\not p - M + \mu \gamma^0 + i\varepsilon} \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} . \qquad (2.2.15)$$

Avec ce nouveau terme dans le Lagrangien on peut exprimer une nouvelle quantité [10] :

$$\langle \langle \psi^{\dagger} \psi \rangle \rangle = -i \ N_c \ \text{Tr}(\gamma^0 S(p)) , \qquad (2.2.16)$$



FIG. 2.8– Masses des quark u et s en fonction de (T, μ) .

qui est relative au potentiel chimique.

Ensuite, vient s'ajouter la température, via l'utilisation du **formalisme en temps imaginaire de Matsubara** [7]. Ce formalisme transforme encore une fois la fonction S(p)en modifiant l'énergie $p_0 = i\omega_n$ avec $\omega_n = (2n+1)\pi T$ la fréquence de Matsubara pour un fermion. L'intégrale (2.2.13) se trouve également modifiée en :

$$\langle \langle \bar{\psi}\psi \rangle \rangle = -i \ N_c \ T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{Tr} \int_0^{\Lambda} \frac{1}{\gamma^0 (i\omega_n + \mu) - \gamma^i \mathbf{p} - M + i\varepsilon} \ \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{(2\pi)^3} , \qquad (2.2.17)$$

qui peut se simplifier au final en utilisant la distribution de Fermi :

$$f(\mathbf{p}, T, \mu)^{\pm} = \left[1 + \exp\left(\frac{E \mp \mu}{T}\right)\right]^{-1}$$
(2.2.18)

et on obtient alors la **densité scalaire** ρ_S de condensats. En calculant $\langle \langle \psi^{\dagger} \psi \rangle \rangle$, on obtient la **densité baryonique** ρ_B qui représente le déséquilibre entre fermions et antifermions, comme le potentiel chimique, mais à une température donnée.

Définition : *Densités scalaire et baryonique*

La densité scalaire à (T, μ) finis se définit par [10] :

$$\rho_S = \langle \langle \bar{\psi}\psi \rangle \rangle = -2 \ N_c \ N_f \int_0^\Lambda \frac{M}{E} \left[1 - f^+ - f^- \right] \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \ . \tag{2.2.19}$$

Cette densité représente les condensats scalaires présents dans le milieu à (T, μ) donnés. On a aussi la densité baryonique [10] :

$$\rho_B = \langle \langle \psi^{\dagger} \psi \rangle \rangle = -2 \ N_c \ N_f \int_0^{\Lambda} \left[f^+ - f^- \right] \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \ . \tag{2.2.20}$$

Au final, on peut tracer les masses des quarks légers u et d et du quark s en fonction de (T, μ) sur la FIG. 2.8. On voit bien l'apparition d'une masse effective vers les basses températures et densités (brisure de symétrie chirale et apparition des condensats).

2.2.3 Masses des mésons

Les mésons n'apparaissent pas directement dans le Lagrangien du modèle NJL. En réalité, il faut **construire le propagateur** de ces mésons, via l'interaction entre quarks, puis **identifier leurs masses** dans ce propagateur. Comme on utilise l'approximation statique pour décrire les interactions (pas de gluons), on peut définir un état lié de deux manières qui sont finalement équivalentes (FIG. 2.9).



FIG. 2.9– Pour la propagation d'un état lié : la Random Phase Approximation (suite de boucles) et la description de Bethe-Salpeter (diagramme en "échelle") sont équivalentes dans le modèle NJL (avec l'approximation statique).

Si on s'intéresse maintenant au propagateur des mésons, on peut l'identifier à une suite infinie de boucles à 2 fermions (fermion-antifermion). Dans ce cas, on peut écrire l'équation de Bethe-Salpeter [37] pour la **matrice de diffusion** T de l'interaction à 4 fermions comme :

$$T(k^{2}) = \kappa + \kappa \Pi(k^{2})\kappa + \kappa \Pi(k^{2})\kappa \Pi(k^{2})\kappa + \dots$$

= $\kappa \left[1 - \kappa \Pi(k^{2})\right]^{-1}$, (2.2.21)

avec k^2 l'impulsion échangée lors de la diffusion, κ le couplage d'un vertex à 4 fermions, et $\Pi(k^2)$ la boucle élémentaire à 2 fermions. On peut schématiser cette relation par la FIG. 2.10. La boucle à 2 fermions se définit [10] d'une manière très proche de la boucle à 1 fermion pour les condensats (2.2.13) :

$$\Pi(k^2) = -i \ N_c \ \text{Tr} \int \left(\Gamma S(p+k/2) \Gamma S(p-k/2)\right) \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} , \qquad (2.2.22)$$

avec Γ le type de couplage (P, S, A, V) et S(p) la fonction de Green pour un fermion. Comme pour le cas des condensats, on peut utiliser S(p) pour différentes saveurs de fermions (u, d, s), ainsi que (T, μ) fini. On peut ainsi construire tout le spectre des mésons pour **n'importe quel milieu thermodynamique**.



FIG. 2.10– Construction de la masse des mésons.



FIG. 2.11– Masse des quarks et des mésons en fonction de la température pour $\mu = 0$.

Finalement, on extrait la masse des mésons de l'équation (2.2.21) en posant [27] :

$$\det(1 - \kappa \Pi(k^2)) = k^2 - m_{\bar{q}q}^2$$
(2.2.23)

en prenant le pôle du propagateur de l'état lié correspondant à $k^2 = m_{\bar{a}a}^2$

Définition : Masse des mésons

La masse des mésons provient du propagateur de l'état lié $\bar{q}q$, où chaque quark a déjà une masse effective :

$$\det(1 - \kappa \Pi(k^2))|_{k^2 = m_{\pi\pi}^2} = 0 \tag{2.2.24}$$

La valeur de k permettant de respecter cette relation donne la masse de l'état lié. Cette **masse est donc variable** en fonction de (T, μ) , comme celle des quarks.

On peut ainsi obtenir la valeur des masses des mésons pseudoscalaires par exemple, et la comparer aux masses des quarks en fonction de la température (FIG. 2.11). On peut voir que ces mésons pseudoscalaires ont une faible masse dans le vide (à T = 0) et acquièrent une masse plus importante à haute température. A l'inverse des quarks, les mésons interagissent faiblement dans le vide, mais sont fortement couplés avec le milieu à haute température.

On peut d'ailleurs définir une température au delà de laquelle la masse des mésons devient plus grande que celle des quarks constituants : la **température de Mott**. Cela permet de distinguer **deux phases** : l'une où les degrés de liberté sont les mésons (faibles densités et températures) et une autre où les quarks sont les degrés de liberté (le QGP). On se rend mieux compte de ce phénomène en regardant les masses des mésons à (T, μ) finis (FIG. 2.12). On voit la vallée de stabilité où la masse des mésons est faible et constante.

Même si la masse des mésons est grande dans la phase plasma, le fait d'avoir une solution (2.2.24) prouve que les mésons peuvent subsister dans cette phase. Pour être plus



FIG. 2.12– Masses des mésons π et K en fonction de (T, μ) .

précis, il faut mentionner un détail : la solution de l'équation (2.2.24) possède une partie imaginaire au delà de la température de Mott. Cette partie imaginaire est alors identifiée à une **largeur de désintégration** [38, 39] en un quark et un antiquark (FIG. 2.13). Plus la température est grande, plus la largeur est importante, ce qui rend le méson de plus en plus instable dans le milieu. Nous allons rediscuter de la formation de ces pré-hadrons dans le plasma à la fin du chapitre.





FIG. 2.14– Interaction à 4 fermions avec terme correctif à 6 fermions dans l'approximation de champ moyen.

On doit aussi ajouter le fait que l'on utilise un mixage des saveurs avec le terme de 't Hooft (2.1.4), ce qui ajoute un peu de complexité au calcul de la masse (via le terme de couplage κ [34]). Cela se traduit par l'ajout d'un terme de champ moyen lorsque l'on décrit l'interaction à 4 fermions de l'état lié (FIG. 2.14). Ceci correspond à la modification évoquée auparavant avec l'équation (2.2.5).

On peut ainsi reproduire certains comportements comme la masse importante des mésons η et η' provenant de la brisure de symétrie $U_A(1)$. Cela est schématisé sur la FIG. 2.15, ainsi que l'effet des autres brisures de symétrie notables.



FIG. 2.15– Masses des mésons pseudoscalaires dans le vide pour différentes brisures de symétrie.

Parametre	Valeur	\$	Donnée	Valeur
$\Lambda [\text{MeV}]$	602.3		$ \langle \bar{\psi}\psi \rangle ^{1/3}$ [MeV]	250.0
$G\Lambda^2$	1.835		f_{π} [MeV]	92.4
$K\Lambda^5$	12.36		m_{π} [MeV]	135.0
$m_{0q} \; [\text{MeV}]$	5.5		$m_K \; [\text{MeV}]$	497.7
$m_{0s} \; [\text{MeV}]$	140.7		$m_{\eta'}$ [MeV]	957.8

TABLE 2.2– Paramètres choisis pour le modèle NJL (à gauche) avec les données permettant de fixer ces paramètres (à droite) [..].

2.2.4 Paramètres du modèle

Avant d'aller plus loin dans la présentation du modèle NJL, il faut marquer un temps d'arrêt sur un point en particulier : les paramètres utilisés tout au long des calculs. Ils sont au nombre de 5, il s'agit :

- des masses nues des quarks légers m_{0q} et lourd m_{0s} ,
- des **couplages** des différentes interactions G et K (les autres étant automatiquement fixées via les identités de Fierz),
- et enfin du **cut-off** Λ utilisé pour régulariser le modèle.

Nous utilisons le modèle NJL dans $SU_f(3)$ ce qui implique d'utiliser le terme de mixage des saveurs de 't Hooft, et ce qui complique un peu la fixation des paramètres. Dans $SU_f(2)$, la procédure de fixation des paramètres est la suivante :

- 1. On commence par fixer le cut-off du modèle en utilisant la densité de condensats dans le vide $|\langle \bar{\psi}\psi \rangle|^{1/3}$, par une valeur extraite de QCD sur réseau. L'équation (2.2.13) nous permet cette fixation. Il existe différentes procédures de régularisation dans la littérature [10], dans notre cas nous utilisons le cut-off 3D.
- 2. Ensuite, on fixe le couplage G en prenant la constante de couplage du pion f_{π} avec le calcul de boucle de fermions $\Pi(k^2)$, qui intervient dans le calcul de la décroissance du pion [27, 10].
- 3. Pour finir, on fixe la masse nue des quarks m_0 en utilisant la relation de Gell-Mann-Oakes-Renner (GOR), avec M la masse habillée des quarks à T = 0, et les données expérimentales de la TABLE 2.2 :

$$m_{\pi}^2 f_{\pi}^2 = -M \langle \langle \bar{\psi}\psi \rangle \rangle . \qquad (2.2.25)$$

Que manque-t-il pour passer à $SU_f(3)$? Étant donné que l'on veut ajouter le quark s, il faut ajouter la masse du kaon m_K , mais cela ne suffit pas. Il faut aussi fixer la constante de couplage K du terme de mixage à 6 fermions \mathscr{L}_6 . L'idéal aurait été d'avoir la constante de désintégration du kaon, mais c'est une donnée expérimentale mal connue. On peut donc se rabattre sur l'utilisation de la masse du méson η' , qui possède une très grande masse, grâce à \mathscr{L}_6 , et qui va justement être un très bon indicateur pour fixer K.

Au final, les paramètres du modèle et les quantités utilisées pour les fixer sont résumés dans la TABLE 2.2. On remarque au passage que l'on a $m_u = m_d \neq m_s (SU_f(2+1))$, ce qui simplifie les calculs en gardant des résultats proches de l'expérience.



FIG. 2.16– Masses des diquarks (à gauche) et des baryons (à droite) en fonction de la température avec le modèle NJL dans SU(3) [31].

2.2.5 Masse des baryons

Le Lagrangien NJL doit inclure les diquarks afin d'être invariant sous une transformation de Fierz [34, 29]. Ces diquarks sont des états colorés qui peuvent être utiles afin de décrire la phase de superconductivité de couleur à haute densité [14], mais ils sont également présents à basse densité. Ils vont alors servir à construire les baryons.

De la même manière que l'on peut définir un méson via l'équation de Bethe-Salpeter (2.2.21), on peut construire les diquarks et calculer leur masse (FIG. 2.14). Enfin, on peut généraliser ce processus aux baryons, en utilisant à nouveau l'approximation statique. En effet, une description simple d'un baryon consiste en un état lié d'un quark et d'un diquark. Cependant, si l'échange des gluons pour les diquarks et les mésons est trivial, le cas des baryons est un peu plus compliqué.

Dans le cas des baryons, ce sont des quarks qui sont échangés entre les deux constituants. La première approche utilisée historiquement était l'équation de Fadeev relativiste [40, 41]. Cette méthode est plus juste dans la mesure où elle traite plus précisément l'interaction à 3 corps [42], mais elle est assez complexe à mettre en œuvre.



On peut remettre en question la rentabilité d'une telle méthode lorsque l'on sait que le modèle que l'on utilise est un modèle effectif, et qu'en tant que tel, les solutions que l'on obtient restent seulement valables sous des conditions précises.

Dans cette optique, si l'on considère l'approximation statique valide pour de faibles énergies pour la construction des mésons, on peut également l'appliquer pour la construction des baryons. Dans ce cas, la description d'un état lié quark-diquark devient assez simple, et permet d'obtenir des résultats satisfaisants (FIG. 2.16).

Nous n'utilisons pas les diquarks et les baryons dans notre modèle pour le moment. Nous nous limitons pour le moment à décrire les mésons et quarks, afin de reproduire une transition de phase dynamique.

2.3 Sections efficaces NJL

UNE fois les masses de chaque type de particule calculées, on s'intéresse à la production des états liés ainsi qu'aux autres interactions. Nous allons donc procéder au calcul des **sections efficaces** de diffusion.

Définition : Section efficace

La section efficace désigne la probabilité d'interaction entre particules pour un processus donné, c'est-à-dire lorsque l'on fixe les particules d'entrée et de sortie. Dans le cas de processus $2 \rightarrow 2$, on schématise la réaction au centre de masse comme :



avec les quadri-impulsions d'entrée p et de sortie p'. On peut écrire la section efficace différentielle entre les deux particules :

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{64\pi \ s \ |p|^2} \frac{1}{N^2} \sum |\mathcal{M}|^2 \ , \qquad (2.3.1)$$

où l'énergie échangée $t = (p - p')^2$ et l'énergie totale $s = (p + p')^2$ sont des **variables de Mandelstam**, $N = (\text{spin} \times \text{couleur})$ est le nombre d'états possibles de particules d'entrée, et enfin \mathscr{M} désigne l'**élément de matrice** de diffusion (on somme sur les $|\mathscr{M}|^2$ possibles). On exprime finalement la section efficace totale en intégrant sur t:

$$\sigma = \int \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t \ . \tag{2.3.2}$$

Pour plus d'informations sur les sections efficaces, voir l'annexe D.

Grâce aux sections efficaces, on va pouvoir estimer diverses **caractéristiques du milieu** tels que les **taux de transition** entre différentes espèces de particules, la **viscosité**, le **libre parcours moyen**, etc. Dans le modèle NJL, les diagrammes de Feynman qui décrivent les processus de diffusion sont en nombre limité, puisque l'on utilise l'approximation statique (pas de gluons).

Nous allons tout d'abord présenter les sections efficaces élastiques, puis inélastiques, en posant à chaque fois les bases du calcul, puis en donnant les résultats intéressants à retenir. Nous nous limiterons à des sections efficaces $2 \rightarrow 2$ car ce sont les **contributions dominantes**, cependant il est tout à fait possible d'envisager d'autres processus d'ordres supérieurs [43].



FIG. 2.17– Diagrammes de Feynman des processus $q \ q \rightarrow q \ q$ dans le modèle NJL.

2.3.1 Sections efficaces élastiques

Les sections efficaces élastiques ne nous donnent pas d'indications sur la transition de phase et l'hadronisation. En revanche, elles nous renseignent sur des quantités telles que la viscosité du plasma [44, 45]. C'est cette viscosité qui **thermalise** les partons du milieu (plus ou moins vite), et qui –par conséquent– nous fait perdre l'**information** de l'état initial. Nous allons présenter les deux types de sections efficaces élastiques qui nous intéressent le plus dans le cadre de notre étude : les processus $q q \rightarrow q$ et $q \bar{q} \rightarrow q \bar{q}$.

Le premier processus $q \ q \rightarrow q \ q$ se limite aux types de diagrammes de Feynman présentés sur la FIG. 2.17. L'absence de gluons fait que les particules échangées dans les processus dominants sont des mésons. On note que l'on pourrait ajouter des diagrammes d'ordres supérieurs en G, ainsi qu'un canal s où apparaît le propagateur de diquark.

Dans notre étude, nous nous cantonnerons aux cas bien connus dans la littérature [10, 46, 47] : en l'occurrence nous n'avons pas inclus les diquarks et les baryons dans nos calculs (avec les processus associés), et on se limite aux couplages scalaires et pseudo-scalaires pour les calculs de sections efficaces.

Afin de calculer les amplitudes de diffusion \mathcal{M} , nous garderons la topologie présentée sur le premier diagramme de la FIG. 2.17. Par exemple, on définit le courant de fermion du diagramme t comme

$$\bar{u}(p_3)\Gamma u(p_1) \tag{2.3.3}$$

avec le vertex d'interaction Γ (matrice de couleur × couplage), puis l'élément de matrice pour ce même canal [46] :

$$-i\mathcal{M}_t = \sum_{\Gamma} \bar{u}(p_3)\Gamma u(p_1) \ iT_{\Gamma}(k^2) \ \bar{u}(p_4)\Gamma u(p_2) \ . \tag{2.3.4}$$

où $T_{\Gamma}(k^2)$ est le propagateur du méson échangé pour le couplage Γ (2.2.21). On peut également définir l'élément de matrice pour le canal u:

$$-i\mathscr{M}_u = \sum_{\Gamma} \bar{u}(p_4)\Gamma u(p_1) \ iT_{\Gamma}(k^2) \ \bar{u}(p_3)\Gamma u(p_2) \ , \qquad (2.3.5)$$

pour finalement exprimer la section efficace différentielle

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{16\pi \ s|p|^2} \frac{1}{4N_c^2} \sum |\mathcal{M}_t \pm \mathcal{M}_u|^2 , \qquad (2.3.6)$$



FIG. 2.18– Diagrammes de Feynman des processus $q \ \bar{q} \rightarrow q \ \bar{q}$ dans le modèle NJL.

avec l'impulsion au centre de masse $|p|^2 = s - 4m_a^2$.

On note le signe \pm dans (2.3.6) entre \mathcal{M}_t et \mathcal{M}_u qui provient des **règles de Feynman** (il apparaît dans le calcul de la matrice de diffusion \mathcal{S}). Si les saveurs de quarks sont différentes, on ajoute les éléments de matrice, mais si les particules sont **indiscernables** alors on doit avoir un signe – afin de tenir compte du **blocage de Pauli**.

L'absence évidente de canal s pour le processus $q q \rightarrow q q$ fait que ces sections efficaces **restent faibles**, indépendamment de la température du milieu [46]. En revanche, ce n'est pas le cas des processus $q \bar{q} \rightarrow q \bar{q}$ (FIG. 2.18).

Les processus $q \bar{q} \rightarrow q \bar{q}$ ouvrent la voie au canal s, qui donne la possibilité d'avoir une **résonance** lorsque la masse des quarks est proche de celle du méson propagé (c'est-à-dire proche du seuil de la réaction). Cet effet est encore amplifié lorsque l'on approche de la température de Mott $(m_q + m_q = m_M)$. On peut montrer ce résultat important avec la FIG. 2.19.

L'explosion des sections efficaces ne diverge pas grâce à la régularisation du modèle via le cut-off, mais le pic de section efficace reste cependant très important (plusieurs dizaines de millibarns!). La bosse qui apparaît juste après le pic de résonance provient de la contribution des mésons η et η' dans le propagateur (voir annexe D).



FIG. 2.19– Sections efficaces élastiques $q\bar{q}$ en fonction de \sqrt{s} pour $T \simeq T_{Mott}$ (à gauche) et pour $T > T_{Mott}$ (à droite) [46].



FIG. 2.20– Diagrammes de Feynman des processus $q \bar{q} \rightarrow M M$ dans le modèle NJL.

2.3.2 Sections efficaces inélastiques

Les sections efficaces inélastiques représentent un grand nombre de processus : $q X \rightarrow q' X'$, $q \bar{q} \rightarrow X X$, ..., où X est un hadron (méson, diquark, baryon). Dans notre cas, on s'intéresse au processus $q \bar{q} \rightarrow M M$ (schématisé par la FIG. 2.20) qui est majoritaire dans les réactions [47].

Encore une fois, le rôle du canal s est très important pour le phénomène d'**explosion** des sections efficaces près du seuil et près de la température de Mott. Malheureusement le calcul du canal s dans ce cas est plus compliqué, à cause de la boucle en triangle (à 3 fermions) présente en sortie, appelée vertex triangle.

Le calcul d'une telle boucle à température et potentiel chimique finis est détaillé dans [48], ainsi que le calcul des "boucles" à 1 fermion (condensats), 2 fermions (mésons). Pour un résumé de ces calculs, le lecteur peut voir l'annexe D.

Nous allons cependant présenter les bases du calcul. Dans l'élément de matrice du canal s, il suffit de changer les "jambes" du diagramme par l'expression du triangle vertex D. On a donc [47] :

$$-i\mathcal{M}_s = \sum_{\Gamma} \bar{v}(p_2)\Gamma u(p_1) \ iT(k^2) \ D(p_1 + p_2, p_3) \ . \tag{2.3.7}$$

Les calculs des diagrammes t et u sont modifiés à cause du fait que l'on a des **bosons en** sortie, et que c'est un **quark qui est échangé** à la place du boson. On a, par exemple, pour le canal t [47] :

$$-i\mathcal{M}_t = \sum_{\Gamma} \bar{v}(p_2)\Gamma \ iQ(k^2) \ \Gamma u(p_1)$$
(2.3.8)

où cette fois-ci Γ tient compte des couplages entre méson et quarks $g_{Mq\bar{q}}$, et où $Q(k^2)$ est le propagateur du quark, déjà défini (2.2.15).

On peut voir un exemple de résultat de section efficace totale pour le processus $u\bar{u} \leftrightarrow \pi^+\pi^-$ avec la FIG. 2.21. On y voit encore l'explosion à l'approche du seuil et de T_{Mott} . Tout comme pour les sections efficaces élastiques, le pic de sections efficaces atteint **plusieurs** dizaines de mb.



FIG. 2.21– Sections efficaces $u\bar{u} \leftrightarrow \pi^+\pi^-$ en fonction de \sqrt{s} pour différentes températures [49].

Dans le cas des sections efficaces inélastiques, on peut imaginer que cela sera suffisant pour obtenir une **hadronisation totale** lors de la transition de phase. Cependant on rappelle que le modèle NJL n'inclut pas le phénomène de confinement, et que malgré l'explosion des sections efficaces, il n'est pas garanti que les sections efficaces seules permettent d'obtenir une hadronisation parfaite.

De plus, il reste encore à prendre en compte les autres processus listés au début de cette sous-section avant de tirer des conclusions. Certaines études ont déjà été effectuées [50, 51] pour les processus d'interaction entre mésons, mais les sections efficaces de production de diquarks et de baryons sont encore nécessaires afin de compléter la description d'un **QGP réaliste**. Ce travail est en cours de réalisation.

Toutes les sections efficaces que nous utilisons ont été calculées avec une **température** et un potentiel chimique finis. On montre des exemples de ces sections efficaces pour des processus élastiques et inélastiques sur la FIG. 2.22. Dans ce cas, on considère que la réaction est **instantanée** et qu'elle a lieu **dans un milieu** : c'est-à-dire que les particules d'un même processus possède le même (T, μ) . En pratique, on prend la moyenne des températures et des potentiels chimiques des deux particules.

Évidemment, cela pose problème dans le cas des très **grandes sections efficaces** présentes à l'approche de la transition de phase, car alors les particules peuvent être à une grande distance, et la **température ressentie** par chacune dans le milieu **diffère grandement**. La notion de section efficace est liée à l'échelle du système étudié : les objets macroscopiques peuvent être assimilés à des volumes durs se percutant, tandis que les objets microscopiques sont soumis aux propriétés quantiques.

D'après nos sections efficaces, l'échelle d'interaction est de l'ordre de quelques femtomètres (10^{-15} m) . A cette échelle, on peut encore considérer des particules échangées comme purement virtuelles (**interaction instantanée**), mais cela reste discutable notamment dans un milieu aussi dense que le QGP. La description détaillée de la solution que nous avons adoptée pour implémenter les collisions en pratique dans une simulation sera présentée dans la Chapitre 5.



FIG. 2.22– Exemples de sections efficaces élastiques et inélastiques en fonction de (T, μ) avec le modèle NJL.

2.4 De NJL à PNJL : la boucle de Polyakov

A U début du chapitre, nous avons mentionné le fait que le modèle NJL ne possède **pas de confinement** du fait de l'absence des gluons comme degré de liberté. Il y a cependant un moyen d'inclure l'effet du champ de gluon A^{μ} dans NJL sans introduire les gluons eux-même : on peut utiliser la **boucle de Polyakov** (1.2.8) qui représente le **confinement de la couleur**.

Le Lagrangien PNJL se formule de la manière suivante [52, 53] : dans la partie cinétique du Lagrangien \mathscr{L}_2 , on remplace $\partial = \gamma^{\mu} \partial_{\mu}$ par $D = \gamma^{\mu} D_{\mu}$, avec :

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - iA_{\mu} \tag{2.4.1}$$

qui est censé reproduire le couplage avec le champ de gluon A_{μ} provenant de QCD. On rajoute également un terme au Lagrangien :

$$\mathscr{L}_{PNJL} = \mathscr{L}_{NJL}(\partial \to D) - \mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}, T) . \qquad (2.4.2)$$

Ce dernier terme $\mathcal{U}(\Phi, \overline{\Phi}, T)$ est le potentiel provenant de la boucle de Polyakov [54]. Il est censé reproduire la brisure de symétrie de confinement : la symétrie \mathbb{Z}_3 .



FIG. 2.23– Potentiel effectif $\mathcal{U}(\Phi)$ pour deux températures : en dessous et audessus de la température critique T_0 . Il y a trois minima au-dessus de T_0 [38].

On peut voir la brisure de cette symétrie pour ce potentiel sur la FIG. 2.23. On voit bien sur cette figure l'apparition de 3 minima pour le cas déconfiné de couleur. Cela représente le fait que l'on peut séparer les états colorés et donc : déconfiner les quarks. À l'inverse, pour le cas en dessous de la température de transition, on voit un seul minimum, qui correspond aux états singulet de couleur (c'est-à-dire les hadrons).

Les condensats chiraux jouaient déjà le rôle d'indicateurs de la brisure de symétrie chirale, et grâce à la boucle de Polyakov on a maintenant un indicateur du déconfinement de couleur. La température de transition des deux phénomènes n'a aucune raison d'être la même théoriquement parlant. Cependant, il serait étrange, et même gênant, qu'elles soient très différentes.

Le potentiel effectif provenant de la boucle de Polyakov est fixé avec des paramètres [52], ce qui permet de reproduire le comportement de QCD sur réseau, mais surtout, ce qui permet de vérifier que les températures de déconfinement de brisure de symétrie chirale sont approximativement les mêmes (FIG. 2.24).



FIG. 2.24– A gauche : condensat chiral normalisé et champ effectif de la boucle de Polyakov $\Phi(T)$ en fonction de la température à potentiel chimique nul. A droite : $\partial \Phi/\partial T$ et $\partial \langle \bar{\psi}\psi \rangle/\partial T$ [52].



FIG. 2.25– Masses des mésons en fonction de T/T_c dans NJL et PNJL [55].

Maintenant, intéressons-nous à l'effet de cette boucle de Polyakov sur les résultats. Qualitativement, on sait que cette boucle va changer le comportement à la transition de phase, mais qu'en est-il quantitativement? On voit sur la FIG. 2.25 que la **variation de la masse** au voisinage de la température critique¹ n'est pas la même. Cependant, la valeur maximale de la **masse dans le vide reste la même** (on a $\phi = 0$ à T = 0).

On peut adapter le modèle PNJL pour (T, μ) finis, afin d'étudier le diagramme des phases (FIG. 2.26). On peut également apporter d'autres améliorations au modèle, comme l'inclusion d'un **potentiel chimique imaginaire** [56], ou bien l'ajout d'un **terme d'interaction à 8 quarks** [57]. L'ensemble de ces améliorations permet au modèle NJL de se rapprocher du comportement de QCD [58]. Cependant, le modèle NJL reste un modèle effectif, et son but n'est pas de remplacer la QCD en ajoutant le plus de corrections possibles. Dans notre cas, la seule correction qui nous intéresse au final est celle apportée par le confinement de couleur de la boucle de Polyakov.



FIG. 2.26– Condensat chiral et boucle de Polyakov en fonction de (T, μ) pour le modèle PNJL [53].

^{1.} Attention : $T_c(NJL) \neq T_c(PNJL)$.



FIG. 2.27– Diagramme de phase pour les modèles NJL et PNJL [59].

2.5 Thermodynamique du modèle

ANS l'optique de décrire la transition de phase d'un plasma de quarks et d'anti-quarks avec le modèle NJL, on doit s'intéresser à la thermodynamique du modèle, et donc plus précisément à son **diagramme des phases**. La FIG. 2.27 montre ce diagramme pour les modèles NJL et PNJL, avec : le point critique (en anglais : Critical End Point (**CEP**)), la transition de premier ordre à haute densité et le cross-over à haute température. Ce type de diagramme correspond à celui qui est présumé pour la QCD [25].

Seule la **position du point critique** est discutable. Cependant, cette position dépend des améliorations que l'on apporte au modèle (notamment la brisure de symétrie $U_A(1)$ [60]), comme le montre ici la différence entre NJL et PNJL. De plus, le jeu de paramètres que l'on choisit pour le modèle (TABLE 2.2) peut également influencer fortement ce diagramme [61, 62].

Dans tous les cas (même en jouant avec les paramètres du modèle [61]), le modèle garde **la même classe d'universalité que la QCD** [59], c'est-à-dire : les même exposants critiques décrivant le comportement proche de la transition de phase, comme par exemple la susceptibilité baryonique χ (1.3.2) sur la FIG. 2.28.



FIG. 2.28– Susceptibilité en fonction de (T, μ) pour le modèle PNJL [53].



FIG. 2.29– A gauche : pression normalisée par la limite de Stefan-Boltzmann (gaz idéal) en fonction de la température à $\mu = 0$, comparée aux résultats de QCD sur réseau, et à droite : équation d'état en fonction de la température, également comparée aux résultats de QCD sur réseau [52].

Dans notre cas, nous allons nous intéresser à l'étude de la transition de phase au niveau du cross-over (haute température et basse densité baryonique). C'est ce type de transition qui est supposé obtenu dans les collisions d'ions lourds au RHIC et au LHC. Le modèle NJL peut s'appliquer à température finie, cependant, l'approximation statique **limite l'utilisation** du modèle à des températures les plus faibles possibles. Un test rapide permet de savoir si le modèle sera toujours valable aux alentours de la température critique : l'équation d'état. Des résultats récents montrent que le modèle PNJL reproduit assez bien l'évolution de la densité d'énergie et la pression en fonction de la température [63, 52] (FIG. 2.29).

Jusqu'à $T \simeq 2T_c$, le modèle reste applicable. Ensuite, le fait qu'il y ait un cut-off pour régulariser les interactions de contact entraine une divergence entre l'équation d'état décrite par la QCD et celle du modèle [64]. Nous nous cantonnerons à utiliser le modèle autour de la transition de phase, et c'est de toute façon la partie du diagramme de phase qui nous intéresse. De plus, nous utiliserons le modèle à potentiel chimique nul, afin d'éviter de s'approcher du point critique où le phénomène d'**opalescence critique** (c'està-dire où les fluctuations sont très importantes) pourrait apparaître et nous gêner dans l'**étude de l'hadronisation**.

2.6 Points importants

E^N conclusion sur ce chapitre, on peut faire le point sur les choses à retenir, les principales caractéristiques du modèle, et les résultats importants. Tout d'abord, le modèle NJL est un modèle qui peut **approximer la QCD** pour décrire certains problèmes autour de T_c . Ensuite, l'approximation statique permet de **décrire simplement les interactions**, sans les gluons. Ces interactions permettent de décrire la **masse des quarks, puis celle des hadrons**. Les résultats à T = 0 sont très proches des valeurs expérimentales. Les sections efficaces du modèle explosent vers la température critique (température de Mott dans notre cas), ce qui permet d'expliquer en partie le **problème de l'hadronisation**. Finalement, l'ajout de la boucle de Polyakov pour décrire le **confinement de couleur** permet de combler la dernière lacune majeure du modèle.

Les principaux avantages du modèle sont de :

- décrire aussi bien la phase des quarks que des hadrons, ce qui est impératif pour modéliser la transition de phase,
- donner une bonne estimation des masses des hadrons dans le vide,
- reproduire les effets de l'hadronisation avec des sections efficaces qui explosent près de T_c ,
- inclure l'effet du confinement de couleur via la boucle de Polyakov.

Cependant le modèle a aussi des points faibles qui sont :

- l'absence des gluons comme degré de liberté,
- le fait que le modèle soit effectif (non renormalisable).

Le modèle NJL utilise quarks comme degrés de liberté dans son Lagrangien, ce qui le place plus près de la QCD que n'importe quel autre modèle effectif. Il n'y a pas de gluons dans ce modèle, mais ce n'est pas le plus important en réalité. Dans la description d'un QGP en expansion rapide et en transition de phase (après une collision d'ions lourds), ce sont les quarks qui sont utilisés pour "localiser" la formation des hadrons. Les gluons ne jouent que le rôle de médiateurs de l'interaction (contrairement aux gluons de haute énergie, qui peuvent créer des paires $q\bar{q}$).

Notre but final est de prouver que le modèle NJL suffit pour décrire une transition de phase de manière **dynamique**, sans avoir de confinement par les gluons, mais juste en ayant une brisure de symétrie chirale et une hadronisation à l'approche de la température critique. Cependant, cette approche n'est pas unique. D'autres programmes de simulations utilisent des modèles effectifs afin de reproduire la transition de phase. Nous allons maintenant voir un bref aperçu de ces modèles et de leur fonctionnement.



Hadronisation & transport : approches existantes

« What we observe is not nature itself, but nature exposed to our method of questioning. »

Werner Heisenberg (1901–1976)



FIG. 3.1– Cône de lumière du centre de masse de deux noyaux présentant les différentes étapes d'une collision d'ions lourds.

3.1 Collisions d'ions lourds

OUR présenter les différents modèles de simulation, il est préférable de s'intéresser à la collision d'ions lourds et son déroulement temporel plutôt que de présenter chaque modèle indépendamment. On va donc mettre l'accent sur la description de chaque étape du développement de la collision (FIG. 3.1) : d'un état de noyaux lourds (en **noir**), aux hadrons sortants (en **jaune**) qui sont détectés.

La première étape (en **vert**) qui survient au début de la collision est appelée le **prééquilibre**. Cette étape est décrite le plus souvent avec un modèle de distribution statistique des nucléons dans le noyau pour reproduire la densité de nucléons et le nombre moyen de collisions entre eux : c'est le **modèle de Glauber** [65]. Ce tirage aléatoire d'éléments de manière à reproduire une certaine distribution est appelé la **méthode de Monte-Carlo**.

Définition : Méthodes de Monte-Carlo

Il s'agit de méthodes visant à calculer une valeur numérique en utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des **techniques probabilistes**. Le nom de ces méthodes –qui fait allusion aux jeux de hasard pratiqués à Monte-Carlo– a été inventé en 1947 par Nicholas Metropolis.

Les méthodes de Monte-Carlo sont particulièrement utilisées pour calculer des intégrales en dimensions plus grandes que 1 (en particulier, pour calculer des surfaces et des volumes). Le rôle des **nombres aléatoires** y est crucial de manière à converger vers une solution exacte. L'utilisation des ordinateurs nécessite une grande prudence car les générateurs de nombres aléatoires numériques présentent parfois des récurrences.

On doit ensuite compléter le modèle de Glauber par un code transformant les nucléons à haute densité en un gaz de partons : on peut par exemple utiliser un modèle de cordes [66]. Une autre description de la collision initiale existe. En utilisant la QCD, on décrit les noyaux avec une **saturation de gluons** qui apparaît avant la collision : c'est le modèle de **Condensat de Verre de Couleur** (en anglais : Color Glass Condensate (**CGC**)) [67]. Nous allons présenter et comparer ces deux modèles de conditions initiales dans la section 3.3. Dans les deux cas, un pré-équilibre est supposé être achevé après un temps très court, avec une **thermalisation** des partons dans le milieu.

La deuxième étape (en **rouge**) qui vient après le pré-équilibre est le Plasma de Quarks et de Gluons (en anglais : Quark-Gluon Plasma (**QGP**)). Cette phase est décrite par des propriétés thermodynamique : l'évolution du nombre de particules et de la densité d'énergie, ainsi la viscosité du milieu (c'est-à-dire le taux d'interaction). C'est pourquoi le modèle de transport qui vient naturellement pour cette étape est le **modèle hydrodynamique** [68]. Toutefois, ce modèle est fait pour décrire un système macroscopique (c'est-à-dire avec un grand nombre de particules).

Il n'est pas certain que le modèle hydrodynamique soit applicable à des systèmes dont la taille est de l'ordre du libre parcours moyen. On doit faire attention aux effets microscopiques dont le modèle hydrodynamique ne tient pas compte.



FIG. 3.2– Diagramme de phase de la matière nucléaire.

Ainsi, on s'intéresse également aux **modèles de cascade** [69, 70, 71] qui décrivent les partons plutôt que les cellules d'énergie. Ils ne demandent pas un équilibre local. Cela nous permet de prendre en compte tous les effets : des interactions douces jusqu'aux processus durs. Nous présenterons et comparerons les deux types d'approches dans la section 3.4.

La dernière étape importante (en **orange**) est la description de la **transition de phase** vers un gaz de hadrons. Cette étape est aussi complexe que la transition entre le prééquilibre et la phase QGP. Par conséquent, l'hadronisation doit être traitée avec attention. On peut considérer l'hadronisation comme une simple conversion d'énergie, en utilisant la **formule de Cooper-Frye** [72] ou bien on peut créer des partons un par un comme dans les **modèles de cordes** [73]. Cette transition implique la question de la nature de la transition hadronique. Les calculs de QCD sur réseau nous disent que la transition est un **cross-over** pour les hautes températures et les faibles densités baryoniques [26]. En principe, les partons et les hadrons sont supposés coexister dans le même volume pendant l'hadronisation. Nous allons présenter les approches existantes dans la section 3.5.

Il est aussi important de comprendre le déroulement d'une collision d'un point de vue thermodynamique. Tout comme pour l'eau, avec ses états : solide, liquide, et gazeux, on peut dessiner un **diagramme de phase** de la matière nucléaire (FIG. 3.2). On rappelle sur ce diagramme les différentes **étapes de la collision** précédemment citées, par un code couleur et un chiffre qui indique l'ordre des étapes. Sur ce schéma, les lignes pleines indiquent une transition de 1^{er} ordre.



FIG. 3.3– Le détecteur ALICE dans le LHC au CERN.

3.2 Particules émises : variables & observables

D'UN point de vue expérimental, on ne connait que deux choses des collisions d'ions lourds : l'état des noyaux qui entrent en collision, et les traces que laissent les particules de sortie dans les détecteurs. D'un point de vue théorique, on peut schématiser la collision par un cône de lumière, et y décrire les particules avec leur quadri-position et quadriimpulsion. Nous allons maintenant décrire les variables qui peuvent nous servir de liens entre les deux points de vue, ainsi que les observables que l'on peut construire pour décrire et analyser la collision.

3.2.1 Variables

Commençons par les variables. Pour définir ces variables, on doit commencer par expliquer la structure de détection. On peut décomposer cette structure en différents plans. Sur la FIG. 3.3, on observe un détecteur typique de collisionneur. On reconnaît l'axe du faisceau qui se trouve le long du bras rayé blanc et vert. Pour définir nos variables, on va utiliser l'axe du faisceau défini comme \mathbf{z} , et le plan transverse à cet axe (\mathbf{x}, \mathbf{y}) (FIG. 3.5). On définit le plan (\mathbf{x}, \mathbf{y}) comme le **plan de l'évènement** (en anglais : event plane (\mathbf{EP})) et on définit aussi le plan (\mathbf{z}, \mathbf{x}) le long du faisceau comme le **plan de réaction** (en anglais : reaction plan (\mathbf{RP})).

