Université de Nantes

ÉCOLE DOCTORALE SPIGA SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR, GÉOSCIENCES, ARCHITECTURE

Année 2010

N°	attı	ribu	é pa	r la	bi	blic	oth	èqτ	ıe

Étude numérique et expérimentale des instabilités hors plan des films minces en tension : application aux structures spatiales

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Sciences de l'Ingénieur Spécialité : Génie Mécanique

Présentée et soutenue publiquement par

Yann Lecieux

Le 22 Novembre 2010 à l'Université de Nantes devant le jury ci-dessous

Président	Philippe BOISSE	Professeur, INSA, Lyon		
Rapporteurs	Bernard MAURIN	Professeur, Université de Montpellier 2		
	Sylvie RONEL	Maître de conférences, HDR, IUT de Lyon 1		
Examinateurs	Rabah BOUZIDI	Maître de conférences, Université de Nantes		
	Pascal CASARI	Professeur, Université de Nantes		
Invité	Christian DUPUY	Ingénieur, CNES		
Directeur de Thèse Pascal CASARI, Professeur Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique de Nantes (GeM) Encadrant Rabah BOUZIDI, Maître de conférences Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique de Nantes (GeM)				

 $\mathrm{N}^{\circ}\mathrm{ED}$

À Clémence, À ma famille, À mes amis.

REMERCIEMENTS

Mes travaux de thèse ont été effectués au sein de l'Institut en Génie Civil et Mécanique de Nantes en partenariat avec le Centre National des Études Spatiales sous la responsabilité de Pascal Casari et Rabah Bouzidi de l'Université de Nantes et sous celle de Christian Dupuy du Centre National des Études Spatiales.

Je souhaite les remercier tous les trois. En particulier Rabah Bouzidi pour les conseils qu'il m'a prodigués au quotidien ainsi que pour les discussions extrêmement enrichissantes que nous avons eues au cours de ces trois années de thèse. J'ai également beaucoup apprécié la relation de travail que j'ai entretenue avec Christian Dupuy et je l'en remercie. Et bien sûr, je souhaite remercier Pascal Casari d'avoir dirigé ma thèse.

Je remercie Sylvie Ronel, Bernard Maurin et Philippe Boisse de m'avoir fait l'honneur d'être respectivement les rapporteurs de cette thèse et le président de mon jury. Le jugement critique et avisé qu'ils ont porté sur mes travaux a donné lieu à une discussion très constructive et m'a permis de clarifier certains points de ce manuscrit.

Merci aux membres de l'équipe "Calculs de structures", à mes collègues de l'Université de Nantes, doctorants, enseignants chercheurs et personnels de l'Université, pour leur accueil, leur présence et leurs encouragements au quotidien.

Une thèse est une aventure de trois années extrêmement prenante. On y donne beaucoup de soi, peut-être un peu trop parfois alors merci à mes proches qui m'ont permis de m'évader et de m'épanouir en dehors de mes travaux au cours de ces années de recherche.

Enfin, Clémence, merci d'avoir été présente chaque jour pendant ces trois ans. Tu le sais, il y a une part de toi dans ce mémoire.

TABLE DES MATIÈRES

Ta	able o	des ma	tières	iv
In	trod	uction		1
1	Étu	de exp	périmentale du flambement des films minces.	9
	1.1	Revue	bibliographique des travaux expérimentaux	10
	1.2	Conce	ption d'un banc de traction dédié à l'étude des films minces	12
		1.2.1	Définition du cahier des charges	13
		1.2.2	Description du moyen d'essai	16
		1.2.3	Bilan concernant la conception du banc d'essai	22
	1.3	Carac	térisation du film polyimide	22
		1.3.1	Étude du dépôt métallique	23
		1.3.2	Essais de traction uni-axiaux	24
		1.3.3	Essais de traction bi-axiaux	26
	1.4	Étude	des ondulations sur une éprouvette soumise à un chargement bi-axial.	28
		1.4.1	Matériel et méthodes	28
		1.4.2	Mesure du déplacement hors plan	30
		1.4.3	Résultats expérimentaux.	35
		1.4.4	Analyse de la géométrie des ondulations	43
		1.4.5	Bilan de l'étude des ondulations	49
	1.5	Étude	des ondulations sur une éprouvette découpée en son centre. $\ . \ . \ .$	49
		1.5.1	Matériel et méthodes	50
		1.5.2	Résultats expérimentaux.	52
	1.6	Conclu	usion de l'étude expérimentale	52
2	Thé	éorie d	es coques minces et discrétisation par éléments finis.	55
	2.1	Théor	ie des coques minces	56
		2.1.1	Cinématique des coques minces.	57

		2.1.2	Tenseur de déformation
		2.1.3	Potentiel élastique pour un matériau isotrope
		2.1.4	Potentiel élastique pour une coque mince
		2.1.5	Problème final
	2.2	Discré	tisation du modèle de coques minces par éléments finis
		2.2.1	Discrétisation de la membrane en éléments finis triangulaires 67
		2.2.2	Discrétisation par éléments finis de l'élément plaque sans degré de
			liberté de rotation
		2.2.3	Discrétisation par éléments finis de l'élément plaque "DKT" 78
		2.2.4	Les éléments finis coque minces
	2.3	Concl	usions
3	Tra	itemer	t numérique du flambement des films minces. 83
	3.1	Les m	éthodes basées sur la "Tension field theory"
	3.2	Les m	éthodes classiques d'analyse des branches de bifurcation 87
		3.2.1	Introduction à la théorie de la bifurcation
		3.2.2	Les méthodes de continuation
		3.2.3	L'analyse post-bifurcatoire : traitement de la bifurcation par intro-
			duction d'un défaut
	3.3	Résolu	ntion du système non-linéaire avec un algorithme de gradient 104
		3.3.1	Description de l'algorithme de gradient conjugué
		3.3.2	Comportement de l'algorithme dans le cas d'un potentiel non convexe.109
		3.3.3	Variation de l'énergie le long d'un chemin d'équilibre
		3.3.4	Critique de l'utilisation d'une méthode de descente pour le traite-
			ment du flambement.
	3.4	Bilan	sur les méthodes numériques de traitement des instabilités 116
4	Etu	de nur	nérique. 117
	4.1	Prédic	ction des plis avec la méthode d'analyse post-bifurcatoire 118
		4.1.1	La membrane rectangulaire cisaillée
		4.1.2	Analyse des modes de bifurcation pour l'éprouvette en croix 123
	4.2	Prédic	ction numérique des ondulations avec la méthode de gradient 130 $$
		4.2.1	Discussion autour de l'utilisation de la méthode de gradient à travers
			l'étude de la membrane rectangulaire en cisaillement
		4.2.2	Étude numérique de l'éprouvette cruciforme

4.2.3 Autres exemples numériques traités par la méthode de gradient	148
4.3 Bilan de l'étude numérique	151
Conclusion Générale 1	153
Conclusion	153
Perspectives	154
A Vecteur gradient et matrice Hessienne de l'énergie de déformation élastique	ue
pour l'élément membrane triangulaire	157
A.1 Potentiel élastique de Saint Venant Kirchhoff	157
A.2 Vecteur Gradient du potentiel élastique de Saint Venant Kirchhoff	157
A.3 Matrice Hessienne du potentiel élastique de Saint Venant Kirchhoff \ldots	158
Bibliographie 1	161

NOTATIONS

Symboles

$\{\mathbf{a}\}$	Matrice colonne
$\{\mathbf{a}\}^T$	Matrice colonne transposée
$[\mathbf{A}]$	Matrice
$[\mathbf{A}]^T$	Matrice transposée
$[\mathbf{A}]^{-1}$	Matrice inverse
$\overline{\overline{A}}$	Tenseur
\overrightarrow{A}	Vecteur

Scalaires

E	Module de Young
h	Épaisseur de la coque
w	Flèche
ϵ	Paramètre de convergence de l'algorithme de gradient
γ_d	Paramètre de dissipation
λ	Paramètre de charge
ν	Coefficient de Poisson
π	Énergie potentielle totale
ξ_i	Coordonnées dans la base covariante
Ψ_V	Densité volumique d'énergie de déformation
Ψ_S	Densité surfacique d'énergie de déformation
Ψ^{int}	Potentiel de déformation interne
Ψ^{ext}	Potentiel des chargements extérieurs

Matrices

$[B^B]$	Matrice d'interpolation des courbures
$\{\mathbf{d}\}$	Direction de descente pour l'algorithme de gradient
$\{\mathbf{g}\}$	gradient de l'énergie potentielle totale
$[\mathbf{H}]$	Matrice Hessienne
$[\mathbf{K}]$	Matrice de rigidité tangente
$[K_0]$	Matrice de rigidité tangente initiale calculée à l'état non chargé
$\left[\mathbf{K}^{\mathbf{B}}\right]$	Matrice de rigidité en flexion