Le plan de l'évènement est très intéressant d'un point de vue théorique mais il est cependant plus difficile à mesurer expérimentalement. Ce plan permet surtout de distinguer les particules qui participent à la réaction et celles qui restent spectatrices. Le plan de réaction est le plan qui permet de mesurer l'évolution temporelle de la réaction. On peut ainsi avoir une image de la réaction assez semblable à celle de la FIG. 3.1.



FIG. 3.4– Pseudorapidité en fonction de l'angle θ .

Variables du plan de réaction

En regardant de plus près la FIG. 3.1, on peut y voir deux variables : le temps propre τ qui provient de la quadri-position des particules, et la pseudorapidité η qui, elle, provient de la quadri-impulsion. En effet, on peut écrire l'impulsion de chaque particule comme :

$$\mathbf{p} = \sqrt{\mathbf{p}_{\mathrm{T}}^2 + \mathbf{p}_{\mathrm{L}}^2} , \qquad (3.2.1)$$

avec l'impulsion transverse

$$\mathbf{p}_{\mathrm{T}} = \sqrt{\mathbf{p}_{\mathrm{x}}^{2} + \mathbf{p}_{\mathrm{y}}^{2}} , \qquad (3.2.2)$$

et l'impulsion longitudinale

$$\mathbf{p}_{\mathrm{L}} = \mathbf{p}_{\mathrm{z}} \ . \tag{3.2.3}$$

Pendant la collision, certaines particules subissent des diffusions qui peuvent : dévier ces particules ou simplement les ralentir par rapport à l'axe du faisceau (diminution de \mathbf{p}_z). On peut alors définir une variable qui mesure cette **pseudorapidité** η :

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|\mathbf{p}| + \mathbf{p}_{\mathrm{L}}}{|\mathbf{p}| - \mathbf{p}_{\mathrm{L}}} \right) .$$
(3.2.4)

On la qualifie de *pseudo*rapidité car on mesure simplement une déviation à l'axe, on ne tient pas compte de la masse de la particule concernée. On peut réécrire (3.2.4) en tenant compte de l'angle de déviation θ (**angle zénithal**) par rapport à l'axe du faisceau z:

$$\eta = -\ln\left(\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \ . \tag{3.2.5}$$

On peut voir sur la FIG. 3.4 la dépendance de η en θ . Cette variable permet de distinguer les particules du faisceau (non déviées) et les autres qui ont subi une collision. Les particules avec $\eta > 0$ sont dites vers l'avant (**forward**) et celles avec $\eta < 0$ vers l'arrière (**backward**).



FIG. 3.5– Aperçu de la collision dans le plan de l'évènement.

Pour prendre en compte la masse des particules, un autre variable plus pratique pour les expérimentateurs est utilisée, la **rapidité** :

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + \mathbf{p}_{\mathrm{L}}}{E - \mathbf{p}_{\mathrm{L}}} \right) . \tag{3.2.6}$$

avec l'énergie $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ de la particule de masse m.

On note au passage que la notation de la rapidité y n'a rien à voir avec la position **y**. Cette rapidité est préférable pour les expérimentateurs car elle est additive sous une transformation de Lorentz. Les calculs des observables dans le référentiel du détecteur s'en trouvent simplifiés. Nous ne discuterons pas les résultats dépendant de la rapidité, nous nous concentrerons sur les résultats utilisant la pseudorapidité.

Variables du plan de l'évènement

Dans le plan de l'événement, on étudie le **recouvrement** entre les noyaux des deux faisceaux lors des collisions. Une collision peut alors être représentée par la FIG. 3.5. Les deux cercles représentent les noyaux des faisceaux qui se croisent face à face.

Statistiquement, les noyaux ne sont pas exactement au centre du faisceau, ce qui donne une largeur b entre les centres des deux noyaux, appelée **paramètre d'impact**. Le paramètre d'impact permet de donner la **centralité** de la réaction entre deux noyaux (exprimée en pourcentage), qui est liée au recouvrement réel entre les nucléons des noyaux. Les résultats des simulations seront présentées soit avec b soit avec la centralité.

On remarque au passage que le paramètre d'impact n'est pas forcément situé selon l'axe \mathbf{x} , il peut y avoir un angle Ψ entre \mathbf{x} et l'orientation de l'ellipse de recouvrement entre les deux noyaux tel que schématisé sur la FIG. 3.5. Pour des raisons pratiques, les modèles théoriques utilisent parfois cet angle pour le calcul de certaines observables. Dans notre cas, nous nous contenterons de considérer que l'ellipse est parfaitement alignée avec les axes \mathbf{x} et \mathbf{y} . La surface de recouvrement des deux noyaux est la zone où les réactions nucléaires vont se jouer : on peut y déterminer un nombre de nucléons initialement présents, et aussi le nombre de collisions primaires qui vont avoir lieu. Cependant, c'est le **nombre de particules** total ($\#_{part.}$) et le **nombre de collisions** total ($\#_{coll.}$) qui doivent être pris en compte dans les simulations.

Une dernière variable très utile est la différence d'**angle azimutal** $\Delta \phi$ entre deux particules de la zone de recouvrement. En utilisant cet angle, on peut étudier les fluctuations et les corrélations entre les particules dans le milieu en interaction.

3.2.2 Observables

Les expérimentateurs utilisent des détecteurs où règne un champ magnétique intense, afin de distinguer les particules chargées (positivement ou négativement) des particules neutres. Les particules chargées interagissent beaucoup plus par interaction électromagnétique sont détectées avec leur trajectoire courbée par le champ magnétique. Il est donc facile de reconstruire leur masse m et leur énergie E grâce au rayon de courbure et l'énergie déposée dans le détecteur. De là, on peut ensuite remonter à leur impulsion **p**.

Nombre de particules N

On peut tout d'abord présenter l'observable la plus simple : le nombre de particules mesurées N appelé **multiplicité** pour un type de particule donnée. Les spectres en multiplicité sont les premiers à être étudiés afin de valider un modèle de simulation quantitativement. On peut dériver N avec toutes les variables que nous avons définies, mais nous nous intéresserons plus à : ϕ , η , y, \mathbf{p}_{T} . En général, on commence par étudier

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\eta} \,\mathrm{et}\,\,\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}y} \,. \tag{3.2.7}$$

Ces spectres donnent le taux de production de particules pour différentes déviations, et donc, nous renseignent sur les interactions (énergie échangée). Cela ne permet pas de tirer des conclusions sur la dynamique du plasma, mais permet d'avoir une idée sur l'**ordre de grandeur** des sections efficaces mises en jeux dans les collisions pour chaque espèce.

L'équilibre thermique se produit avec le gel des interactions, à l'instant que l'on appelle freeze-out, et au delà duquel le système n'évolue plus. Les particules créées se propagent alors librement jusqu'à une possible détection. La température T_{fo} correspondante à ce freeze-out est donnée par un ajustement des distributions de particules en p_T avec la paramétrisation [74] :

$$\frac{\mathrm{d}^2 N}{\mathrm{d}\mathbf{p}_{\mathrm{T}}^2}\Big|_{y=0} = \frac{1}{2\pi \ \mathbf{p}_{\mathrm{T}}} \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\mathbf{p}_{\mathrm{T}}} \propto \exp\left(-\frac{m_T}{T_{fo}}\right) \ . \tag{3.2.8}$$

où $m_T = \sqrt{m^2 + p_T^2}$ est la masse transverse, et T_{fo} est appelé inverse-slope parameter. L'équilibre chimique est réalisé event l'équilibre thermique à $T_{fo} = 165 \pm 5$ MeV

L'équilibre chimique est réalisé avant l'équilibre thermique à $T_{\chi eq} = 165 \pm 5$ MeV [77] alors que $T_{fo} = 120 \pm 12$ MeV [78]. On distingue donc deux freeze-out : l'un chimique





qui fixe les multiplicités N des particules (arrêt des processus inélastiques), et l'autre thermique, qui fixe la distribution en énergie (arrêt des processus élastiques). Ce spectre de la FIG. 3.6 est intéressant pour distinguer les **proportions relatives de chaque espèce hadronique** (mésons, baryons), et savoir à quel moment les particules sont produites (collision initiale, QGP, phase mélangée, phase hadronique).

On peut également discuter du spectre en ϕ (angle azimutal, FIG. 3.5)

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\phi} , \qquad (3.2.9)$$

mais on présentera celui-ci plus en détail un peu plus loin, car le développement de cette distribution va nous donner de nombreux renseignements sur la **dynamique du plasma**, via des effets de fluctuations, de viscosité, ..., etc.

Pour finir, on peut aussi s'intéresser aux corrélations présentes dans la collision. Pour cela, on utilise des différences telles que $\Delta \phi$ et $\Delta \eta$ entre deux particules. En mesurant

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\Delta\phi} \,, \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\Delta\eta} \,, \tag{3.2.10}$$

et aussi la combinaison

$$\frac{\mathrm{d}^2 N}{\mathrm{d}\Delta\phi\mathrm{d}\Delta\eta} \ . \tag{3.2.11}$$

De nombreuses informations peuvent être extraites. Pour cela, on utilise des particules de grand \mathbf{p}_{T} qui servent de **trigger** (c'est-à-dire de déclencheurs dans le comptage des N particules), et on mesure ensuite $\Delta \phi$ et $\Delta \eta$ entre ces particules et celles de moindre \mathbf{p}_{T} (particules dites **associées**). On peut ainsi observer des structures telles que celles présentées sur la FIG. 3.6. Sur cette figure, on observe un pic central, traversé par un structure suivant $\Delta \eta$. C'est ce que l'on appelle le **ridge** (en français : une crête) [76].



FIG. 3.7– Évolution de la collision dans le plan de réaction (à gauche) et dans le plan de l'évènement (à droite) [79].

Flot v et excentricité ε

Revenons maintenant à la distribution angulaire $dN/d\phi$. Le spectre de particules que l'on obtient contient des informations sur les comportements collectifs dans le plasma. On peut développer cette distribution en série :

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\phi} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} v_n \cos(n\phi) \tag{3.2.12}$$

avec v_n : le flot transverse d'ordre n.

Définition : *Flot transverse*

Le QGP peut, selon sa structure initiale, avoir une expansion ayant une direction préférentielle. Selon le mode d'expansion, on distingue :

• le flot direct

$$v_1 = \left\langle \frac{\mathbf{p}_x}{\mathbf{p}_T} \right\rangle,$$
 (3.2.13)

• le flot elliptique

$$v_2 = \left\langle \left(\frac{\mathbf{p}_{\mathrm{x}}}{\mathbf{p}_{\mathrm{T}}}\right)^2 - \left(\frac{\mathbf{p}_{\mathrm{y}}}{\mathbf{p}_{\mathrm{T}}}\right)^2 \right\rangle, \qquad (3.2.14)$$

• le flot triangulaire v_3, \ldots

1

On voit schématiquement sur la FIG. 3.7 que selon la réaction, le flot se développe plus ou moins, et plus ou moins vite dans le temps. Cela dépend des conditions initiales, du type de réactions qui entrent en jeu, de l'énergie de la collision, etc. Auparavant, on considérait que les flots d'ordre n impairs étaient négligeables pour des raisons de symétrie (symétrie miroir entre les deux noyaux qui collisionnent).

Nous ne présenterons que le flot elliptique v_2 , car c'est le flot prépondérant dans les collisions les plus périphériques (par symétrie miroir). On prêtera attention à la formation du v_2 en fonction du temps t, mais aussi en fonction des variables habituelles η , y, \mathbf{p}_{T} .

Ce flot elliptique v_2 est mesuré dans l'état final du système, cependant il est relié aux conditions initiales de la collision d'ion lourds. On verra plus loin dans le chapitre que c'est une **réponse à la géométrie initiale** du plasma [80, 81]. Cette géométrie peut être décrite par différentes quantités dont l'une d'entre elles est l'**excentricité initiale** du plasma ε :

$$\varepsilon = \frac{\langle \mathbf{y}^2 - \mathbf{x}^2 \rangle}{\langle \mathbf{y}^2 + \mathbf{x}^2 \rangle} . \tag{3.2.15}$$

Cette excentricité est reliée au paramètre d'impact b mais cependant elle dépend fortement de la distribution initiale des particules dans le système. Si on a de grandes fluctuations, l'excentricité ne sera pas linéairement proportionnelle à b. Dans l'hypothèse où le plasma formé est exactement une ellipse –dont la taille est proportionnelle à b– on peut montrer (voir l'annexe F pour le calcul détaillé) que :

$$\varepsilon = \frac{b}{R_1 + R_2}$$
 avec $0 < b < R_1 + R_2$ (3.2.16)

où R_1 et R_2 sont les rayons de chaque noyau.

Nous allons beaucoup discuter de l'excentricité initiale ε et du flot elliptique v_2 ainsi formé en fonction du paramètre d'impact b (ou du nombre de participants) lors de l'étude des conditions initiales. Les résultats de multiplicités seront présentés pour décrire le système final, après l'hadronisation.

3.3 Conditions initiales

N considère, dans tous les modèles de simulations, qu'un **équilibre thermique local** est atteint à la fin de la phase de pré-équilibre. La question qui se pose dans ce cas est : comment arrive-t-on à un système thermalisé? On peut, sans trop de problèmes, supposer un équilibre local pour un petit volume, mais le fait d'avoir un système qui est supposé à l'équilibre, change les distributions en multiplicité, en corrélations, en flot, etc. Nous allons maintenant présenter deux modèles de conditions initiales, et les résultats qu'ils donnent comparés à l'expérience.



FIG. 3.8– Modèle de Glauber pour une collision Pb-Pb [82].

3.3.1 Modèles théoriques

Modèle de Glauber avec cordes de partons

Le modèle de Glauber est le tout premier modèle jamais créé afin de décrire les conditions initiales des collisions d'ions lourds. Ce modèle est utilisé pour décrire la collision de manière **géométrique**, et en extraire des quantités telles que le nombre de nucléons participants ou le nombre de collisions entre nucléons, par rapport au paramètre d'impact b entre les noyaux. Nous allons nous efforcer de donner un bref aperçu du modèle de Glauber au travers de cette partie, mais pour une revue très complète et détaillée, nous invitons le lecteur à voir la revue [65] pour la description à haute énergie et les résultats de RHIC, ou bien la revue [83] qui décrit plutôt les résultats de basse énergie avec effet coulombien.

Le modèle de Glauber se déroule en deux étapes :

- tout d'abord, les nucléons sont placés à des **positions aléatoires** suivant une certaine **fonction de distribution** de densité de nucléons,
- ensuite, on calcule le **nombre de collisions entre nucléons** avec les sections efficaces données afin de distinguer les particules spectatrices et celles qui forment la **zone de recouvrement** (en tenant compte de différents effets tel que le **blocage de Pauli**).

Regardons de plus près la première étape. La FIG. 3.8 montre assez bien l'image géométrique que l'on peut générer en suivant une certaine distribution. La distribution de densité de nucléons qui est souvent utilisée dans les codes de simulations est une **distribution de Wood-Saxon** :

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 \, \frac{1 + \omega \, (\mathbf{r}/R)^2}{1 + \exp\left(\frac{\mathbf{r}-R}{a}\right)} \,. \tag{3.3.1}$$

Dans le cas d'une collision Plomb-Plomb (Pb-Pb), les paramètres utilisés sont : R = 6.62 fm, a = 0.546 fm et $\omega = 0.0$ fm [65]. Cette distribution est bien sûr en 3 dimensions, puisqu'au final c'est le nombre de collisions géométriques entre nucléons qui nous intéresse pour reproduire les spectres de données expérimentales.



FIG. 3.9– Modèle de Glauber pour une collision Au-Au [65] à $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV avec un paramètre d'impact b = 6 fm, dans le plan de l'évènement (à gauche) et dans le plan de réaction (à droite).

On en vient donc à la deuxième étape : le nombre de collisions prévu par le modèle. Pour prédire ce nombre de collisions, on a besoin avant tout d'un ingrédient : les **sections efficaces inélastiques** σ_{NN} entre nucléons (*p-p*, *p-n*, *n-n*). De là, on peut choisir deux façons de procéder :

• soit on utilise les sections efficaces d'une manière géométrique, pour donner aux nucléons un certain rayon d:

$$d = \sqrt{\frac{\sigma_{NN}}{\pi}} , \qquad (3.3.2)$$

puis on procède à un tirage aléatoire par ordinateur en respectant la distribution (3.3.1), ce qui est plus communément appelé tirage **Monte-Carlo** (ou juste Monte-Carlo) (FIG. 3.9),

 soit on préfère le calcul analytique en utilisant l'approximation de la limite optique (qui se base sur le théorème optique) pour finalement avoir le nombre total de collisions via le nombre total de nucléons, pondéré par une fonction de probabilité dépendant du paramètre d'impact b.

Dans tous les cas, on considère que les nucléons traversent le milieu, suivant une ligne droite le long de l'axe du faisceau (approximation eikonale), de manière à distinguer les nucléons participants ou spectateurs (sur la FIG. 3.9, les nucléons spectateurs sont plus clairs).

Au final, les deux méthodes de calcul sont très similaires au niveau des résultats, comme on peut le voir sur la FIG. 3.10. Notre préférence ira bien évidemment à la méthode Monte-Carlo puisqu'on souhaite utiliser une dynamique de la collision. On devra bien entendu prendre en compte l'écrasement des noyaux dans le plan de réaction, à cause du **boost de Lorentz**, dans le cas de simulation en 3 dimensions (contrairement à ce qui est montré sur la figure FIG. 3.9).


FIG. 3.10– Comparaison des résultats entre l'approximation de la limite optique et le Monte-Carlo : (à gauche) section efficace totale, avec des paramètres nucléaires identiques pour les deux méthodes, en fonction de la section efficace inélastique σ_{NN} choisie, (à droite) nombre de collisions $N_{\text{coll.}}$ et nombre de participants $N_{\text{part.}}$ en fonction du paramètre d'impact [65].

Comment passe-t-on d'un nombre de participants et d'un nombre de collisions à une distribution de partons thermalisés? Le modèle de Glauber décrit la première phase des conditions initiales : l'état des noyaux, et la géométrie de la collision. Ensuite, pour décrire la phase de partons thermalisés, on utilise des **modèles de cordes**. L'idée des modèles de cordes est de construire des cordes entre chaque nucléon ou chaque quark des nucléons qui collisionnent, et ensuite de fragmenter ces cordes en partons. Ces cordes modélisent l'interaction forte entre les nucléons, et représentent alors la distribution de l'énergie.

Il existe différents modèles très connus tels que PHSD [84], UrQMD [85] et EPOS [66] qui obtiennent d'excellents résultats en utilisant néanmoins des formalismes de cordes différents : on peut convertir les cordes en densité d'énergie ou en partons tirés aléatoirement. La distinction entre la phase plasma et la phase hadronique se fait juste en calculant la **densité d'énergie locale**. Les collisions de basse énergie ou de basse densité donneront juste des cordes qui se fragmentent en **gaz de hadrons** tandis que celles où l'énergie est suffisante pourront être décomposées plus précisément en **partons déconfinés**.

La thermalisation des partons ainsi formés est effectuée par différents moyens : on peut simplement calculer numériquement le **tenseur énergie-impulsion** $T^{\mu\nu}$ et le diagonaliser en changeant les impulsions des partons *a posteriori* pour homogénéiser la pression dans le plasma, ou bien on peut faire tourner le code de simulation en tenant compte uniquement des collisions, sans propager les particules (au bout d'un certain temps, le système tend vers un équilibre).



FIG. 3.11– Fraction de l'impulsion des partons en fonction de la fraction x d'énergie du nucléon [86].

Modèle de condensat de verre de couleur

Le deuxième modèle très en vogue à l'heure actuelle est le modèle du condensat de verre de couleur (**Color Glass Condensate** (CGC) en anglais) [86, 87]. Ce modèle possède la particularité d'utiliser directement la QCD afin de décrire les partons présents dans les nucléons plutôt que d'avoir une approche géométrique **avant la collision**. L'inconvénient est donc qu'il est plus complexe à mettre en place, mais son avantage majeur est sa description très précise des partons dans le nucléon. De plus, ce modèle prend aussi en compte les interactions entre les nucléons, et donc la population des gluons entre les nucléons. On a ainsi une image fidèle de la structure nucléaire lors de la collision entre noyaux. Cette section sur le CGC s'inspire de la revue [67] que j'invite à consulter pour de plus amples détails.

En se basant sur les diffusions profondément inélastiques, la QCD nous donne les fonctions de distribution des partons (**Parton Distribution Functions** (PDF) en anglais) suivant la fraction x d'énergie du nucléon portée par le parton qui le constitue FIG. 3.11. Si on considère une interaction avec un nucléon à faible énergie (c'est-à-dire à faible vitesse), on a [88] :



où la zone en bleu indique une interaction où l'on sonde le nucléon quasiment dans son ensemble. Ensuite, on peut imaginer le même nucléon, mais à haute énergie :





FIG. 3.12– Fraction x en fonction de l'énergie de l'interaction Q^2 [86]. On peut voir une saturation des gluons pour les petits x.

On sonde ici avec une plus grande **résolution**. Avec une plus grande énergie, on sonde les partons avec une petite fraction x, car la longueur d'onde de la particule incidente est très petite ($\lambda \ll \hbar c/E_N$). C'est une sorte de **cliché instantané** du nucléon.

Si on regarde la FIG. 3.11, on voit que la distribution pour de petits x est dominée par les gluons. Si on interagit avec un noyau atomique se propageant à haute vitesse, on verra donc des nucléons constitués de multiples gluons de basse énergie plutôt que des quarks de grande énergie.

Finalement, l'état initial des noyaux avant la collision sera **saturé en gluons**. La FIG. 3.12 montre ce phénomène de saturation (en haut). Comme les nucléons sont relativistes (très grande vitesse), les gluons apparaissent comme figés, comme les particules de silice dans le verre ordinaire. C'est pour cette raison qu'on appelle ce modèle : le condensat de verre de couleur (la couleur étant la charge portée par les gluons, et le terme condensat vient de la saturation).

Le calcul des conditions initiales se fait en pratique par trois étapes :

- tout d'abord par un Monte-Carlo identique à Glauber, pour la distribution initiale des nucléons,
- ensuite les choses se compliquent : on utilise un maillage dans le plan de l'événement (transverse) et on assigne à chaque élément de surface un x_0 initial suffisamment petit pour qu'à la surface d'un nucléon (donnée par la section efficace σ_{NN}) corresponde un x de 1 (de cette manière on distribue artificiellement les fractions d'énergie dans les noyaux),
- finalement la production réelle de gluons se fait au travers de la $k_{\rm T}$ -factorisation [67], où $k_{\rm T}$ n'est rien d'autre que l'impulsion transverse $\mathbf{p}_{\rm T}$ des gluons.



FIG. 3.13– Schéma des tubes de flux de couleur qui sont appelés : le Glasma [89].

Le formalisme le plus utilisé est celui de Kharzeev, Levin et Nardi (KLN) [67]. Sans entrer dans les détails, ce formalisme permet de décrire la saturation en gluons où l'on observe des **recouvrements entre les différents gluons**, ce qui donnent à la distribution des termes non linéaires. Dans le modèle du CGC, on n'utilise pas le nombre de participants ou le nombre de collisions, on utilise juste le paramètre d'impact, et via la formule de factorisation et le Monte-Carlo, on estime le nombre de gluons crées par saturation au niveau de la zone de recouvrement.

Contrairement au modèle de Glauber : ici on a déjà les gluons avant la collision. Comme les gluons sont les vecteurs de l'interaction forte, on sait qu'une fois que les noyaux se percuteront, les nucléons participants vont rester liés par interaction forte via ces gluons. Tout comme le modèle de Glauber est accompagné par les modèle de cordes, le CGC est accompagné du **glasma** (FIG. 3.13). C'est un modèle où l'on utilise la formation de tubes de flux chromo-électriques et chromo-magnétiques entre les nucléons participants. C'est dans cette étape que l'on peut (ou non) obtenir un pré-équilibre.

Cette phase de l'évolution du système permet de distribuer la densité d'énergie de chaque cellule et les impulsions transverses qui y correspondent. Le principal avantage est donc au final que l'on peut aisément coupler ce modèle avec un **modèle de transport hydrodynamique** (nous reviendrons à ce modèle dans la section sur les modèles de transport) à un temps τ de l'évolution où le système est supposé avoir atteint l'**équilibre thermique**. Le principal défaut est que les quarks sont effacés de la dynamique. On sait qu'à haute température, il y a beaucoup plus de gluons que de quarks (en suivant les lois de distribution statistiques de Bose-Einstein pour les gluons et Fermi-Dirac pour les quarks).

Pour le modèle de Glauber comme pour le CGC (chacun complété par son modèle de pré-équilibre respectif), on obtient un système à l'équilibre local à un instant t donné ($t_0 = 0$ étant l'instant de la collision entre les noyaux). Le CGC sature l'espace en gluons, qui interagissent ensuite ensemble dans le glasma. Les conditions initiales provenant du CGC sont donc globalement moins inhomogènes en densité que celles du modèle de Glauber.



FIG. 3.14– Une illustration (pas de vrais résultats) de la multiplicité des particules chargées N_{ch} avec des quantités calculées avec le modèle de Glauber (b, N_{part}) [65].

3.3.2 Comparaison

Afin de comparer les modèles de Glauber et du CGC, nous souhaitons discuter de trois choses. Tout d'abord, les deux modèles utilisent la **distribution spatiale initiale des nucléons** dans le noyau via un tirage Monte-Carlo. Ensuite, chaque modèle dispose de son propre modèle associé pour décrire les partons à l'état de pré-équilibre (cordes ou glasma), ce qui donne donc différentes fluctuations initiales, et donc **différentes excentricités**. Finalement, cette excentricité donne une certaine pression à l'intérieur de la zone de recouvrement et fait apparaître, dans les données finales, un **flot elliptique** différent de zéro.

Le Monte-Carlo qui est utilisé pour distribuer les nucléons dans les noyaux est le même dans les deux modèles. Sur la FIG. 3.14 on représente schématiquement les résultats de multiplicité et de nombre de participants pour le modèle de Glauber.

On note la **dépendance non linéaire** entre le paramètre d'impact et le nombre de participants. Cela provient de la distribution que l'on utilise, qui est de type Wood-Saxon. La densité est donc plutôt constante au centre des noyaux puis décroit assez rapidement sur les bords. On note aussi la définition de la **centralité de la réaction**. Elle est ici schématisée par de petits dessins de plan transverse (plan de l'événement). Ce recouvrement est considéré d'un point de vue de **section efficace totale**. Par exemple, pour des évènements dont le paramètre d'impact *b* est compris entre 0 et 3 fm, on a alors une centralité de 0-5% (c'est-à-dire un recouvrement moyen des nucléons d'un point de vue géométrique de 95-100%).



FIG. 3.15– Excentricité de l'état initial pour une collision Pb-Pb à $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV provenant de Glauber et du CGC en fonction du paramètre d'impact b [90].

Si l'on suppose que le nombre de particules chargées est approximativement la moitié du nombre total de particules, alors on voit sur la FIG. 3.14 que pour une collision centrale (environ 350 nucléons), on a approximativement 1500 particules chargées détectées (pour $|\eta| < 1$) et donc 3000 particules en tout. Chaque collision d'ions lourds implique donc des **milliers de particules** au bas mot. Même si les ordinateurs actuels sont de plus en plus puissants, n'importe quelle condition initiale sera très coûteuse en temps de calcul. Nous rediscuterons de ces problèmes dans le chapitre 5.

Dans la FIG. 3.15, on remarque que les **fluctuations de densité** que nous avions évoquées dans la distribution initiale montrent ici leur effet. Au lieu d'avoir une ellipse de recouvrement homogène en densité, qui donne un résultat parfaitement linéaire (3.2.16), on observe ici un léger décalage pour toutes les valeurs de *b* avec une chute brutale pour les collisions ultrapériphériques (b > 12 fm environ) où les fluctuations sont maximales.

Le modèle de Glauber montre de **grandes fluctuations** sur le bord du noyau car le nombre de nucléons devient relativement faible, et la "couronne" n'est pas homogène. Il s'en suit une excentricité en fonction de b un peu plus faible, voire même beaucoup plus faible pour des collisions très périphériques. Le modèle du CGC, quant à lui, utilise la **saturation de l'espace en gluons** ce qui donne un meilleur recouvrement géométrique, et donc, une excentricité très proche du cas linéaire (3.2.16). Les fluctuations sont plus petites pour le cas du CGC, ce qui donne une chute moins brutale que pour le modèle de Glauber pour des collisions ultrapériphériques.

Cette excentricité spatiale initiale provoque la création d'un flot elliptique final. En regardant la FIG. 3.16, on voit qu'il y a différents résultats pour différentes viscosités/entropies (η/s) . Attention ici η n'est pas la pseudorapidité, mais la **viscosité de cisaillement**, qui est la mesure de l'interaction entre les particules du plasma. Cette viscosité est globalement proportionnelle à l'inverse de la section efficace élastique moyenne. s est l'entropie, qui est la mesure du désordre ou de la complexité (cela peut aussi se traduire par l'augmentation du nombre de particules).



FIG. 3.16– Flot elliptique v_2 en fonction de N_{part} pour le modèle de Glauber (à gauche) et pour le CGC (à droite) pour différents η/s [91].

C'est la viscosité de cisaillement η qui permet de **transformer l'ex**centricité en flot elliptique v_2 car si les particules n'interagissent pas, l'expansion du plasma ne change pas sa forme. Si les particules interagissent beaucoup, alors la pression sur les flancs de l'ellipse la transforme en faisant apparaître un flot elliptique.

On observe donc un v_2 dans les deux modèles, mais avec une différence cruciale : ils reproduisent très bien les données, mais pour un η/s qui passe du simple (0.08 pour Glauber) au double pour le CGC! Cela traduit un problème très important dans la phénoménologie des conditions initiales : cela nous amène à **remettre en cause** le fait que le plasma soit **thermalisé**. En effet, la pression qui apparaît dans la zone de recouvrement en forme d'ellipse ne s'explique que par les interactions entre partons. On a donc besoin de viscosité, mais on a aussi besoin de savoir **combien de temps** le plasma met pour se thermaliser.

L'approximation d'un **QGP en équilibre initial** est discutable même si l'on a beaucoup d'interactions, car le temps de formation du QGP est très rapide (environ 1 fm/c). La présentation [92] explique que si le plasma est créé dans une collision très énergétique, les quarks et les gluons sont dans un état libre de haute température. Dans ce cas, le QGP, qui reste **faiblement couplé**, se présente comme un gaz. Dans cet **équilibre instable**, le plasma ne se **thermalise pas aussi vite** que pour un plasma fortement couplé (comme au RHIC par exemple). On obtient donc un flot elliptique qui se forme en même temps que le plasma subit une expansion et hadronise. Le **flot elliptique final est plus petit** que ce qui est attendu pour un plasma à l'équilibre initial (où $v_2 = 0$).

La compréhension de la **dynamique de l'expansion** va être un élément clé pour vérifier la transformation de l'excentricité en un flot transverse. Cela peut permettre de voir l'évolution de la formation du flot, et son intensité, ainsi que l'influence des différents phénomènes (collisions élastiques et inélastiques, désintégrations, ...) sur le résultat final.

3.4 Modèles de transport

UAND on doit simuler un système dynamique, on peut utiliser 3 approches : macroscopique, mésoscopique ou microscopique. L'approche macroscopique est décrite par une équation d'état : c'est le cœur même des modèles hydrodynamiques. Pour l'approche microscopique on peut utiliser la dynamique moléculaire qui donne un aperçu réaliste du système en utilisant des équations de mouvement pour chaque particule.

Mais pour le cas intermédiaire –l'approche mésoscopique– il n'y a pas vraiment de modèle complet faisant le lien entre le microscopique et le macroscopique. Afin d'expliquer les modèles théoriques et leurs applications, il faut discuter de leur **applicabilité** en accord avec l'échelle du système et l'ensemble statistique qui s'y rapporte.

On peut dresser un petit tableau qui résume les échelles avec leurs ensembles statistiques, les variables utilisées et les **fonctions de partition** associées (ce sont les fonctions qui décrivent les états d'énergie du système).

Échelle :	Macroscopique	Mésoscopique	Microscopique
Ensemble :	Grand Canonique	Canonique	Microcanonique
Variables :	(T, μ, V)	(T, N, V)	(U, N, V)
Fonctions de partition :	$\Xi = \sum \exp\left(-\frac{E-\mu}{T}\right)$	$Z = \sum \exp\left(-\frac{E}{T}\right)$	Ω (nbre d'états)

Grâce à ce tableau, on peut voir précisément quel type de système on considère et quelles sont les variables associées. Par exemple, si on considère un système microscopique, cela n'a aucun sens de définir une température. Inversement, un système macroscopique implique que le nombre de particules est suffisamment grand pour être valide.

3.4.1 Modèles théoriques

Le modèle hydrodynamique

Afin de décrire un système de manière dynamique, nous avons besoin d'équations d'évolution des quantités physiques dans le temps. Comme nous l'avons vu au début, on peut dessiner un diagramme de phase de la matière nucléaire. Ce diagramme montre la thermodynamique du système. De cette manière, on peut comprendre comment le système change d'un état vers un autre. Cependant ce diagramme décrit l'état d'un système en équilibre à un point donné.

C'est dans les années 1950 que les premiers modèles hydrodynamiques sont apparus. A l'époque, on s'intéressait surtout aux transferts thermiques dans un milieu, c'est-à-dire aux **systèmes hors-équilibre**. Plus tard dans les années 1990 (RHIC), on s'est intéressé aux simulations du QGP avec des modèles hydrodynamiques sur ordinateur. Les limitations techniques (informatiques) de l'époque rendaient toute approche brute (description microscopique du QGP) totalement impossible.



FIG. 3.17– Modélisations d'une collision Au-Au à $\sqrt{s_{NN}} = 200 \text{ GeV} [75].$

L'hydrodynamique s'applique à un système que l'on subdivise en **cellules d'énergie**. En dérivant les lois de la thermodynamique, on peut obtenir des équations d'**évolution temporelle** des quantités telles que : la densité d'énergie $\epsilon(\mathbf{x})$, la densité de charge $n(\mathbf{x})$, la pression $\mathcal{P}(\mathbf{x})$, et le flot $u^{\mu}(\mathbf{x})$ **pour chaque cellule** du système. Ce modèle ne décrit donc pas les degrés de liberté partoniques.

Le modèle hydrodynamique est donc un modèle macroscopique qui utilise l'ensemble **grand canonique** avec les variables (T, μ, V) , et il s'applique dans des conditions bien définies :

- le système doit être très dense $(N/V \to \infty)$,
- le gradient de température dans le système étudié doit être le plus faible possible,
- le parcours moyen des particules doit tendre vers 0 (viscosité très grande dans le milieu).

Nous avons vu dans le chapitre 1 que le plasma devient **fortement couplé** à $T \simeq T_c$ et dans ce cas on a plus affaire à un liquide qu'à un gaz. Le système possède donc une **viscosité très grande**. Dans ce cas, le modèle hydrodynamique classique (appelé aussi idéal) est très adapté. Dans le cas contraire, le modèle hydrodynamique a évolué pour donner le **modèle hydrodynamique visqueux** (viscosité fini).

Avant de présenter les bases du modèle, nous tenons à citer quelques excellents articles [68, 75, 93] et présentations [94, 95], si le lecteur souhaite d'avantage de précisions sur les calculs ou l'implémentation d'un code hydrodynamique.

En pratique, le modèle hydrodynamique s'applique dans un système que l'on divise en petites **cellules de fluide**. Ensuite on fait évoluer ces cellules en utilisant leur vitesse \mathbf{u} , qui fait partie de la **quadri-vitesse** u^{μ} . Le fluide est décrit par une **fonction de distribution thermique** des particules $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$:

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{g}{(2\pi)^3} \exp\left(-\frac{p^{\nu} u_{\nu}(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x})}{T(\mathbf{x})}\right) , \qquad (3.4.1)$$

avec la température locale de la cellule d'énergie $T(\mathbf{x})$, et la quadri-vitesse du fluide dans

cette cellule $u_{\nu}(\mathbf{x})$. Dans le cas d'un plasma visqueux, cette distribution est perturbée, et on l'exprime donc par :

$$f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = f_{eq}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \delta f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$
(3.4.2)

avec la fonction à l'équilibre f_{eq} et sa (petite) déviation de l'équilibre δf .

Les principaux ingrédients du modèle hydrodynamique visqueux relativiste sont : des équations de conservation, et des principes physiques. Il y a **14 équations de conservation** dans le cas visqueux, qui sont exprimées sous leur forme covariante de la manière suivante : (1) la concervation de la **charge net** (c'est à dire hermonique átran acté

(1) la conservation de la charge net (c'est-à-dire baryonique, étrangeté, ...) :

$$\partial_{\mu}N^{\mu} = 0 , \qquad (3.4.3)$$

avec la densité de charge n

$$N^{\mu} = \int \frac{p^{\mu}}{E} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \frac{\mathrm{d}^{3} p}{(2\pi)^{3} (\hbar c)^{3}}$$

= $n \ u^{\mu}$. (3.4.4)

(4) la conservation du tenseur énergie-impulsion

$$\partial_{\nu}T^{\mu\nu} = 0 , \qquad (3.4.5)$$

avec le tenseur énergie-impulsion visqueux

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{\text{ideal}} + \Pi^{\mu\nu} \tag{3.4.6}$$

où le tenseur idéal (sans viscosité, inclus dans $\Pi^{\mu\nu})$ est

$$T_{\text{ideal}}^{\mu\nu} = \int \frac{p^{\mu}p^{\nu}}{E} f(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \frac{\mathrm{d}^{3}p}{(2\pi)^{3}(\hbar c)^{3}}$$
$$= (\epsilon + \mathcal{P})u^{\mu}u^{\nu} - \mathcal{P}g^{\mu\nu} . \qquad (3.4.7)$$

avec la pression
$$\mathcal{P}$$
 et la densité d'énergie ϵ ,

(9) la conservation de la loi d'équilibre des flux

$$\partial_{\lambda} F^{\mu\nu\lambda} = P^{\mu\nu} \tag{3.4.8}$$

où $F^{\mu\nu\lambda}$ est le tenseur des flux, complètement symétrique, et $P^{\mu\nu}$ est la densité de production de particules.

On note que la dernière équation se rapportant aux flux n'est présente que dans le cas visqueux. Elle doit être traitée avec une grande attention, car une mauvaise utilisation de celle-ci peut conduire à des instabilités (turbulences) dans le plasma, voire à des interactions non causales [96]. La dernière équation nécessaire pour compléter les précédentes est également la plus importante, puisqu'elle décrit la physique du système : il s'agit de l'équation d'état (en anglais : Equation of State (EoS)).

Définition : *Équation d'état*

Une équation d'état décrit un système à l'**équilibre thermodynamique**. C'est une relation entre différents paramètres physiques (appelés variables d'état) qui déterminent l'état du système. Dans le cas du modèle hydrodynamique, on la définit comme :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(\epsilon, T, \mu) . \tag{3.4.9}$$

Il existe de différentes sortes [68], certaines sont de type **dure** (hard EoS), d'autres de type **molle** (soft EoS).

En plus de ces équations de conservation et de l'équation d'état, on doit respecter certains principes physiques :

- le **principe de relativité restreinte** (invariance des équations), ce qui est toujours le cas avec l'écriture covariante,
- le principe entropique (seconde loi de la thermodynamique), qui est :

$$\partial_{\mu}S^{\mu} \ge 0 \tag{3.4.10}$$

c'est-à-dire que le courant d'entropie ne peut pas diminuer, ce qui provient de la première loi de la thermodynamique (conservation de l'énergie)

$$Ts + n\mu = \epsilon + \mathcal{P} , \qquad (3.4.11)$$

couplée à l'équation (3.4.7),

• le **principe d'hyperbolicité**, qui assure que le problème de Cauchy (conditions limites de continuité entre les différentes cellules) soit respecté, et qu'au final les équations soit hyperboliques (la vitesse des cellules ne peut pas dépasser la vitesse de la lumière, et le système est donc causal).

Finalement, le modèle hydrodynamique visqueux est très utilisé dans les programmes de simulations actuels. On retrouve différentes implémentations très récentes de ce modèle en 3 + 1D (spatial + temps) (FIG. 3.17) : par exemple pour les programmes UrQMD [85], et EPOS [97].

Les **termes visqueux** qui sont introduits dans les équations de conservation et dans la fonction de distribution des particules ne sont pas détaillés ici, mais on peut en distinguer deux :

- la viscosité d'élongation ζ (**bulk viscosity**), où le volume change mais la forme reste constante,
- la viscosité de cisaillement η (shear viscosity), où la forme change mais le volume reste constant.