[**K**_G] Matrice de rigidité géométrique

$[K_{G0}]$	Matrice de rigidité géométrique évaluée pour le chargement de référence
$\left[\mathbf{K}^{\mathbf{M}}\right]$	Matrice de rigidité en membrane
$[\mathbf{M}]$	Matrice de masse
$\{\mathbf{q}\}$	Chargement
$\{\mathbf{r}\}$	Résidu d'équilibre
$[\mathbf{R}]$	Matrice de passage des courbures uni-directionnelles au tenseur des courbures
$\{\mathbf{u}\}$	Déplacement
$\{\mathbf{z}\}$	Vecteur propre associé à $[\mathbf{K}]$
$\{\rho_{n_i}\}$	Courbure uni-directionnelle

Vecteurs

$A_{i}^{'}$	Vecteur de la base naturelle sur la surface moyenne en configuration de référence
$\overrightarrow{a_i}$	Vecteur de la base naturelle sur la surface moyenne en configuration actuelle
$\overrightarrow{G_i}$	Vecteur de la base naturelle en configuration de référence
$\overrightarrow{g_i}$	Vecteur de la base naturelle en configuration actuelle
\overrightarrow{X}	Position de référence
\overrightarrow{x}	Position actuelle

Tenseurs

A_{ij}	Composantes du tenseur métrique de la surface moyenne en configuration initiale
a_{ij}	Composantes du tenseur métrique de la surface moyenne en configuration actuelle
$\overline{\overline{C}}$	Tenseur de dilatation de Cauchy-Green
$\overline{\overline{D}}$	Tenseur des modules d'élasticité
$\overline{\overline{E}}$	Tenseur de déformation de Green Lagrange
G_{ij}	Composantes du tenseur métrique en configuration initiale
g_{ij}	Composantes du tenseur métrique en configuration actuelle
$\overline{\overline{\rho}}$	Tenseur des courbures
$\overline{\overline{\chi}}$	Tenseur de déformation de la surface moyenne
$\overline{\overline{\Sigma}}$	Tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff (PK2)

INTRODUCTION

Au cours de ces dernières années, de nombreux concepts de structures spatiales impliquant l'utilisation de membranes légères de grande dimension ont vu le jour. Ces réalisations sont communément désignées par le mot anglais "Gossamer" qui fait référence à un objet mince et immatériel tel qu'une toile d'araignée flottant dans les airs (Jenkins, 2001). En ingénierie, ce terme est utilisé pour parler des technologies spatiales de très faible masse comme les structures expansibles, pressurisées ou dépliables, caractérisées par l'emploi intensif de membranes. Par membrane, on entend ici, une structure très faiblement rigide constituée d'un film mince, le plus souvent polyimide ou polyester, de quelques dizaines de micromètres d'épaisseur.

L'intérêt de la communauté spatiale pour les technologies Gossamer a commencé il y a plus de quarante ans avec le lancement de la série des ballons Echo. Ces satellites de communication étaient des ballons pressurisés de grande dimension (30,1 m de diamètre pour Echo 1, 40,1 m de diamètre pour Echo 2). Depuis, parmi les réalisations les plus marquantes, on peut citer la mise en orbite par la NASA d'un concentrateur solaire en 1996 (Steiner, 1997). Le générateur solaire présenté sur la figure 1 est constitué d'une lentille pressurisée de 14 mètres de diamètre maintenue par trois bras gonflables mesurant chacun 28 mètres.



Fig. 1 — Concentrateur solaire déployé en 1996 par la NASA. Photographie tirée de Steiner (1997).

Actuellement, les agences spatiales internationales développent le télescope spatial JWST (pour James Web Telescope) en vue de remplacer le vieillissant Hubble à l'horizon 2014. Ce satellite de nouvelle génération est pourvu d'un dispositif passif de refroidissement de l'optique. Il s'agit d'un pare-soleil de 32 mètres de long et de 14 mètres de large constitué de multiples couches de membrane réfléchissante (voir figure 2).



Fig. 2 — Le téléscope spatial JWST.

Les technologies Gossamer présentent de nombreux avantages en comparaison avec les structures spatiales traditionnelles, en particulier leur légèreté, leur faible volume de stockage et le coût réduit de leur fabrication. En plus de ces caractéristiques intéressantes, ces technologies ouvrent le champ à des concepts novateurs que les moyens actuels ne permettent pas de réaliser. Parallèlement au développement des structures Gossamer, les différentes agences spatiales (Centre National des Etudes Spatiales, European Space Agency, NASA) ont identifié de nouvelles missions de prospection et de découverte de l'espace nécessitant l'utilisation de télescopes à la résolution accrue, d'antennes gonflables, de voiles solaires, ou encore de panneaux et de concentrateurs solaires de taille importante. Le point commun de toutes ces missions est le besoin d'architecture révolutionnaire de grande dimension. Pour leur réalisation, l'emploi de membranes dépliables ou pressurisées est une alternative viable que le commanditaire de cette thèse, le CNES, envisage pour ses projets futurs. Au rang de ceux-ci on trouve notamment deux applications possibles : l'imageur de Fresnel (Serre, 2007) et les antennes de communication.

L'imageur interférométrique de Fresnel est un concept de télescope spatial comportant deux modules : un premier supporte une optique diffractive dont la fonction est de focaliser la lumière provenant d'un astre, et une deuxième optique permettant la reprise et la reformation de l'image. Dans un télescope classique, la focalisation résulte de l'utilisation d'un miroir ; dans le cas de l'Imageur Interférométrique de Fresnel, elle s'obtient par l'utilisation d'un masque diffractant comportant des dizaines ou des centaines de milliers d'ouvertures individuelles, réparties sur un support plan (voir figure 3).

Des essais de validation du concept de l'imageur de Fresnel ont été effectués sur Terre avec un prototype de lentille de 80 mm de côté découpée dans une feuille d'inox (Serre, 2007). A l'avenir, avec une optique réelle, les premiers calculs de dimensionnement



Fig. 3 — Le concept de l'imageur interférométrique de Fresnel, illustration tirée de Serre (2007).

prévoient une taille atteignant plusieurs dizaines de mètres. Pour fabriquer un tel dispositif, une des possibilités actuellement à l'étude est d'utiliser un film mince métallisé, découpé suivant le motif de la figure 3 et tendu sur un cadre rigide.

Pour les applications que nous venons de citer, il est nécessaire de disposer d'une surface plane dans les zones actives du dispositif. Or, le principal inconvénient des membranes est qu'elles flambent presque immédiatement lorsqu'elles sont soumises à une contrainte de compression (voir figure 4). Ce flambement conduit à l'apparition de plis qui peuvent rendre la structure Gossamer totalement inutilisable. Dans le cas de l'imageur de Fresnel par exemple, le plissement de la membrane constituant l'optique diffractive est susceptible d'altérer la résolution du dispositif. Il est alors important de vérifier que la taille des ondulations, assimilées à des défauts de la surface, se situe dans la limite des tolérances géométriques acceptables pour réaliser des observations de qualité.

Le phénomène de plissement est propre aux structures de faible épaisseur $L_0 >> h$ où L_0 est la taille caractéristique de l'échantillon et h son épaisseur. Si l'on impose une force $\overrightarrow{F_c}$ tendant à comprimer un film mince d'une quantité ϵ , il peut soit se courber, soit se rétracter dans son plan initial (voir figure 5).

Lorsque $L_0 >> h$, l'énergie requise pour comprimer une structure mince d'une quantité ϵ finie est beaucoup plus faible que celle qui est nécessaire pour la courber. C'est ce qui explique qu'un film mince en compression va naturellement flamber.

Cependant, s'il existe une force de rappel $\overrightarrow{F_r}$ normale au plan du film mince, la membrane ne va pas simplement flamber, mais elle s'organise sous forme d'ondulations caractérisées par leur amplitude A et leur longueur d'onde λ . La force de rappel, pour les structures que nous avons étudiées, est induite par un effort de tension orthogonal $\overrightarrow{F_t}$ à la direction de compression (voir figure 6).

Puisque la membrane se plisse mais ne se comprime pas, sa longueur dépliée reste constante et il est alors possible d'obtenir plusieurs configurations cinématiques de plis



Fig. 4 — Plissement d'une membrane tendue.



Fig. 5 — Compression d'un film mince.