Cette viscosité est souvent incluse comme une **valeur moyenne de l'interaction** présente dans le fluide. En réalité, il faudrait inclure de fortes fluctuations de densité ainsi que de viscosité [98, 96].



FIG. 3.18– Simulation de collision Au-Au centrale de BAMPS à $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV.

Codes de cascade

A l'opposé du modèle hydrodynamique se trouvent les **modèles microscopiques de cascade**. Ces modèles sont appelés ainsi en raison de la hiérarchie présente entre les collisions de chaque particule (une succession de collisions s'appelle une cascade). Contrairement à l'hydrodynamique, le libre parcours moyen des particules n'est pas nul. On a donc une viscosité qui est forcément différente de zéro.

L'avantage de **décrire les particules** elles-mêmes, au lieu d'avoir des cellules d'énergie, est que l'on peut **tenir compte des nombreuses fluctuations** présentes dans le système ainsi que de différentes sortes de particules. Le modèle hydrodynamique traite les collisions une par une [93] (**Event-by-Event**) pour éviter de gommer les fluctuations initiales. Cependant, il est limité à des perturbations légères, c'est-à-dire qui ne font pas apparaître de gradients de température trop élevée.

On ne pourra donc pas, par exemple, introduire de **jets** (particules de très grand $\mathbf{p}_{\rm T}$ qui forment une gerbe de particules hors du plasma) dans le plasma hydrodynamique. Les jets proviennent de **processus durs** de QCD et sont créés initialement au début de la collision. Il y a en général deux jets créés face-à-face. Ils peuvent être absorbés par le plasma, mais le cas limite où l'un des jets sort directement et l'autre est absorbé est le plus intéressant : il nous renseigne beaucoup sur la dynamique du plasma via l'étude des corrélations angulaires. On dit que les jets sont une **sonde du QGP**.

Une autre sonde très intéressante du QGP est l'étude des quarkonia [99] (état lié de quarks lourds c/\bar{c} , b/\bar{b}). Ces quarks étant lourds, ils sont moins influencés par les fluctuations de pression \mathcal{P} dans le plasma, et ils sont également **facilement détectés**. Leur dissociation et/ou recombinaison avec les partons légers du milieu donne aussi beaucoup d'indication quant aux coefficients cinématiques du plasma (pertes d'énergie).

On voit qu'entre les particules très massives et celles de grand \mathbf{p}_{T} , la description des degrés de liberté partoniques s'avère obligatoire. Afin de décrire l'évolution du système de partons, on a besoin de deux choses, que nous avons déjà décrites dans le chapitre précédent, qui sont :

- une fonction de distribution d'espace des phases $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$,
- et des équations de mouvement $d\mathbf{q}/d\tau$ et $d\mathbf{p}/d\tau$.

Il existe une multitude de fonctions de distribution des particules f dans la littérature, on ne souhaite pas s'attarder à les présenter car elles sont souvent propres au système étudié. En revanche, on souhaite présenter les équations d'évolution temporelle plus communément appelées **équations de mouvement**. L'équation la plus simple que l'on peut définir est surement l'équation de Vlasov :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\mathbf{F}}{m}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 , \qquad (3.4.12)$$

avec la vitesse \mathbf{u} et l'accélération $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$, qui est une solution particulière de l'équation de Liouville (4.1.1). On peut la réécrire avec un terme de collision $\mathcal{C}[f]$ qui est une fonction de f dont la forme exacte dépend des interactions entre particules. Finalement l'équation de Boltzmann relativiste s'écrit :

$$p^{\mu}\partial_{\mu}f = -\mathcal{C}[f] . \qquad (3.4.13)$$

Un modèle utilise ce formalisme pour décrire un plasma constitué de partons : le modèle **BAMPS** (Boltzmann Approach of Multi-Parton Scatterings) [100]. Comme son nom l'indique, ce modèle décrit la dynamique des partons en utilisant l'équation de Boltzmann et les collisions (FIG. 3.18). Ce modèle utilise des partons **on-shell**, ce qui veut dire qu'ils sont stables et leur masse est réelle. D'un point de vue plus théorique, cela veut dire que leur fonction spectrale est un pic de Dirac centré sur la masse (on dit qu'ils sont *sur la couche de masse*).

Ce n'est pas le seul type de modèle qui existe. Un autre modèle très intéressant décrit les quarks et les gluons du plasma, ainsi que les hadrons, de manière **off-shell** (c'està-dire que leur fonction spectrale a une largeur, et on a des taux de transition entre espèces). Il s'agit du modèle **PHSD** (**P**arton-**H**adron **S**tring **D**ynamics) [71]. L'équation de Boltzmann ne peut s'appliquer que sur une fonction de distribution pour des particules on-shell. PHSD se base donc sur une version quantique d'équation d'évolution : l'équation de **Kadanoff-Baym**. Pour une revue très complète sur le sujet, on peut se référer à [101]. La dynamique de PHSD utilise les fonctions spectrales des quarks et des gluons, via un modèle dit **DQPM** (**D**ynamical **Q**uasi-**P**article **M**odel).

3.4.2 Comparaison

La comparaison de modèles de transport n'est pas une chose facile car la manière dont ces modèles considèrent le système et la manière dont ils propagent l'information sont parfois très différentes. Nos comparaisons seront donc surtout **qualitatives** plutôt que quantitatives, c'est de la phénoménologie dont on va surtout discuter.

Nous commencerons par l'observable la plus simple pour comparer les modèles hydrodynamiques et de cascade : le spectre en $dN/d\mathbf{p}_T$ (FIG. 3.19). On peut y voir certaines différences. Tout d'abord, pour le modèle hydrodynamique, les données sont bien reproduites, les courbures des différentes espèces sont bien reproduites (correspondant aux différentes **températures de freeze-out**).

Le modèle PHSD reproduit également très bien (qualitativement) l'allure des distributions. Le nombre élevé de pions pour les bas \mathbf{p}_{T} vient ici du fait que l'on a les résultats sans **coupure sur la rapidité** y, contrairement aux résultats présentés pour le modèle hydrodynamique et l'expérience.



FIG. 3.19– Comparaison qualitative entre les spectres $dN/2\pi \mathbf{p}_T d\mathbf{p}_T$ du modèle hydrodynamique [75] (à gauche) et de PHSD [71] (à droite).

Ensuite, on sait que la géométrie du QGP se transforme en flot elliptique. On peut donc comparer certains résultats de flot en fonction des variables habituelles : l'impulsion transverse \mathbf{p}_{T} , le nombre de participants N_{part} , la rapidité η (à ne surtout pas confondre avec la viscosité, qui porte le même symbole) et aussi le temps t lui-même.

La FIG. 3.20 montre que le modèle hydrodynamique ainsi que le modèle BAMPS arrivent très bien à reproduire les données du RHIC pour des $\mathbf{p}_{\rm T} < 1$ GeV. Le cas de BAMPS marche mieux avec des gluons, ce qui est bien puisque les gluons sont présents en majorité dans le plasma à haute température. Pour des $\mathbf{p}_{\rm T} > 1$ GeV, les données expérimentales montrent que le flot elliptique v_2 diminue. Ici cet effet n'est **pas reproduit** par le modèle hydrodynamique ou BAMPS, cependant, les données récentes des simulations hydrodynamiques [95] montrent que l'**ajout de viscosité** permet de reproduire ce phénomène de saturation puis de diminution du flot. Malgré tout, cela ne colle pas totalement aux données (nécessité de changer la viscosité d'un résultat à l'autre afin de faire du **fine tuning**, c'est-à-dire un réglage précis).



FIG. 3.20– Comparaison qualitative entre les spectres $dv_2/d\mathbf{p}_T$ du modèle hydrodynamique [75] (à gauche) et de BAMPS [102] (à droite).



FIG. 3.21– Comparaison qualitative entre les spectres dv_2/dN_{part} de PHSD [103] (à gauche) et de BAMPS [102] (à droite).

On peut également observer le spectre du flot elliptique v_2 en fonction du nombre de participants sur la FIG. 3.21. On voit que les modèles de cascade PHSD et BAMPS reproduisent parfaitement le spectre expérimental. Cependant, certains paramètres doivent être ajustés, comme les constantes de couplage ou les sections efficaces de diffusion élastiques.

Le fait de reproduire exactement les mêmes résultats expérimentaux avec des modèles différents et des paramètres différents ne signifie pas pour autant que ces modèles sont inexacts. Il faut en revanche faire attention au **domaine d'applicabilité** du modèle que l'on utilise pour savoir s'il est bien adapté à l'expérience que l'on veut décrire.

Le spectre de distribution du flot en fonction de la rapidité η de la FIG. 3.22 montre une structure triangulaire. C'est un comportement qui est très bien expliqué par les modèles de cordes [66], du fait de la distribution uniforme des particules le long les tubes de flux de couleur qui se créent entre les nucléons participants. Cette distribution se voit également dans les **corrélations** en $\Delta \eta$ de la FIG. 3.6. Nous détaillerons un peu plus ces phénomènes dans la prochaine sous-section.



FIG. 3.22– Spectre $dv_2/d\eta$ du modèle hydrodynamique [75].



FIG. 3.23– Temps de formation du v_2 dans PHSD [71] (à gauche) et BAMPS [70] (à droite).

La FIG. 3.23 montre la **création du flot elliptique** v_2 dans le QGP en fonction du temps, dans le modèle PHSD et BAMPS. On voit ici que la **formation est très rapide**, ce qui est dû aux nombreuses collisions élastiques dans le pré-équilibre. Deux points importants sont donc à retenir :

- 1. le flot est formé à la transition entre le pré-équilibre et le QGP, grâce aux collisions élastiques entre les partons du milieu,
- 2. ce flot peut être plus ou moins important, suivant que la réaction a eu le temps de thermaliser ou non [92].

Cette notion de thermalisation du plasma est très importante. Cela veut dire que si les interactions (via les sections efficaces) ne sont pas assez importantes au départ, le plasma n'est **pas thermalisé suffisamment rapidement** par rapport au temps de vie du QGP lui-même. Dans ce cas, le flot elliptique sera toujours surestimé par les modèles qui commencent à l'équilibre. Le QGP n'est qu'un **équilibre instable** dans une collision qui elle-même est fortement hors-équilibre.

En abordant le sujet des **phénomènes fortement hors-équilibre**, qui ne peuvent pas être simulés par le modèle hydrodynamique, on peut s'intéresser aux **ondes de choc** créées dans le plasma. Lors des conditions initiales, des processus durs sont présents, et peuvent donner des particules de grand \mathbf{p}_{T} , qui agissent comme une onde de choc dans le plasma, en bousculant les partons du milieu sur leur passage. Ces phénomènes appelés **jets** peuvent avoir suffisamment d'énergie et sortir du plasma pour être détectés, avec la **gerbe de particules** "bousculées", qui les suivent.

L'onde de choc créée dans le milieu donne une contre réaction, qui peut se voir dans les spectres de corrélations en $\frac{d^2N}{d\Delta\phi d\Delta\eta}$. Cependant, on peut observer cette onde de choc dans les simulations via le phénomène des **cônes de Mach** [104] (FIG. 3.24). Les particules de grande énergie ayant une vitesse relative supérieure à la **vitesse du son** dans le plasma (c'est-à-dire la vitesse de dispersion des ondes), on peut identifier l'onde de choc à un cône de Mach. La FIG. 3.24 montre une simulation de ces ondes de choc, pour différents scénarios théoriques (différentes pertes d'énergie et différents processus d'interaction).



FIG. 3.24–Formations des cônes de Mach dans BAMPS [105] pour différentes pertes d'énergie de la particule mobile (1,10 et 200 GeV/fm), et pour deux différents scenarios : Pure Energy Deposition (PED) et de vrais jets (JET).

3.5 Hadronisation

Pour conclure avec la description des étapes de la collision d'ions lourds, on doit aborder le problème de l'hadronisation. Même si de nombreux modèles [106, 107, 73, 108] présentent des solutions qui sont adaptées aux codes de transport correspondants, il manque encore le **confinement**. Les modèles de simulations ne tiennent pas compte de ce confinement lors de l'hadronisation.

Dans la plupart des modèles d'hadronisation, on considère donc que les partons **hadronisent systématiquement**, et on s'intéresse plutôt à la distribution spatiale et énergétique de cette hadronisation. Nous allons maintenant présenter ces modèles, puis une comparaison phénoménologique car il n'y a pas de résultats à proprement parler étant donné que dans la Nature tous les partons doivent hadroniser.



FIG. 3.25– Description de Cooper-Frye pour l'hadronisation : c'est une surface de freeze-out (ici 3 exemples) où l'on transforme l'énergie d'une phase partonique en un gaz de hadrons [93].

3.5.1 Modèles théoriques

Formule de Cooper-Frye

Le modèle le plus populaire pour décrire les simulations de collisions d'ions lourds est le modèle hydrodynamique. Cela est principalement dû au fait qu'il est rapide à mettre en place, qu'on peut **jouer sur la dynamique** en changeant l'équation d'état comme on veut, et surtout : parce qu'il évite le problème de l'hadronisation par confinement. Le modèle hydrodynamique utilise la **formule de Cooper-Frye** [72] :

$$E\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\mathbf{p}} = \Delta\sigma n^{\mu} p_{\mu} f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$
(3.5.1)

où n^{μ} est le quadri-vecteur normal au morceau $\Delta \sigma$ de la surface de freeze-out, et $f(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ est la distribution thermique des particules.

La formule de Cooper-Frye permet de décrire l'hadronisation comme une simple **conversion de densité d'énergie** de chaque cellule dès que celle-ci évolue vers une densité ou une température inférieures au seuil critique défini par l'utilisateur (en général on prend une température proche des prédictions de QCD sur réseau, mais rien n'empêche de jouer avec ce paramètre).

Comme l'évolution des systèmes décrits par le modèle hydrodynamique est assez lente (on évite les gradients de température trop élevée), on peut observer une surface d'hadronisation (FIG. 3.25. Au niveau de cette surface, on effectue un tirage Monte-Carlo pour transformer l'énergie de la cellule en hadrons. Cette étape est généralement suivie par un **after-burner** [85] qui rajoute des collisions entre les hadrons après l'hadronisation.

Cette méthode de Cooper-Frye est très pratique pour faire simple et passer la transition de phase. On a une surface nette (transition de phase de premier ordre) qui délimite le QGP et la phase hadronique, et ces phases n'interagissent pas. Pourtant on sait que la transition entre les deux phases est un cross-over. La formule de Cooper-Frye ne représente donc pas correctement la phénoménologie de la transition de phase.



FIG. 3.26– Schéma de fragmentation de cordes dans le modèle de cordes de Lund [66].

Modèles de cordes

Le modèle précédent décrit un système de type macroscopique. On peut décrire le plasma d'un point de vue microscopique, en utilisant des **cordes** [66]. C'est en quelque sorte la continuité logique pour les conditions initiales : on observe une interaction forte entre les nucléons participants de la collision, et les tubes de flux de couleur qui sont créés, contiennent des partons.

On peut utiliser le même type de raisonnement pour retransformer les partons du plasma en hadrons (FIG. 3.26. C'est une approximation, mais cependant, elle permet d'avoir une hadronisation complète et la tension entre les cordes est censée reproduire les effets du confinement de couleur.

Hadronisation statistique

Le dernier modèle très utilisé est celui de l'hadronisation statistique (**Statistical Hadronization Model** (SHM))[106]. Si on considère le plasma comme une boule de partons déconfinés, et la phase hadronique comme un nuage d'états singulet de couleur alors on peut imaginer qu'à l'interface des deux ensembles existent des clusters, également neutres en couleur, qui matérialisent la **pré-hadronisation**.

La distribution de ces clusters ne peut pas être décrite par le modèle d'hadronisation statistique, mais cependant, on sait que chacun de ces clusters va se désintégrer en hadrons de manière purement statistique (FIG. 3.27). Chacun de ces nuages d'hadrons est donc bien sûr compatible avec les nombres quantiques du cluster initial (conservation de la charge).

Le modèle d'hadronisation statistique utilise donc une description du système qui est microscopique. Il considère que la distribution en nombre, charge et impulsion des clusters est celle qui maximise l'entropie. Les clusters peuvent être projetés dans le référentiel de la collision, avec une transformation de Lorentz inverse, de manière à décrire l'ensemble des clusters comme un **cluster global équivalent** (en anglais : Equivalent Global Cluster). Dans ce cas, l'utilisation de l'ensemble canonique ou grand canonique est plus appropriée.

Au final, on peut donc utiliser le SHM sur n'importe quel code de transport (hydrodynamique ou moléculaire) pour décrire l'hadronisation. Le problème réside dans le fait de trouver une bonne approximation pour identifier les degrés de liberté depuis le QGP (ensemble de cellules d'énergie dans le modèle hydrodynamique, partons dans les modèles moléculaires).



FIG. 3.27– Schéma de l'hadronisation des clusters dans le modèle d'hadronisation statistique [109].

3.5.2 Comparaison

Il est temps de comparer les modèles d'hadronisation. Comme il n'y a pas vraiment de résultats communs permettant de bien discriminer les modèles, nous allons nous baser sur une comparaison phénoménologique. Pour cela, on va résumer les différentes propriétés des modèles dans le tableau suivant :

	Cooper-Frye	Cordes	SHM
Echelle	Macroscopique	Microscopique	Micro↔Macro
Degrés de liberté	Cellules d'énergie	Fragments de corde	Clusters
Confinement	Non	Tension de corde	Non
Transition	Surface (Freeze-out)	Aucune	Surface (Freeze-out)

Le modèle le plus prometteur est sans aucun doute le SHM, qui est beaucoup plus précis que la formule de Cooper-Frye ou le modèle des cordes. Cependant, aucun modèle ne traite le cas du cross-over (mixité des hadrons et des partons).

Le modèle de transport PHSD [108] traite l'hadronisation d'une manière microscopique différente des modèles précédemment présentés : il utilise une dynamique qui produit des hadrons avec des partons, en prenant comme variable de transition : la densité scalaire locale. Chaque parton du milieu peut alors hadroniser localement avec un voisin. Ceci n'est pas nécessairement causal comme dans le modèle de coalescence [107] mais cela permet d'avoir, encore une fois, une hadronisation complète.

3.6 État de l'art

POUR conclure ce chapitre, on peut établir un petit bilan des choix utilisés pour décrire les phénomènes physiques qui sont présents dans les collisions d'ions lourds. On s'intéresse principalement au transport et à l'hadronisation.

Pour le transport, c'est l'équation de Boltzmann qui revient le plus souvent, aussi bien dans le modèle hydrodynamique que dans les codes de transport fréquemment utilisés. Cette équation permet de séparer la propagation des particules et les collisions. Cependant le problème majeur de cette méthode est l'absence de potentiel relativiste.

C'est ce qui a motivé le travail que nous allons présenter dans le prochain chapitre : la dynamique relativiste. Cette dynamique inclut des équations de mouvement, des potentiels et des collisions qui sont tous corrects de manière relativiste.

Ensuite vient le problème de l'hadronisation. L'intérêt de la description microscopique de l'hadronisation n'est que très récent. Nous allons présenter une méthode complètement microscopique (afin d'accompagner la dynamique relativiste) dans le chapitre 5.

L'ensemble de ces trois premiers chapitres est une présentation générale de la **physique** des collisions d'ions lourds et des problèmes rencontrés pour en décrire la phénoménologie. Le problème qui nous intéresse est la description de la transition de phase et de l'expansion du QGP. Nous allons maintenant présenter le travail que nous avons effectué au sein de laboratoire pour décrire ce phénomène complexe dans les trois prochains chapitres.



Dynamique Relativiste

« The only way to discover the limits of the possible is to go beyond them into the impossible. »

Arthur C. Clarke (1917–2008)



FIG. 4.1– Pourrait-on voir son image dans un miroir en chevauchant un rayon de lumière?

4.1 Vers une dynamique moléculaire relativiste

Nous allons maintenant parler de la dynamique qui est nécessaire pour décrire l'évolution temporelle d'un système. D'habitude, nous commençons avec un Lagrangien et le principe de moindre action. Ensuite, nous faisons une transformation de Legendre, pour trouver le Hamiltonien. Et finalement, nous extrayons la partie importante : nous trouvons les équations de mouvement.

Quel est donc le problème d'une formulation relativiste de cette dynamique? Le problème vient de la gamme de vitesses. Dans le cas classique ($\mathbf{v} \ll c$) nous pouvons facilement décrire les interactions avec un **potentiel** et un **temps global du système**. Dans le cas ultra-relativiste ($\mathbf{v} = c$) seules, **les trajectoires géométriques** et **les collisions** sont prises en compte (voir par exemple l'électrodynamique classique). Mais dans le cas intermédiaire ($\mathbf{v} \le c$) quand les potentiels ne sont pas trop faibles (interaction forte), que peut-on faire ?

Il existe le **No Interaction Theorem** (NIT) qui indique que les particules relativistes peuvent uniquement être libres (sans interactions) dans l'espace de Minkowski [110]. Cependant, une dynamique relativiste qui a été implémentée il y a quelques années dans le modèle RQMD [111], contourne ce théorème. C'est un modèle développé pour décrire les collisions d'ions lourds. On se propose de faire une revue complète du formalisme ainsi que ses subtilités, et de présenter notre dynamique qui est différente de RQMD.

4.1.1 Dynamique moléculaire classique

L'équation cinétique classique, également connue comme l'équation de Liouville, décrit l'évolution de la distribution à un corps $f(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ dans l'espace des phases [112] :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(\mathbf{q},\mathbf{p},t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \,. \tag{4.1.1}$$

Pour simplifier cette équation, nous pouvons utiliser les équations de mouvement de Newton ou de Hamilton pour les coordonnées canoniques (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . La position est liée à la vitesse et la vitesse est liée à l'accélération donc, nous avons seulement **deux équations de mouvement**. En utilisant les équations de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{p}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \mathbf{q}}$$
(4.1.2)

avec le **Hamiltonien** \mathcal{H} , nous pouvons écrire :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathscr{H}\}$$
(4.1.3)

où $\{A, B\}$ est le **Crochet de Poisson** de A et B :

$$\{A, B\} = \sum_{k=1} \frac{\partial A}{\partial \mathbf{q}_k} \frac{\partial B}{\partial \mathbf{p}_k} - \frac{\partial A}{\partial \mathbf{p}_k} \frac{\partial B}{\partial \mathbf{q}_k} .$$
(4.1.4)

Dans le cas particulier où f ne dépend pas explicitement du temps, nous avons

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \{f, \mathscr{H}\} \ . \tag{4.1.5}$$

Cette équation est la forme la plus générale pour l'évolution temporelle [112]. Elle nous dit que la distribution de l'espace des phases se développe dans le temps de telle façon que l'énergie est conservée. Maintenant, nous pouvons exprimer les équations de Hamilton dans leur **forme canonique** :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}t} = \{\mathbf{q}, \mathscr{H}\}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \{\mathbf{p}, \mathscr{H}\}.$$
(4.1.6)

Nous pouvons utiliser ces équations de mouvement pour un Hamiltonien donné, par exemple,

$$\mathscr{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{q}) = T(\mathbf{p}) + V(\mathbf{q})$$
(4.1.7)

qui est souvent utilisé dans des simulations de chimie et d'astrophysique. Nous remarquons que nous pouvons diviser le Hamiltonien en une partie cinétique T qui dépend seulement de **p** et une partie potentielle V qui dépend seulement de **q**. C'est un type de formulation très utile que nous réutiliserons plus tard dans la dynamique relativiste.

4.1.2 Dynamique moléculaire quantique

Le fait d'inclure de la mécanique quantique dans une dynamique moléculaire vient de la volonté de décrire les particules comme des **densités de probabilité** plutôt que des particules classiques ponctuelles. La formulation quantique de l'équation de Liouville (4.1.1) est la bien-connue **équation de von Neumann** :

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}\hat{\rho}}{\mathrm{d}t} = \{\hat{\rho}, \mathscr{H}\}$$
(4.1.8)

avec le Hamiltonien quantique \mathscr{H} avec $\mathscr{H}\psi = E\psi$, et l'**opérateur de densité** $\hat{\rho}$:

$$\hat{\rho} = \sum_{k} \alpha_k |\psi_k\rangle \langle\psi_k| \tag{4.1.9}$$

où les coefficients α_k sont positifs et vont jusqu'à 1. Ainsi, nous pouvons construire la **matrice densité** des états $|\psi_i\rangle$:

$$\langle \psi_i | \hat{\rho} | \psi_i \rangle$$
 . (4.1.10)

Nous pouvons faire la transformation de Fourrier de cette matrice densité dans le but d'avoir la **fonction de densité de Wigner** :

$$f_W(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2\pi} \int \langle \mathbf{q} - \mathbf{x}/2 | \hat{\rho} | \mathbf{q} + \mathbf{x}/2 \rangle . \qquad (4.1.11)$$

Cette fonction a la forme d'une **distribution Gaussienne** dans un espace des phases. En utilisant le **principe variationnel** (approximation de Rayleigh-Ritz)

$$\frac{\langle \psi | \mathscr{H} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} , \qquad (4.1.12)$$

nous pouvons obtenir l'équation de mouvement de von Neumann par la variation des coordonnées canoniques :

$$\frac{\mathrm{d}f_W}{\mathrm{d}t} = \{\{f_W, \mathscr{H}\}\}$$
(4.1.13)

avec le crochet de Moyal [113] :

$$\{\{A, B\}\} = (i\hbar)^{-1}[A, B]$$
(4.1.14)

qui décrit le commutateur des observables. En utilisant la relation $[\mathbf{q}, \mathbf{p}] = i\hbar$ avec les équations de Hamilton (4.1.6), on retrouve :

$$\{\{A, B\}\} = \{A, B\} + O(\hbar^2)$$
(4.1.15)

Dans le cas d'états mixtes, des termes d'ordre supérieur $O(\hbar^2)$ apparaissent dans l'équation de mouvement. Si nous supposons que nous pouvons négliger ces termes d'ordre supérieur (interférences), nous retrouvons l'équation de mouvement classique :

$$\frac{\mathrm{d}f_W}{\mathrm{d}t} = \{f_W, \mathscr{H}\} \ . \tag{4.1.16}$$

Pour plus d'informations sur la densité de Wigner et son application à l'exemple quantique, le lecteur peut voir [114]. La **Dynamique quantique moléculaire** est utilisée dans des programmes de simulations pour les Collisions d'Ions Lourds comme : IQMD ou UrQMD. Ils donnent une très bonne description des noyaux et des réactions entre nucléons.

4.1.3 Le groupe de Poincaré

Maintenant, on cherche une définition des équations (4.1.16) (en 6 dimensions) pour une théorie relativiste où l'espace des phases est un **espace de Minkowski**. La théorie non-relativiste vit dans un espace en 3 dimensions tandis que la théorie relativiste vit dans un **espace de Minkowski** qui relie les 3 coordonnées spatiales avec le temps.

Nous ne pouvons pas parler de mécanique relativiste sans rappeler la théorie des groupes. D'abord, on présente le groupe de symétrie de l'espace Minkowski : le **groupe de Poincaré**. Notre univers est construit dans l'espace de Minkowski avec des **quadrivecteurs** définis comme :

$$q^{\mu} = (q^0, q^1, q^2, q^3) = (q^0 = t, q^{1,2,3} = \mathbf{q})$$
(4.1.17)

L'indice grec fait toujours référence à un quadri-vecteur et l'indication en gras est pour un 3-vecteur. Les **variables canoniques** décrivent l'état d'une particule k dans l'espace des phases. Maintenant, cet espace des phases est l'espace Minkowski, donc les coordonnées sont :

$$(q_k^{\mu}, p_k^{\mu})$$
 (4.1.18)

avec le quadri-position q^{μ} et la quadri-impulsion p^{μ} . La relativité restreinte, qui transforme les quadri-vecteurs dans un référentiel différent, admet quelques symétries bien connues :

- la **Translation** dans l'espace et dans le temps,
- la **Rotation** dans l'espace,
- la transformation de Lorentz (*Boost*) dans l'espace-temps.

La première transformation est notée a^{μ} . Les deux dernières transformations forment le **groupe de Lorentz** dont la transformation est notée $\Lambda^{\mu\nu}$. La combinaison de ces trois symétries donne le **groupe de Poincaré**. L'élément de transformation de ce groupe est noté $(\Lambda^{\mu\nu}, a^{\mu})$. C'est une transformation affine dans l'espace-temps qui laisse le produit scalaire $q^{\mu}q_{\mu}$ invariant :

$$q'^{\mu} = (\Lambda, a)q^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}q^{\nu} + a^{\mu} . \qquad (4.1.19)$$

Ce qui mène à la règle de multiplication suivante pour ce groupe

$$(\Lambda, a)(\Lambda', a') = (\Lambda\Lambda', \Lambda a' + a) \tag{4.1.20}$$

Les **générateurs** P^{μ} et $M^{\mu\nu}$ du groupe de Poincaré peuvent être construits à partir des transformations infinitésimales correspondantes $(\delta \Lambda^{\mu\nu}, \delta a^{\mu}) \rightarrow U(\mathbb{1} + \omega^{\mu\nu}, \varepsilon^{\mu})$:

• pour le groupe de translation

$$U(\mathbb{1}, \varepsilon^{\mu}) = \exp(i \ P^{\mu} \varepsilon_{\mu}) \qquad \text{avec} \quad P^{\mu} = \sum_{k} p_{k}^{\mu} , \qquad (4.1.21)$$

• pour le groupe de Lorentz

$$U(\omega^{\mu\nu}, 0) = \exp(i \ M^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu}) \quad \text{avec} \quad M^{\mu\nu} = \sum_{k} q_{k}^{\mu} p_{k}^{\nu} - q_{k}^{\nu} p_{k}^{\mu} \ . \tag{4.1.22}$$

Il y a 10 générateurs indépendants :

• 4 pour le groupe de translation

$$\dim\{P^{\mu}\} = 4 , \qquad (4.1.23)$$

• 6 pour le groupe de Lorentz (le groupe de symétrie appartient à $SL(n = 2, \mathbb{C})$, donc par définition dim = $2(n^2 - 1)$)

$$\dim\{M^{\mu\nu}\} = 6 . \tag{4.1.24}$$

Les commutateurs de ces générateurs donnent l'algèbre du groupe qui est appelé **algèbre de Poincaré** :

$$[P_{\mu}, P_{\nu}] = 0$$

$$i [P_{\mu}, M_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu\rho} P_{\sigma} - \eta_{\mu\sigma} P_{\rho}$$

$$i [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho}$$

(4.1.25)

avec η étant la métrique de Minkowski

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$
(4.1.26)

Nous remarquons que les générateurs $M_{\mu\nu}$ et P_{μ} ne commutent pas. Physiquement, cela vient du fait qu'il y a une contraction des longueurs dans le boost de Lorentz (et une dilatation du temps).

Nous pouvons construire la transformation de Poincaré infinitésimale comme ceci :

$$U(\mathbb{1} + \omega^{\mu\nu}, \varepsilon^{\mu}) = \exp\left(i \ G\right) \tag{4.1.27}$$

avec le générateur de la transformation :

$$G = \omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu} - \varepsilon^{\mu} P_{\mu} . \qquad (4.1.28)$$

Le groupe de Poincaré est un groupe de symétrie. Selon le **théorème de Noether**, pour chaque symétrie, il existe une quantité conservée. Ces quantités sont des opérateurs qui commutent avec tous les générateurs du groupe et sont donc indépendants du référentiel. Ils sont appelés les **opérateurs de Casimir** :

• la masse m

$$m^2 = \eta_{\mu\nu} p^{\mu} p^{\nu} , \qquad (4.1.29)$$

• et le spin s

$$W^{\mu}W_{\mu} = -m^2 \ s(s+1) \tag{4.1.30}$$

venant du vecteur de Pauli-Lubanski W^{μ}

$$W_{\sigma} = \frac{1}{2} \epsilon_{\sigma\mu\nu\lambda} M^{\mu\nu} P^{\lambda} . \qquad (4.1.31)$$

Nous remarquons qu'avec ces opérateurs, seules les particules massives peuvent être classées selon leur spin.

4.1.4 Dynamique moléculaire relativiste

Après avoir défini les symétries de l'espace de Minkowski, nous allons voir comment une dynamique est définie dans cet espace. Les crochets de Poisson peuvent être facilement étendus à 8 dimensions :

$$\{A,B\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial A}{\partial q_k^{\mu}} \frac{\partial B}{\partial p_{k\mu}} - \frac{\partial A}{\partial p_k^{\mu}} \frac{\partial B}{\partial q_{k\mu}} . \qquad (4.1.32)$$

Avec cet outil, nous pouvons obtenir des équations relativistes de mouvement qui ressemblent à :

$$\frac{\mathrm{d}q^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = \{q^{\mu}, \mathcal{H}\} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\mu}}$$

$$\frac{\mathrm{d}p^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = \{p^{\mu}, \mathcal{H}\} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_{\mu}}.$$
(4.1.33)

Évidemment, la signification de τ et \mathcal{H} doit être discutée. Si nous voulons obtenir une dynamique invariante de Poincaré, les quantités physiques doivent être des **scalaires** $(A^{\mu}A_{\mu})$ ou des produits de quadri-vecteur $(A^{\mu}A^{\nu})$.



FIG. 4.2–Variation de l'espace des phases pour : un temps global t (à gauche) et pour un paramètre invariant de Poincaré τ (à droite).

Le paramètre τ n'est donc pas le temps habituel et \mathcal{H} n'est pas un Hamiltonien. Alors où sont les quantités de temps et d'énergie? Elles sont simplement cachées dans les équations de mouvement, dans (q^0, p^0) . Nous n'utilisons pas ces parties des équations de mouvement dans la limite classique, à 6 dimensions.

Si nous regardons de plus près la FIG. 4.2 nous pouvons voir la dynamique comme une variation de l'ensemble des coordonnées canoniques par rapport à un paramètre donné qui n'est pas une des coordonnées. Ce paramètre donné est lié à une quantité conservée selon le **théorème de Liouville**. Ce théorème affirme que la fonction de distribution de l'espace des phases est constante le long des trajectoires du système, en d'autres termes : la densité des points du système est constante avec le temps.

Dans le cas classique, le théorème de Liouville s'applique à l'espace des phases (\mathbf{q}, \mathbf{p}) avec les particules occupant la région C. Si le paramètre d'évolution est le temps commun t de toutes les particules, la quantité conservée est le Hamiltonien \mathcal{H} . Par conséquent, nous pouvons écrire l'équation de mouvement pour la distribution classique à un corps

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(\mathbf{q},\mathbf{p},t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f,\mathscr{H}\} . \tag{4.1.34}$$

Dans l'espace de Minkowski (q^{μ}, p^{μ}) , la dynamique peut être formulée de la même manière. La difficulté réside dans le fait que nous ne savons pas quel genre de paramètre d'évolution nous pouvons prendre. Appelons ce paramètre τ . Cela permet à toutes les particules à l'intérieur de \mathcal{C}' d'évoluer. Le paramètre τ est un paramètre d'évolution de la dynamique qui est **invariant de Poincaré**. Nous avons besoin de cette invariance car la dynamique relativiste doit obéir à l'algèbre de Poincaré. Il n'y a a priori aucune connexion entre le paramètre τ et le temps q_k^0 des particules.

Pour ce paramètre d'évolution τ il existe une quantité conservée, disons \mathcal{H} , qui joue le **rôle d'un Hamiltonien**. Mais ce n'est pas un Hamiltonien dans le sens classique : ce n'est

plus une énergie. Il doit être invariant de Poincaré comme τ . Finalement, nous pouvons écrire formellement une équation de mouvement relativiste pour la densité de particules :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\tau}(q^{\mu}, p^{\mu}, \tau) = \frac{\partial f}{\partial \tau} + \{f, \mathcal{H}\} . \qquad (4.1.35)$$

Maintenant les questions sont :

- est-ce que cette nouvelle équation est vraiment correcte pour une dynamique relativiste et pourquoi ?
- dans le cas où l'équation est correcte : quelle est la définition de \mathcal{H} ?
- finalement que fait-on de (q^0, p^0) ?

La solution globale de ces problèmes sont les contraintes. Elles nous aident à réduire le nombre de degrés de liberté dans l'espace des phases. Les contraintes sont nécessaires ici pour éviter (q^0, p^0) dans les équations de mouvement. Nous pouvons considérer le Hamiltonien classique, qui est l'énergie, comme une contrainte. Le Hamiltonien ne réduit pas la dimension de l'espace des phases classique car l'énergie ne fait pas partie de cet espace.

Maintenant, on peut comprendre le début de la réponse pour l'espace de Minkowski. Nous avons besoin de contraintes pour définir la dynamique relativiste. Ces contraintes doivent avoir quelque chose à voir avec \mathcal{H} . Une de ces contraintes doit garantir que les particules soient sur la couche de masse, et donc que l'énergie soit conservée dans un référentiel de Lorentz fixe. On se réfère donc à p^0 . C'est le rôle du Hamiltonien classique. Qu'en est-il de q^0 ? L'autre contrainte que nous devons définir doit décrire la corrélation des temps dans le but d'obtenir une dynamique qui soit causale, c'est-à-dire que la vitesse des particules est inférieure à la vitesse de la lumière :

$$\frac{\mathrm{d}q^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} \le c = 1 \ . \tag{4.1.36}$$

Finalement, la partie de la dynamique relativiste la plus compliquée est la formulation des équations de mouvement sous contrainte, et ensuite la définition des contraintes ellesmême.

Maintenant, nous aimerions parler de cette **dynamique sous contrainte**. Ce genre de dynamique est une extension de la dynamique Hamiltonienne classique. Cela a été traité par Dirac il y a des années [115], et plus tard quelques exemples dans l'électrodynamique classique ont été calculés [116]. Ce sont les premières étapes qui mènent à une formulation relativiste de la dynamique.

4.2 Dynamique sous contraintes

A VANT de parler des contraintes relativistes, décrivons la **Dynamique Hamiltonienne** sous contrainte. Cette dynamique nous aidera à trouver le bon formalisme pour extraire des équations de mouvement dans un espace des phases classique. Ensuite, l'extension à un espace de Minkowski nous donnera la réponse pour les définitions de τ et \mathcal{H} avec un système de particules relativistes.Finalement ce formalisme sera utilisé pour décrire la dynamique de champs quantiques relativistes.

4.2.1 Le Principe de moindre action

Pour obtenir une dynamique et ses équations, nous commençons avec le premier postulat : l'action S (l'énergie nécessaire) pour aller d'un état initial à un état final est défini par la trajectoire qui utilise le moins d'énergie. Par exemple, le chemin le plus court entre deux points dans un espace plat est la ligne droite. Ceci est le **principe de moindre action**.

L'action S d'un champ $\Phi(x)$ sur un hyperespace \mathcal{C} est

$$S(\Phi) = \int_{\mathcal{C}} \mathcal{L}(\Phi(x), \partial^{\mu} \Phi(x)) \mathrm{d}^{4}x \qquad (4.2.1)$$

avec une densité Lagrangienne \mathcal{L} . Considérons une variation du champ dans une direction χ et calculons

$$S(\Phi + \varepsilon \chi) = \int_{\mathcal{C}} \mathcal{L}(\Phi(x) + \varepsilon \chi(x), \partial^{\mu}(\Phi(x) + \varepsilon \chi(x))) \, \mathrm{d}^{4}x \qquad (4.2.2)$$

où ε est un facteur arbitraire. Ensuite, en utilisant l'expansion de Taylor, nous obtenons la différence

$$S(\Phi + \varepsilon \chi) - S(\Phi) = \int_{\mathcal{C}} \left(\varepsilon \chi(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} (\Phi(x), \partial^{\mu} \Phi(x)) + \varepsilon(\partial^{\mu} \chi(x)) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^{\mu} \Phi)} (\Phi(x), \partial^{\mu} \Phi(x)) + O(\varepsilon^{2}) \right) d^{4}x .$$

$$(4.2.3)$$

En utilisant l'intégration par parties sur le second terme (en supposant que χ disparaisse sur ∂C), et en divisant par ε sur les deux côtés et en prenant $\varepsilon \to 0$, cela devient une variation dans la direction χ

$$\delta S(\Phi,\chi) = \int_{\mathcal{C}} \chi(x) \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi}(\Phi(x), \partial^{\mu} \Phi(x)) - \partial^{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^{\mu} \Phi)}(\Phi(x), \partial^{\mu} \Phi(x)) \right) \right] d^{4}x \quad (4.2.4)$$

En posant les variations dans toutes les directions égales à zero nous obtenons la **formule** d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial^{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^{\mu} \Phi)} \right) = 0 . \qquad (4.2.5)$$

Cette équation peut être utilisée sur le Lagrangien pour trouver de nouvelles quantités (ex : le tenseur énergie-impulsion $T^{\mu\nu}$).