Fig. 6 — Bilan des efforts appliqués sur un pli.

satisfaisant cette condition de non-compressibilité. Soit par exemple, une seule ondulation d'une amplitude et d'une longueur d'onde importantes, soit une succession d'ondulations d'amplitude et de longueur d'onde plus faibles. Physiquement, c'est la configuration cinématique associée au niveau minimal de l'énergie potentielle totale de la structure, soit la somme de l'énergie de flexion et de l'énergie associée à la force de rappel, qui est observée. Plus les plis sont nombreux, plus l'énergie de flexion augmente. A l'inverse, lorsque le nombre de plis s'accroît, leur amplitude se réduit, entraînant ainsi la diminution de l'énergie associée à la force de rappel. L'organisation de la surface ondulée en termes de longueur d'onde et d'amplitude est alors le fruit d'un compromis entre l'augmentation de l'énergie de flexion et la minimisation de l'énergie associée à la force de rappel.

Cerda et al. (2002) ont illustré ce phénomène en observant les plis formés à la surface d'une bande de polyéthylène soumise à un chargement de tension uni-axial. Sous l'effet de la sollicitation longitudinale, la membrane a tendance à se positionner dans le plan de l'effort de tension. Mais dans le même temps, cette force est responsable de la contraction du film mince par effet Poisson et elle conduit au flambement de la structure présentée sur la figure 7. La contrainte de compression a pour effet de courber la membrane, alors que la tension longitudinale tend à la ramener dans son plan initial. La formation des ondulations orientées suivant la direction de mise en tension résulte de la compétition entre ces deux mécanismes antagonistes.



Fig. 7 — Bande de polyéthylène soumise à un chargement de tension uni-axial, illustration tirée de Cerda et al. (2002).

Le premier objectif de ces travaux est la validation et le développement d'outils numériques permettant la prédiction précise de la géométrie des ondulations par la méthode des éléments finis.

La description du phénomène physique que nous venons d'effectuer montre la complexité de cette tâche. Le problème mécanique est non linéaire puisque les plis résultent du flambement de la structure et la première problématique consiste donc à traiter numériquement cette bifurcation statique. La faible épaisseur des structures étudiées constitue elle aussi une difficulté importante, puisque selon la discrétisation choisie, le modèle numérique peut être sensible au phénomène de verrouillage numérique lié à la finesse des membranes.

Afin d'évaluer la capacité des outils numériques à prédire les ondulations, il est indispensable de disposer d'une base de données expérimentale de qualité permettant la confrontation des données empiriques avec les résultats issus des simulations. Or il en existe actuellement très peu, et sa constitution est un objectif majeur de cette thèse. L'étape préalable à ces essais a été la définition d'un protocole et d'un dispositif expérimental adapté à la réalisation de tests sur des films minces en tension. Nous avons souhaité qu'il soit suffisamment modulaire pour s'adapter à une large variété d'éprouvettes minces.

À terme, le développement de ces outils tant numériques qu'expérimentaux doit permettre de proposer des stratégies de conception de structures "Gossamer" aux défauts de forme maîtrisés.

Les résultats de cette thèse sont présentés en quatre chapitres :

Le premier chapitre est dédié à l'étude expérimentale du phénomène de flambement des films minces. Après une revue bibliographique des travaux antérieurs, la conception du dispositif d'essai que nous avons mis en œuvre est détaillée. Les sections suivantes sont consacrées à la description du protocole expérimental et des données collectées lors des essais.

L'objet du second chapitre est d'exposer les modèles numériques employés pour discrétiser le comportement des films minces. Les principaux résultats de la théorie des coques minces de Love-Kirchhoff sont rappelés, puis la formulation d'un élément fini de membrane et de deux éléments finis de plaque est présentée.

Le troisième chapitre s'intéresse à la résolution du système non linéaire établi au chapitre précédent. A cette fin, plusieurs méthodes sont décrites et deux d'entre elles font l'objet d'une discussion approfondie : le traitement de la bifurcation par introduction d'un défaut nommé analyse post-bifurcatoire, et la minimisation directe de l'énergie potentielle totale de la structure avec un algorithme de gradient.

Enfin, nous avons mené une évaluation détaillée de ces deux méthodes de résolution ainsi que des trois éléments finis en confrontant les résultats des prédictions numériques avec des données expérimentales dans le quatrième chapitre.

CHAPITRE 1

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DU FLAMBEMENT DES FILMS MINCES.

De nombreux auteurs ont cherché à prédire l'étendue et la localisation des zones pliées à la surface d'une membrane en tension. Les travaux de Wagner (1929) marquent le début de l'intérêt porté par la communauté scientifique à cette problématique. Pour évaluer la faisabilité des structures spatiales envisagées dans le cadre de cette thèse, telles que la lentille de Fresnel ou les antennes souples, il faut davantage de données que la simple localisation des zones ondulées. Nous devons être capables de fournir une description précise de la géométrie des plis, c'est-à-dire la position, le nombre, l'amplitude et la longueur d'onde.

Peu de publications fournissent des résultats détaillés concernant la géométrie des plis sur des structures minces en tension. En effet, le relevé tridimensionnel de forme pour des structures aussi faiblement rigides en flexion n'est possible qu'en utilisant une méthode de mesure sans contact. Ce type de numérisation n'a été envisageable que récemment, notamment grâce à l'essor des méthodes de mesure optique. Les premiers auteurs a avoir réalisé un relevé précis de la géométrie des ondulations sont Jenkins et al. (1998). Depuis Cerda et al. (2002), Wong et Pellegrino (2006a) et Wang et al. (2009) ont à leur tour effectué des manipulations sur des films en tension et donnent des détails relatifs à la géométrie des plis. Néanmoins, la base de données que constituent ces travaux reste insuffisante. En plus du faible nombre de données disponibles, les études que nous venons de citer ne couvrent pas certains aspects expérimentaux que nous jugeons importants. En particulier, nous souhaitons :

- Observer le mécanisme de création des plis et caractériser son évolution.
- Evaluer l'influence de l'épaisseur de la structure d'étude sur la géométrie des ondulations.
- Examiner la reproductibilité d'une configuration cinématique de plis en réponse à une sollicitation donnée.

Ces considérations nous ont conduits à démarrer ces travaux de thèse par une étude expérimentale. Nous avons donc consacré les premiers mois de cette activité à la définition d'un essai et à la conception d'une manipulation originale dédiée à l'étude des films minces. Notre choix a porté sur la définition d'un banc de traction bi-axial, alors que les travaux mentionnés précédemment ne considèrent l'emploi que d'un paramètre de charge. Ce dispositif procure la possibilité d'effectuer une variété de trajets de chargement qui sont autant de cas de validation numériques possibles. Nous avons ensuite utilisé le banc d'essai pour mener une campagne expérimentale sur des éprouvettes constituées d'un film polyimide de faible épaisseur : le Kapton (\mathbb{R}) .

Au cours de ces travaux, les objectifs étaient les suivants :

- Définir une procédure et un moyen d'essai adapté à l'étude des films minces.
- Caractériser le matériau constitutif des éprouvettes utilisées.
- Caractériser le mécanisme de création des plis.
- Constituer une base de données expérimentale nécessaire à l'étalonnage des méthodes numériques.

La section 1.1 est dédiée à la revue bibliographique des travaux expérimentaux. Les détails de la conception du banc d'essai sont donnés à la section 1.2. Le film polyimide utilisé lors des essais est caractérisé à la section 1.3. Les sections 1.4 et 1.5 sont consacrées à l'étude des ondulations sur des éprouvettes de différentes géométries soumises à un chargement bi-axial. Enfin, la section 1.6 conclut le chapitre

1.1 Revue bibliographique des travaux expérimentaux.

La première étude consacrée à l'observation du flambement des structures minces est attribuée à Wagner (1929). Il a examiné le phénomène de flambement localisé sur des structures métalliques de faible épaisseur utilisées par l'industrie aéronautique allemande. En plus de ses résultats d'essais, Wagner (1929) a proposé une théorie connue sous le nom de "Tension Field Theory", qui vise à prédire la localisation des zones ondulées.

Dans les années soixante, la NASA a lancé de nombreux projets de satellites constitués de film polyester mince (Mylar) dont la réalisation la plus notable est la série des satellites de communication ECHO. Ces structures appelées "Gossamer" sont sujettes au plissement de leur surface. A cette époque, Stein et Hedgepeth (1961) ont mené des essais sur une membrane mince circulaire en torsion. L'éprouvette visible sur la figure 1.1 est une couronne dont l'arête extérieure est encastrée alors que l'arête intérieure est fixée à une pièce centrale rotative.