4.2.2 Méthodologie Hamiltonienne I

Dirac a introduit la dynamique Hamiltonienne non-relativiste avec des contraintes dans le but d'établir une théorie des champs quantiques cohérente [115]. Nous devons partir d'un Lagrangien, puis en utilisant une transformation de Legendre, nous obtenons un Hamiltonien. Et finalement, en utilisant les équations de Hamilton nous pouvons trouver les équations de mouvement. L'équation de Euler-Lagrange peut donner des équations intéressantes également. Nous pouvons penser que cette méthode est suffisante pour obtenir une théorie cohérente, mais ce n'est pas le cas. Nous allons expliquer les problèmes et la solution de la méthodologie Hamiltonienne à travers l'exemple introduit par Avery [116]. Il considère un Lagrangien pour le particule chargée de masse m dans un champ magnétique B le long de l'axe \vec{z} :

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{eB}{2c}(x\dot{y} - y\dot{x}) - \frac{eB}{2c}V(x, y) . \qquad (4.2.6)$$

Nous pouvons multiplier le Lagrangien par 2/m, et poser $\eta = eB/mc$ aussi, ce qui ne change pas les équations de mouvement. Finalement, nous obtenons :

$$\mathcal{L} = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \eta (x\dot{y} - y\dot{x}) - \eta V(x, y) . \qquad (4.2.7)$$

L'équation d'Euler-Lagrange (4.2.5) nous donne :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \eta \dot{y} - \frac{\eta}{2} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \ddot{y} &= -\eta \dot{x} - \frac{\eta}{2} \frac{\partial V}{\partial y} \end{aligned}$$
(4.2.8)

Si on considère le cas où η est très large (c'est-à-dire que le champ *B* est grand ou que la masse *m* est petite), nous pouvons négliger le terme cinétique habituel dans le Lagrangien. Il reste une expression qui est **linéaire en vitesse**. C'est le genre de problème auquel Dirac s'est intéressé dans son livre [115]. Dans la limite $\eta \to \infty$, nous avons les équations de mouvement déduites des équations précédentes :

$$\dot{x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\dot{y} = -\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$(4.2.9)$$

En utilisant (4.2.7) nous définissons le moment conjugué :

$$p_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = -\eta y$$

$$p_y = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = -\eta x .$$
(4.2.10)

C'est ici que les problèmes commencent. Si le Hamiltonien qui résulte du moment conjugué (toujours dans la limite d'un très grand η) est :

$$\mathcal{H} = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - \mathcal{L} = \eta V(x, y) , \qquad (4.2.11)$$

alors, l'impulsion disparaît simplement du Hamiltonien et nous obtenons les équations de mouvement suivantes :

$$\dot{p_x} = \eta \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\dot{p_y} = \eta \frac{\partial V}{\partial y}$$
(4.2.12)

et en rappelant l'équation (4.2.10), nous pouvons écrire :

$$\dot{x} = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\dot{y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$(4.2.13)$$

Il est clair que les équations diffèrent de celles trouvées précédemment (par un facteur 1/2), il y a donc un problème. En réalité, nous aurions pu nous arrêter avant d'en arriver à ce point. Si nous faisons plus attention à l'équation (4.2.10), nous pouvons voir que l'impulsion et la position sont liées :

...

$$\phi_1 = p_x + \eta y = 0 \phi_2 = p_y - \eta x = 0 .$$
(4.2.14)

Ces équations sont **des contraintes** venant du Lagrangien. Un Lagrangien avec ce genre de contraintes est appelé un **Lagrangien singulier**. C'est **un cas spécial de dynamique** qui doit être traité différemment.

4.2.3 Le formalisme de Dirac

Dirac a résolu ce problème en regardant la représentation de l'espace des phases. L'espace des coordonnées canoniques (\mathbf{q}, \mathbf{p}) est appelé une **variété symplectique**. C'est un espace mathématique dans \mathbb{R}^{2N} où **le crochet de Poisson** s'applique. Dans un cas classique, l'espace des phases est un sous-espace où les équations de mouvement sont des crochets de Poisson des coordonnées canoniques avec une quantité conservée : le Hamiltonien

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(\mathbf{q},\mathbf{p},t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f,\mathscr{H}\} . \qquad (4.2.15)$$

Dirac a montré dans son livre sur la dynamique hamiltonienne sous contrainte [115] que, peu importe l'origine des contraintes, les équations de mouvement obtenues par un crochet de Poisson ne sont pas correctes dans un espace des phases sous contraintes.

Pour un système de k contraintes

$$\phi_k(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = 0 , \qquad (4.2.16)$$

Dirac définit une nouvelle sorte de crochets qui inclut l'effet des contraintes dans les équations de mouvement, le **crochet de Dirac** [115]

$$\{a, b\}_D = \{a, b\} - \{a, \phi_i\} C_{ij}\{\phi_j, b\}$$
(4.2.17)

avec la matrice de contraintes

$$C_{ij}^{-1} = \{\phi_i, \phi_j\} . \tag{4.2.18}$$

Le crochet de Dirac nous donne les bonnes équations de mouvement en remplaçant le crochet de Poisson. La condition que C_{ij}^{-1} est inversible, impose des conditions sur les contraintes. Pour le cas de l'équation (4.2.16), la matrice de contraintes peut être

$$\{\phi_i, \phi_j\} = 0 \ . \tag{4.2.19}$$

Les contraintes avec cette propriété (4.2.19) sont appelées des **contraintes de première classe**. Elles ne peuvent pas être utilisées. Nous devons définir des **contraintes de seconde classe**. Ce qui veut dire des contraintes pour lesquelles le Crochet de Poisson n'est pas égal à zéro.

Ainsi C_{ij} existe et nous pouvons écrire la forme de Dirac de l'équation de mouvement :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathscr{H}\}_D \tag{4.2.20}$$

Dirac a remarqué que nous pouvons réécrire :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \{f, \mathscr{H}\} - \{f, \phi_i\} C_{ij}\{\phi_j, \mathscr{H}\}$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \{f, \mathscr{H}\} + \lambda_i \{f, \phi_i\}$$
(4.2.21)

où

$$\lambda_i = -C_{ij}\{\phi_j, \mathscr{H}\} . \tag{4.2.22}$$

Le facteur λ est appelé un **multiplicateur de Lagrange**. Il vient de l'inversion de la matrice des contraintes, ce dont nous parlerons plus tard. Cela nous donne une définition d'un Hamiltonien étendu

$$\mathscr{H}' = \mathscr{H} + \sum_{k} \lambda_k \ \phi_k \approx \mathscr{H}$$
(4.2.23)

où \approx signifie, selon la définition de Dirac, une **égalité faible** (c'est-à-dire qui est vrai si et seulement si nous respectons les contraintes). Alors nous pouvons écrire la relation :

$$\{f, \mathscr{H}\}_D = \{f, \mathscr{H}'\}$$
. (4.2.24)

A la fin, il est plus simple de définir un nouveau Hamiltonien \mathscr{H}' et d'utiliser un crochet de Poisson dans les équations de mouvement. Le crochet de Dirac nous aidera juste à calculer le pré-facteur λ en utilisant le fait que les contraintes sont **indépendantes par rapport au temps** :

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial t} + \{\phi_k, \mathscr{H}'\} = 0 . \qquad (4.2.25)$$

Nous pouvons étendre ce formalisme de Dirac à 2N contraintes. Nous allons voir que cela nous donne la base pour la dynamique relativiste en 4 + 4 dimensions.

4.2.4 Méthodologie Hamiltonienne II

Maintenant, revenons à notre exemple. Dirac propose de modifier le Hamiltonien en incluant les contraintes (4.2.16):

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + \sum_{k} \lambda_k \ \phi_k \ . \tag{4.2.26}$$

Donc le nouveau Hamiltonien est

$$\mathcal{H}' = \eta V(x, y) + \lambda_1 (p_x + \eta y) + \lambda_2 (p_y - \eta x) . \qquad (4.2.27)$$

Nous pouvons calculer les coefficients λ_k en vérifiant que les contraintes sont **invariantes** dans le temps :

$$\{\phi_1, \mathcal{H}'\} = \eta \left(2\lambda_2 - \frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0 \qquad \qquad \lambda_1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial y} \\ \{\phi_2, \mathcal{H}'\} = -\eta \left(2\lambda_1 + \frac{\partial V}{\partial y}\right) = 0 \qquad \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial x} \qquad (4.2.28)$$

Finalement, nous obtenons les équations de mouvement suivantes :

$$\dot{x} = \{x, \mathcal{H}'\} = \lambda_1 = -\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{et} \quad \dot{p}_x = \{p_x, \mathcal{H}'\} = -\eta \lambda_2 = \frac{\eta}{2} \frac{\partial V}{\partial y} \\ \dot{y} = \{y, \mathcal{H}'\} = \lambda_2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{et} \quad \dot{p}_y = \{p_y, \mathcal{H}'\} = -\eta \lambda_1 = \frac{\eta}{2} \frac{\partial V}{\partial x} \quad (4.2.29)$$

Maintenant, nous avons trouvé l'ensemble total des équations de mouvement. Nous pouvons vérifier que le crochet de Dirac

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \phi_1\} C\{\phi_2, B\}$$
(4.2.30)

en utilisant les contraintes définies précédemment

$$C^{-1} = \{\phi_1, \phi_2\} = 2\eta \tag{4.2.31}$$

appliquée au Hamiltonien, nous donne exactement le même résultat que l'équation (4.2.29). Par conséquent, les crochets de Dirac décrivent bien l'évolution temporelle des systèmes Hamiltoniens avec contraintes.

4.2.5 Hamiltonien relativiste

Nous avons vu dans l'exemple précédent une nouvelle manière de construire une dynamique pour les systèmes sous contraintes. Toutefois, c'est l'exemple d'un Lagrangien singulier où les contraintes sont cachées. Néanmoins, cette dynamique est utile pour poser les bases de la dynamique relativiste.

Dans la dynamique relativiste, nous voulons réduire l'espace des phases de 8N à 6N dimensions. Ici, nous ne partons pas d'un Lagrangien mais nous mettons des contraintes à la main. Nous pouvons toujours utiliser le concept de **Dynamique Hamiltonienne sous**

contraintes. Cette réduction est supposée nous donner des équations de mouvement relativistes qui sont les mêmes que les équations classiques dans la limite $\mathbf{v} \ll c$.

Dans les dernières sous-sections, nous avons parlé de la validité du crochet de Poisson. Maintenant nous devons expliquer ce qu'est le "Hamiltonien " qui peut être utilisé dans notre cas relativiste. Nous savons depuis la section (4.1.4) que nous avons des contraintes sur (q^0, p^0) . Ces contraintes doivent apparaître dans le Hamiltonien relativiste. Selon le cas classique de Dirac, nous devrions avoir quelque chose comme :

$$\mathscr{H}' = \mathscr{H} + \sum_{k} \lambda_k \ \phi_k \ . \tag{4.2.32}$$

Dans le cas non-relativiste, les contraintes viennent d'un Lagrangien, et \mathscr{H} reste le Hamiltonien classique. Dans notre cas relativiste, il n'y a pas de contraintes venant d'un Lagrangien mais nous avons des contraintes choisies. La seule possibilité que nous ayons est de définir un Hamiltonien comme **une combinaison de ces contraintes**. Donc, nous définissons le **Hamiltonien relativiste** :

$$\mathcal{H} = \sum_{k} \lambda_k \ \phi_k \tag{4.2.33}$$

avec les contraintes :

$$\phi_k(q^\mu, p^\mu) \approx 0$$
 . (4.2.34)

L'énergie classique n'apparaît plus. La conservation de l'énergie apparaît à travers le fait que les particules sont sur la couche de masse en utilisant des contraintes sur p^0 . Les contraintes sur q^0 doivent décrire l'évolution du système le long du paramètre d'évolution τ .

Maintenant, nous incluons le Hamiltonien (4.2.33) dans l'équation de mouvement (4.1.35):

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\tau} = \{f, \mathcal{H}\} = \sum_{k} \lambda_k \; \{f, \phi_k\} \; . \tag{4.2.35}$$

C'est l'équation de mouvement pour la dynamique relativiste. Maintenant, la question est : quelle est la définition des contraintes ? Ce n'est pas une question simple. Nous devons choisir les contraintes dans le but de trouver des équations de mouvement qui donnent la bonne limite classique. Malheureusement, nous ne pouvons pas simplement commencer par l'équation de mouvement pour en extraire les contraintes.

De plus, nous devons définir les λ_k qui sont les autres outils de la dynamique relativiste. Nous verrons que leur définition mène à des conditions sur la définition des contraintes. Nous devrons aussi présenter le **No Interaction Theorem** (NIT) [110]. Ce théorème énonce que pour les particules relativistes, la seule possibilité pour respecter la transformation de Poincaré est de rester libres de toute interaction. Nous verrons comment éviter ce théorème dans notre cas.
4.3 Conditions sur les contraintes

AINTENANT nous avons défini le formalisme pour une dynamique consistante mais ce n'est toujours pas suffisant. Il y a plusieurs conditions qui doivent être remplies. Bien sûr, la dynamique relativiste inclut des contraintes sur l'énergie et sur le temps alors que la dynamique classique lie l'énergie du système avec le temps global. Cette différence crée des conditions sur le genre de contraintes que nous pouvons choisir. Ensuite, nous allons présenter le No Interaction Theorem et comment le contourner avec la dynamique Hamiltonienne sous contraintes.

4.3.1 Type de contraintes

Pour obtenir les équations de mouvement pour (\mathbf{q}, \mathbf{p}) , nous mettons des contraintes sur (q^0, p^0) . Les N contraintes sur l'énergie p^0 sont appelées K_i . Celles sur le temps q^0 sont appelées χ_i . Finalement notre **ensemble de contraintes** est défini comme :

$$\phi_i(q^{\mu}, p^{\mu}) = 0 = \begin{cases} K_i & 1 < i < N\\ \chi_i & N+1 < i < 2N \end{cases}$$
(4.3.1)

Avec cet ensemble nous pouvons définir la **matrice de contraintes** qui est utilisée dans le formalisme :

$$C_{ij}^{-1} = \{\phi_i, \phi_j\} = \begin{pmatrix} \{K_i, K_j\} & \{K_i, \chi_j\} \\ \{\chi_i, K_j\} & \{\chi_i, \chi_j\} \end{pmatrix}$$
(4.3.2)

avec l'ensemble des sous-matrices :

$$A_{ij}^{-1} = \{K_i, K_j\}$$

$$B_{ij}^{-1} = \{\chi_i, \chi_j\} .$$

$$S_{ij}^{-1} = \{\chi_i, K_j\}$$

(4.3.3)

4.3.2 Multiplicateurs de Lagrange

Nous avons vu que le seul choix possible pour un Hamiltonien relativiste est

$$\mathcal{H} = \sum_{k} \lambda_k \ \phi_k \ . \tag{4.3.4}$$

Nous rappelons le fait que les contraintes doivent être invariantes sous une transformation de Poincaré

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \tau} + \{\phi_i, \mathcal{H}\} = 0 \tag{4.3.5}$$

et en utilisant l'équation (4.3.2) et (4.3.4) nous pouvons écrire

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial \tau} + \lambda_k \ C_{ik}^{-1} = 0 \ . \tag{4.3.6}$$

La seule possibilité pour trouver une solution pour λ_k qui ne soit pas égale à zéro est d'avoir au moins une contrainte χ_N dépendant de τ

$$\lambda_k \ C_{ik}^{-1} = -\frac{\partial \phi_i}{\partial \tau} \ . \tag{4.3.7}$$

Ce n'est toujours pas suffisant : nous ne voulons pas différentes solutions pour différentes ϕ_i . Nous voulons une définition de λ qui dépend seulement de k. Par conséquent, on doit avoir **exactement une des contraintes** ϕ_i **dépendant de** τ . Nous choisissons une des contraintes χ_i parce qu'elle se rapporte au temps q^0 . Nous choisissons χ_N pour remplir ce rôle :

$$\frac{\partial \chi_N}{\partial \tau} = -1 \ . \tag{4.3.8}$$

Nous allons voir dans le NIT pourquoi ce choix est le seul qui soit cohérent. De plus, cela sera assez intuitif au moment où nous définirons la contrainte χ . Nous faisons le choix particulier de l'équation (4.3.8) dans le but d'écrire l'équation (4.3.7) d'une manière simple :

$$\lambda_k = C_{k2N} . \tag{4.3.9}$$

Aussi, nous pouvons écrire

$$C_{ki} \phi_i = \lambda_k \chi_N . \tag{4.3.10}$$

Ensuite, nous devons faire attention au choix de χ parce que cela change immédiatement la valeur de λ , et par la suite, les équations de mouvement (via le Hamiltonien).

4.3.3 Équations de mouvement

Maintenant que nous connaissons la définition du Hamiltonien relativiste (4.2.33) et du multiplicateur de Lagrange (4.3.9), nous pouvons écrire les équations de mouvement relativistes en 8 dimensions :

$$\frac{\mathrm{d}q_{i}^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = \{q^{\mu}, \mathcal{H}\} = \sum_{k=1}^{N} \lambda_{k} \frac{\partial K_{k}}{\partial p_{i\mu}} + \sum_{k=N+1}^{2N} \lambda_{k} \frac{\partial \chi_{k}}{\partial p_{i\mu}} \\
\frac{\mathrm{d}p_{i}^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = \{p^{\mu}, \mathcal{H}\} = -\sum_{k=1}^{N} \lambda_{k} \frac{\partial K_{k}}{\partial q_{i\mu}} - \sum_{k=N+1}^{2N} \lambda_{k} \frac{\partial \chi_{k}}{\partial q_{i\mu}}.$$
(4.3.11)

Même si nous pouvons utiliser ces équations en 6 dimensions grâce aux contraintes, nous ne voulons pas de la contrainte de temps dans les équations de mouvement. La raison est évidente : nous ne voulons pas de dépendance explicite des équations de mouvement avec le paramètre d'évolution τ . Finalement, nous voulons des équations de mouvement dépendantes du K_i . On veut donc que

$$\lambda_k = 0 \quad \text{avec} \quad (N+1 \le k \le 2N) \tag{4.3.12}$$

pour obtenir

$$\frac{\mathrm{d}q_{i}^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = \sum_{k=1}^{N} \lambda_{k} \frac{\partial K_{k}}{\partial p_{i_{\mu}}}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_{i}^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = -\sum_{k=1}^{N} \lambda_{k} \frac{\partial K_{k}}{\partial q_{i_{\mu}}}.$$
(4.3.13)

En développant l'équation (4.3.6) avec K_i :

$$\frac{\partial K_i}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^N \lambda_k \{K_i, K_k\} + \sum_{k=N+1}^{2N} \lambda_k \{K_i, \chi_k\} = \sum_{k=1}^N \lambda_k \{K_i, K_k\} = 0, \qquad (4.3.14)$$

nous voyons que le seul moyen possible de remplir la condition (4.3.12) est de prendre

$$A_{ij}^{-1} = \{K_i, K_j\} = 0.$$
(4.3.15)

C'est la **condition de Komar-Todorov (KT)** [117]. Malheureusement, cette condition réduit fortement le choix de potentiel. Finalement, l'équation (4.3.9) peut être écrite :

$$\lambda_k = S_{kN}$$
 with $(1 < k < N)$. (4.3.16)

4.3.4 Potentiel relativiste

Avec la dynamique classique, nous avons quelques indices sur la manière dont les potentiels fonctionnent. La seule façon de conserver l'énergie est de définir les forces \mathbf{F} comme :

$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad \text{and} \quad \mathbf{F}_{ii} = -\mathbf{F}_{ji}$$
$$\mathbf{F}_{ii} = \sum_{k \neq i} \mathbf{F}_{ki} \quad (4.3.17)$$

Ici, on est intéressé par la définition relativiste du potentiel. La contrainte K_i décrit les particules sur la couche de masse. Cela veut dire que K_i inclut un potentiel de telle sorte que l'énergie du système dans le référentiel global soit conservée. Nous définissons la force relativiste F^{μ} dans le système comme la dérivée d'un potentiel scalaire V:

$$F_{ij}^{\mu} = \partial_j^{\mu} V_i(q^{\mu}, p^{\mu}) .$$
 (4.3.18)

Notre contrainte K_i doit contenir un potentiel V pour faire la distinction entre des particules en interaction et des particules sans interaction. La difficulté vient de la condition KT :

$$A_{ij}^{-1} = \{K_i, K_j\} = 0. (4.3.19)$$

Cela restreint de manière drastique la forme des potentiels qui peut être utilisée pour la dynamique relativiste. Si on considère une contrainte invariante avec une partie cinétique T séparée de la partie potentielle V:

$$K_i = T_i + V_i \tag{4.3.20}$$

avec la *définition* suivante :

$$\frac{\partial T_i}{\partial p_k^{\mu}} = p_{i\mu} \delta_{ik} \quad \text{and} \quad \begin{aligned} \frac{\partial T_i}{\partial q_k^{\mu}} &= 0\\ \frac{\partial V_i}{\partial p_k^{\mu}} &= 0 \end{aligned} \quad \forall i, k , \qquad (4.3.21)$$

alors l'équation (4.3.19) peut être écrite ainsi :

$$p_i^{\mu} \frac{\partial V_i}{\partial q_j^{\mu}} = p_j^{\mu} \frac{\partial V_j}{\partial q_i^{\mu}} . \tag{4.3.22}$$

On peut l'écrire avec l'équation (4.3.18):

$$(p_i^{\mu} + p_j^{\mu})F_{ij\mu} = 0. (4.3.23)$$

Dans le centre de masse de deux particules, cette équation devient

$$\binom{E_i + E_j}{0} \binom{F_{ij}^0}{\mathbf{F}_{ij}} = 0 .$$
 (4.3.24)

Par conséquent, on peut voir que la seule manière de remplir la condition KT est de prendre

$$F_{ij}^0 = 0 . (4.3.25)$$

Nous devons trouver un potentiel tel que la force soit **purement spatiale**. Ainsi, on considère un potentiel

$$V_i(q^{\mu}_{Tij}) \tag{4.3.26}$$

où q_T est un quadri-vecteur d'une distance relative qui doit être spatiale dans le centre de masse de deux particules

$$q_{Tij}^{\mu} \stackrel{\text{CM}}{=} (0, \mathbf{q}_i - \mathbf{q}_i) . \qquad (4.3.27)$$

Nous allons discuter la définition de ce quadri-vecteur dans la section 4.4.2.

Le point intéressant est que la signification physique de ce genre de potentiel. Dans un champ moyen, l'interaction entre deux particules devrait être spatiale, mais nous savons que les interactions avancées ou retardées existent [114]. Au final, on peut simplement remettre en question la validité de la condition KT pour la dynamique relativiste à N-corps.

Si nous oublions la condition KT, nous devons ajouter la contrainte de temps dans l'équation de mouvement comme dans l'équation (4.3.11). Par la suite, le mouvement est-il toujours causal? Avons-nous conservation de l'énergie totale? Nous allons discuter un petit peu plus de cet aspect dans la section 4.4.2.

4.3.5 No Interaction Theorem

Selon la description de la relativité spéciale par Einstein, plusieurs publications [110, 118] expliquent que seul un ensemble de particules sans interaction est invariant sous une transformation de Poincaré. Dès que les particules interagissent, ce n'est plus le cas. C'est le **No Interaction Theorem**. Heureusement, ce théorème se base sur plusieurs hypothèses qui peuvent être utiles pour comprendre la limite de l'applicabilité de ce théorème.

Coordonnées indépendantes

La première hypothèse est : on décrit l'espace des phases de N particules par une structure symplectique \mathbb{R}^{2N} avec des coordonnées canoniques (q^{μ}, p^{μ}) qui sont **indépendantes** :

$$\{q_i^{\mu}, q_j^{\nu}\} = 0
\{p_i^{\mu}, p_j^{\nu}\} = 0
\{q_i^{\mu}, p_j^{\nu}\} = \delta_{ij} \eta_{\mu\nu}$$
(4.3.28)

Nous avons déjà vu que ce n'est pas vrai : nous avons des contraintes pour réduire le nombre de degrés de liberté.

$$q^{\mu}$$
 ~ 0
 $\sigma \tau$ τ
 q^{μ} geometrical
 $-$ canonical

FIG. 4.3– Vue schématique de la World Line Condition.

Équation de mouvement canonique

La deuxième hypothèse est : nous admettons qu'il existe des équations de mouvement. Les équations classiques de mouvement sont définies par un crochet de Poisson avec un Hamiltonien classique \mathscr{H} :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, \mathscr{H}\} \ . \tag{4.3.29}$$

Dans notre cas de dynamique relativiste, nos équations de mouvement obéissent au crochet de Dirac avec le Hamiltonien relativiste \mathcal{H} :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial f}{\partial \tau} + \{f, \mathcal{H}\}_D . \qquad (4.3.30)$$

Ceci est notre **équation de mouvement canonique**. Avec l'aide du crochet de Dirac nous pouvons aussi définir la **transformation canonique**

$$\{f, G\}_D$$
 (4.3.31)

avec le générateur de Poincaré G.

World Line Condition

La dernière hypothèse du NIT est l'invariance de la ligne d'univers (**World Line** (WL)) $\mathbf{q}(t)$. Ici, le temps usuel t est remplacé par un paramètre d'évolution invariant τ . On remarque au passage que nous avons un système sous contraintes, donc le q^0 est lié aux autres quantités de l'espace des phases. Ainsi, on peut utiliser un quadri-vecteur complet $q^{\mu}(\tau)$ pour décrire une ligne d'univers physique.

La World Line Condition (WLC) [119] veut dire que la transformation canonique (4.3.31) appliquée à la ligne d'univers doit donner le même résultat que la transformation de Poincaré qui est appelée transformation géométrique (le nom géométrique vient du fait qu'on applique une matrice sur un vecteur).

Une transformation canonique est définie par la transformation d'une WL avec un générateur de Poincaré G utilisant le crochet de Dirac (dans le cas avec des contraintes, parce que dans les autres cas, nous devons utiliser un crochet de Poisson) :

$$\{q^{\mu}(\tau), G\}_D$$
 (4.3.32)

Puis, la variation de la WL est :

$$q^{\prime \mu}(\tau) = q^{\mu}(\tau) + \{q^{\mu}(\tau), G\}_D . \qquad (4.3.33)$$

Une transformation géométrique est définie par une transformation standard de Poincaré (4.1.27) d'une WL

$$q'^{\mu} = U(1 + \omega^{\mu\nu}, \varepsilon^{\mu}) q^{\mu} .$$
 (4.3.34)

Nous avons volontairement enlevé le τ dans cette expression. La transformation de Poincaré respecte l'invariance de la WL dans le cas classique d'un temps usuel t, mais ce n'est pas nécessairement vrai avec notre dynamique en 8 dimensions. Alors, nous devons écrire l'équation (4.3.34) avec une variation infinitésimale $\delta \tau$:

$$q^{\prime \mu}(\tau) = U(\mathbb{1} + \omega^{\mu\nu}, \varepsilon^{\mu}) q^{\mu}(\tau + \delta\tau) , \qquad (4.3.35)$$

avec

$$q^{\mu}(\tau + \delta\tau) = q^{\mu}(\tau) + \frac{\mathrm{d}q^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} \,\delta\tau \,. \tag{4.3.36}$$

Nous pouvons réécrire cette équation en utilisant l'équation de mouvement canonique (4.3.30):

$$q^{\mu}(\tau + \delta\tau) = q^{\mu}(\tau) + \{q^{\mu}(\tau), \mathcal{H}\}_D \ \delta\tau \ . \tag{4.3.37}$$

L'équation (4.3.35) peut être écrite :

$$q^{\prime \mu}(\tau) = q^{\mu}(\tau + \delta\tau) + \omega^{\mu\nu}q_{\nu}(\tau + \delta\tau) - \varepsilon^{\mu} , \qquad (4.3.38)$$

et ensuite en remplaçant $q^{\mu}(\tau + \delta \tau)$ par (4.3.36) nous obtenons

$$q^{\prime \mu}(\tau) = q^{\mu}(\tau) + \{q^{\mu}(\tau), \mathcal{H}\} \ \delta\tau + \omega^{\mu\nu} \left(q_{\nu}(\tau) + \{q_{\nu}(\tau), \mathcal{H}\}_{D} \delta\tau\right) - \varepsilon^{\mu} \ .$$
(4.3.39)

Nous pouvons simplifier cette équation en négligeant $\omega^{\mu\nu}\delta\tau = \mathcal{O}(\delta\tau^2)$:

$$q^{\prime \mu}(\tau) = q^{\mu}(\tau) + \omega^{\mu\nu} q_{\nu}(\tau) - \varepsilon^{\mu} + \{q^{\mu}(\tau), \mathcal{H}\} \ \delta\tau \ , \tag{4.3.40}$$

et en utilisant une transformation canonique classique

$$\omega^{\mu}{}_{\nu}q^{\nu}(\tau) - \varepsilon^{\mu} = \{q^{\mu}(\tau), G\}$$
(4.3.41)

nous obtenons finalement la formule complète simplifiée

$$q^{\prime \mu}(\tau) = q^{\mu}(\tau) + \{q^{\mu}(\tau), G\} + \{q^{\mu}(\tau), \mathcal{H}\}_D \ \delta\tau \ . \tag{4.3.42}$$

Finalement, en utilisant la transformation canonique (4.3.33) et la transformation géométrique (4.3.42) ensemble, on obtient l'équation de la World Line Condition :

$$\{q^{\mu}(\tau), G\}_{D} = \{q^{\mu}(\tau), G\} + \{q^{\mu}(\tau), \mathcal{H}\}_{D} \ \delta\tau \ . \tag{4.3.43}$$

Cette équation est évidemment respectée pour la dynamique classique quand nous n'avons pas de contraintes ($\{\cdot\}_D \to \{\cdot\}$) parce que qu'il reste $\{q^{\mu}(\tau), \mathcal{H}\} \delta \tau = 0$, ce qui est toujours vrai peu importe le terme cinétique.



FIG. 4.4– Vue schématique de la séparabilité des clusters.

Le défi est maintenant de remplir la WLC avec le crochet de Dirac (4.2.17). Donc, on simplifie l'équation (4.3.43) en utilisant (4.2.17):

$$-\{q_k^{\mu}(\tau), \phi_i\}C_{ij}\{\phi_j, G\} = \{q_k^{\mu}(\tau), \mathcal{H}\}_D \ \delta\tau_k \ . \tag{4.3.44}$$

Ensuite, en utilisant le multiplicateur de Lagrange (4.3.10) on trouve :

$$-\{q_k^{\mu}(\tau), \phi_i\}\lambda_i\{\chi_N, G\} = \{q_k^{\mu}(\tau), \mathcal{H}\}_D \ \delta\tau_k \ , \tag{4.3.45}$$

et avec la définition du Hamiltonien (4.2.33) et le fait que l'on se place sur la surface des contraintes (4.2.24), on écrit :

$$-\{q_k^{\mu}(\tau), \phi_i\}\lambda_i\{\chi_N, G\} = \{q_k^{\mu}(\tau), \phi_i\}\lambda_i \ \delta\tau_k \ . \tag{4.3.46}$$

Finalement, on simplifie le tout en divisant par $\{q_k^{\mu}(\tau), \phi_i\}\lambda_i$:

$$\delta \tau_k = \{G, \chi_N\} , \forall k . \tag{4.3.47}$$

Cette condition est naturellement respectée en utilisant la contrainte χ_N comme elle est définie dans l'équation (4.3.8), peu importe la particule k. On voit immédiatement que pour plus d'une contrainte dépendante de τ , cette condition n'est plus respectée.

L'équation 4.3.47 est la WLC pour une dynamique relativiste sous contraintes. Cela veut dire que pour chaque particule, la variation de la WL doit être la même, indépendamment de la transformation que l'on applique. C'est la définition de la notion de **simultanéité** entre les particules selon le paramètre d'évolution τ , dans le sens relativiste.

Séparabilité des clusters

Maintenant, nous avons les 3 principales hypothèses du NIT. La seule hypothèse qui ne soit pas modifiée par la dynamique sous contraintes est la WLC. Il y a une autre condition qui doit être respectée au sujet des interactions : la **séparabilité des clusters**. Cette condition indique que l'interaction (potentiel ou collisions) entre deux clusters de particules doit disparaître quand la distance entre les deux clusters est très grande. Physiquement, cela veut dire que chaque cluster **séparé** (FIG. 4.4) peut être traité indépendamment de l'autre, de manière dynamique.

Cette condition va aussi restreindre le choix pour la contrainte de temps χ . Les équations de mouvement dépendent du paramètre λ qui dépend lui-même des contraintes K et χ mais nous savons que la contrainte d'énergie K peut inclure un potentiel qui disparaît à longue portée. Au final, la contrainte χ doit simplement être définie de manière à ce que les équations de mouvement de chaque cluster ne soient pas corrélées.

4.4 Contraintes relativistes

'ESPACE des phases relativiste (q^{μ}, p^{μ}) ne peut pas être utilisé directement pour construire des équations de mouvement dans notre espace des phases classique (\mathbf{q}, \mathbf{p}) . On fixe donc deux contraintes sur p^0 et q^0 . Bien sûr, ces contraintes sont **un choix**, et elles peuvent être choisies différemment. Avant de définir ces contraintes, nous pouvons présenter quelques variables utiles. Cela nous aidera à respecter les *conditions sur les contraintes* précédemment définies.

4.4.1 Distance transverse

Les paramètres décrivant l'espace des phases sont des coordonnées canoniques (q^{μ}, p^{μ}) . Cependant, les lois de la relativité restreinte nous enseignent que nous pouvons pas définir un référentiel absolu : n'importe quel référentiel peut être utilisé. Nous savons comment transformer les variables canoniques entre les référentiels et donc les lois physiques sont indépendants du référentiel. Formuler les coordonnées canoniques sous la forme de produits scalaires assure une telle indépendance. Donc, il est utile de présenter la **position relative** et l'**impulsion totale** entre 2 particules :

$$\begin{aligned}
q_{ij}^{\mu} &= q_i^{\mu} - q_j^{\mu} \\
p_{ij}^{\mu} &= p_i^{\mu} + p_j^{\mu}.
\end{aligned}$$
(4.4.1)

Le **centre de masse** (CM) est défini comme le référentiel où les 3-impulsions de deux particules sont égales et opposées. Donc dans le CM nous avons fixé :

$$q_{ij}^{\mu} = (\Delta t_{ij}, \Delta \mathbf{q}_{ij})
 p_{ij}^{\mu} = (E_i + E_j, 0) .$$
 (4.4.2)

Nous voyons immédiatement une propriété intéressante : nous pouvons utiliser le centre de masse afin de séparer les composantes temporelles et spatiales de q_{ij}^{μ} en utilisant son produit scalaire avec p_{ij}^{μ} . De plus, on peut utiliser une autre variable provenant du groupe de Poincaré : le générateur P^{μ} . Nous pouvons utiliser cette variable pour décrire le système de particules tout entier. Par exemple, avec le cas pratique de la Collision d'Ions Lourds (Heavy lon Collision (HIC)) on peut schématiser l'événement en utilisant un cône de lumière :



Nous savons que les collisions d'ions lourds créent beaucoup de particules dans le référentiel de la réaction. Elles sont créées au même temps t_0 et elles évoluent suivant le temps t de l'événement. On peut définir une quantité invariante de Poincaré appelée le temps propre τ d'une particule :

$$\eta^{\mu\nu}q_{\nu}q_{\mu} = q^{\mu}q_{\mu} = t^2 - \mathbf{q}^2 = \tau^2 . \qquad (4.4.3)$$

Cette quantité est différente pour chaque particule. Ainsi, on peut observer le cône de lumière et voir que :

- Pour chaque particule *i* qui est rapide (distante) par rapport à une particule *j* : $\Delta t_{ij} \approx \Delta \mathbf{q}_{ij}$, alors le temps propre de *i* est $\tau_i \approx \tau_j$ (on peut voir que pour une particule avec une vitesse proche de celle de la lumière, le temps propre est **figé**),
- au contraire, pour une particule qui est lente (proche) $i : \Delta q_{ij} \approx 0$ alors son temps propre est $\tau_i \approx t_i$.

Pour distinguer les deux cas quand nous voulons décrire l'interaction, il est utile de définir une autre variable que q_{ij}^{μ} . On peut utiliser le produit scalaire de q_{ij}^{μ} avec p_{ij}^{μ} et P^{μ} . Utiliser p_{ij}^{μ} est évident mais pourquoi utiliser P^{μ} ? Définissons ce quadri-vecteur dans le référentiel de la collision d'ions lourds. Par définition, la moyenne des impulsions est négligeable dans la collision, on a donc

$$P^{\mu} = \left(\sum E, 0, 0, 0\right) \tag{4.4.4}$$

Ces deux quadri-impulsions ne sont pas sans dimension, nous pouvons simplement les normaliser comme :

$$u_{ij}^{\mu} = \frac{p_{ij}^{\mu}}{\sqrt{p_{ij}^{2}}} \stackrel{\text{CM}}{=} (1,0)$$

$$U^{\mu} = \frac{P^{\mu}}{\sqrt{P^{2}}} \stackrel{\text{HIC}}{=} (1,0)$$
(4.4.5)

Nous appelons ces quantités : des **sélecteurs de référentiel** parce qu'elles permettent de faire la distinction entre les composantes spatiale et temporelle pour un système qui est soit le centre de masse de deux particules, soit le référentiel de la HIC. Ces sélecteurs sont intéressants parce que nous remarquons que les dérivées de ces quantités par (q^{μ}, p^{μ}) sont perpenticulaires (spatiales) :

$$\frac{\partial u_{ij}^{\mu}}{\partial q_{k\nu}} = 0 \qquad \text{and} \qquad \frac{\partial u_{ij}^{\mu}}{\partial p_{k\nu}} = \frac{1}{\sqrt{p_{ij}^2}} \left(\eta^{\mu\nu} - u_{ij}^{\mu} u_{ij}^{\nu} \right) \left(\delta_{ik} + \delta_{jk} \right)
\frac{\partial U^{\mu}}{\partial q_{k\nu}} = 0 \qquad \frac{\partial U^{\mu}}{\partial p_{k\nu}} = \frac{1}{\sqrt{P^2}} \left(\eta^{\mu\nu} - U^{\mu} U^{\nu} \right) .$$
(4.4.6)



FIG. 4.5– Décomposition spatio-temporelle de la distance q_{ij}^{μ} .

Revenons à notre variable q_{ij}^{μ} . En utilisant les deux sélecteurs précédents, on peut définir une partie transverse pour chaque référentiel (Centre de Masse (CM) et Collision d'Ions Lourdes (Heavy Ion Collision (HIC))) :

$$q_{T_{ij}^{\mu}} = \left(\eta^{\mu\nu} - u_{ij}^{\mu} \ u_{ij}^{\nu}\right) q_{ij\nu} = q_{ij}^{\mu} - q_{ij\nu} u_{ij}^{\mu} \ u_{ij}^{\nu} \stackrel{\text{CM}}{=} (0, \vec{q}_{ij}) q_{T_{ij}}^{\prime \mu} = \left(\eta^{\mu\nu} - U^{\mu}U^{\nu}\right) q_{ij\nu} = q_{ij}^{\mu} - q_{ij\nu}U^{\mu}U^{\nu} \stackrel{\text{HIC}}{=} (0, \vec{q}_{ij}) .$$

$$(4.4.7)$$

On remarque les propriétés suivantes :

$$q_{T_{ij}^{\mu}} u_{ij\mu} = 0$$

$$q_{T_{ij}^{\mu}} q_{L_{ij\mu}} = 0 \quad \text{avec} \quad q_{L_{ij}^{\mu}} = q_{ij\nu} u_{ij}^{\nu} u_{ij}^{\mu} . \qquad (4.4.8)$$

$$q_{T_{ij}^{2}} + q_{L_{ij}^{2}} = q_{ij}^{2}$$

On a le même type de propriétés pour $q_{Tij}^{\prime \mu}$.

4.4.2 Séparabilité des particules

Quand on regarde la FIG. 4.5, on voit immédiatement que la variable q_T peut être utilisée comme une variable pour le potentiel relativiste car elle est purement spatiale au centre de masse. Pour assurer l'invariance de Lorentz, nous utilisons seulement des produits scalaires comme q_T^2 . Dans le cas d'un potentiel $V(q_T^2)$ nous avons besoin de calculer les dérivées de q_T^2 . On trouve :

$$\frac{\partial q_{T_{ij}}^{2}}{\partial q_{k\nu}} = 2q_{T_{ij\mu}} \frac{\partial q_{T_{ij}}^{\mu}}{\partial q_{k\nu}}
= 2q_{T_{ij\mu}} \frac{\partial}{\partial q_{k\nu}} \left(q_{ij}^{\mu} - q_{ij\sigma} u_{ij}^{\sigma} u_{ij}^{\mu} \right)
= 2q_{T_{ij\mu}} \left[\left(\delta_{ik} - \delta_{jk} \right) \eta^{\mu\nu} - \frac{\partial \left(q_{ij\sigma} u_{ij}^{\sigma} \right)}{\partial q_{k\nu}} u_{ij}^{\mu} - q_{ij\sigma} u_{ij}^{\sigma} \frac{\partial u_{ij}^{\mu}}{\partial q_{k\nu}} \right].$$
(4.4.9)

Avec les équations (4.4.8) et (4.4.6), on remarque que les deuxième et troisième termes disparaissent.

$$\frac{\partial q_{T_{ij}^2}}{\partial q_{k\nu}} = 2q_{T_{ij}^\nu}(\delta_{ik} - \delta_{jk})$$

$$\frac{\partial q_{T_{ij}^2}}{\partial p_{k\nu}} = 0$$
(4.4.10)

Encore une fois, le même type de dérivées peut être trouvé pour q'_T .

On voit que q_T donne une interaction purement spatiale pour deux particules et q'_T fait la même chose pour tout le système. En rappelant l'équation (4.4.7) et la condition KT (4.3.23) on voit que q_T respecte la formule KT, et que la somme des forces est égale à zéro dans le centre de masse pour deux particules ($F^0 = 0$). Si l'énergie est conservée dans le centre de masse de deux particules, ce n'est pas forcément le cas pour N particules.



L'énergie totale **est conservée** lorsqu'on prend $V(q_T)$. Dans ce cas, la condition KT (4.3.15) est respectée, et par conséquent la contrainte χ_i n'apparait pas dans les équations de mouvement (4.3.13).

Cette conséquence est très appréciable car cela permet d'éviter d'avoir à calculer numériquement l'inversion complète de la matrice des contraintes, ce qui est extrêmement coûteux en temps de calcul. Nous verrons dans la section suivante que la définition de χ_i permet d'avoir une solution analytique de cette matrice inverse.

A propos de χ_i , qu'en est-il de la séparabilité des clusters? Si nous voulons utiliser la contrainte de temps pour distinguer le système entier d'une particule isolée, on peut utiliser une distance invariante L pour la **distance d'interaction**. Puis, en considérant une distribution de particules comme une fonction de densité de Wigner (4.1.11), c'est-à-dire : une Gaussienne dans l'espace des phases, nous pouvons définir une densité scalaire de particules dans l'espace comme :

$$R_{ij} = \exp\left(\frac{q_T_{ij}^2}{L^2}\right) \ . \tag{4.4.11}$$

Avec la densité $0 < R_{ij} < 1$, nous pouvons distinguer si les particules i et j sont proches $(R_{ij} \approx 1)$ ou éloignées $(R_{ij} \approx 0)$. Nous remarquons que la distribution de la densité est invariante de Lorentz. On peut dériver cette fonction Gaussienne comme

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial q_k^{\mu}} = R_{il} \frac{2q_{T_{ij\mu}}}{L^2} (\delta_{ik} - \delta_{jk})$$

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial p_k^{\mu}} = 0.$$
(4.4.12)

Ainsi, on peut définir un potentiel $V(R_{ij})$ de telle manière que la condition KT (4.3.15) devienne

$$p_{ij}^{\mu}q_{T_{ij\mu}}R_{ij} = 0 \tag{4.4.13}$$

ce qui est par définition toujours vrai. Nous pouvons même utiliser cette densité dans la contrainte de temps pour distinguer le système entier d'une particule isolée (FIG. 4.6).



FIG. 4.6– Particule en interaction (1) et libre (2).

En conséquence, la matrice de contraintes S_{ij}^{-1} qui apparaît dans l'expression de λ devrait être capable d'être scindée en plusieurs sous-matrices indépendantes pour décrire chaque cluster ainsi formé [111]. On verra qu'on peut cependant utiliser d'autre méthode pour obtenir une séparation des cluster. L'utilisation d'une fonction de proximité n'est pas la seule manière d'obtenir une dynamique indépendante du cluster.

4.4.3 Contrainte sur l'énergie

Notre première contrainte est sur l'énergie des particules. Cette contrainte joue le même rôle que le Hamiltonien dans des systèmes non-relativistes. On l'appelle **contrainte sur la couche de masse** et elle relie l'énergie des particules avec l'impulsion de manière invariante de Lorentz :

$$K_i = p_i^{\ \mu} p_{i\mu} - m_i^2 - V_i = 0 \tag{4.4.14}$$

en utilisant l'un des opérateurs de Casimir du groupe de Poincaré

$$p_i^{\ \mu} p_{i\mu} = m_i^{*2} \quad \text{with} \quad m_i^{*2} = m_i^{\ 2} + V_i$$

$$(4.4.15)$$

où V_i est un potentiel qui agit comme une masse effective. Nous faisons le choix d'utiliser

$$V_i = \sum_{j \neq i} V_{ij} (q_T{}_{ij}^2) . ag{4.4.16}$$

Les dérivées de cette contrainte par rapport aux coordonnées canoniques sont :

$$\frac{\partial K_i}{\partial p_k^{\mu}} = 2 p_{i\mu} \delta_{ik}
\frac{\partial K_i}{\partial q_k^{\mu}} = -\sum_k \frac{\partial V}{\partial q_k^{\mu}}$$
(4.4.17)

Ces dérivées apparaissent explicitement dans les équations de mouvement (4.3.13) qui sont finalement :

$$\frac{\mathrm{d}q_i^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = 2\lambda_i p_i^{\mu}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_i^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = -\sum_{k=1}^N \lambda_k \frac{\partial V_k}{\partial q_{i\mu}}$$
(4.4.18)

4.4.4 Contrainte sur le temps

Nous avons aussi besoin de N contraintes pour les temps des particules. En sachant que l'une de ces contraintes doit dépendre explicitement de τ (équation (4.3.8) et (4.3.47)), cela nous conduit à définir les N-1 premières contraintes comme un ensemble de relations entre des particules avec q_{ij}^{μ} :

• Soit on utilise U pour décrire le temps dans la Collision d'Ions Lourds (Heavy Ion Collision (HIC)) :

$$\chi_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}^{\mu} U_{\mu} = 0 \qquad \text{que l'on peut écrire} \qquad \langle \Delta q_{\text{HIC}}^0 \rangle = 0 , \qquad (4.4.19)$$

• Soit on utilise u_{ij} pour le temps de deux particules dans le Centre de Masse (CM) :

$$\chi_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}^{\mu} \ u_{ij\mu} = 0 \qquad \text{que l'on peut écrire} \qquad \langle \Delta q_{\rm CM}^0 \rangle = 0 \ . \tag{4.4.20}$$

La seconde équation a été définie précédemment dans [111]. Mais nous allons voir dans la section suivante (4.5.2) que cette seconde définition ne donne pas les bonnes équations pour plus de deux particules (c'est-à-dire quand $u_{ij}^{\mu} \neq U^{\mu}$) : la vitesse des particules peut être au dessus de la vitesse de la lumière (mouvement non-physique).

Nous pouvons définir une nouvelle contrainte pour montrer les deux précédents cas (4.4.19) et (4.4.20) de manière combinée. En utilisant le facteur (4.4.11) pour faire la distinction entre des particules proches ou lointaines, on peut définir :

$$\chi_i = \sum_{j \neq i} q_{ij\mu} \left(u_{ij}^{\mu} R_{ij} + U^{\mu} (1 - R_{ij}) \right) = 0 . \qquad (4.4.21)$$

Ici, ce facteur n'est pas utilisé comme potentiel, mais pour donner une transition dynamique d'une particule lointaine (4.4.19) à une particule proche (4.4.20).

En pratique, nous utilisons seulement la contrainte (4.4.19) pour obtenir les bonnes équations de mouvement pour les particules libres, mais nous pensons qu'il est important de présenter les résultats avec cette contrainte mixte dans la prochaine section.

Les contraintes de temps χ_i que nous avons définies, sont pour 0 < i < N - 1. Leur rôle est de connecter les temps Δq^0 entre particules. Nous avons besoin d'une dernière contrainte χ_N pour relier les temps des particules au paramètre d'évolution invariant τ . On choisit simplement la moyenne des temps de toutes les particules pour cette dernière contrainte :

$$\chi_N = \frac{\sum_l q_l^{\mu}}{N} U_{\mu} - \tau = 0 \qquad \text{que l'on peut écrire} \qquad \langle q^0 \rangle = \tau . \tag{4.4.22}$$

Cette contrainte est la plus importante. Dans les équations de mouvement (4.3.13), on utilise le facteur λ (4.3.16) qui est directement lié à la valeur inverse de χ_N dans la matrice des contraintes. Finalement, la dynamique dépend aussi fortement du choix de χ_N .

4.4.5 Matrice de contraintes

Nous rappelons la définition de la matrice de contraintes S_{ij}^{-1} utilisée pour calculer λ :

$$S_{ij}^{-1} = \{\chi_i, K_j\} = \sum_k \frac{\partial \chi_i}{\partial q_k^{\mu}} \frac{\partial K_j}{\partial p_{k\mu}} - \frac{\partial \chi_i}{\partial p_k^{\mu}} \frac{\partial K_j}{\partial q_{k\mu}} .$$
(4.4.23)

On remarque que peu importe la contrainte χ , toutes les dérivées ¹ par rapport à p_k^{μ} sont égales à zéro parce que nous utilisons seulement u_{ij} et U (4.4.6), et jamais p^{μ} lui-même. Finalement, cette propriété implique que **la matrice de contraintes ne dépende pas du tout du potentiel** V. Pour la contrainte mixte (4.4.21), on obtient pour χ_i :

$$S_{ij}^{-1} = 2 \left(\left(\sum_{l \neq i} (\delta_{ij} - \delta_{lj}) (u_{il}^{\mu} R_{il} + U^{\mu} (1 - R_{il})) \right) \cdot p_{j}^{\mu} + \left(\sum_{l \neq i} (\delta_{ij} - \delta_{lj}) (q_{il\nu} (u_{il}^{\nu} - U^{\nu})) R_{il} \frac{2q_{Til\mu}}{L^{2}} \right) \cdot p_{j}^{\mu} \right) .$$

$$(4.4.24)$$

Pour χ_N on obtient :

$$S_{Nj}^{-1} = 2 \, \frac{p_j^{\mu} \, U_{\mu}}{N} \,. \tag{4.4.25}$$

4.5 Cas pratique

D^{ANS} cette section, nous proposons d'examiner deux scénarios pour tester la dynamique relativiste : le cas de deux particules et la généralisation à N particules. Nous allons vérifier les équations de mouvement dans les cas relativiste et classique (dans la limite de faible vitesse).

4.5.1 Le cas de deux particules

Pour le simple cas de deux particules, on peut se placer dans le centre de masse et considérer, par exemple que $V_1 = V_2 = V$. Dans ce cas, les contraintes sont très simples :

$$K_{1} = p_{1}^{2} - m_{1}^{2} + V = 0 \qquad \qquad \chi_{1} = q_{12}^{\mu} u_{12\mu} = 0$$

$$K_{2} = p_{2}^{2} - m_{2}^{2} + V = 0 \qquad \qquad \text{et} \qquad \qquad \chi_{2} = \frac{1}{2} (q_{1} + q_{2})^{\mu} u_{12\mu} - \tau = 0 \qquad (4.5.1)$$

Ce qui nous donne la matrice de contraintes suivante :

$$S_{ij}^{-1} = \begin{pmatrix} \{\chi_1, K_1\} & \{\chi_1, K_2\} \\ \{\chi_2, K_1\} & \{\chi_2, K_2\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \ p_1^{\mu} u_{12}^{\mu} & -2 \ p_2^{\mu} u_{12\mu} \\ p_1^{\mu} u_{12}^{\mu} & p_2^{\mu} u_{12\mu} \end{pmatrix}$$
(4.5.2)

que nous pouvons inverser :

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} (4 \ p_1^{\mu} u_{12\mu})^{-1} & (2 \ p_1^{\mu} u_{12\mu})^{-1} \\ (4 \ p_2^{\mu} u_{12\mu})^{-1} & (2 \ p_2^{\mu} u_{12\mu})^{-1} \end{pmatrix}$$
(4.5.3)

^{1.} Pour le calcul détaillé des dérivées et des variables de distance, voir l'annexe

pour finalement trouver les multiplicateurs de Lagrange :

$$\lambda_{1} = (2 \ p_{1}^{\mu} u_{12\mu})^{-1} = \frac{1}{2E_{1}}$$

$$\lambda_{2} = (2 \ p_{2}^{\mu} u_{12\mu})^{-1} = \frac{1}{2E_{2}}$$
(4.5.4)

Finalement, les équations de mouvement pour deux particules sont :

$$\frac{\partial q_i^{\mu}}{\partial \tau} = \frac{p_i^{\mu}}{E_i}
\frac{\partial p_i^{\mu}}{\partial \tau} = -\sum_{k=1}^2 \frac{1}{2E_k} \frac{\partial V}{\partial q_{i\mu}}$$
(4.5.5)

Le cas classique est atteint en supposant simplement que $\mathbf{p} \ll E_i$ (i.e. $E_i \simeq m_i$). Ainsi, nous avons un multiplicateur comme

$$\lambda_i = \frac{1}{2m_i} \tag{4.5.6}$$

et on retrouve des équations de mouvement classiques.

Le cas de deux particules est malheureusement trivial. Il est nécessaire de traiter le cas de N particules de manière à valider le modèle dynamique.

4.5.2 Le cas de N particules

Pour aborder le cas de N particules, on doit en réalité traiter le cas de trois particules. Pour comprendre la dynamique, nous proposons d'étudier les équations de mouvement (4.3.13) dans le cas de différents choix des contraintes de temps : d'abord la contrainte (4.4.19), puis (4.4.20) et enfin la contrainte mixte (4.4.21).

Bien sûr, le but ici est de vérifier que nous trouvons des équations de mouvement consistantes pour une particule libre, puisque dans tous les cas le potentiel n'est pas impliqué dans l'expression de λ . Nous commençons par le cas de la contrainte (4.4.19). Dans ce cas, les contraintes sont :

$$K_{1} = p_{1}^{2} - m_{1}^{2} + V_{1} = 0 \qquad \qquad \chi_{1} = (q_{12} + q_{13})^{\mu}U_{\mu} = 0$$

$$K_{2} = p_{2}^{2} - m_{2}^{2} + V_{2} = 0 \qquad \text{et} \qquad \chi_{2} = (q_{21} + q_{23})^{\mu}U_{\mu} = 0 \qquad (4.5.7)$$

$$K_{3} = p_{3}^{2} - m_{3}^{2} + V_{3} = 0 \qquad \qquad \chi_{3} = (q_{1} + q_{2} + q_{3})^{\mu}U_{\mu}/3 - \tau = 0$$

avec la matrice de contraintes :

$$S_{ij}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 \ p_1^{\mu} U_{\mu} & -2 \ p_2^{\mu} U_{\mu} & -2 \ p_3^{\mu} U_{\mu} \\ -2 \ p_1^{\mu} U_{\mu} & 4 \ p_2^{\mu} U_{\mu} & -2 \ p_3^{\mu} U_{\mu} \\ 2/3 \ p_1^{\mu} U_{\mu} & 2/3 \ p_2^{\mu} U_{\mu} & 2/3 \ p_3^{\mu} U_{\mu} \end{pmatrix}$$
(4.5.8)

dont l'inverse est :

$$S_{ij} = \begin{pmatrix} (6 \ p_1^{\mu} U_{\mu})^{-1} & 0 & (2 \ p_1^{\mu} U_{\mu})^{-1} \\ 0 & (6 \ p_2^{\mu} U_{\mu})^{-1} & (2 \ p_2^{\mu} U_{\mu})^{-1} \\ -(6 \ p_3^{\mu} U_{\mu})^{-1} & -(6 \ p_3^{\mu} U_{\mu})^{-1} & (2 \ p_3^{\mu} U_{\mu})^{-1} \end{pmatrix}$$
(4.5.9)



FIG. 4.7– Test dynamique avec m = 10 MeV, $\mathbf{p} = 1000$ MeV, b = 0.1 fm et L = 1 fm.

Ce qui nous donne, comme pour le cas de deux particules

$$\lambda_k = \frac{1}{2E_k} \tag{4.5.10}$$

Dans ce cas, les équations de mouvement sont les mêmes que celles du cas de deux particules (4.5.5). En effet, utiliser U^{μ} dans la contrainte de temps nous donne finalement le même multiplicateur de Lagrange soit pour 1,2 soit pour N particules. cela vient du fait que nous puissions écrire P^{μ} comme la somme de p_i^{μ} . Nous pouvons évidemment diviser ce P^{μ} en plusieurs clusters car p_i^{μ} sont indépendants :

$$P^{\mu} = \sum_{i=1}^{N} p_{i}^{\mu} = \sum_{i=1}^{k} p_{i}^{\mu} + \sum_{i=k+1}^{N} p_{i}^{\mu} = P_{1}^{\mu} + P_{2}^{\mu} . \qquad (4.5.11)$$

Dans ce cas, les équations de mouvement ne sont pas liées au système que l'on utilise, et sont donc indépendantes du référentiel. Ceci est la **Séparabilité des clusters** de la dynamique.

Maintenant, si on traite le cas de la contrainte (4.4.20) [111]. On change seulement les N - 1 premières contraintes χ_i :

$$\chi_1 = q_{12}^{\mu} u_{12\mu} + q_{13}^{\mu} u_{13\mu} = 0$$

$$\chi_2 = q_{21}^{\mu} u_{21\mu} + q_{23}^{\mu} u_{23\mu} = 0$$
(4.5.12)

et ensuite :

$$S_{ij}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 \ p_1^{\mu} (u_{12} + u_{13})_{\mu} & -2 \ p_2^{\mu} u_{12\mu} & -2 \ p_3^{\mu} u_{13\mu} \\ -2 \ p_1^{\mu} u_{12\mu} & 4 \ p_2^{\mu} (u_{21} + u_{23})_{\mu} & -2 \ p_3^{\mu} u_{23\mu} \\ 2/3 \ p_1^{\mu} U_{\mu} & 2/3 \ p_2^{\mu} U_{\mu} & 2/3 \ p_3^{\mu} U_{\mu} \end{pmatrix}$$
(4.5.13)

L'inverse de cette matrice donne des termes très complexes, mais ils peuvent être simplifiés si :

- on tend vers le cas ultra-relativiste $m_i \to 0$,
- on tend vers le cas classique : $\mathbf{p}_i \to 0$ ($\mathbf{p}_i \simeq m_i$).

Dans ces cas particuliers, on trouve également

$$\lambda_k = \frac{1}{2E_k} \tag{4.5.14}$$



FIG. 4.8–Vitesse des particules mobiles à proximité d'une particule massive.

mais autrement, dans le cas général, **on ne trouve pas d'équations de mouvement standards**. Cela peut mener à des vitesses plus grandes que la vitesse de la lumière *c*. Dans ce cas, le **mouvement n'est pas physique** (4.1.36) pour les particules libres avec ce choix de contrainte. On doit aussi mentionner qu'il y a un problème de convergence numérique dans le cas d'une particule isolée, à cause de l'inversion de la matrice qui échoue à cause de la limite de précision numérique [120].

Pour illustrer ces deux cas, ainsi que la contrainte où les deux cas précédents sont combinés, nous proposons de considérer le cas suivant : on prend 3 particules massives (FIG. 4.7). Une particule est placée au centre du système, sa position est fixe et nous allons faire varier sa masse. Les deux autres particules se déplacent face à face autour de la première, avec une petite masse et une large impulsion (vitesse relativiste).

On montre la variation de la vitesse des particules mobiles, pour chacune des contraintes de temps et pour différentes masses de la particule fixe (FIG. 4.8). On peut voir qu'à l'intérieur de la zone donnée par L, la vitesse est plus grande que celle de la lumière, ce qui n'est pas physique.

Au final, les seules équations de mouvement

- qui soit causales,
- qui remplissent la World Line Condition,
- et qui respectent la Séparabilité des clusters,

sont les équations avec la contrainte (4.4.19). Cette contrainte donne finalement les mêmes équations de mouvement pour chaque système quel que soit le nombre de particules. Ceci est un point important car nous savons que nous devons décrire un système dans lequel les particules peuvent être créées ou annihilées.

4.6 Méthode de collision relativiste

NOUS n'avons pas encore parlé de collisions dans le chapitre mais elles doivent être décrites dans le formalisme. Dans la théorie quantique des champs, on peut associer la description de l'interaction aux processus durs et mous. A partir de cela, on a des potentiels et des sections efficaces entre les particules. Cela peut impliquer des interactions de 2, 3 ou plus de corps. Nous commencerons la section en présentant rapidement l'interaction à deux corps. On se limite au cas $2 \rightarrow 2$ parce que nous partons de l'hypothèse que c'est l'ordre dominant dans la dynamique à N-corps. Les potentiels à deux corps et des sections efficaces $2 \rightarrow 2$ devrait donc nous donner une bonne estimation de la dynamique globale.

4.6.1 De l'interaction aux collisions

Une des plus importantes variables d'interaction dans la physique nucléaire est la matrice de Brückner G.

Définition : Matrice de diffusion

Pour deux particules dans le milieu nucléaire, la matrice de Brückner G est l'équivalent de la matrice de diffusion T dans un espace libre. Cette matrice peut être définie en incluant des effets quantiques comme le blocage de Pauli. On peut utiliser l'équation de Bethe-Goldstone pour une énergie ω [121] avec cette matrice G pour avoir :

$$G(\omega) = V + V \frac{\hat{Q}}{\omega - \mathscr{H}} G(\omega)$$
(4.6.1)

où V est le potentiel à 2-corps dans l'espace libre, \hat{Q} est l'opérateur de blocage de Pauli, et \mathscr{H} est le Hamiltonien libre (seulement l'énergie cinétique) pour ces 2 particules.

On peut représenter cette équation de manière graphique :

$$\mathbf{G} = \mathbf{V} + \mathbf{V} \mathbf{G}$$

qui peut être développée pour tous les termes correctifs dans le milieu :





FIG. 4.9– Collision relativiste dans le centre de masse.

On peut extraire le potentiel effectif et les sections efficaces de cette matrice G:

$$\operatorname{Re}(\operatorname{Tr}(G)) = V$$

$$\operatorname{Im}(\operatorname{Tr}(G)) = \sigma$$
(4.6.2)

Pour la partie réelle de cette matrice, on peut extraire : le potentiel V, et la section efficace σ qui est la probabilité des processus de collision. Nous avons déjà inclus précédemment le potentiel dans la contrainte d'énergie. La section efficace vient de la théorie quantique des champs choisie pour la dynamique des particules pour décrire des collisions physiques. Une collision est un saut d'impulsions dans un espace des phases à un temps donné. Dans la dynamique moléculaire, les collisions peuvent être traitées avec un algorithme **géométrique** [114] ou un algorithme **stochastique** [100]. Nous allons présenter seulement la première méthode, qui est la plus coûteuse en temps de calcul mais aussi la plus précise.

4.6.2 Algorithme standard

La méthode de collision relativiste classique [114] utilise la section efficace du processus $2 \rightarrow 2$ et certains paramètres venant du centre de masse pour décrire une collision qui est correcte quantitativement (multiplicité de collisions) et qualitativement (causalité). Cette méthode est purement spatiale mais néanmoins relativiste. On peut représenter la méthode de collision par la FIG. 4.9 qui est une vue transverse d'un couple de particules.

Dans le laboratoire comme dans le centre de masse, les particules ont une distance transverse et une vitesse. Bien sûr, on applique la méthode de collision dans le centre de masse. Nous savons que le paramètre d'impact b est invariant de Lorentz. Nous avons aussi besoin de quelques paramètres dans le test de collision, par exemple : la section efficace, et aussi le pas de temps utilisé dans la simulation. Nous pouvons maintenant expliquer les différents paramètres présents dans la FIG. 4.9 :

• r est le boost de Lorentz de la distance entre les particules i et j,

$$r = \mathbf{q}_{ij}' = \mathbf{q}_{ij} + \beta_{ij} \left(\frac{\gamma - 1}{\beta_{ij}^2} \left(\mathbf{q}_{ij} \cdot \beta_{ij} \right) \right)$$
(4.6.3)

avec le paramètre de Lorentz du boost :

$$\beta_{ij} = \frac{\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j}{E_i + E_j} \quad \text{and} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{ij}^2}} \tag{4.6.4}$$

Toutes ces quantités sont exprimées avec des variables dans le référentiel de la HIC. On remarque immédiatement que le terme temporel manquant dans l'équation (4.6.3). Cette transformation suppose donc que les temps des particules sont égaux.
d est la distance jusqu'au point où les particules sont au plus proche,

- $d = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|} \tag{4.6.5}$
- *b* est le paramètre d'impact,

$$b = \sqrt{r^2 - d^2} \tag{4.6.6}$$

• d' est la distance parcourue pendant le pas de temps Δt ,

$$d' = v_{\text{rel.}} \underbrace{\gamma \,\Delta t}_{\Delta t'} \tag{4.6.7}$$

avec la vitesse relative entre les particules (calculée dans le CM)

$$v_{\rm rel.} = \left(\frac{\mathbf{p}}{E_1} + \frac{\mathbf{p}}{E_2}\right) \tag{4.6.8}$$

• L est la distance d'interaction avec une section efficace donnée σ ,

$$L = \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}} \tag{4.6.9}$$

Ici L est bien sûr un paramètre spatial (comme b). Nous savons que les particules qui collisionnent avec une section efficace σ viennent d'une distance infinie et repartent vers l'infini (par symétrie de renversement du temps). Les collisions sont donc causales.

Avec tous ces paramètres, nous pouvons facilement tester la collision pour chaque couple de particules. Dans ce cas, on exécute deux tests simples pour vérifier la proximité spatiale. La première partie du test vérifie que le paramètre d'impact est plus petit que la section efficace géométrique :

$$b < L \tag{4.6.10}$$

Puis, la seconde partie se focalise sur la causalité. Nous devons autoriser la collision seulement quand les deux particules se croisent au point le plus proche. Alors on vérifie que :

$$d < d' \tag{4.6.11}$$

Ces deux conditions assurent les propriétés relativistes des collisions. Le fait que nous prenions $\Delta t_{ij} = 0$ dans (4.6.3) peut être justifié en choisissant la HIC comme le référentiel global de la simulation. Au final, on fait bouger les particules dans le système selon un paramètre d'évolution τ qui est invariant. Mais la contrainte χ_N pose la condition que le temps moyen du système est lié à ce paramètre invariant.

Finalement, même si le temps propre τ_i de chaque particule est différent, le temps t_i est le même. Le second test pour les collisions (4.6.11) vérifie seulement que les deux particules sont dans le même cône de lumière (c'est-à-dire que si la collision est possible, elle est causale).

4.6.3 Méthode invariante

On peut facilement calculer L et d', mais comment calculer les autres paramètres en adéquation avec la dynamique relativiste? Finalement, on doit seulement réécrire les paramètres précédents de manière invariante :

• r qui est modifié comme suit

$$r = \sqrt{-q_T_{ij}^2} \tag{4.6.12}$$

• et d qui est modifié comme suit

$$d = \sqrt{\frac{\left(q_{T_{ij}}^{\mu} p_{T\mu}\right)^2}{p_T^2}}$$
(4.6.13)

avec l'impulsion transverse p_T (c'est-à-dire l'impulsion dans le centre de masse)

$$p_T{}^{\mu} = p_i^{\mu} - p_{i\nu} u_{ij}^{\nu} u_{ij}^{\mu} \tag{4.6.14}$$

Ceci est l'exact équivalent de la méthode précédente, mais réécrite comme invariante. Bien sûr, on garde

$$b = \sqrt{r^2 - d^2} \tag{4.6.15}$$

Malgré cette équation, nous pouvons soulever la question de la nature de σ . Dans une théorie quantique des champs, on intègre tous les diagrammes de Feynman possibles sur tout l'espace des phases pour obtenir la probabilité d'un processus. Mais, nous n'avons aucune idée de ce qu'il se passe vraiment de manière microscopique. C'est-à-dire que par exemple, dans une simple diffusion élastique entre deux particules, la particule échangée peut être émise d'un côté ou de l'autre.

L'algorithme de collision est correct dans le cas limite où des collisions à distance sont symétriques dans le temps, ce qui n'est pas nécessairement le cas pour un système très dense. On considère dans notre cas que cette hypothèse reste correcte même pour de larges sections efficaces σ .

4.7 Conclusion

I^L est temps de conclure. On peut résumer le formalisme de la dynamique relativiste en **trois points importants** :

- On a une **réduction dimensionnelle** de l'espace de Minkowski (8) à l'espace des phases classique (6) **en utilisant des contraintes**,
- Ensuite, on a besoin de définir, pour ce type de dynamique, les **équations de mouvement relativistes** en utilisant **le crochet de Dirac**,
- Finalement, on doit faire attention aux contraintes que l'on choisit dans le but de retrouver les équations de mouvement **dans la limite classique**.

La dynamique relativiste que l'on utilise est finalement définie par :

$$\frac{\mathrm{d}q_{i}^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{p_{i}^{\mu}}{p_{i}^{\nu}U_{\nu}}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_{i}^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = -\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2p_{k}^{\nu}U_{\nu}} \frac{\partial V_{k}(q_{T})}{\partial q_{i_{\mu}}} + \langle \text{collisions} \rangle$$
(4.7.1)

pour tous les systèmes. Dans un système où les 3-impulsions moyennes totales sont environ zéro (par example comme la HIC), on trouve :

$$\frac{\mathrm{d}q_{i}^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{p_{i}^{\mu}}{E_{i}}$$

$$\frac{\mathrm{d}p_{i}^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = -\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2E_{k}} \frac{\partial V_{k}(q_{T})}{\partial q_{i_{\mu}}} + \langle \text{collisions} \rangle$$
(4.7.2)

Dans tous les cas, nous utilisons seulement ces équations pour $\mu = 1, 2, 3$ (le cas $\mu = 0$ étant sous contrainte).



Après avoir introduit un modèle de transition de phase physique de la matière nucléaire dans le chapitre 1, et la dynamique pour faire des simulations réalistes de ce système dans ce chapitre, il est temps de traiter les cas pratiques dans le chapitre suivant, où l'on présentera des résultats de simulations.



INTEGRAL

« Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme. »

Antoine-Laurent de Lavoisier (1743–1794)



FIG. 5.1– Visualisation 3D d'une simulation de l'expansion et de la transition de phase d'un QGP, pour une collision Pb-Pb à b = 6.5 fm et $\sqrt{s_{NN}} = 200$ GeV à : t = 0 fm/c (gauche), t = 2 fm/c (milieu) et t = 5 fm/c (droite). Les boules vertes sont les quarks u, d, les rouges sont les antiquarks \bar{u}, \bar{d} , les bleues sont les s, \bar{s} , et les grises sont les hadrons (π, K, η) .

5.1 Présentation du modèle

NOTRE modèle de simulation est un ensemble de phénomènes décrits en pratique par un programme informatique baptisé INTEGRAL (INTEractive Generalized Relativistic **AL**gorithms). Ce programme est écrit de manière à être moderne, portable, et facilement assimilable par une tierce personne. Pour cela, il est écrit en C++ (compatible avec 99% des plateformes actuelles), il est entièrement autonome (il n'utilise que les librairies standards du C++), et pour finir il est fortement commenté (et bien évidemment, tout en anglais). Ce programme de simulation se place donc dans la catégorie des générateurs d'évènements.

Définition : Générateur d'évènements

Tout d'abord qu'est-ce qu'un évènement? C'est une collision entre noyaux atomiques (proton, deutéron, calcium, or, plomb, ...). Dans le cas des noyaux massifs, on utilise le terme **collision d'ions lourds**.

Un générateur d'évènement est donc un **programme informatique** qui est conçu pour générer l'état final d'un évènement, en simulant les phénomènes physiques qui amènent le système de l'état initial à l'état final.

Chaque générateur d'évènement peut utiliser des techniques complètement différentes. Le but étant de décrire **certains types de particules** dans l'état final (on peut s'intéresser : aux photons, aux dileptons, aux hadrons), et de les comparer à ce qui est mesuré dans l'expérience. Parmi les générateurs très connus, on peut citer HERWIG, PYTHIA, PHSD, UrQMD, EPOS, BAMPS, ...

Comme nous l'avons fait dans le chapitre 3, nous allons décrire dans ce chapitre les aspects phénoménologiques, les formules et les techniques utilisées entre l'état initial et l'état final de la simulation. Nous allons commencer par présenter le cœur du programme : la **dynamique**, et la manière dont le modèle NJL se place dans cette dynamique. Nous aborderons ensuite la seconde problématique de cette thèse qui est le problème de la transition de phase via l'**hadronisation**. Après cela on expliquera les **conditions initiales** utilisées, et leur influence sur la physique de l'évènement. Enfin, nous terminerons ce chapitre par une discussion sur les **limites de validité** du code en tant que générateur d'évènement, et sur les **optimisations et améliorations** à apporter.

Pour de plus amples détails sur les **algorithmes** utilisés dans ce programme, nous invitons le lecteur à voir l'annexe H.

5.2 Modèle de transport

 \frown E qui est le plus important dans un programme de simulation dynamique, c'est bien \checkmark évidemment les équations de mouvement et la manière dont on les utilise. Nous avons choisi de simuler la transition de phase d'une QGP vers un gaz de hadrons en utilisant le modèle NJL. Ce modèle nous donne des masses et des sections efficaces à (T, μ) finis.



FIG. 5.2– Algorithme typique de dynamique moléculaire.

On va donc présenter les équations de mouvement et la phénoménologie utilisée pour décrire le milieu. Ensuite on discutera en détail des variables thermodynamiques de ce milieu.

5.2.1 Dynamique quantique relativiste

On peut résumer notre algorithme de simulation au plus simple avec la FIG. 5.2. Nous allons commencer par décrire la **propagation** des particules. On rappelle les équations de mouvement que nous utilisons (4.7.2) pour une particule i:

$$\frac{\mathrm{d}q_i^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{p_i^{\mu}}{E_i}
\frac{\mathrm{d}p_i^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = -\sum_{k=1}^N \frac{1}{2E_k} \frac{\partial V_k(q_T)}{\partial q_{i\mu}} + \langle \text{collisions} \rangle ,$$
(5.2.1)

avec la somme des forces sur les N autres particules, et les collisions. La contrainte sur l'énergie (4.4.14), qui sert à définir les équations de mouvement, est différente avec le modèle NJL. On a une **masse effective** m^* au lieu d'un potentiel V:

$$K_i = p_i^{\ \mu} p_{i\mu} - m_i^{*2} = 0 \tag{5.2.2}$$

On utilise donc en pratique :

$$\frac{\mathrm{d}p_i^{\mu}}{\mathrm{d}\tau} = -\sum_{k=1}^N \frac{m_k^*}{E_k} \frac{\partial m_k^*}{\partial q_{i\mu}}$$
(5.2.3)



FIG. 5.3– Masses du quark u, du quark s, du méson π , et du méson K en fonction de (T, μ) avec le modèle NJL.

et on se sert de la dérivée de la masse effective comme d'un potentiel. On dispose de la masse NJL en fonction de (T, μ) (FIG. 5.3). Les masses des quarks deviennent plus grandes en dessous de la température et de la densité baryonique critiques, ils seront donc **contenus** dans la phase plasma. À l'inverse, les masses des mésons sont minimales pour de faibles températures et densités, elles augmentent au delà de la "ligne" de transition de phase. Les mésons seront donc **expulsés** hors du plasma chaud et dense.

Dans notre cas, on se place à **potentiel chimique nul** et à température finie. Nous envisageons plus tard d'effectuer des simulations à μ fini. Les variables que nous utilisons sont **locales**, chaque particule possède donc son (T, μ) propre. On va discuter de la définition de ces variables thermodynamiques dans la prochaine sous-section.

Finalement, on décompose la dérivée de la masse effective telle que :

$$\frac{\partial m_k^*}{\partial q_{i\mu}} = \frac{\partial m_k^*}{\partial T_k} \frac{\partial T_k}{\partial q_{i\mu}} + \frac{\partial m_k^*}{\partial \mu_k} \frac{\partial \mu_k}{\partial q_{i\mu}}$$
(5.2.4)

avec T_k la **température locale** de la particule k, et en prenant $\partial m_k^* / \partial \mu_k = 0$ à $\mu_k = 0$. La force dérivant de la masse effective n'est pas infinie, ce qui veut dire qu'il est **possible**



FIG. 5.4– Schéma représentant le potentiel interquark pour la QCD (à gauche) et masses NJL (à droite) des quarks u (trait plein), d (tirets) et s (pointillés) [122], en fonction de la distance entre deux particules.

d'observer un quark libre aussi bien dans le plasma que dans le vide. On peut comparer le potentiel de QCD et celui du modèle NJL (c'est-à-dire la masse) sur la FIG. 5.4. Attention cependant, ces deux forces ne proviennent pas du même phénomène : celle de QCD vient du confinement tandis que celle de NJL vient de la brisure de symétrie chirale.

Le mécanisme de **confinement n'est pas expliqué** par la QCD à ce jour. Même l'ajout de la boucle de Polyakov au modèle NJL ne permet pas d'obtenir un potentiel parfaitement confinant pour les quarks à grande distance. Ne sachant comment inclure l'effet du confinement de manière pratique dans le code de simulation, et n'ayant pas toutes les données relatives au modèle PNJL¹, nous faisons le choix de nous **limiter au modèle NJL**. Comme nous l'avons déjà mentionné dans l'introduction générale, on suppose que la brisure de symétrie chirale et les sections efficaces qui deviennent très grandes à l'approche de la transition de phase seront des ingrédients suffisants pour obtenir une hadronisation.

L'explosion de ces sections efficaces élastiques et inélastiques a lieu à l'approche de la transition de phase, mais également à l'approche du seuil en \sqrt{s} (FIG. 5.5). D'autres modèles, comme par exemple PHSD, utilisent plutôt la densité scalaire (2.2.19), qui est invariante de Lorentz. Dans ce cas, un simple test de densité permet d'hadroniser les quarks proches qui s'échappent du QGP, mais ce n'est pas suffisant pour avoir des **collisions causales**. Pour cela il faut revenir à la méthode décrite à la fin du chapitre 4. Dans ce cas, c'est au centre de masse que l'on teste la collision en utilisant le **pas de temps** entre deux états du système. On en revient donc à la **trajectoire des particules** via les équations de mouvement.

Comme toutes les simulations numériques, le fait d'avoir une dynamique implique d'avoir une **évolution temporelle discrétisée**. Le pas de temps qui en résulte doit être judicieusement choisi pour éviter de rater certains processus (des collisions par exemple). De plus, l'algorithme de **résolution d'équations différentielles** (ce sont nos équations de mouvement) doit être suffisamment précis pour **conserver l'énergie** du système lors des simulations.

^{1.} En l'occurrence, il nous manque les sections efficaces, qui seront la prochaine étape de notre projet



FIG. 5.5– Exemples de sections efficaces élastiques des modèles : NJL en fonction de \sqrt{s} [47] (à gauche), et PHSD en fonction de la densité scalaire ρ [84] (à droite).

On doit prendre un pas de temps suffisamment petit pour que la valeur de \sqrt{s} pour deux particules entre deux étapes ne change pas trop, sous peine de rater le pic d'explosion des sections efficaces. Par rapport à l'angle entre les trajectoires de deux particules, on a :



Une solution évidente est de prendre un **pas de temps très petit**, mais cela est impossible sinon les simulations seraient trop longues à effectuer (trop d'étapes de calcul). La solution que nous avons choisie est d'utiliser la méthode de **Runge-Kutta d'ordre 4** (FIG. 5.6, voir annexe H pour le détail), qui donne d'excellents résultats pour les systèmes complexes fortement couplés (par exemple dans le cas d'oscillateurs harmoniques [123]) même avec un pas de temps assez large.



FIG. 5.6– Explication graphique de la méthode d'extrapolation de Runge-Kutta d'ordre 4. À chaque étape, une nouvelle pente et un nouveau point sont calculés, contribuant ainsi au résultat final.

On remarque au passage que les données du modèle NJL utilisées dans notre étude proviennent des travaux de [39], [124] et [64]. Ces données sont tabulées afin de gagner du temps lors des simulations. On interpole les masses et les sections efficaces pour des valeurs exactes de (T, μ, \sqrt{s}) en utilisant l'**interpolation linéaire** (voir annexe H).

Les paramètres des tables de masses et de sections efficaces sont les suivants : T et μ vont de 0 à 500 MeV par cran de 20 MeV, et \sqrt{s} va du seuil de réaction jusqu'à seuil+1200 MeV par cran de 75 MeV. Malheureusement, l'échantillonnage des données en \sqrt{s} est trop faible pour bien prendre en compte le pic proche du seuil. On s'attend donc à manquer certains processus par la suite.

5.2.2 Milieu thermodynamique

Nous avons abordé les notions de température T et potentiel chimique μ locaux dans la précédente sous-section. Du point de vue de la théorie des champs, définir une température pour une particule dans un milieu infini à l'équilibre n'est pas très gênant. Pour les besoins de la simulation et par souci de précision, nous allons définir et utiliser (T, μ) avec un **nombre fini d'éléments** (N particules), dans un plasma **hors équilibre**, et pour chaque particule (c'est-à-dire à un **point donné de l'espace**).

Pour parvenir à trouver une définition utilisable de T et μ , il est nécessaire de passer par l'expression d'autres quantités, comme par exemple : la **densité fermionique** ρ_F , qui exprime la quantité de fermions q et \bar{q} du système par unité de volume, et la **densité baryonique** ρ_B (2.2.20), qui exprime le déséquilibre entre la quantité de fermions et d'antifermions :

$$\rho_F(T,\mu) = \frac{N_q}{V} + \frac{N_{\bar{q}}}{V} = g \int_0^\infty \left(f^+ + f^-\right) \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 (\hbar c)^3}$$

$$\rho_B(T,\mu) = \frac{N_q}{V} - \frac{N_{\bar{q}}}{V} = g \int_0^\infty \left(f^+ - f^-\right) \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3 (\hbar c)^3} ,$$
(5.2.5)

avec le facteur de dégénérescence $g = 2 \times 3 \times 3 = 18$, et f^{\pm} la distribution de Fermi (2.2.18). On note que ρ_F et ρ_B **ne sont pas invariants de Lorentz**. On ne dispose que des quantités (q^{μ}, p^{μ}) numériquement, mais on voudrait exprimer $(T, \mu) = f(q^{\mu}, p^{\mu})$. On peut utiliser les définitions (5.2.5) pour obtenir (détail du calcul dans l'annexe H) :

• pour une température $T \gg m$ (la masse moyenne des constituants) et un potentiel chimique $\mu = 0$, on peut réécrire la densité fermionique comme :

$$\rho_F = \frac{g}{\pi^2} \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^3 \,, \tag{5.2.6}$$

• pour un potentiel chimique $\mu \neq 0$ et $\mu \gg T$, quelle que soit la masse m des particules, on peut réécrire la densité baryonique comme :

$$\rho_B = \frac{g}{6\pi^2} \left(\frac{\mu}{\hbar c}\right)^3 \,. \tag{5.2.7}$$



FIG. 5.7– Voisinage d'une particule.

C'est grâce à ces densités que l'on va pouvoir introduire la notion de localité. On se propose d'utiliser la quantité invariante $0 < R_{ij}(q'_T) < 1$ (4.4.11) afin de comptabiliser les voisins proches autour d'une particule (FIG. 5.7). On fait également l'**hypothèse d'un équilibre local**. Le modèle NJL a pour degrés de liberté : des quarks à haute température, et des hadrons à basse température. On comptabilise donc chaque particule –quark ou hadron– comme un seul élément. On redéfinit les densités fermioniques et baryoniques de la façon suivante :

$$\rho_{Fi} = \sum_{j \neq i} R_{ij}$$

$$\rho_{Bi} = \sum_{j \neq i} R_{ij} \operatorname{Sign}(j) , \qquad (5.2.8)$$

avec

$$\operatorname{Sign}(j) = \begin{cases} 1 & \text{pour les fermions} \\ -1 & \text{pour les antifermions} \\ 0 & \text{pour les bosons (mésons)} \end{cases}$$
(5.2.9)

Définition : Température et potentiel chimique locaux

Finalement on utilise les densités (5.2.6), (5.2.7) et (5.2.9) pour avoir :

$$T_{i} = (\hbar c) \left(\frac{\pi^{2}}{g}\right)^{1/3} \left(\sum_{j \neq i} R_{ij}\right)^{1/3}$$

$$\mu_{i} = (\hbar c) \left(\frac{6\pi^{2}}{g}\right)^{1/3} \left(\sum_{j \neq i} R_{ij} \operatorname{Sign}(j)\right)^{1/3},$$
(5.2.10)

avec lesquelles on peut étudier les systèmes de quarks tel que le **QGP** (grande $T, \mu \approx 0$), ou bien les étoiles de quarks et la **matière nucléaire** condensée ($T \approx 0$, grand μ).

Ces paramètres locaux permettent de décrire très précisément les **fluctuations de densité** locales, comme la **clusterisation**. Le calcul de ces paramètres est effectuée pour chaque modification de l'état du système : c'est-à-dire après les routines de propagation, de collision, et de désintégration.



FIG. 5.8– Température locale en fonction de la distance moyenne pour différents nombres de particules voisines.

Nos définitions de température et de potentiel chimique sont problématiques dans le sens où l'on sait que T et μ ne sont pas invariants de Lorentz, tandis que les équations (5.2.10) le sont. Nous faisons le choix du référentiel de la simulation : le centre de masse de la collision d'ions lourds. Nous n'avons donc pas de problème avec les définitions choisies.

Avec une telle définition de densité, on dispose de tous les éléments nécessaires pour achever la description d'un potentiel local avec les masses NJL. La seule inconnue qui reste encore est la valeur de la constante L présente dans R_{ij} . Cette valeur définit en quelque sorte la **largeur de la fonction de distribution** d'une particule.

Afin de donner une valeur à cette constante, on utilise le **Particle Data Book** (PDG) [8] pour trouver le **rayon électromagnétique** des particules comme le pion ($r_{\pi} = 0.672$ fm), ou le proton ($r_p = 0.842$). On considère que la largeur de la fonction de distribution du quark doit être **plus petite que celle du pion**. On prend donc L = 0.5 fm. Cela donne une température en fonction de la distance moyenne interquark r représentée sur la FIG. 5.8. On voit bien que pour de petits clusters de particules, la température peut tout de même atteindre la température critique de la transition de phase.

Le lecteur averti aura tout de suite souligné le fait qu'il est impropre de parler de température pour un si petit système. En réalité, une température est une question d'**échelle** : avec un nombre suffisamment grand de particules la notion de température reste correcte, le tout est de fixer ce nombre. Pour une seule particule la température n'a pas de sens, alors que pour deux particules on peut mesurer une énergie cinétique, et par conséquent : une température. Il est également impropre de parler de température relativiste [125]. En revanche, il est correcte de définir une densité invariante, qui soit elle-même pondérée par $\hbar c$ pour retrouver une température dépendante du référentiel (5.2.10).

Tous ces arguments nous permettent de valider l'utilisation de nos définitions de potentiels pour une application à une dynamique moléculaire quantique et relativiste. Il reste maintenant à voir comment se place l'hadronisation dans cette dynamique.



FIG. 5.9– Collision entre deux particules dans un milieu réaliste.

5.3 Hadronisation

L A dynamique que nous utilisons contribue à simuler l'expansion du QGP. Quel sont les processus qui contribuent à la transition de phase, et par conséquent à l'hadronisation? Nous en avons deux types dans notre code pour le moment : les collisions $2 \rightarrow 2$ (élastiques et inélastiques), et les désintégrations des mésons.

Nous rappelons que dans nos simulations, nous n'avons inclus que les **quarks** u, d, s, et les **mésons pseudo-scalaires** π , K et η . Nous ne tenons pas compte des mésons scalaires ni du méson η' , car les sections efficaces de production sont extrêmement faibles.

Pour résumer, les collisions et désintégrations que nous incluons dans notre code sont :

- $q \ q \rightarrow q \ q$,
- $q \ \bar{q} \to q \ \bar{q}$,
- $q \ \bar{q} \to M \ M$,
- $M \to q \ \bar{q}$,

avec les quarks q, les antiquarks \bar{q} , et les mésons M. On remarque que nous n'avons pas la **detailled-balance** de nos processus d'hadronisation, c'est-à-dire les processus $M M \to q \bar{q}$. Même si les sections efficaces sont faibles (FIG. 2.21), il est souhaitable d'ajouter ces processus dans le code.

Les collisions inélastiques vont contribuer à **hadroniser le milieu** tandis que les désintégrations des mésons instables vont contribuer à **retarder la transition de phase**. Le rôle des collisions élastiques est de **thermaliser le plasma**. Cette thermalisation va aussi jouer un rôle très important, car dans un milieu non thermalisé, les particules initiales produites possèdent des trajectoires moins désordonnées, et donc un \sqrt{s} soit très proche du seuil, soit du maximum.

Ce n'est plus le cas dans un plasma thermalisé. Avec les sections efficaces NJL, on va avoir une thermalisation qui prend du temps : un temps comparable à celui de la durée de vie du plasma car l'**explosion** des sections efficaces élastiques et inélastiques **se produit en même temps**. Il sera donc intéressant de voir l'influence de cette thermalisation sur l'hadronisation.

On peut schématiser les processus de collision et de désintégration sur les FIG. 5.9 et 5.10 (respectivement). On y voit que dans un **milieu réaliste**, et grâce au potentiel local (c'est-à-dire propre à chaque particule) que nous avons, les (T, μ) de chaque particule d'entrée et de sortie peuvent être différentes. Comment applique-t-on alors ces processus en pratique dans le code?

Ne pouvant calculer des sections efficaces pour des particules de différents (T, μ) , on prend la **moyenne des valeurs** des particules d'entrée. Rigoureusement parlant, il faudrait



FIG. 5.10–Dissociation des mésons dans un milieu réaliste.

aussi tenir compte des caractéristiques des particules de sortie, mais cela est impossible à prédire. On considère valables les sections efficaces à (T, μ) finis lorsque elle est très grande (c'est-à-dire lorsque la distance entre les particules est grande et que leurs (T, μ) sont très différents).

De la même façon, pour les désintégrations, on utilise les propriétés du méson luimême en entrée. En plus d'avoir des (T, μ) différents en sortie, on note que l'écartement spatial entre les particules en sortie peut être différent de celui des particules d'entrée. Cela est dû aux propriétés quantiques des particules (fonction de distribution et dualité onde-corpuscule). L'ajout de ces propriétés est très complexe, et semble exagéré pour un modèle aussi simplifié que le notre. Finalement, pour des collisions $2 \rightarrow 2$ nous conservons la même position pour les particules d'entrée et de sortie, et pour les désintégrations nous posons "à la main" un écartement de 0.1 fm afin d'éviter une brisure de densité locale trop importante.

Dans tous les cas le fait de changer l'écartement, ou même la masse ou l'impulsion (c'est-à-dire de faire une collision ou une désintégration) conduit au même résultat : la densité locale change, et par conséquent, la température et le potentiel chimique aussi. Cette brisure va avoir pour conséquence de perturber le calcul des masses à chaque étape, et va donc briser la conservation de l'énergie totale. En pratique, on place une routine de vérification qui compense les variations de masses avec l'impulsion des particules ($E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$) afin de conserver l'énergie de chaque particule lors de ces brisures de densité.

Toujours dans le souci de respecter la conservation de l'énergie dans le système, on calcule les impulsions de sortie des particules (numérotées 3 et 4) dans le centre de masse avec :

$$\|\mathbf{p}_3\| = \|\mathbf{p}_4\| = \frac{1}{\sqrt{s}} \sqrt{(s - (m_3 + m_4)^2)(s - (m_3 - m_4)^2)}$$
(5.3.1)

dans le cas des collisions d'énergie \sqrt{s} , et avec

$$\|\mathbf{p}_3\| = \|\mathbf{p}_4\| = \frac{1}{2M} \sqrt{(M^2 - (m_3 + m_4)^2)(M^2 - (m_3 - m_4)^2)}$$
(5.3.2)

dans le cas des désintégrations d'un hadron de masse M en deux éléments. On teste toujours les seuils de réaction (les termes dans la racine carrée) numériquement afin qu'ils soient supérieurs à 0, car on utilise des tables de sections efficaces et de largeurs de désintégration (au lieu de fonctions continues).



FIG. 5.11– Collisions possibles pour les couples de particules 1-2 et 1-3.

5.3.1 Libre parcours moyen

La méthode de collision qui est utilisée dans notre programme est celle décrite dans la dernière section du Chapitre 4. C'est une méthode moléculaire, relativiste et causale, pour des collisions $2 \rightarrow 2$.

Le problème de cette méthode de collision est qu'elle **dépend du pas de temps** de la simulation. Un pas de temps trop long nous fait négliger des collisions, et un pas de temps trop court augmente le temps de simulation (FIG. 5.11). Afin d'estimer le pas de temps optimal nous avons tenté deux approches : **analytique et numérique**.

Tout d'abord l'approche numérique : on simule une boîte cubique de côté a = 3 fm, dans laquelle on place N = 30 particules sans interactions hormis des **collisions** élastiques, avec une section efficace fixe de 1 ou 5 mb. La boîte possède des conditions de réapparition sur le bord opposé (**milieu pseudo-infini**). Chaque simulation sera effectuée pour une durée de 10 fm/c, afin d'être sûr que les particules parcourent plusieurs fois la taille de la boîte. Ces particules ont une masse fixe de m = 200 MeV avec une impulsion tirée aléatoirement de manière isotrope entre 100 et 300 MeV.



FIG. 5.12– Nombre total de collisions pour des simulations dans une boîte, pour différents pas de temps $\Delta \tau$, avec une section efficace constante de 1 mb (à gauche) et 5 mb (à droite).

Sur la FIG. 5.12, on observe le résultats pour des pas de temps $\Delta \tau$ différents, avec à chaque fois 1000 simulations moyennées. On constate que pour un pas de temps suffisamment petit, le nombre de collisions sature, et que pour un pas de temps trop grand, le nombre moyen de collisions diminue. C'est ce qu'on s'attendait à observer, en revanche on voit que le **pas de temps optimal** n'est pas le même pour chaque section efficace. Il est logique d'obtenir plus de collisions avec une plus grande section efficace, mais le fait que le pas de temps change vient en fait d'un autre phénomène : le **libre parcours moyen**.

Définition : Libre parcours moyen

Dans un milieu peu dense, comme un gaz, le libre parcours moyen ℓ se définit comme :

$$\ell = \left(\sqrt{2} \ \sigma \ \rho\right)^{-1} = v_{\text{rel.}} \ \Delta\tau \tag{5.3.3}$$

où σ est la section efficace moyenne, et ρ est la densité moyenne du milieu. Cette définition ne fonctionne évidemment que si la variance de la densité et de la section efficace est faible et que si le milieu est dilué, c'est-à-dire si

$$\ell > d = \sqrt{\sigma/\pi} , \qquad (5.3.4)$$

où d est la rayon géométrique provenant de la section efficace σ .

On sait que le **pas de temps optimal** $\Delta \tau_{opt}$ sera différent de $\Delta \tau$. Mais quelle valeur prendre en pratique? Dans notre cas, on a des particules de masse m environ égales à l'impulsion **p**, donc on a $v_{\rm rel} \simeq 1/\sqrt{2}$. On peut donc écrire :

$$\Delta \tau = \left(\sigma \ \rho\right)^{-1} \ . \tag{5.3.5}$$

Avec les conditions que nous avons prises pour les simulations, avec (5.3.3) on trouve :

- pour $\sigma = 1 \text{ mb} : \Delta \tau = 10 \text{ fm/c},$
- et pour $\sigma = 5 \text{ mb} : \Delta \tau = 2 \text{ fm/c}.$

Ces chiffres semblent sensés au regard du nombre total de collisions pour chaque section efficace. Or si l'on regarde de plus près la FIG. 5.12, on voit que l'on trouve un pas de temps optimal de :

- $\Delta \tau_{opt} = 5.10^{-2}$ fm pour $\sigma = 1$ mb ,
- $\Delta \tau_{opt} = 10^{-2}$ fm pour $\sigma = 5$ mb.

Il y a donc un même facteur de 200 entre les valeurs de $\Delta \tau$ et $\Delta \tau_{opt}$.

On va prendre un **facteur de 200** en pratique dans nos simulations, afin de comptabiliser toutes les collisions sans avoir trop d'étapes de temps. On rappelle qu'ici les simulations ont été effectuées sans potentiel, et que dans le cas réaliste, les collisions auront lieu avec des **trajectoires courbes**.

Au final, on utilisera en pratique un **pas de temps adaptatif** (c'est-à-dire que l'on réactualise ce pas de temps à chaque étape de temps) défini comme :

$$\Delta \tau_{opt} = \left(200 \ \sqrt{2} \ v_{\text{rel.}} \ \sigma \ \rho\right)^{-1} \ . \tag{5.3.6}$$

On recalcule en fait la section efficace moyenne, la densité moyenne, et la vitesse relative moyenne à chaque étape.

Si l'on tient compte du fait que les trajectoires des particules ne sont pas trop courbées avec un pas de temps suffisamment petit, et que l'évolution de la densité et des sections efficaces est douce, cette approximation reste correcte. Malgré tout, à l'approche de la transition de phase, les sections efficaces explosent, et le plasma se comporte plus comme un liquide (forte viscosité) qu'un gaz. On considère que l'équation 5.3.6 est adaptée à cette situation.

5.3.2 Les problèmes de l'hadronisation

On voit qu'entre la méthode de collision (relativiste, et avec les sections efficaces NJL qui explosent), le pas de temps numérique adaptatif, et les potentiels utilisés (avec les masses NJL), il n'est pas facile de savoir si la physique observée sera conforme à la réalité. En l'occurrence dans la Nature, l'**hadronisation est totale** et on n'observe pas de quark libre. Plusieurs autres problèmes peuvent encore apparaître pour gêner l'hadronisation :

- Une température locale veut dire que l'hadronisation sera localisée au niveau des zones de basse densité, et présentera un mélange entre les quarks et les hadrons. Il est possible que nos méthodes numériques ne soient pas assez précises pour décrire un système très hétérogène avec des fluctuations locales de viscosité assez fortes : des résidus de groupes de quarks pourraient apparaître.
- Les quarks libres évoqués lors de la description de la dynamique pourraient être très nombreux et échapper au processus d'hadronisation. Il faudrait ajouter des processus $q\bar{q} \rightarrow M$ et $q \rightarrow Mq$ en tenant compte des rétro-diffusions avec $d\sigma/d \cos\theta$ pour éviter ce genre de problème.
- Peut-être que notre hypothèse de départ est fausse : c'est-à-dire que le confinement de couleur joue vraiment un rôle dans la description de l'hadronisation, et qu'il est indispensable à son bon fonctionnement.
- Enfin, les conditions initiales de nos simulations sont également un point crucial. Par exemple, en revenant sur le phénomène de quark libre dans le vide, que se passerait-il si des quarks étaient initialement présents au bord du plasma avec une très grande impulsion transverse dès le début de la simulation? Faut-il trouver un moyen d'hadroniser ces quarks, ou bien sont-il tout simplement issus de conditions initiales non-réalistes?

5.4 Conditions initiales

Notre modèle de conditions initiales utilise un **tirage Monte-Carlo** qui s'inspire du modèle de Glauber (section 3.3.1), mais appliqué directement aux partons. En effet, on peut décomposer notre code en plusieurs étapes. Tout d'abord, on utilise une fonction de distribution de densité de particules qui nous donne leur position, puis on distribue les partons dans l'espace des phases. Quelle est alors la différence avec les autres modèles?

Tout d'abord la structure de la zone de recouvrement que l'on définit est une ellipse avec différents paramètres initiaux. Ce qui veut dire que l'on a **moins de fluctuations dans la forme géométrique** du plasma que ce qui est fait en pratique avec le modèle de Glauber. On utilise, comme dans le modèle de Glauber, le nombre de nucléons par noyau A pour calculer leur **rayon moyen** r de ces noyaux :

$$r = r_0 A^{1/3} (5.4.1)$$

avec le rayon de Bohr $r_0 = 1.25$ fm. Ensuite, on utilise le paramètre d'impact b de la collision pour définir la largeur \mathbf{x}_E et la hauteur \mathbf{y}_E de l'ellipse :

$$\mathbf{x}_E = r - b/2 \mathbf{y}_E = \sqrt{(r - b/2)(r + b/2)} .$$
 (5.4.2)


FIG. 5.13– Fonction de distribution en température initiale en fonction du rayon normalisé.

L'épaisseur \mathbf{z}_E de cette ellipse est la même que la largeur \mathbf{x}_E , mais avec la contraction due au boost de Lorentz qui dépend de l'énergie par nucléon $\sqrt{s_{NN}}$:

$$\mathbf{z}_E = \mathbf{x}_E / \gamma = \mathbf{x}_E \frac{2m_N}{\sqrt{s_{NN}}} \,. \tag{5.4.3}$$

Tous les paramètres de base $(A, b, \sqrt{s_{NN}})$ nous donnent ainsi la structure géométrique de l'ellipse. Ensuite, on peuple cette structure avec des partons. On sait qu'à une énergie donnée $\sqrt{s_{NN}}$ on a une certaine **densité de particules** en fonction des interactions et des fluctuations. Cette densité d'énergie donne une température locale, pour chaque petit élément de plasma.

Pour simplifier notre modèle de conditions initiales, on va simplement définir une **température initiale globale** T_0 qui correspond approximativement à la densité d'énergie créée par le faisceau incident, et considérer que le **potentiel chimique** μ **initial est nul**. De ces paramètres (T_0, μ_0) , on peut extraire la densité de partons à l'équilibre, selon les différentes espèces chimiques (quarks u, d, et s). On utilise la distribution thermique de Fermi $f^{\pm}(E, T, \mu)$ (2.2.18) pour obtenir la densité :

$$\rho = \frac{N}{V} = g \int f^{\pm} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 (\hbar c)^3}$$
(5.4.4)

où g est la dégénérescence (par exemple si on s'intéresse au quark \overline{d} , elle est de g = 2*3 = 6, 2 pour le spin et 3 pour la couleur), N est le nombre de quarks de l'espèce voulue, et V est le volume du système. En l'occurrence, on a une ellipse de volume :

$$V = \frac{4}{3}\pi \mathbf{x}_E \mathbf{y}_E \mathbf{z}_E \tag{5.4.5}$$

On note que l'on prend le volume sans tenir compte du boost de Lorentz. En effet, la densité calculée ici l'est dans un **référentiel au repos** et elle n'est pas invariante de Lorentz.

Pour effectuer notre distribution, on utilise une **distribution en température** (FIG. 5.13) plutôt qu'en densité de nucléons. De cette distribution, on connait la masse des



FIG. 5.14– $dN/r^2 dr$, avec r la distance du centre de l'ellipse, par rapport à notre distribution en température avec $\mu = 0$ MeV et les masses NJL pour les quarks.

quarks en fonction de leur saveur et de leur position. On utilise ensuite cette distribution en fonction du "rayon" moyen de l'ellipse initiale (rayon qui dépend bien sûr de l'angle). De là, on obtient le nombre de quarks N de chaque espèce pour différentes couches d'ellipse, ainsi que leur masse m respective. Ensuite, on effectue le Monte-Carlo pour obtenir les positions \mathbf{q} et impulsions \mathbf{p} de chaque particule de manière isotrope.

L'ensemble des résultats de simulation que nous présenterons tout au long de ce chapitre et du chapitre suivant est effectué avec les paramètres suivants :

- collision Plomb-Plomb : A = 208 nucléons,
- énergie du RHIC : $\sqrt{s_{NN}} = 200 \text{ GeV},$
- conditions thermodynamiques initiales : $(T_0 = 350 \text{ MeV}, \mu = 0 \text{ MeV}).$

Nous ferons varier le paramètre d'impact pour étudier le comportement de l'expansion et de la transition de phase pour différentes tailles de plasma. Il est intéressant de présenter les résultats que nous obtenons pour les conditions initiales pour une simulation avec un assez grand nombre de particules. La plus grande simulation que nous ayons effectué est pour b = 6.5 fm, avec environ 2500 particules.

Il est important de noter que même si nous ne faisons que des simulations avec $\mu = 0$ (c'est-à-dire que $N_q = N_{\bar{q}}$), il est possible dans notre modèle d'initialiser un système avec $\mu \neq 0$. Dans ce cas, on arrondit tel qu'on ait $|N_q - N_{\bar{q}}| \mod 3 = 0$, ceci pour être sûr que l'on retrouve des nucléons dans l'état final (même si pour le moment nous n'avons pas inclus les baryons en pratique).

De plus, nous n'introduisons que des quarks dans la distribution, jusqu'au bord de la zone de recouvrement. Pourtant, il est clair qu'une **phase hadro-**nique est déjà présente tout autour du QGP. Nous ne nous intéressons pas à cet aspect des conditions initiales pour l'étude de l'hadronisation pour le moment.

Sur la FIG. 5.1 on a un vue directe de la distribution de particules en 3 dimensions provenant de notre programme. La FIG. 5.14 montre quant à elle la distribution du



FIG. 5.15– Distributions des masses, impulsions, températures et densités de fermions en fonction de la distance du centre de l'ellipse pour l'état initial.

nombre de particules de chaque espèce en fonction de la distance par rapport au centre de l'ellipse. On voit que cette distribution reproduit assez bien la distribution en température initialement choisie, avec cependant une pondération par la variation des masses NJL.

On peut maintenant regarder d'autres distributions, en fonction de la distance au centre (FIG. 5.15), pour les quarks légers (u, d) et lourds (s). On a

- la masse, qui augmente au bord du plasma car la température diminue (masse NJL), ce qui est une parade intéressante pour le manque de confinement dû à l'absence des gluons (**pseudo-confinement inertiel**),
- l'**impulsion**, qui diminue à cause de la baisse température et aussi de l'augmentation des masses,
- la **densité locale de fermions** (qui sera explicitée dans la section (5.2.2)), qui diminue également au fur et à mesure que l'on s'approche du bord de l'ellipse (d'ailleurs on remarque deux pentes bien distinctes car l'ellipse n'a pas les mêmes largeur et hauteur),
- et la **température locale** (également définie dans la section (5.2.2)), qui est proportionnelle à la densité locale de fermions (ce qui la rend différente de la distribution en température initiale).



FIG. 5.16– Nombre de particules initiales et finales en fonction du paramètre d'impact b (à gauche) et le temps de simulation correspondant (à droite) sur une machine mono-cœur de 3 GHz.

On rappelle que notre modèle de conditions initiales est uniquement censé reproduire la **phénoménologie du QGP**. Pour une description plus quantitative, il nous faudrait implémenter des conditions initiales comme celles du modèle EPOS (FIG. 5.18). Nos conditions suffisent pour le moment pour reproduire certains comportements de base tels que la création d'un flot elliptique, l'hadronisation, ...etc.

Si on regarde attentivement le nombre de particules initiales et finales pour différents paramètres d'impact (FIG. 5.16), on voit immédiatement qu'il y a plus de particules dans l'état final que dans l'état initial, car nous prenons en compte la création de pré-hadrons, puis leur désintégration en deux quarks dans le milieu.

On remarque aussi que pour des simulations centrales, avec b = 0 fm, le nombre de particules est très grand. Si la **précision des calculs** est primordiale afin d'éviter de propager les erreurs et d'obtenir des phénomènes non physiques, le **temps de calcul** est aussi un facteur clé. Les simulations avec un pas de temps optimal si petit, avec autant de particules, et avec des interactions aussi complexes sont très longues à effectuer. Un ordre de grandeur typique de durée est : **plusieurs jours voire plusieurs semaines**. Ceci est inacceptable pour faire des statistiques suffisantes. On doit donc trouver un **compromis** entre précision et rapidité de calcul.

5.5 Optimisations du code

A VANT de discuter des optimisations possibles que l'on peut apporter à la phénoménologie ou aux méthodes numériques, nous allons d'abord présenter quelques résultats. Si on revient d'abord sur la FIG. 5.16, on voit que l'idéal serait de faire des simulations de l'ordre d'une heure au lieu de plusieurs mois. Il faut donc trouver une manière d'augmenter la vitesse des simulations par un facteur 1000.

Si d'un autre coté on regarde la conservation de l'énergie (FIG. 5.17) pour une grosse simulation (ici on prend celle que nous avons présentée avec b = 6.5 fm), on voit qu'elle est excellente : la variation de l'énergie est de ± 0.05 % de l'énergie totale



FIG. 5.17–Variation de l'énergie totale initiale, pour une simulation avec b = 6.5 fm.

Cette énergie totale subit de petits sauts dûs à des désintégrations ou des collisions inélastiques qui changent la densité locale et les masses des particules. La routine que nous avons alors créée pour équilibrer l'énergie entre la masse et l'impulsion des particules voisines n'est pas en cause. Cela vient de la granularité des tables de masses et de sections efficaces [39]. Cela se répercute sur notre code en autorisant parfois des collisions ou désintégrations avec un manque de précision. On peut voir que ce problème est minime, et qu'il n'apparaît que très rarement, même pour une grosse simulation.

Passons maintenant à l'optimisation de temps de calcul de notre code. La première chose que l'on peut faire pour cela est de diminuer soit le nombre d'étapes de calcul, soit de diminuer le nombre de particules lui-même. Comme on a vu que le pas de temps optimal permet de comptabiliser toutes les collisions qui peuvent être nécessaires à l'hadronisation, il ne reste que le nombre de particules. C'est une bonne nouvelle car, comme on l'a déjà dit : notre modèle n'est pas parfaitement réaliste, et en l'occurrence, il surestime beaucoup le nombre de particules en assumant une densité d'énergie élevée et constante dans toute l'ellipse : ce n'est pas le cas en pratique.



FIG. 5.18– Distribution transverse en densité d'énergie pour le modèle EPOS, avec les mêmes paramètres que notre modèle de conditions initiales. Les zones entourées en vert sont des boules de QGP potentiel.

La FIG. 5.18 montre une condition initiale réaliste provenant du modèle EPOS. On voit que le volume réel du plasma formé est beaucoup plus petit que l'ellipse : seules **quelques boules de QGP** sont formées, le reste étant un gaz de hadrons. On peut espérer diviser le nombre de quarks initiaux d'un facteur 2 à 10 selon le paramètre d'impact.

On pourrait également faire le choix d'augmenter un peu le pas de temps afin de gagner encore un peu de temps de simulation au détriment du nombre de collisions total, mais le jeu en vaut-il la chandelle? Les ordinateurs actuels permettent d'effectuer des calculs très complexes, et depuis peu permettent aussi d'effectuer des calculs en parallèle. On parle alors de **parallélisme**.

Définition : *Parallélisme*

En informatique, le parallélisme consiste à implémenter des architectures d'électronique numérique permettant de traiter des informations **de manière simultanée**, ainsi que les algorithmes spécialisés pour cellesci. Ces techniques ont pour but de réaliser le plus grand nombre d'opérations en un temps le plus petit possible (c'est-à-dire optimiser le calcul).

La complexité d'une dynamique moléculaire vient du calcul des forces et des collisions (N particules utilisent les N-1 voisins pour les potentiels et les collisions). On a donc une complexité de simulation qui n'est pas linéaire en $\mathcal{O}(N)$, mais quadratique en $\mathcal{O}(N^2)$.

Des approches adaptatives à N-corps ont été développées dans le cadre d'un très grand nombre de particules, et arrivent à avoir des simulations en $\mathcal{O}(N \log(N))$ [126] voire même en $\mathcal{O}(N)$ (comme le programme de [127])! Mais notre problématique étant plus complexe vis-à-vis de la nature de l'interaction, on doit, malheureusement, utiliser l'approche complète en $\mathcal{O}(N^2)$.

Pour l'instant notre code de simulation se fait étape par étape : c'est une procédure qui est qualifiée de **scalaire**. En modifiant le code de simulation afin d'utiliser plusieurs cœurs d'exécution on peut, en théorie, faire les calculs plus vite. Ces cœurs d'exécution peuvent prendre des formes variées (FIG. 5.19).



FIG. 5.19– Central Processor Unit (CPU) avec 8 cœurs d'exécution complexes (à gauche) et Graphic Processor Unit (GPU) avec 1600 cœurs simples (à droite). OpenCL permet d'utiliser aussi bien les deux composants, pour des applications complexes comme pour des applications massivement parallèles.

Le language OpenCL a été créé en 2008 afin d'utiliser du code parallèle. Les librairies standards OpenCL peuvent être incluses dans du code C/C++ ou Fortran, et sont compatibles avec tout type de matériel informatique (contrairement à des languages concurrents propriétaires tels que NVIDIA CUDA). La compatibilité de ce language va des CPU aux consoles de jeux et téléphones portables, en passant par les cartes graphiques.

Actuellement, les CPU regroupent de 2 à 12 cœurs d'exécution, très complexes et très adaptables, avec une mémoire cache (c'est-à-dire une mémoire intégrée) relativement importante. Les cartes graphiques, quant à elle, regroupent des centaines de cœurs beaucoup plus simples, et avec moins de mémoire cache. C'est justement ce qui nous intéresse.

On peut décomposer notre code de simulation en petites fonctions très simples qui peuvent s'exécuter de manière totalement indépendante les unes des autres : c'est le cas idéal pour paralléliser le code tournant sur une machine donnée :

$$R = \frac{1}{(1-s) + \frac{s}{N}} , \qquad (5.5.1)$$

avec le nombre de processeurs N et la proportion d'activité parallélisable s (en pourcent). Dans le cas idéal où on dispose d'un code 100% parallélisable, on obtient alors :

$$R = N \tag{5.5.2}$$

Par chance, c'est notre cas. Dans la mesure où l'on décompose les simulations en plusieurs pas de temps et en plusieurs étapes (collision, désintégration, propagation), on a un code scalaire, mais chacune de ces étapes est complètement parallélisable. En théorie, on peut donc obtenir une accélération d'un facteur N. Implémenter OpenCL et paralléliser le code dans son ensemble va être notre prochain projet. On pourra ainsi avoir suffisamment de statistiques pour affiner nos résultats.

5.6 Conclusion

OUR conclure sur ce chapitre, on peut dire que la simulation de l'expansion et la transition de phase d'un plasma de quarks et d'antiquarks est une chose complexe, autant d'un point de vue théorique, que phénoménologique, et que numérique.

Avant toute chose, notre code a pour but de vérifier que le modèle NJL est une **solution adaptée** pour décrire correctement la physique de la transition de phase de manière dynamique. Ensuite, l'étude elle-même de cette transition est intéressante. Ce chapitre résume en quelque sorte toutes les questions et les problèmes que nous avons rencontrés au cours du développement du code, comme par exemple : le potentiel local, les collisions dans un milieu réaliste, ...Les réponses à ces questions ont été adoptées dans l'optique de garder un code précis, sans l'être de manière démesurée.

Notre code de simulation est un code entièrement développé au **laboratoire Subatech**. Ce développement simultané de la dynamique relativiste avec le modèle NJL et la phénoménologie que nous employons a entrainé de nombreuses questions sur la validité du code, ce qui nous a permis de le perfectionner autant que possible d'un point de vue contenu physique. Une **publication est en cours de réalisation** afin d'expliquer en détail le code et les algorithmes utilisés. En attendant, nous allons maintenant présenter les **premiers résultats** très encourageants que nous avons obtenus cette année.



Résultats de simulations

« A theory is something nobody believes, except the person who made it. An experiment is something everybody believes, except the person who made it. »

Albert Einstein (1879-1955)



FIG. 6.1– Distribution $d^2N/d\Delta\phi d\Delta\eta$ entre les particules trigger et les particules associées, pour une seule simulation avec b = 6.5 fm.



FIG. 6.2– Comparaison entre notre excentricité ε (gauche) et les résultats de Glauber et du CGC [90] (droite).

6.1 Organisation

MAINTENANT que nous avons discuté le modèle théorique que nous utilisons et son implémentation numérique, il est temps de présenter les résultats de nos simulations. Ces résultats seront systématiquement comparés aux résultats des autres modèles théoriques que nous avons déjà présentés dans le chapitre 3.

Notre code de simulation est encore en phase de développement, et les résultats présentés ici sont des **résultats préliminaires**. De plus, nous n'avons pas encore inclus certains éléments comme la detailled-balance ou bien les baryons. Pour l'instant, on va s'intéresser aux phénomènes physiques importants à observer (qualitativement plutôt que quantitativement).

Comme pour les autres modèles théoriques, nous allons présenter les résultats en plusieurs étapes : tout d'abord les résultats des conditions initiales, puis ceux du transport des particules, et enfin on terminera par l'hadronisation et la transition de phase.

6.2 Conditions initiales

S i on reprend les résultats des modèles de Glauber et du CGC, on voit que la première chose qui est testée, c'est l'excentricité ε et le flot elliptique v_2 correspondant pour différentes tailles de systèmes. Cette taille est sélectionnée via le paramètre d'impact b ou par le nombre de nucléons participants. Dans notre cas, on ne connait pas le nombre de participants, notre variable est le paramètre d'impact.

On voit sur la FIG. 6.2 que notre **excentricité est plus élevée** que les autres modèles. Cela était prévisible, puisque nous **saturons l'ellipse initiale en quarks**, avec un minimum de fluctuations. Le calcul théorique (3.2.16) montre donc que nous avons une



FIG. 6.3– Notre flot elliptique v_2 en fonction du paramètre d'impact (à gauche), et les résultats de Glauber et du CGC [90] (à droite).

excentricité **linéairement proportionnelle à** b, tandis que les autres modèles s'écartent de cette linéarité en prenant en compte des **fluctuations** bien plus importantes. Nous ne nous intéressons pas aux fluctuations en priorité, mais à l'expansion (transport) et la transition de phase (hadronisation).

Le flot elliptique formé lors de l'expansion est également très intéressant. On voit bien sur la FIG. 6.3 que le flot suit un comportement parfaitement en accord avec les simulations des autres modèles. Encore une fois, le v_2 maximum est surestimé car l'excentricité initiale est plus grande dans notre modèle.

On retrouve un comportement phénoménologique évident : le flot elliptique augmente linéairement avec l'excentricité de la collision, puis diminue pour les collisions très périphériques. Dans ces collisions il y a peu d'interactions, et donc l'excentricité n'a pas le temps d'être transformée en un flot transverse.

Au final, la distribution du flot elliptique en fonction du paramètre d'impact, est une **distribution en cloche**. On ne peut pas comparer directement la valeur maximale du flot avec les autres modèles car nous prenons en compte toutes les particules pour toutes les rapidités, alors que les autres modèles se calent sur l'expérience et utilisent uniquement les particules chargées à mid-rapidité. Nous actualiserons les résultats avec ces coupures très prochainement.

Le résultat vraiment intéressant est le ratio v_2/ε (FIG. 6.4) car il ne dépend plus de la structure des conditions initiales, mais uniquement du phénomène de conversion de l'excentricité initiale en flot elliptique. On observe très bien la saturation pour les collisions centrales (petit paramètre d'impact b), où le ratio est presque constant, et la disparition du flot pour les collisions très périphériques, où le plasma ne vit pas assez longtemps pour développer un flot. L'expérience montre des résultats similaires (avec le nombre de participants à la place du paramètre d'impact).



FIG. 6.4– Notre ratio v_2/ε en fonction de *b* (à gauche) et les résultats de l'expérience en fonction de N_{part} [80] (à droite).

Nos conditions initiales, même si elles sont beaucoup plus simples que celles des autres modèles théoriques, présentent les mêmes caractéristiques générales vis-à-vis de la **dyna-mique de l'expansion**. Grâce à la vérification du phénomène de transformation de l'excentricité en flot transverse, on peut maintenant s'intéresser de plus près au mécanisme microscopique du transport et de la transition de phase.

6.3 Transport et thermodynamique

L ES résultats correspondants au transport des particules entre l'état initial et final se classent en deux catégories :

- les résultats comparables à l'expérience qui dépendent des observables définies dans le chapitre 3, et que l'on va comparer aux autres modèles théoriques,
- et les résultats propres à notre code de simulation, qui nous donnent des relevés microscopiques des particules elles-même.

Toutes les simulations effectuées, ont été produites avec le même jeu de paramètres que nous avions pris pour les conditions initiales, c'est-à-dire :

- collision Plomb-Plomb : A = 208 nucléons,
- énergie du RHIC : $\sqrt{s_{NN}} = 200 \text{ GeV},$
- conditions thermodynamiques initiales : $(T_0 = 350 \text{ MeV}, \mu = 0 \text{ MeV}).$

On présentera les résultats pour différents paramètres d'impact b.

On peut présenter les résultats en commençant par les corrélations angulaires (3.2.11). Nous avons besoin de sélectionner des particules trigger, et leurs partenaires associés. Nous prendrons comme trigger les particules ayant un $\mathbf{p}_{\rm T} > 1.2$ GeV, et les particules associées seront celles avec $0.8 < \mathbf{p}_{\rm T} < 1.2$ GeV. Ces gammes d'énergie ne sont pas les mêmes que celles des autres modèles (qui, de plus, font une sélection en rapidité) mais cela reflète le même phénomène de corrélation. Seule la largeur des pics observés sera différente.



FIG. 6.5– Spectres en $dN/d\Delta\eta$, puis en $dN/d\Delta\phi$, pour b = 8.5/10.5 fm.

L'étude des corrélations angulaires nous renseigne sur le type de dynamique que nous avons lors de l'expansion. Par exemple dans le cas de $dN/d\Delta\eta$, on peut observer l'élongation de la distribution en partons entre les deux noyaux qui se croisent. Les deux premiers graphiques de la FIG. 6.5 montrent une structure très simple, quasi-gaussienne. Cela implique que dans nos simulations, il n'y a pas de corrélations particulières en $\Delta\eta$ pendant l'expansion. Le phénomène de corrélation correspond à une distribution en $\Delta\eta$ qui s'appelle le **ridge** (comme dans la FIG. 3.6).

Les deux derniers graphiques de la FIG. 6.5 donnent un comportement similaire à l'expérience. D'un point de vue qualitatif, on voit que les particules de grand \mathbf{p}_{T} (trigger) ont une **gerbe de particules associées** qui les accompagne (à petit angle $\Delta \phi$) et également une **contre réaction** dans la direction opposée. Le fait d'avoir des pics autour des particules trigger montre bien que l'énergie de ces particules est transmise aux particules voisines, formant ainsi une gerbe. Les sections efficaces NJL et le potentiel venant des masses permettent donc bien de reproduire ce type de corrélations.

La FIG. 6.1 (première page du chapitre) montre la distribution des corrélations angulaires pour une simulation unique à b = 6.5 fm, et avec les règles de coupure en $\mathbf{p}_{\rm T}$ que nous avons précédemment décrites. Malgré le manque de statistique (il ne s'agit que d'une seule simulation) on commence à voir certaines structures se dessiner de la même



FIG. 6.6– Spectres en $dN/2\pi \mathbf{p}_T d\mathbf{p}_T$ pour b = 8.5/10.5/12.5 fm, et les résultats du modèle hydrodynamique pour des collisions Au-Au centrales [75]. On normalise nos spectres par le nombre total de particules, ce qui explique la différence avec le modèle hydrodynamique.

manière que sur la FIG. 6.5.

En principe, pour calculer les corrélations angulaires, il faut calculer les corrélations entre les particules d'un même événement, puis ajouter tous les évènements, et normaliser par la même distribution où l'on compte cette fois-ci les corrélations des particules entre différents évènements. Cette procédure permet de **séparer les corrélations des simples fluctuations statistiques**.

En parlant de \mathbf{p}_{T} , on peut voir que la multiplicité associée (FIG. 6.6) reproduit très bien le comportement expérimental : la courbure à bas \mathbf{p}_{T} dépendant des différentes espèces de particules et la linéarité pour les grands \mathbf{p}_{T} . Les résultats sont donc qualitativement bons.

Les résultats pour un paramètre d'impact plus petit ont été faits avec de moins en moins de simulations, ce qui explique les **fluctuations statistiques importantes** pour les deux premiers graphiques. La différence quantitative qui apparaît ici, est due au fait que



FIG. 6.7– Spectre en $dv_2/d\eta$ pour nos simulations avec b = 12.5 fm (à gauche), et les résultats du modèle hydrodynamique et de l'expérience PHOBOS pour des particules chargées uniquement [75] (à droite).

dans notre cas, nous avons normalisé les distributions par le nombre total de particules.

Passons maintenant au spectre de flot elliptique v_2 . La FIG. 6.7 montre la similitude pour la **description triangulaire** du flot en fonction de η . L'aspect triangulaire ici présent vient de la contribution des particules de grand \mathbf{p}_T à petite rapidité, et de l'expansion du plasma pendant la formation du flot. On ne compare que cet aspect qualitatif, étant donné que notre paramètre d'impact est assez différent de celui des résultats expérimentaux.

La distribution du v_2 en \mathbf{p}_T (FIG. 6.8) montre bien un flot elliptique qui augmente puis diminue, comme prévu par l'expérience. Cependant, le pic du maximum n'est pas pour la même valeur de \mathbf{p}_T . Encore une fois, cela s'explique par le fait que les simulations effectuées sont pour des collisions ultrapériphériques (b > 10 fm) et que dans ce cas, le plasma formé est trop petit pour avoir le temps de faire évoluer la distribution beaucoup plus loin que pour les \mathbf{p}_T initialement présents.



FIG. 6.8– Spectre en $dv_2/d\mathbf{p}_T$ pour nos simulations avec b = 12.5 fm (à gauche) et les résultats du modèle hydrodynamique et de l'expérience STAR pour des particules chargées uniquement, pour différents η/s [95] (à droite).



FIG. 6.9– Évolution temporelle du flot elliptique v_2 pour b = 6.5/10.5 fm, et la comparaison avec PHSD [71] (à gauche), et BAMPS [70] (à droite).

Le temps de formation du flot elliptique dans le plasma (FIG. 6.9) vient de la forme initiale du plasma, et de la viscosité présente. La pression initiale dans le plasma (qui ressemble à une ellipse) évolue dans le temps car on considère le phénomène de viscosité (ce qui est prédit par le modèle hydro [95]). Le plasma revient ensuite à une structure finale plutôt sphérique, en ayant développé une anisotropie des impulsions : un flot elliptique.

Les modèles PHSD et BAMPS utilisent des sections efficaces élastiques de quelques millibarns [71, 100] et des conditions initiales à l'équilibre thermique (v_2 initial égal à zéro), ce qui leur permet de développer le v_2 dans le temps, avec un temps de formation qui correspond environ au temps de vie du QGP.

Avec les conditions initiales et les sections efficaces du modèle NJL qui sont beaucoup plus grandes près de la transition (comme dans le bord de l'ellipse), on a beaucoup plus de collisions dès le départ (voir prochaine section), et le plasma qui en résulte après quelques centièmes de fm/c dispose déjà d'un gradient de pression proportionnel à la forme de l'ellipse. C'est-à-dire que **le flot se forme quasi-instantanément**. On peut même supposer que le flot se développe surement depuis le début de la collision des noyaux, et que le plasma n'atteint jamais l'équilibre thermique [92].



FIG. 6.10– Distribution des températures en (t, \mathbf{r}) , pour b = 6.5/8.5/10.5/12.5 fm.



FIG. 6.11– Distribution des vitesses en (t, \mathbf{r}) , pour b = 6.5/8.5/10.5/12.5 fm.



FIG. 6.12– Évolution de l'énergie E, de la masse m, et de l'impulsion p totales pour b = 6.5 fm.



FIG. 6.13– Évolution de la densité moyenne de particules $\langle \rho \rangle$, de la température moyenne $\langle T \rangle$, de la densité d'énergie moyenne $\langle \varepsilon \rangle$ et de la vitesse moyenne $\langle \beta \rangle$ pour b = 6.5 fm.



FIG. 6.14–Flot elliptique en fonction de la largeur L des fonctions de distribution à 1 corps pour un paramètre d'impact fixe de b = 10 fm.

Pour information et à titre d'exemple, on peut montrer l'évolution temporelle et spatiale de la température locale du plasma sur la FIG. 6.10 et aussi les vitesses sur la FIG. 6.11. Les FIG. 6.12 et 6.13 montrent, pour une simulation assez grosse (b = 6.5 fm), l'évolution de l'énergie et de divers paramètres dynamiques.

La dernière FIG. 6.14 montre la dépendance en L (4.4.11 et 5.2.10) du flot elliptique final de toutes les particules, pour des simulations avec b = 10 fm. On voit qu'avec un paramètre L très petit, les potentiels disparaissent, et le plasma **ne forme plus aucun** flot elliptique. On remarque également que le flot elliptique créé sature au delà d'une certaine valeur de L. Cela montre que le flot elliptique final n'est vraiment dépendant **que de la forme initiale du plasma** pour le cas d'une grande viscosité (c'est-à-dire d'une grande interaction, avec L grand). Il serait aussi intéressant de tester d'autres définitions de la densité locale (5.2.9) afin faire varier le potentiel, et donc changer la dynamique du système.

6.4 Hadronisation et transition de phase

A description dynamique de l'hadronisation n'est pas présente dans les autres modèles de simulations, et elle n'est pas observable expérimentalement . On présentera donc exclusivement les résultats microscopiques de cette transition de phase avec notre code de simulation.

On va commencer par montrer les distributions des collisions. Les conditions de simulation sont toujours les mêmes que celles décrites du début de ce chapitre. La FIG. 6.15 montre l'évolution du nombre de collisions élastiques en fonction du temps et de la distance au centre **r**.

On constate deux choses. La première est que par rapport aux conditions initiales que nous avons définies, il y a un très **grand nombre de collisions dès le départ** des simulations. Cela entraine une création très rapide du flot elliptique, comme nous avons vu dans la FIG. 6.9.



FIG. 6.15– Distribution des collisions élastiques en (t, \mathbf{r}) pour b = 6.5/7.5/8.5/9.5 fm.

Ces nombreuses collisions élastiques font passer le système d'un état thermalisé avec une pression isotrope, à un état fortement anisotrope. Une étude plus approfondie des conditions initiales pourrait permettre de comprendre plus en détail ce processus.

On remarque ensuite qu'il n'y a presque **pas de collisions** pendant un laps de temps non négligeable. La température est très haute, ainsi que la densité de particules (malgré le début de l'expansion) et donc toutes les **sections efficaces sont très faibles**. On observe le même vide sur la FIG. 6.16 pour les collisions inélastiques. Les quarks du milieu ne sont donc soumis qu'à un **faible potentiel** (à grande température) et sont donc dans une **phase QGP faiblement liée**.

Ensuite, les deux figures (FIG. 6.15) et 6.16 montrent à nouveau un grand nombre de collisions après cette phase "libre". On voit très bien sur la FIG. 6.16 la zone d'hadronization, qui est distribuée dans l'espace et dans le temps. On évite donc ainsi la surface de freeze-out comme dans le modèle hydrodynamique. Cela permet de **décrire un crossover** entre la phase QGP et la phase hadronique. Malheureusement on remarque aussi de nombreuses collisions élastiques (entre quarks donc, puisque nous n'avons pas implémenté les diffusions entre hadrons). Ce qui veut dire que des quarks restent longtemps présents après l'hadronisation, et donc que celle-ci n'est **pas complète**.



FIG. 6.16– Distribution des collisions inélastiques en (t, \mathbf{r}) pour b = 6.5/7.5/8.5/9.5 fm.

Nous allons revenir à cette hadronisation un peu plus tard, mais avant, j'aimerais montrer la distribution en énergie \sqrt{s} et en température T des collisions. Les FIG. 6.17 et 6.18 montrent une distribution **en accord avec les sections efficaces NJL**. En effet, les sections efficaces de ce modèle explosent pour des valeurs de température proche de la température de Mott, et également pour des énergies disponibles proches du seuil de réaction (cf. FIG. 2.21). On observe la même chose dans nos simulations, à l'exception près que l'on a également une distribution thermique des quarks au départ, ce qui donne à la FIG. 6.18 un léger sursaut pour des valeurs de température correspondant à la température moyenne du système au départ, et sur la FIG. 6.17 le même sursaut pour des énergies \sqrt{s} associées à ces hautes températures.

Il est important de constater que malgré le fait que nous utilisions une **dynamique moléculaire** avec des collisions, et un potentiel (lié aux masses), on observe quand même des particules qui **atteignent le seuil de réaction et la température critique**. Ce n'était pas une certitude, car le modèle NJL n'inclut pas le confinement lié aux gluons. Cependant, la masse effective que l'on a, crée une **clusterisation** des groupes de particules qui sont proches dans l'espace des phases (position et impulsion). On peut qualifier ce comportement de **pseudo-confinement**.



FIG. 6.17– Spectres des collisions en \sqrt{s} pour b = 6.5/8.5/10.5 fm, et sections efficaces de production de pions du modèle NJL [128].



FIG. 6.18– Spectres des collisions en T pour b = 6.5/8.5/10.5/12.5 fm.



FIG. 6.19– Distribution des désintégrations en (t, \mathbf{r}) pour b = 6.5/7.5/8.5/9.5 fm.



FIG. 6.20– Spectres des désintégrations en T pour b = 6.5/8.5/10.5/12.5 fm.



FIG. 6.21– Évolution temporelle des espèces dans le système pour b = 6.5/8.5/10.5 fm, et un résultat de PHSD [71].

Pour le cas des désintégrations des états instables des mésons dans le milieu chaud et dense, on peut également montrer les distributions spatiales et temporelles (FIG. 6.19), ainsi que les distributions en température de désintégration (FIG. 6.20).

Comme nous pouvions le prévoir, les désintégrations sont très peu nombreuses car les sections efficaces de production à haute température sont très faibles. Ces désintégrations sont situées essentiellement dans le cœur du plasma, et elles ont lieu uniquement au départ des simulations. Elles contribuent à augmenter le nombre global de particules dans le plasma, car nous n'avons pas implémenté les réactions réciproques (**detailled-balance**) dans le code de simulation pour le moment.

De la même manière que pour les collisions, les désintégrations n'apparaissent qu'au dessus de la température critique du modèle NJL, où les hadrons acquièrent une largeur qui augmente avec la température. La limite en température des désintégrations, qui apparait sur la FIG. 6.20, correspond simplement à la température maximale dans le plasma.

Passons maintenant à l'hadronisation elle-même, qui est le sujet de cette section. On montre sur la FIG. 6.21 une comparaison entre différentes simulations (toujours pour les mêmes paramètres initiaux) pour notre modèle de simulation avec différents paramètres d'impact b, et un résultat du modèle PHSD.

Si on commence par décrire le modèle PHSD, on voit que le temps d'hadronisation est de quelques fm/c. De plus, leurs conditions initiales sont à l'équilibre (pour les résultats



FIG. 6.22– Taux d'hadronisation en fonction du paramètre d'impact b (à gauche) ou en fonction de la largeur d'interaction L (à droite).

de cette figure), c'est-à-dire qu'on observe juste l'hadronisation et pas la phase de prééquilibre juste avant, où le nombre de quarks augmente et le nombre d'hadrons diminue. Nos simulations ont des conditions initiales qui sont en équilibre thermique, mais pas en équilibre chimique : ce qui veut dire la présence d'une "couronne" de hadrons. On observe donc un équilibrage entre la création des hadrons et leur désintégration, ce qui donne un plasma en **équilibre instable** : le nombre de partons est alors constant, dans sa "bulle" de hadrons. Cet équilibre est très court (moins de 2 fm/c pour une collision à b = 6.5 fm).

Ensuite vient l'hadronisation. Pour PHSD, c'est la densité scalaire qui est utilisée pour forcer l'hadronisation des partons [108]. Cela donne une hadronisation parfaite, et d'excellents résultats en général, cependant, cela n'est pas correct d'un point de vue relativiste (causalité des collisions).

C'est en partie dans cette optique que nous avons voulu garder la méthode de collisions de dynamique moléculaire. Malheureusement avec cette méthode, on voit que notre **ha-dronisation n'est pas complète**. Elle reste cependant assez importante (85% en moyenne avec les paramètres actuels). Si on regarde de plus près nos simulations de la FIG. 6.21, on voit que le taux d'hadronisation des quarks légers est bon, mais que celui des quarks lourds est moins bon (seul 50% hadronisent). On s'est donc intéressé de plus près à ce taux d'hadronisation.

La FIG. 6.22 montre l'étude du taux d'hadronisation pour différents paramètres d'impact b, ainsi que pour différentes largeurs d'interaction L de la fonction de densité (5.2.9). En fonction du paramètre d'impact, le taux est assez constant, mais pour un paramètre d 'impact suffisamment grand (b > 10 fm), ce taux diminue linéairement. On peut se poser la question de la validité de telles simulations, car en principe, pour de telles centralités, **aucun plasma n'est supposé être formé** [129].

On a donc également testé la largeur d'interaction pour un paramètre d'impact fixe (b = 10 fm), d'un plasma libre de tout potentiel (L = 0 fm) à un plasma qui interagit à longue distance (L = 2 fm). Encore une fois, même à petit L, l'hadronisation n'est pas parfaite (100 %) et avec un potentiel à plus large distance L : le taux d'hadronisation décroit quasi-linéairement. Pourquoi un tel comportement?



FIG. 6.23– Schéma de la distribution initiale du QGP dans l'espace des phases.

Le problème d'hadronisation que nous rencontrons n'est pas dû à la dynamique ou à la méthode de collision que nous utilisons, mais il est certainement dû aux conditions initiales. En effet, notre méthode de collision (cf. section (4.6)) exclut les collisions de particules qui ne se croisent pas (collisions non causales). La distribution géométrique en impulsion initiale des particules, ainsi que le cas des particules plus massives comme les quarks s, doit être mieux pris en compte. Par exemple sur la FIG. 6.21, on voit que les quarks lourds hadronisent moins bien que les quarks légers.

La FIG. 6.23 montre un schéma de notre idée d'amélioration des conditions initiales pour augmenter le taux d'hadronisation. Le but est d'avoir une condition initiale où les particules présentes dans la couronne et ayant une grande impulsion transverse (FIG. 5.15), soient automatiquement initialisées comme des hadrons. Cela permettrait d'éviter d'avoir des quarks seuls et libres hors du plasma. De plus, on peut créer des paires de quarks et antiquarks dont les impulsions sont quasi colinéaires, ce qui évite d'avoir des conditions initiales avec des quarks qui soient hors de l'espace de causalité (cône de lumière).

La séparation initiale des processus durs et mous est donc à envisager afin de commencer des simulations qui soient réalistes physiquement. Peut-être qu'un jour nous seront capables de tester chaque condition initiale proposée afin de dire si oui ou non elles sont physiques, en examinant les résultats. Avec de la chance, l'expérience pourra nous en dire un peu plus ces conditions initiales.

6.5 Conclusion

Es résultats présentés, bien que très préliminaires, sont assez encourageant vis-à-vis de nos choix physiques. En effet on pouvait se demander si l'emploi du modèle NJL et d'une dynamique relativiste serait bon ou mauvais pour décrire l'expansion et la transition de phase du plasma.

À la vue des résultats, on peut dire que la phénoménologie présente dans notre code de simulation permet de reproduire les résultats remarquables de la physique des collisions d'ions lourds. Parmi ces résultats importants, on note :

- la création d'un flot transverse en réponse à une excentricité initiale,
- la présence d'une phase plasma en équilibre (même instable),
- la présence d'un cross-over et de pré-hadrons au sein du plasma,
- l'hadronisation quasi-complète du système sans avoir pris en compte le phénomène de confinement.

De nombreux résultats sont encore à venir et seront présentés dans une publication en cours d'écriture. On ajoutera notamment de nouvelles conditions initiales, et une analyse plus poussée avec plus de statistiques et des résultats avec les même paramètres que l'expérience. On pourra ainsi effectuer une comparaison aussi bien qualitative que quantitative.

Conclusion

 \ll An expert is someone who knows some of the worst mistakes that can be made in his subject, and how to avoid them. \gg

Niels Bohr (1885-1962)



"I think you should be more explicit here in step two."

Le sujet de ce rapport est l'étude de l'expansion et la transition de phase d'un plasma de quarks et de gluons. L'approche qui a été choisie pour répondre à cette problématique n'est pas unique, comme on a pu le voir tout au long de ce rapport. De nombreux modèles physiques ainsi que de nombreux codes de simulation existent déjà. Cependant, nous avons voulu apporter un point de vue plus détaillé des processus qui permettent de répondre à cette problématique.

Pourquoi avons-nous choisi le modèle NJL? Tout simplement parce que ce modèle se base sur un Lagrangien qui nous permet de décrire précisément la physique avec : le calcul des masses, des sections efficaces, de l'équation d'état, etc. Tous ces éléments sont nécessaires pour formuler la **dynamique d'un système**. De plus, le modèle NJL est un modèle effectif, ce qui veut dire que l'on peut changer le Lagrangien ou lui ajouter des termes de manière à reproduire exactement la physique qui nous intéresse (les baryons, la boucle de Polyakov). En l'occurrence, nous aurions dû prendre le modèle PNJL plutôt que NJL pour nos simulations, mais étant donné que seul le **comportement phénoménologique** nous intéresse pour le moment, et que l'on ne sait pas comment inclure le confinement en pratique, nous nous sommes cantonnés au plus élémentaire. Nous voulions un modèle capable de décrire la matière nucléaire effectuant une transition de phase, chose que la QCD ne permet pas de manière dynamique malheureusement.

Cette transition doit nécessairement être traitée de manière dynamique afin d'être **détaillée et quantifiée**. C'est pour cela qu'il nous fallait aussi faire le choix d'un modèle de simulation et d'hadronisation. C'est là que se situe notre réelle contribution. Il fallait montrer qu'un modèle effectif de QCD couplé à une dynamique relativiste permettait de reproduire la phénoménologie observée expérimentalement. Il nous fallait donc inclure le modèle NJL dans un modèle dynamique microscopique. La dynamique relativiste qui était laissée à l'oubli depuis plusieurs années était l'outil parfait dans notre cas. On a donc récupérer ce formalisme et y avons apporté la touche finale permettant d'avoir un modèle qui marche pour tous les types de systèmes (relativiste et classique).

La physique utilisée pour les simulations donne déjà des résultats très encourageants pour la suite de cette étude de la transition de phase. Après cette première étape, qui a permis de prouver que notre approche de simulation est possible, nous devons maintenant aller plus loin. Nous allons par exemple inclure un modèle plus complet tel que PNJL, avec d'autres particules (mésons vecteurs, baryons, ...), mais nous allons aussi inclure notre code dans un modèle de simulation plus important, tel que PHSD. Ce modèle dispose de bonnes conditions initiales, qui nous permettront de corriger cette lacune de notre code. PHSD dispose également d'une routine finale de productions de dileptons à partir des hadrons. Étant donné que les dileptons sont facilement détectés expérimentalement, on pourra produire des résultats de simulations et de les comparer très précisément.

Notre code de simulation a été construit de A à Z pour répondre à notre besoin. Ce code sera donc la pierre angulaire de notre étude future de la transition de phase. Il permettra d'affiner et de compléter les résultats déjà obtenus et de donner **d'autres perspectives**, notamment l'étude de la matière nucléaire à grande densité baryonique, l'étude des milieux infinis et des pertes d'énergie partoniques, l'étude des quarks lourds et de leur hadronisation, etc. Un fois toutes ces étapes franchies, nous espérons avoir un **générateur d'évènement** complet qui pourra prédire les résultats d'expériences futures telle que FAIR.



Acronymes

Acronymes officiels

FAIR	:	Facility for Antiproton and Ion Research
LHC	:	Large Hadron Collider
RHIC	:	Relativistic Heavy Ion Collider
SPS	:	Super Proton Synchrotron
QGP	:	Quark-Gluon Plasma
QED	:	Quantum Electro-Dynamics
QCD	:	Quantum Chromo-Dynamics
LQCD	:	Lattice Quantum Chromo-Dynamics
QFT	:	Quantum Field Theory
NJL	:	Nambu–Jona-Lasinio
PNJL	:	Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio
NJL	:	Nambu–Jona-Lasinio
SDE	:	Schwinger-Dyson Equation
BSE	:	Bethe-Salpeter Equation
GOR	:	$\textbf{G} ell-Mann-\textbf{O} akes-\textbf{R} enner \ Relation$

CGC : Color Glass Condensate

Acronymes non-officiels

- **HIC** : **H**eavy Ion **C**ollision
- URHIC : Ultra Relativistic Heavy Ion Collision
 - CM : Centre de Masse



Matrices usuelles

Matrices de Gell-Mann

$$\lambda_{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_{2} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_{3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\lambda_{4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_{5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_{6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (B.0.1)$$
$$\lambda_{7} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_{8} = \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \lambda_{0} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices Gamma

$$\begin{split} \gamma^{0} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^{1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \gamma^{2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^{3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{split}$$
(B.0.2)

Avec la matrice complementaire :

$$\gamma^{5} = i\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
(B.0.3)

On peut aussi noter la matrice conjugaison de charge :

$$C = i\gamma^{0}\gamma^{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
(B.0.4)

Annexe

Transformation de Fierz

Afin de compléter la définition de la transformation de Fierz, on va donner la valeur des coefficients de Fierz c_{km} provenant de la relation :

$$\Gamma^k_{ab}\Gamma^k_{cd} = \sum_m c_{km}\Gamma^m_{ad}\Gamma^m_{cb} . \qquad (C.0.1)$$

On peut représenter ces coefficients sous forme de matrice pour une meilleure visibilité. Pour le canal quark-antiquark (diagramme d'échange t), on a :

$$\begin{pmatrix} (1)_{ij} (1)_{kl} \\ (i\gamma_5)_{ij} (i\gamma_5)_{kl} \\ (\gamma^{\mu})_{ij} (\gamma_{\mu})_{kl} \\ (\gamma^{\mu}\gamma_5)_{ij} (\gamma_{\mu}\gamma_5)_{kl} \\ (\sigma^{\mu\nu})_{ij} (\sigma_{\mu\nu})_{kl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & -1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 3 & -3 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1)_{il} (1)_{kj} \\ (i\gamma_5)_{il} (i\gamma_5)_{kj} \\ (\gamma^{\mu}\gamma_5)_{il} (\gamma_{\mu})_{kj} \\ (\gamma^{\mu}\gamma_5)_{il} (\gamma_{\mu}\gamma_5)_{kj} \\ (\sigma^{\mu\nu})_{il} (\sigma_{\mu\nu})_{kj} \end{pmatrix}$$
(C.0.2)

et pour canal quark-quark :

$$\begin{pmatrix} (\mathbb{1})_{ij} (\mathbb{1})_{kl} \\ (i\gamma_{5})_{ij} (i\gamma_{5})_{kl} \\ (\gamma^{\mu})_{ij} (\gamma_{\mu})_{kl} \\ (\gamma^{\mu}\gamma_{5})_{ij} (\gamma_{\mu}\gamma_{5})_{kl} \\ (\sigma^{\mu\nu})_{ij} (\sigma_{\mu\nu})_{kl} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (i\gamma_{5}C)_{ik} (C\,i\gamma_{5})_{lj} \\ (C)_{ik} (C)_{lj} \\ (\gamma^{\mu}\gamma_{5}C)_{ik} (C\,\gamma_{\mu}\gamma_{5})_{lj} \\ (\gamma^{\mu}C)_{ik} (C\,\gamma_{\mu})_{lj} \\ (\sigma^{\mu\nu}C)_{ik} (C\,\sigma_{\mu\nu})_{lj} \end{pmatrix}$$
(C.0.3)
Annexe

Sections efficaces

Calcul pratique

Dans le centre de masse d'une collision $a + b \rightarrow c + d$ d'énergie $s = (p + p')^2$:



on exprime la section efficace différentielle par :

$$d\sigma = \frac{1}{F} \frac{1}{N^2} \frac{\sum |\mathcal{M}|^2}{V^2} dLIPS(s, p, p') .$$
 (D.0.1)

Dans cette équation, F est le flux de particules entrantes :

$$F = \frac{4\sqrt{s|p|}}{V^2} , \qquad (D.0.2)$$

ensuite N est le le nombre d'états possibles de particules d'entrée ($N = \text{spin} \times \text{couleur}$), \mathcal{M} est l'élément de matrice par unité de volume V ce qui représente l'amplitude de diffusion lorsque l'on a cette expression au carré. On note que l'on somme $|\mathcal{M}|^2$ sur tous les canaux possibles. Enfin, dLIPS(s, p, p') est l'élément d'intégration de l'espace des phase invariant de Lorentz (en anglais : Lorentz-Invariant Phase-Space (**LIPS**) :

$$dLIPS(s, p, p') = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{|p'|}{\sqrt{s}} d\Omega , \qquad (D.0.3)$$

où Ω est l'angle solide.

On a donc au final :

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{|p'|}{|p|} \frac{1}{N^2} \frac{\sum |\mathcal{M}|^2}{V^2} d\Omega .$$
 (D.0.4)

En utilisant la variable $t = (p - p')^2$, on peut écrire :

$$dt = 2|p||p'|d\cos\theta = 2|p||p'|\frac{d\Omega}{2\pi}$$
 (D.0.5)

L'équation (D.0.4) nous permet alors de retrouver (2.3.1):

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s |p|^2} \frac{1}{N^2} \frac{\sum |\mathcal{M}|^2}{V^2} \quad . \tag{D.0.6}$$

On obtient la section efficace totale en intégrant sur dt:

$$\sigma(\sqrt{s}) = \int_{t_{min}}^{t_{max}} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t \;. \tag{D.0.7}$$

Cette équation est valable dans le vide. Dans un milieu à (T, μ) fini, on doit tenir compte d'effets tel que le **blocage de Pauli**. On modifie alors l'équation précédente en accord avec la mécanique statistique. Si les particules de sortie sont deux fermions, on a :

$$\sigma(\sqrt{s}, T, \mu) = \int_{t_{min}}^{t_{max}} \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} (1 - f_1^+) (1 - f_2^+) \mathrm{d}t , \qquad (\mathrm{D.0.8})$$

où f^{\pm} est la distribution de Fermi-Dirac. Si les deux particules sont des bosons, on a :

$$\sigma(\sqrt{s}, T, \mu) = \int_{t_{min}}^{t_{max}} \frac{d\sigma}{dt} (1+b_1)(1+b_2) dt , \qquad (D.0.9)$$

où b est la distribution de Bose-Einstein.

La section efficace de diffusion peut décrire :

- des **processus élastiques**, où les particules d'entrée et de sortie sont les mêmes, et l'énergie échangée au centre de masse est nulle,
- des **processus inélastiques**, où les particules d'entrée et de sortie sont différentes, et l'énergie échangée au centre de masse n'est pas nulle.

Processus de diffusion

Processus	canal t	canal u	
$uu \rightarrow uu$	$\pi,\eta,\eta',a_0,f_0,f_0'$	$\pi,\eta,\eta',a_0,f_0,f_0'$	
$ud \rightarrow ud$	$\pi,\eta,\eta',a_0,f_0,f_0'$	π, a_0	
$us \rightarrow us$	η,η',f_0,f_0'	K, K_0^*	
$ss \rightarrow ss$	η,η',f_0,f_0'	η,η',f_0,f_0'	

TABLE D.1– Processus indépendants pour les diffusions qq : mésons échangés dans les canaux possibles [46].

Processus	canal t	canal s
$u\bar{u} \rightarrow u\bar{u}$	$\pi,\eta,\eta',a_0,f_0,f_0'$	$\pi, \eta, \eta', a_0, f_0, f_0'$
$u\bar{u} \to d\bar{d}$	π, a_0	$\pi, \eta, \eta', a_0, f_0, f'_0$
$u\bar{u} \to s\bar{s}$	K, K_0^*	η,η',f_0,f_0'
$u\bar{d} \rightarrow u\bar{d}$	$\pi,\eta,\eta',a_0,f_0,f_0'$	π, a_0
$u\bar{s} \rightarrow u\bar{s}$	η,η',f_0,f_0'	K, K_0^*
$s\bar{s} \rightarrow s\bar{s}$	η,η',f_0,f_0'	η, η', f_0, f_0'

TABLE D.2– Processus indépendants pour les diffusions $q\bar{q}$: mésons échangés dans les canaux possibles [46].

Entrée	$u\bar{u}$	$u\bar{d}$	$u\bar{s}$	$s\bar{s}$
	$\pi^+\pi^-$	$\pi^+\pi^0$	$\pi^+ K^0$	$\pi^+\pi^-$
	$\pi^0\pi^0$	$K^+ \bar{K^0}$	$\pi^0 K^+$	$\pi^0\pi^0$
	K^+K^-	$\pi^+\eta$	ηK^+	K^+K^-
	$K^0 \bar{K^0}$	$\pi^+\eta'$	$\eta' K^+$	$K^0 \bar{K^0}$
Sortie	$\pi^0\eta$			$\eta\eta$
	$\pi^0 \eta'$			$\eta\eta'$
	$\eta\eta$			$\eta'\eta'$
	$\eta\eta'$			
	$\eta'\eta'$			

TABLE D.3– Processus indépendants pour l'hadronisation en fotion des quarks entrants et des mesons sortants [47].



Boucles de fermions

Cette annexe est un résumé tiré de la publication [48]. Elle présente le calcul des boucles à 1, 2 et 3 fermions qui sont utilisées dans les formules du modèle NJL.

Boucle à 1 fermion

La première boucle à 1 fermions est utilisée dans le calcul de la masse des quarks, via les condensats. On rappelle l'équation (2.2.10):

$$\langle \langle \bar{\psi}\psi \rangle \rangle = -i \ N_c \ \text{Tr}(S(x,x)) ,$$
 (E.0.1)

que l'on peut réécrire

$$\langle \langle \bar{\psi}\psi \rangle \rangle = -N_c \ \frac{m}{4\pi^2} A(m,\mu) , \qquad (E.0.2)$$

où l'on voit apparaitre la **fonction** A qui représente la boucle à 1 fermions :

$$A(m,\mu, \beta,\Lambda) = \frac{16\pi^2}{\beta} \sum_{n} \exp(i\omega_n \eta) \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(i\omega_n + \mu)^2 - E^2} , \qquad (E.0.3)$$

avec $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, la température inverse $\beta = 1/T$, et le cut-off tridimensionnel Λ . Toutes les intégrales sont considérées pour $|\vec{p}| \leq \Lambda$.

Boucle à 2 fermions

La boucle à deux fermions se retrouve dans le calcul de la fonction de polarisation $\Pi(k_0, \mathbf{k})$ des états liés. On a :

$$\Pi(k_0, \mathbf{k}) = -\frac{N_c}{8\pi^2} \Big[A(m_1, \mu_1) + A(m_2, \mu_2) + ((m_1 - m_2)^2 - (k_0 + \mu_1 - \mu_2)^2 + \mathbf{k}^2) B(\mathbf{k}, m_1, \mu_1, m_2, \mu_2, k_0) \Big] , \qquad (E.0.4)$$

où l'on introduit la **fonction** *B* qui représente la boucle à 2 fermions (fermion-antifermion) :

$$B(k, m_1, \mu_1, m_2, \mu_2, i\nu_m, \beta, \Lambda) =$$

$$\frac{16\pi^2}{\beta} \sum_n \exp(i\omega_n \eta) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{((i\omega_n + \mu_1)^2 - E_1^2)} \frac{1}{((i\omega_n - i\nu_m + \mu_2)^2 - E_2^2)},$$
(E.0.5)



FIG. E.1– Diagramme de Feynman pour la fonction de polarisation Π irréductible avec le couplage pseudoscalaire $i\gamma_5$ [47].

avec la fréquence complexe $i\nu_m$ pour la sommation de Matsubara sur les n états, et

$$E_1 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_1^2}$$
 et $E_2 = \sqrt{(\mathbf{p} - \mathbf{k})^2 + m_2^2}$. (E.0.6)

Les symboles m_i et μ_i dénotent les masses et potentiels chimiques des fermions de chaque ligne individuelle du diagramme (FIG. E.1).

Boucle à 3 fermions

Pour finir, la boucle à 3 fermions intervient dans le calcul du canal s des sections efficaces inélastiques. On peut voir ce diagramme sur la FIG. E.2. On écrit cett boucle de la même manière que pour les fonction A et B, en utilisant cette fois-ci la fonction C:

$$C(k,q,\delta_{\vec{k},\vec{q}},\ m_1,\mu_1,\ m_2,\mu_2,i\nu_m,\ m_3,\mu_3,i\alpha_l,\ \beta,\Lambda) =$$

$$\frac{16\pi^2}{\beta} \sum_n \exp(i\omega_n\eta) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{((i\omega_n+\mu_1)^2-E_1^2)} \frac{1}{((i\omega_n-i\nu_m+\mu_2)^2-E_2^2)} \times \frac{1}{((i\omega_n-i\alpha_l+\mu_3)^2-E_3^2)} ,$$
(E.0.7)

avec les même notation que précédemment, la fréquence complexe $i\alpha_l$ et

$$E_3 = \sqrt{(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2 + m_3^2} \ . \tag{E.0.8}$$



FIG. E.2– Vertex triangle $\Gamma(i\nu_m, \mathbf{k}; i\alpha_l, \mathbf{p})$ [47].



Observables

Excentricité d'une ellipse

Une ellipse admet une équation telle que :

$$\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}_E}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{y}_E}\right)^2 = 1 , \qquad (F.0.1)$$

avec \mathbf{x}_E et \mathbf{y}_E la largeur et la hauteur de l'ellipse (5.4.2) définies comme :

$$\mathbf{x}_E = r - b/2$$

 $\mathbf{y}_E = \sqrt{(r - b/2)(r + b/2)}$
(F.0.2)

Quelle est l'excentricité ε entre deux noyaux avec une ellipse comme surface de collision ? Avec une excentricité comme :

$$\varepsilon = \frac{\langle \mathbf{y}^2 - \mathbf{x}^2 \rangle}{\langle \mathbf{y}^2 + \mathbf{x}^2 \rangle} , \qquad (F.0.3)$$

on peut la résoudre analytiquement avec l'équation (F.0.1) :

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{y}_E}{\mathbf{x}_E} \sqrt{\mathbf{x}_E^2 - \mathbf{x}^2} \ . \tag{F.0.4}$$

Ensuite

$$\langle \mathbf{y}^{2} - \mathbf{x}^{2} \rangle = 4 \frac{\int \int (\mathbf{y}^{2} - \mathbf{x}^{2}) \, d\mathbf{x} d\mathbf{y}}{\int \int d\mathbf{x} d\mathbf{y}}$$

$$= 4 \frac{\int \int \mathbf{y}^{2} d\mathbf{x} d\mathbf{y} - \int \int \mathbf{x}^{2} d\mathbf{x} d\mathbf{y}}{\pi \mathbf{x}_{E} \mathbf{y}_{E}}$$

$$= 4 \frac{\frac{\mathbf{x}_{E}}{\mathbf{y}_{E}} \int \mathbf{y}^{2} \sqrt{\mathbf{y}_{E}^{2} - \mathbf{y}^{2}} d\mathbf{y} - \frac{\mathbf{y}_{E}}{\mathbf{x}_{E}} \int \mathbf{x}^{2} \sqrt{\mathbf{x}_{E}^{2} - \mathbf{x}^{2}} d\mathbf{x}}{\pi \mathbf{x}_{E} \mathbf{y}_{E}}$$

$$= 4 \frac{\frac{\mathbf{x}_{E}}{\mathbf{y}_{E}} \frac{\pi \mathbf{y}_{E}^{4}}{16} - \frac{\mathbf{y}_{E}}{\mathbf{x}_{E}} \frac{\pi \mathbf{x}_{E}^{4}}{16}}{\pi \mathbf{x}_{E} \mathbf{y}_{E}}$$

$$(F.0.5)$$

que l'on peut simplifier en :

$$\langle \mathbf{y}^2 - \mathbf{x}^2 \rangle = \frac{1}{4} \left(\mathbf{y}_E^2 - \mathbf{x}_E^2 \right)$$
 (F.0.6)

On peut faire le même calcul pour le dénominateur et on trouve finalement :

$$\varepsilon = \frac{b}{2r} . \tag{F.0.7}$$

Annexe

Calculs relativistes

Distance transverse relativiste

On peut calculer numériquement q_{ij}^{μ} , \hat{p}_{ij}^{μ} et \hat{P}^{μ} dans le référentiel global, et dans le centre de masse de deux particules i et j:

	Réf. global	Réf. <i>ij</i>
q_{ij}^{μ}	$(0,\mathbf{q})$	(t', \mathbf{q}')
u_{ij}^{μ}	(u^0, \mathbf{u})	(1, 0)
$U^{\hat{\mu}}$	(1, 0)	(U^0, \mathbf{U})

On remarque que $q_{ij}^0 = 0$ car vis-à-vis de l'ordinateur, on connait la position des particules pour le même temps de simulation.

Ensuite on peut écrire $q_T(u_{ij})$ et $q_T'(U)$ dans les deux référentiels, global et ij, comme un produit scalaire :

$$q_T^2 = -\mathbf{q}^2 - (\mathbf{q}\mathbf{u})^2 \stackrel{def}{=} -\mathbf{q'}^2 q_T'^2 = -\mathbf{q}^2 \stackrel{def}{=} t'^2 - \mathbf{q'}^2 - \left(q_{ij}^{\nu}U_{\nu}\right)^2$$
(G.0.1)

La première équation donne

$$t' = \mathbf{q}\mathbf{u} , \qquad (G.0.2)$$

et l'autre donne toujours zéro, car le produit scalaire $q_{ij}^{\nu}U_{\nu}$ est automatiquement nul.

Derivées des contraintes relativistes

Les dérivées de la contrainte mixte (4.4.21) sont

$$\frac{\partial \chi_i}{\partial q_k^{\mu}} = \sum_{l \neq i} (\delta_{ik} - \delta_{lk}) \left(u_{il}^{\mu} R_{il} + U^{\mu} (1 - R_{il}) \right)
+ (\delta_{ik} - \delta_{lk}) \left(q_{il\nu} \left(u_{il}^{\nu} - U^{\nu} \right) \right) R_{il} \frac{2q_{Til\mu}}{L^2}$$
(G.0.3)

On peut voir que la rérivée de R_{ij} apparait avec le facteur

$$(q_{il\nu} (u_{il}^{\nu} - U^{\nu}))$$
 (G.0.4)

C'est la différence de temps entre le référentiel globel (Heavy Ion Collision (HIC)) et le Centre de Masse (CM). On peut avoir la valeur pratique de ce terme. Commençons par la valeur de q_{ij}^{μ} :

$$\begin{pmatrix} \Delta t_{CM} \\ \Delta \mathbf{q}_{CM} \end{pmatrix} = T.L. \begin{pmatrix} \Delta t_{HIC} \\ \Delta \mathbf{q}_{HIC} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad T.L. = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix}$$
(G.0.5)

où le temps relatif Δt_{HIC} entre les particules du référentiel global apparait. Ce n'est pas vraiment un problème car on considère que dans la collision d'ions lourds toutes les particules sont propagée avec le même paramètre d'évolution. On considère donc que $\Delta t_{HIC} = 0$ pour tous les calculs.

$$\begin{pmatrix} \Delta t_{CM} \\ \Delta \mathbf{q}_{CM} \end{pmatrix} = T.L. \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta \mathbf{q}_{HIC} \end{pmatrix}$$
(G.0.6)

On peut donc écrire :

$$q_{il\mu} (u_{il}^{\mu} - U^{\mu}) = \Delta t_{CM} - \Delta t_{HIC} = \gamma \Delta t_{HIC} - \beta \cdot \Delta \mathbf{q}_{HIC} - \Delta t_{HIC}$$
(G.0.7)

avec notre considération, Δt_{HIC} disparait. Finalement :

$$q_{il\mu} \left(u_{il}^{\mu} - U^{\mu} \right) = -\beta \cdot \Delta \mathbf{q}_{HIC} \tag{G.0.8}$$

avec $\beta = \mathbf{u}$ la vitesse du centre de masse des particules *i* et *j* dans le système.

On a aussi pour χ_N :

$$\frac{\partial \chi_N}{\partial q_k{}^{\mu}} = \frac{U_{\mu}}{N} \tag{G.0.9}$$

On sait que

$$\frac{\partial \chi_i}{\partial p_k^{\mu}} \neq 0$$

$$\frac{\partial \chi_N}{\partial p_k^{\mu}} \neq 0$$
(G.0.10)

Cependant, ces termes interviennent dans le crochet de Poisson, et ils s'annulent au final. On peut vérifier cela numériquement.



Algorithmes d'INTEGRAL



FIG. H.1– Schéma de principe de la structure de notre code de simulation.

Structure du programme

Le programme est décomposé en différentes classes C++ comme indiqué sur la FIG. H.1. Une simple commande suffit pour lancer les simulations (fichier Main). Ce programme compte un **total de 4420 lignes de codes** répartie comme suit :

- Main : 65 lignes,
- Maths : 775 lignes,
- Physics : 55 lignes,
- Lorentz : 165 + 55 lignes,
- Particle : 185 lignes,
- OpenCL : 0 lignes,
- Data : 835 + 160 lignes,
- System : 1955 + 170 lignes.

La classe **System** est la principale. Il ne s'agit pas d'une classe mère dans le sens hiérarchique car toutes les classes sont autonomes. Il s'agit d'une classe regroupant les principales fonctions qui commande la physique du système, telles que la propagation des particules, ou les collisions.

Ensuite vient la classe **Particle**, qui est simplement un conteneur d'information. Toutes les caractéristiques des particules y sont enregistrées. Les classes **Maths**, **Physics** et **Lorentz**, comme leur nom l'indique, donnent des formules ou des calculs récurrents dans le code.

Enfin, la dernière classe importante est la classe **Data**, qui gère les données nécessaire au bon fonctionnement du programme (les données du modèle NJL) et qui archive et analyse les données recueillies au cours des simulations.

La classe **OpenCL** est officiellement vide pour le moment car l'implémentation de la parallélisation via OpenCL afin d'accélerer les simulations n'est disponible qu'en phase de test.

La classe System

La classe système se présente comme un ensemble de variables (que l'on appelle attributs) et de fonctions (que l'on appelle les méthodes). On peut classer les variables en groupes, selon leur utilité. On peut également écrire les fonctions de manière algorithmique, avec des arbres de décision. Nous allons maintenant présenter les attributs et les méthodes de la classe System.



Attributs

Initial parameters ...



Settings ...

• chosen_initialization (i	int)	
----------------------------	------	--

- chosen_physics (int)
- chosen_dynamics (bool)
- chosen_collision_test (bool)
- chosen_decay_test (bool)
- chosen_debug (bool)
- chosen_saving (bool)

System variables ...



Collision & decay variables \dots

•	$s_{ij} \; ({\tt float})$
•	$T_{ij} \; (\texttt{float})$
•	$\mu_{ij} \; (\texttt{float})$
•	output_type_particle_1 (int)
•	output_type_particle_2 (int)
•	output_mass_particle_1 (float)
•	output_mass_particle_2 (float)
•	type_cross_section (int)
•	total_cross_section (float)
•	mean_cross_section (float)

Méthodes

Simulation()



 $Subroutines \ldots$







190

Time_step()



FIG. H.2– Explication graphique de la méthode d'extrapolation de Runge-Kutta d'ordre 4. À chaque étape, une nouvelle pente et un nouveau point sont calculés, contribuant ainsi au résultat final.

Pour effectuer la propagation des particules, on utilise des équations différentielles couplées : les équations de mouvement. Afin d'utiliser ces équations pour calculer le prochain état du système dans le temps, on peut utiliser une méthode de résolution d'équation différentielles comme la **méthode de Runge-Kutta**. Considérons le problème suivant :

$$y' = f(t, y)$$
 et $y(t_0) = y_0$ (H.0.1)

La méthode RK4 est donnée par l'équation :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
(H.0.2)

où

$$k_{1} = f(t_{n}, y_{n})$$

$$k_{2} = f\left(t_{n} + \frac{h}{2}, y_{n} + \frac{h}{2}k_{1}\right)$$

$$k_{3} = f\left(t_{n} + \frac{h}{2}, y_{n} + \frac{h}{2}k_{2}\right)$$

$$k_{4} = f(t_{n} + h, y_{n} + hk_{3})$$
(H.0.3)

L'idée est que la valeur suivante y_{n+1} est approchée par la somme de la valeur actuelle y_n et du produit de la taille de l'intervalle h par la pente estimée. La pente est obtenue par une moyenne pondérée de pentes :

- k_1 est la pente au début de l'intervalle,
- k_2 est la pente au milieu de l'intervalle, en utilisant la pente k_1 pour calculer la valeur de y au point $t_n + \frac{h}{2}$ par le biais de la méthode d'Euler,
- k_3 est de nouveau la pente au milieu de l'intervalle, mais obtenue cette fois en utilisant la pente k_2 pour calculer y,

• k_4 est la pente à la fin de l'intervalle, avec la valeur de y calculée en utilisant k_3 .

Dans la moyenne des quatre pentes, un poids plus grand est donné aux pentes au point milieu.

pente =
$$\frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$$
. (H.0.4)

La méthode RK4 est une méthode d'ordre 4, ce qui signifie que l'erreur commise à chaque étape est de l'ordre de $\mathcal{O}(h^5)$, alors que l'erreur totale accumulée est de l'ordre de $\mathcal{O}(h^4)$. Ces formules sont aussi valables pour des fonctions à valeurs vectorielles.

Decay_test()



Collision_test()





Collision()

Decay()



Cross_section()







198













Relativistic_dynamics()



Analysing()

Densités thermodynamiques

Le calcul exacte de (5.2.5) peut être fait (pour $\mu \to 0)$:

$$\rho_{F} = \frac{4\pi}{(2\pi)^{3}(\hbar c)^{3}} g \int_{0}^{\infty} \left(f^{+} + f^{-}\right) p^{2} dp \\
= \frac{4\pi}{(2\pi)^{3}(\hbar c)^{3}} g m^{2} T K_{2} \left(\frac{m}{T}\right) \frac{1}{2} \left(\underbrace{\exp\left(\frac{\mu}{T}\right) + \exp\left(\frac{-\mu}{T}\right)}_{=2 \text{ with } \mu=0}\right) \\
= \frac{4\pi}{(2\pi)^{3}(\hbar c)^{3}} g m^{2} T \frac{\Gamma(2)}{2} \left(\frac{2}{m/T}\right)^{2} \quad \text{only for } m \ll T \\
\rho_{F} = \frac{g}{\pi^{2}} \left(\frac{T}{\hbar c}\right)^{3}.$$
(H.0.5)

Ainsi on trouve :

$$T_{i} = (\hbar c) \left(\frac{\pi^{2}}{g}\right)^{1/3} \rho_{F}^{1/3}$$
 (H.0.6)

Ensuite (pour $T \rightarrow 0)$ [..] :

$$\rho_{B} = \frac{4\pi}{(2\pi)^{3}(\hbar c)^{3}} g \int_{0}^{\infty} \left(f^{+} - f^{-}\right) p^{2} dp \\
= \frac{4\pi}{(2\pi)^{3}(\hbar c)^{3}} g \frac{\pi^{2}}{3} T^{3} \left(\frac{\mu}{T} + \left(\frac{\mu}{T}\right)^{3} \frac{1}{\pi^{2}}\right) \\
= \frac{4\pi}{(2\pi)^{3}(\hbar c)^{3}} g \frac{\pi^{2}}{3} \left(\underbrace{T^{2}\mu}_{\text{Low Order}} + \frac{\mu^{3}}{\pi^{2}}\right) \\
\rho_{B} \approx \frac{g}{6\pi^{2}} \left(\frac{\mu}{\hbar c}\right)^{3}.$$
(H.0.7)

Ainsi

$$\mu_i = (\hbar c) \left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{1/3} \rho_B^{1/3}$$
(H.0.8)

Toutes ces densités ont le même facteur de dégénéres cence $g=2\times 3\times 3=18.$

La classe Particle

La classe Particle contient les propriétés de base que l'on retrouve dans la physique des particules pour une particule dans un milieu. Chaque objet Particle fait exactement 64 octet (8 fois 64 bit). Cette particularité va servir dans le futur a optimiser le code parallélisé pour des transfert mémoire les plus rapides possibles.



La classe Data



Attributes

Data parameters ...

• n_type_particle (uint)
• n_type_cross_section (uint)
• bin_{μ} (float)
• bin_T (float)
• bin_ \sqrt{s} (float)
 limit_µ (float) limit_T (float)
• $\operatorname{limit}_{\sqrt{s}}(\texttt{float})$
• n_bin_ μ (uint) • n_bin_T (uint)
• $n_{bin}\sqrt{s}$ (uint)

Data arrays ...

٠	$m \;(\; \mu \;, T \;, { m type}\;) \;({ m vector}^3 < { m float}>)$
•	Γ (μ , T , type) (vector3 <float>)</float>
•	σ (μ , T , \sqrt{s} , type) (vector4 <float>)</float>

Saving parameters ...

• $\tau_$ counter (uint)
• limit_record_t (float)
• limit_record_ \vec{r} (float)
• limit_record_ p_T (float)
• limit_record_µ (float)
• limit_record_T (float)
• limit_record_s (float)
• bin_record_t (float)
• bin_record_ \vec{r} (float)
• bin_record_ p_T (float)
• bin_record_ μ (float)
• bin_record_T (float)
• bin_record_s (float)
• n_bin_record_t (uint)
• n_bin_record_ \vec{r} (uint)
• n_bin_record_ p_T (uint)
• n_bin_record_ μ (uint)
• n_bin_record_ T (uint)
• n_bin_record_s (uint)
• n_type_particle (uint)

Saving arrays ...

- recorded_multiplicity (t, \vec{r} , type) (vector³<float>)
- recorded_collision_1 (t, \vec{r} , type) (vector³<float>)
- recorded_collision_2 (μ , T , \sqrt{s} , type) (vector⁴<float>)
- recorded_decay_1 (t , \vec{r} , type) (vector³<float>)
- recorded_decay_2 (μ , T , \sqrt{s} , type) (vector⁴<float>)
- recorded_ v_2 (t , p_T , type) (vector³<float>)
- recorded_ ε (t , type) (vector²<float>)
- recorded_ $\langle \vec{v} \rangle$ (t, type) (vector²<float>)
- recorded_ $\langle E \rangle$ (t) (vector<float>)
- recorded_ $\langle m \rangle$ (t) (vector<float>)
- recorded_ $\langle \vec{p} \rangle$ (t) (vector<float>)
- recorded_(σ) (t) (vector<float>)

Bibliographie

- [1] H. FRITZSCH, Murray GELL-MANN et H. LEUTWYLER : Advantages of the color octet gluon picture. *Phys. Lett. B*, 47:365–368, 1973. Fulltext article.
- [2] Virginia de la MOTA, François SÉBILLE et Sébastien FIGEROU : Dynamical selfconsistent description of exotic structures in nuclear matter at subnuclear densities. Fulltext article, 2010.
- [3] Michelangelo L. MANGANO : Introduction to QCD. Fulltext article, 2000.
- [4] Siegfried BETHKE : Experimental tests of asymptotic freedom. Prog. Part. Nucl. Phys., 58:351–386, 2007. arXiv :hep-ex/0606035v2.
- [5] Wolfram WEISE : Phases of QCD Lattice Thermodynamics and Quasiparticles, 2007. Slides.
- [6] Wolfram WEISE : Symmetry breaking patterns in QCD : Chiral and deconfinement transitions. *PoS*, QCD-TNT09:050, 2009. arXiv :0910.0975v1 [hep-ph].
- [7] Takeo MATSUBARA : A new approach to quantum-statistical mechanics. *Progress* of *Theoretical Physics*, 14(4):351–378, 1955. fulltext article.
- [8] Particle Data Group. 2011.
- [9] Volker KOCH : Introduction to Chiral Symmetry. arXiv :nucl-th/9512029v1, 1995.
- [10] S. P. KLEVANSKY : The Nambu-Jona-Lasinio model of Quantum ChromoDynamics. *Rev. Mod. Phys.*, 64:649–708, 1992. Fulltext article.
- [11] B.L. IOFFE : Axial anomaly : The modern status. Int. J. Mod. Phys. A, 21:6249– 6266, 2006. arXiv :hep-ph/0611026v2.
- [12] Dmitri DIAKONOV : Chiral-symmetry breaking by instantons. arXiv :hepph/9602375v1, 1995.
- [13] Thomas SCHÄFER et Edward V. SHURYAK : Instantons in QCD. Rev. Mod. Phys., 70:323–426, 1998. arXiv :hep-ph/9610451v3.
- [14] Michael BUBALLA : NJL model analysis of quark matter at large density. Phys. Rept., 407:205–376, 2005. arXiv :hep-ph/0402234v2.
- [15] Jean ZINN-JUSTIN : Quantum field theory and critical phenomena. Oxford University Press, 3rd édition, 1989.
- [16] Edwin LAERMANN et Owe PHILIPSEN : The status of lattice qcd at finite temperature. Ann. Rev. Nucl. Part. Sci., 53:163–198, 2003. arXiv :hep-ph/0303042v1.

- [17] John B. KOGUT : An Introduction to Lattice Gauge Theory and Spin Systems. *Rev. Mod. Phys.*, 51:659, 1979. Fulltext article.
- [18] Rajan GUPTA : Introduction to lattice QCD. arXiv :hep-lat/9807028v1, 1997.
- [19] M. ASAKAWA : Quick introduction to lattice QCD, maximum entropy method, and hadron spectral functions above the deconfinement phase transition. J. Phys. G, 31:337–350, 2005. Fulltext article.
- [20] Y. AOKI, Z. FODOR, S.D. KATZ et K.K. SZABO : The equation of state in lattice qcd : With physical quark masses towards the continuum limit. *JHEP*, 0601:089, 2006. arXiv :hep-lat/0510084v2.
- [21] Zoltan FODOR : T_c , EoS and the curvature of the phase diagram from lattice QCD (Wuppertal-Budapest results), 2011. Slides.
- [22] Szabolcs BORSANYI, Zoltan FODOR, Christian HOELBLING, Sandor D. KATZ, Stefan KRIEG, Claudia RATTI et Kalman K. SZABO : Is there still any t_c mystery in lattice QCD? results with physical masses in the continuum limit III. *Journal of High Energy Physics*, 09:073, 2010. arXiv :1005.3508v1 [hep-lat].
- [23] Carleton E. DETAR : Quark-Gluon Plasma in numerical simulations of lattice QCD. arXiv :hep-ph/9504325v1, 1995.
- [24] Zoltan FODOR : Ab initio calculations in lattice QCD, 2009. Slides.
- [25] G. ENDRODI, Z. FODOR, S. D. KATZ et K. K. SZABO : The QCD phase diagram at nonzero quark density. *Journal of High Energy Physics*, 04:001, 2011. arXiv :1102.1356v1 [hep-lat].
- [26] Y. AOKI, G. ENDRODI, Z. FODOR, S. D. KATZ et K. K. SZABO : The order of the quantum chromodynamics transition predicted by the standard model of particle physics. *Nature*, 443:675–678, 2006. arXiv :hep-lat/0611014v1.
- [27] Yoichiro NAMBU et G. JONA-LASINIO : Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. I. *Phys. Rev.*, 122:345–358, 1961. Fulltext article.
- [28] Yoichiro NAMBU et G. JONA-LASINIO : Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity. II. *Phys. Rev.*, 124:246–254, 1961. Fulltext article.
- [29] U. VOGL et W. WEISE : The Nambu and Jona-Lasinio model : Its implications for hadrons and nuclei. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 27:195–272, 1991. Fulltext article.
- [30] O. OLIVEIRA, W. de PAULA et T. FREDERICO : Linking dynamical gluon mass to chiral symmetry breaking via a QCD low energy effective field theory. arXiv :1105.4899v1 [hep-ph], 2011.
- [31] Eric BLANQUIER : Standard particles in the SU(3) nambu-jona-lasinio model and the Polyakov-NJL model. J. Phys. G, 38:105003, 2011. Fulltext article.
- [32] O. LINNYK : Quark matter probed by dileptons, 2010. Slides.
- [33] D. EBERT, Y. L. KALINOVSKY, L. MÜNCHOW et M. K. VOLKOV : Mesons and diquarks in a NJL model at finite temperature and chemical potential. *International Journal of Modern Physics A*, 8:1295–1312, 1993. Fulltext article.
- [34] S. KLIMT, Matthias F. M. LUTZ, U. VOGL et W. WEISE : Generalized SU(3) Nambu-Jona-Lasinio model : (I). Mesonic modes. Nucl. Phys. A, 516:429–468, 1990.
 Fulltext article.
- [35] Tetsuo HATSUDA et Teiji KUNIHIRO : QCD phenomenology based on a chiral effective lagrangian. *Phys. Rept.*, 247:221–367, 1994. arXiv :hep-ph/9401310v1.
- [36] F. J. DYSON : The s matrix in Quantum Electrodynamics. Phys. Rev., 75(11):1736– 1755, 1949. fulltext article.
- [37] E. E. SALPETER et H. A. BETHE : A relativistic equation for bound state problems. *Phys. Rev.*, 84:1232–1242, 1951. fulltext article.
- [38] Hubert HANSEN, W. M. ALBERICO, A. BERAUDO, A. MOLINARI, M. NARDI et Claudia RATTI : Mesonic correlation functions at finite temperature and density in the Nambu-Jona-Lasinio model with a Polyakov loop. *Phys. Rev. D*, 75:065004, 2007. arXiv :hep-ph/0609116v2.
- [39] Mickael THOMERE : Étude de l'expension d'un plasma de quarks vers un gaz de hadrons dans le cadre du modèle Nambu-Jona-Lasinio couplé à une boucle Polyakov et une dynamique relativiste. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2009. PhD Thesis.
- [40] N. ISHII, W. BENTZ et K. YAZAKI : Faddeev approach to the nucleon in the Nambu-Jona-Lasinio (NJL) model. *Phys. Lett. B*, 301:165–169, 1993. Fulltext article.
- [41] N. ISHII, W. BENTZ et K. YAZAKI : Baryons in the NJL model as solutions of the relativistic Faddeev equation. *Nucl. Phys. A*, 587:617–656, 1995. Fulltext article.
- [42] P. A. MARTIN et F. ROTHEN : Many body problems and quantum field theory : An introduction. Springer, 1st édition, 2002.
- [43] D. S. ISERT, S. P. KLEVANSKY et P. REHBERG : Transition rates for $q\bar{q} \rightarrow \pi\pi\pi$ pi in a chiral model. *Nucl. Phys. A*, 643:275–302, 1998. arXiv :hep-ph/9810348v1.
- [44] C. SASAKI et K. REDLICH : Bulk viscosity in quasi particle models. *Phys. Rev. C*, 79:055207, 2009. arXiv :0806.4745v2 [hep-ph].
- [45] Chihiro SASAKI et Krzysztof REDLICH : Transport coefficients near chiral phase transition. Nucl. Phys. A, 832:62–75, 2010. arXiv :0811.4708v1 [hep-ph].
- [46] P. REHBERG, S. P. KLEVANSKY et J. HUFNER : Elastic scattering and transport coefficients for a quark plasma in $SU_f(3)$ at finite temperatures. Nucl. Phys. A, 608:356–388, 1996. arXiv :hep-ph/9607263v1.
- [47] P. REHBERG, S. P. KLEVANSKY et J. HUFNER : Hadronization in the SU(3) Nambu-Jona-Lasinio model. Phys. Rev. C, 53:410–429, 1996. arXiv :hep-ph/9506436v2.
- [48] P. REHBERG et S. P. KLEVANSKY : One loop integrals at finite temperature and density. Annals Phys., 252:422–457, 1996. arXiv :hep-ph/9510221v2.
- [49] F. GASTINEAU, E. BLANQUIER et J. AICHELIN : Critical opacity : A possible explanation of the fast thermalisation times seen in RHIC experiments. *Phys. Rev. Lett.*, 95:052001, 2005. arXiv :hep-ph/0404207v1.
- [50] E. QUACK, P. ZHUANG, Yu. KALINOVSKY, S. P. KLEVANSKY et J. HUFNER : $\pi \pi$ scattering lengths at finite temperature. *Phys. Lett. B*, 348:1–6, 1995. arXiv :hep-ph/9410243v2.

- [51] P. PIWNICKI, S. P. KLEVANSKY et P. REHBERG : π k scattering lengths at finite temperature in the Nambu-Jona-Lasinio model. *Phys. Rev. C*, 58:502–516, 1998. arXiv :hep-ph/9804286v1.
- [52] Claudia RATTI, Michael A. THALER et Wolfram WEISE : Phases of QCD : Lattice thermodynamics and a field theoretical model. *Phys. Rev. D*, 73:014019, 2006. arXiv :nucl-th/0604025v1.
- [53] Kenji FUKUSHIMA : Phase diagrams in the three-flavor Nambu-Jona-Lasinio model with the Polyakov loop. *Phys. Rev. D*, 77:114028, 2008. arXiv :0803.3318v3 [hep-ph].
- [54] Pedro COSTA, M. C. RUIVO, C. A. de SOUSA, H. HANSEN et W. M. ALBERICO : Scalar-pseudoscalar meson behavior and restoration of symmetries in SU(3) PNJL model. Phys. Rev. D, 79:116003, 2009. arXiv :0807.2134v3 [hep-ph].
- [55] Pedro COSTA, M. C. RUIVO, C. A. de SOUSA, H. HANSEN et W. M. ALBERICO : Scalar-pseudoscalar meson spectrum in SU(3) PNJL model. PoS, CONFINE-MENT8:086, 2008. arXiv :0907.1972v1 [hep-ph].
- [56] H. KOUNO, Y. SAKAI, K. KASHIWA, M. MATSUZAKI et M. YAHIRO : Roberge-Weiss phase transitions and extended z_3 symmetry. arXiv :0811.4660v1 [hep-ph], 2008.
- [57] A. A. OSIPOV, B. HILLER, A. H. BLIN et J. MOREIRA : Extended NJL model with eight-quark interactions. arXiv :0910.0371v1 [hep-ph], 2009.
- [58] M. YAHIRO : Imaginary chemical potential and determination of QCD phase diagram, 2009. Slides.
- [59] Pedro COSTA, C. A. de SOUSA, M. C. RUIVO et H. HANSEN : The QCD critical end point in the PNJL model. *Europhys. Lett.*, 86:31001, 2009. arXiv :0801.3616v2 [hep-ph].
- [60] Kenji FUKUSHIMA : Strangeness in the PNJL model. J. Phys. G, 36:064020, 2009. Fulltext article.
- [61] Pedro COSTA, H. HANSEN, M. C. RUIVO et C. A. de SOUSA : How parameters and regularization affect the PNJL model phase diagram and thermodynamic quantities. *Phys. Rev. D*, 81:016007, 2010. arXiv :0909.5124v2 [hep-ph].
- [62] Pedro COSTA, M. C. RUIVO, C. A. de SOUSA et H. HANSEN : Phase diagram and critical properties within an effective model of QCD : the Nambu-Jona-Lasinio model coupled to the Polyakov loop. *Symmetry*, 2:1338–1374, 2010. arXiv :1007.1380v1 [hep-ph].
- [63] Yuji SAKAI, Takahiro SASAKI, Hiroaki KOUNO et Masanobu YAHIRO : Equation of state in the PNJL model with the entanglement interaction. arXiv :1104.2394v1 [hep-ph], 2011.
- [64] Regina NEBAUER : Propriétés des quarks et mésons à température et densité finies dans le cadre du modèle NJL. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2000.
- [65] Michael L. MILLER, Klaus REYGERS, Stephen J. SANDERS et Peter STEINBERG : Glauber modeling in high energy nuclear collisions. Ann. Rev. Nucl. Part. Sci., 57:205–243, 2007. arXiv :nucl-ex/0701025v1.

- [66] H. J. DRESCHER, M. HLADIK, S. OSTAPCHENKO, T. PIEROG et K. WERNER : Parton-based Gribov-Regge theory. *Phys. Rept.*, 350:93–289, 2001. arXiv :hep-ph/0007198v1.
- [67] Edmond IANCU: The colour glass condensate. arXiv :hep-ph/0202270v1, 2002.
- [68] Paul ROMATSCHKE : New Developments in Relativistic Viscous Hydrodynamics. Int. J. Mod. Phys. E, 19:1–53, 2010. arXiv :0902.3663v3 [hep-ph].
- [69] Klaus GEIGER et Berndt MULLER : Dynamics of parton cascades in highly relativistic nuclear collisions. *Nucl. Phys. B*, 369:600–654, 1992. Fulltext article.
- [70] Zhe XU et Carsten GREINER : Elliptic flow of gluon matter in ultrarelativistic heavy-ion collisions. *Phys. Rev. C*, 79:014904, 2009. arXiv :0811.2940v3 [hep-ph].
- [71] W. CASSING et E. L. BRATKOVSKAYA : Parton transport and hadronization from the dynamical quasiparticle point of view. *Phys. Rev. C*, 78:034919, 2008. arXiv :0808.0022v2 [hep-ph].
- [72] Yu.B. IVANOV : Are there alternatives to the Cooper-Frye freeze-out?, 2009. Slides.
- [73] Rene BELLWIED : The formation of hadrons inside the deconfined matter at RHIC & LHC, 2010. Slides.
- [74] Axel DREES : Dileptons and Photons at RHIC Energies. Nucl. Phys. A, 830:435C– 442C, 2009. arXiv :0909.4976v1 [nucl-ex].
- [75] Björn SCHENKE, Sangyong JEON et Charles GALE : 3+1d hydrodynamic simulation of relativistic heavy-ion collisions. *Phys. Rev. C*, 82:014903, 2010. arXiv :1004.1408v2 [hep-ph].
- [76] Helena BIALKOWSKA : The Ridge effect at LHC high density in pp?, 2011. Slides.
- [77] P. BRAUN-MUNZINGER, J. STACHEL, J.P. WESSELS et N. XU : Thermal and hadrochemical equilibration in nucleus-nucleus collisions at the SPS. *Phys.Lett. B*, 365:1–6, 1996. arXiv :nucl-th/9508020v2.
- [78] H. APPELSHAUSER *et al.* : Recent results on central pb+pb collisions from experiment NA49. *Nucl. Phys. A*, 638:91–102, 1998. Fulltext article.
- [79] Norbert HERRMANN, Johannes P. WESSELS et Thomas WIENOLD : Collective flow in heavy-ion collisions. Annual Review of Nuclear and Particle Science, 49(1):581– 632, 1999. Fulltext article.
- [80] Hannu HOLOPAINEN, Harri NIEMI et Kari J. ESKOLA : Event-by-event hydrodynamics and elliptic flow from fluctuating initial state. *Phys. Rev.*, C83:034901, 2011. arXiv :nucl-th/0511046v3.
- [81] Hannu HOLOPAINEN : Event-by-event hydrodynamics and elliptic flow from fluctuating initial state, 2011. Slides.
- [82] B. ALVER, M. BAKER, C. LOIZIDES et P. STEINBERG : The PHOBOS glauber monte carlo. arXiv :0805.4411v1 [nucl-ex], 2008.
- [83] Prashant SHUKLA : Glauber model for heavy ion collisions from low energies to high energies. arXiv :nucl-th/0112039v1, 2001.

- [84] W. CASSING et E. L. BRATKOVSKAYA : Parton-Hadron-String Dynamics : an offshell transport approach for relativistic energies. *Nucl. Phys. A*, 831:215–242, 2009. arXiv :0907.5331v1 [nucl-th].
- [85] Hannah PETERSEN : An Integrated Boltzmann+Hydrodynamics Approach to Heavy Ion Collisions. Thèse de doctorat, Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt am Main, 2009. PhD Thesis.
- [86] François GELIS, Edmond IANCU, Jamal JALILIAN-MARIAN et Raju VENUGOPA-LAN : The Color Glass Condensate. Ann. Rev. Nucl. Part. Sci., 60:463–489, 2010. arXiv :1002.0333v1 [hep-ph].
- [87] Javier L. ALBACETE : High energy QCD : when CGC meets experiment, 2011. Slides.
- [88] François GELIS : Color Glass Condensate and forward physics at the LHC, 2006. Slides.
- [89] François GELIS : Color Glass Condensate and Glasma. Nucl. Phys. A, 854:10–17, 2011. arXiv :1009.0093v2 [hep-ph].
- [90] T. HIRANO, U. W. HEINZ, D. KHARZEEV, R. LACEY et Y. NARA : Hadronic dissipative effects on transverse dynamics at RHIC. J. Phys. G, 35:104124, 2008. arXiv :nucl-th/0511046v3.
- [91] Matthew W. LUZUM : Viscosity and the Quark-Gluon Plasma, 2009. Slides.
- [92] Nicolas BORGHINI : Hints of incomplete thermalization in RHIC data, 2005. Slides.
- [93] Björn SCHENKE, Sangyong JEON et Charles GALE : Elliptic and triangular flow in event-by-event (3+1)d viscous hydrodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 106:042301, 2011. arXiv :1009.3244v2 [hep-ph].
- [94] Azwinndini MURONGA : New developments in hydrodynamics, 2009. Slides.
- [95] Björn SCHENKE : Flow theory perspective, 2011. Slides.
- [96] Pasi HUOVINEN et Denes MOLNAR : The applicability of causal dissipative hydrodynamics to relativistic heavy ion collisions. *Phys. Rev. C*, 79:014906, 2009. arXiv :0808.0953v1 [nucl-th].
- [97] Klaus WERNER : Hydrodynamical evolution and hadronization in heavy ion collisions and pp scatterings, 2010. Slides.
- [98] Pasi HUOVINEN : Comparing viscous hydrodynamics to a parton cascade, 2008. Slides.
- [99] B. FRIMAN, C. HÖHNE, J. KNOLL, S. LEUPOLD, J. RANDRUP, R. RAPP et P. SEN-GER : *The CBM Physics Book*. Springer, 1st édition, 2011.
- [100] Zhe XU et Carsten GREINER : Thermalization of gluons in ultrarelativistic heavy ion collisions by including three-body interactions in a parton cascade. *Phys. Rev. C*, 71:064901, 2005. arXiv :hep-ph/0406278v2.
- [101] W. CASSING : From Kadanoff-Baym dynamics to off-shell parton transport. Eur. Phys. J. ST, 168:3–87, 2009. arXiv :0808.0715v1 [nucl-th].
- [102] Zhe XU et Carsten GREINER : Jet quenching and elliptic flow at rhic and lhc within a pqcd-based partonic transport model. Slides, May 2011.

- [103] E. L. BRATKOVSKAYA *et al.* : Properties of the partonic phase at RHIC within PHSD. J. Phys. Conf. Ser., 316:012027, 2011. arXiv :1106.1859v1 [nucl-th].
- [104] I. BOURAS, A. EL, O. FOCHLER, F. REINING, J. UPHOFF, C. WESP, Zhe XU et Carsten GREINER : Collective flow and mach cones with parton transport. arXiv :1102.2518v1 [hep-ph], 2011.
- [105] I. BOURAS : Mach cones and two-particle correlations : The origins in a kinetic transport approach, 2011. Poster.
- [106] Francesco BECATTINI : An introduction to the Statistical Hadronization Model. arXiv :0901.3643v1 [hep-ph], 2009.
- [107] Rainer J. FRIES, Vincenzo GRECO et Paul SORENSEN : Coalescence models for hadron formation from quark gluon plasma. Ann. Rev. Nucl. Part. Sci., 58:177– 205, 2008. arXiv :0901.3643v1 [hep-ph].
- [108] Wolfgang CASSING : Dynamical hadronization within PHSD, 2010. Slides.
- [109] Francesco BECATTINI : Statistical hadronization model and relativistic heavy ion collisions, 2009. Slides.
- [110] D. G. CURRIE, T. F. JORDAN et E. C. G. SUDARSHAN : Relativistic invariance and hamiltonian theories of interacting particles. *Rev. Mod. Phys.*, 35:350–375, 1963. Fulltext article.
- [111] H. SORGE, Horst STÖCKER et W. GREINER : Poincaré invariant hamiltonian dynamics : Modelling multi-hadronic interactions in a phase space approach. Annals Phys., 192:266–306, 1989. Fulltext article.
- [112] Richard L. LIBOFF : Kinetic Theory : Classical, Quantum, and Relativistic Descriptions. Springer, 3rd édition, 2003.
- [113] Charles J. JOACHAIN : *Quantum Collision Theory*. North-Holland Publishing, 1st édition, 1975.
- [114] J. AICHELIN : "Quantum" Molecular Dynamics : A dynamical microscopic N-body approach to investigate fragment formation and the nuclear equation of state in heavy ion collisions. *Phys. Rept.*, 202:233–360, 1991. Fulltext article.
- [115] Paul Adrien Maurice DIRAC : Lectures on Quantum Mechanics. Dover, 2nd édition, 1964.
- [116] Steven G. AVERY : Dirac Brackets. Fulltext article, 2010.
- [117] A. KOMAR : Constraint Formalism of Classical Mechanics. Phys. Rev. D, 18:1881– 1886, 1978. Fulltext article.
- [118] E. C. G. SUDARSHAN, N. MUKUNDA et J. N. GOLDBERG : Constraint dynamics of particle world lines. *Phys. Rev. D*, 23:2218, 1981. Fulltext article.
- [119] F. MARQUÈS, V. IRANZO, A. MOLINA, A. MONTOTO et J. LLOSA : World-Line Condition and the noninteraction theorem. *Phys. Rev. D*, 31:314–318, 1985. Fulltext article.
- [120] Tomoyuki MARUYAMA, S. W. HUANG, N. OHTSUKA, Guoqiang LI, Amand FAESS-LER et Joerg AICHELIN : Lorentz covariant description of intermediate-energy heavy ion reactions in relativistic quantum molecular dynamics. *Nucl. Phys. A*, 534:720– 740, 1991. Fulltext article.

- [121] Morten HJORTH-JENSEN, Thomas T.S. KUO et Eivind OSNES : Realistic effective interactions for nuclear systems. *Physics Reports*, 261(3-4):125–270, 1995. fulltext article.
- [122] W. M. ALBERICO, F. GIACOSA, M. NARDI et C. RATTI : Baryonic masses based on the NJL model. Eur. Phys. J., A16:221–228, 2003. arXiv :nucl-th/0206071v2.
- [123] Peter YOUNG : Comparison of methods for integrating the simple harmonic oscillator. Lectures notes, 2011.
- [124] Fabrice GASTINEAU : La Thermodynamique et la Dynamique de la version étendue du modèle de Nambu-Jona-Lasinio. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2002.
- [125] Peter T. LANDSBERG et George E. A. MATSAS : The impossibility of a universal relativistic temperature transformation. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 340(1-3):92–94, 2004. Fulltext article.
- [126] Rio YOKOTA et Lorena A. BARBA : Fast N-body Simulations on GPUs. arXiv :1108.5815v2 [cs.NA], 2011.
- [127] M. N. BANNERMAN, R. SARGANT et L. LUE : DynamO : A free o(n) general event-driven molecular-dynamics simulator. arXiv :1004.3501v2 [physics.comp-ph], 2010.
- [128] F. GASTINEAU et J. AICHELIN : Strange baryons in a hot and dense medium within the Nambu-Jona-Lasinio model. J. Phys. G, 28:2017–2022, 2002. arXiv :nuclth/0201063v1.
- [129] Brookhaven National LABORATORY : Hunting the Quark-Gluon Plasma : Results from the first 3 years at RHIC. Fulltext article, 2005.

Resume

L'étude du diagramme de phase de la matière nucléaire est souvent non triviale. Cette thèse tente de décrire la transition de phase créée dans les accélérateurs de particule, a haute température et faible densité baryonique. Si les accélérateurs de particules peuvent être vus comme les microscopes de la matière, on ne peut néanmoins pas observer directement la transition de phase. On va donc utiliser un modèle théorique pour reproduire ce phénomène.

Les processus qui interviennent lors de la transition sont de basse énergie, la ou la théorie standard, la Chromodynamique Quantique (QCD) ne peut plus s'appliquer de manière perturbative. Je vais donc présenter et utiliser un modèle plus simplifie de cette théorie : le modèle de Nambu et Jona-Lasinio (NLJ). Ce modèle permet de décrire les particules fondamentales de la matière, puis ensuite leur hadronisation, via des sections efficaces ainsi que la construction de la masse des hadrons.

Finalement on utilise les masses et sections efficaces de ce modèle dans un nouveau code de simulation base sur la dynamique moléculaire relativiste. La présentation de ce modèle passe d'abord par la justification de son aspect relativiste, puis par l'explication de ses algorithmes. Les résultats de ces simulations sont finalement analyses et compares aux données du RHIC. La phénoménologie des résultats non observables est également discutée.

Mots-clés : Plasma de quarks et de gluons, Nambu-Jona-Lasinio, Hadronisation, Transition de phase, Dynamique Relativiste, Dynamique Moleculaire, Correlations, Fluctuations

Abstract

The study of the phase diagram of nuclear matter is often not trivial. This thesis attempts to describe the phase transition created in accelerators of particles, at hightemperature and low baryonic density. If accelerators of particles can be seen as the microscopes of the matter, nevertheless we can not directly observe the phase transition. So we will use a theoretical model to reproduce this phenomenon.

The processes involved in the transition are of low energy, where the standard theory Quantum Chromodynamics (QCD)- can not be applied in a perturbative way. I will therefore present and use a more simplified model of this theory : the model of Nambu and Jona-Lasinio (NLJ). This model can describe the fundamental particles of matter and their subsequent hadronization via cross sections and the construction of the mass of hadrons.

Finally we use the masses and cross sections of this model in a new simulation code based on relativistic molecular dynamics. The presentation of this model begins with the justification of its relativistic aspect, then the explanation of its algorithms. The results of these simulations are finally analyzed and compared with data from RHIC. The phenomenology of non-observable results is also discussed.

Keywords: Quark-Gluon Plasma, Nambu-Jona-Lasinio, Hadronization, Phase transition, Relativistic dynamics, Molecular dynamics, Correlations, Fluctuations