Ces travaux ont été complétés par ceux de Mikulas (1964). Plus récemment, Miyamura (2000) a utilisé des jauges de déformation pour étudier la distribution des contraintes sur des structures similaires constituées de différents matériaux (Teflon, caoutchouc, polyester, trame textile enduite de PVC). Il a ensuite confronté ces résultats expérimentaux avec les résultats d'une simulation numérique par éléments finis.

Un autre cas couramment traité dans la littérature, concerne le cisaillement d'une membrane rectangulaire initialement plane. Mansfield (1970) a étudié l'orientation des plis en soumettant une structure similaire à celle présentée sur la figure 1.2 à différents cas de chargement. Le bord inférieur est encastré et un déplacement de cisaillement est imposé au bord supérieur.



Fig. 1.1 — Membrane circulaire en cisaillement. Photographie tirée de l'étude de Miyamura (2000)



Fig. 1.2 — Membrane rectangulaire en cisaillement. Photographie issue des travaux de Wong et Pellegrino (2006a)

Les moyens d'acquisition de l'époque ne permettaient pas de réaliser des mesures sans contact et il était dès lors impossible d'obtenir une cartographie des déplacements hors plan. En effet, pour des matériaux présentant une rigidité aussi faible, le simple fait de toucher la surface peut modifier la géométrie des ondulations. Les auteurs cités précédemment, à l'exception de Miyamura (2000) se sont donc contentés d'observations et de corrélations qualitatives entre leurs essais et leurs résultats théoriques.

Jenkins et al. (1998) ont été les premiers à mesurer précisément la géométrie des plis lors de l'étude en cisaillement d'une membrane rectangulaire initialement plane. Ils ont notamment relevé la section centrale du film mince en faisant varier les cas de chargement. Les essais ont été menés sur une éprouvette en Mylar aluminisé avec un capteur capacitif. Ce dernier est monté sur des glissières permettant de relever le déplacement hors plan de n'importe quel point de la surface. Les mesures effectuées par cette méthode sont extrêmement précises car la résolution est de l'ordre du micron, mais l'application est limitée aux surfaces métalliques. Wong et Pellegrino (2006a) ont ensuite réalisé des essais sur une éprouvette de géométrie similaire puis sur une membrane carrée soumise à un chargement imposé en force à chacune de ses extrémités. Ils ont utilisé un montage comparable à celui de Jenkins et al. (1998), en remplaçant le capteur capacitif par un capteur laser, ce qui leur a offert la possibilité de mesurer des films de faible conductivité électrique. Cependant, cette méthode ne permet pas de réaliser des mesures de champ.

L'emploi de dispositifs de mesure optique pour le relevé de forme tridimensionnel a

permis à Blandino et al. (2001) d'effectuer la numérisation d'une surface complète. La photogramétrie a été mise en œuvre pour étudier le plissement d'un film polyimide de 25 μm en réponse à des sollicitations mécaniques (Blandino et al., 2002a) et thermiques (Blandino et al., 2002b). Puis, dans une étude contemporaine à cette thèse, Wang et al. (2009) ont employé la même technique pour observer les ondulations à la surface d'un film polyimide de 50 μm soumis à une tension uni-axiale. Les auteurs ont également relevé les efforts et les déplacements imposés à leur éprouvette (voir figure 1.3). Dans cette expérience, le flambement local est induit par la distribution de contraintes résultant de la géométrie particulière de l'éprouvette. C'est le même phénomène que l'on retrouve dans l'étude d'une bande de film mince en tension réalisée par Cerda et al. (2002).



Fig. 1.3 — Eprouvette en Kapton étudiée par Wang et al. (2009)

La liste des essais de caractérisation du flambement sur des structures minces citée ici est non exhaustive. On trouve par ailleurs des travaux concernant le flambement des structures pressurisées dans Szyszkowski et Glockner (1987); Yoo et al. (2007). Toutefois, les auteurs s'intéressent généralement au flambement global de la structure.

1.2 Conception d'un banc de traction dédié à l'étude des films minces.

L'activité expérimentale a démarré par la définition d'un dispositif d'essai destiné à l'étude des films minces en tension. Le banc de traction qui a été utilisé lors de cette étude a été conçu et dessiné par nos soins, puis sa réalisation a été confiée à un industriel. L'objet de cette section est d'expliquer la démarche suivie lors de la phase d'élaboration de nos outils expérimentaux.

Notre choix a porté sur l'utilisation d'un banc d'essai bi-axial. Cet instrument permet de procéder à un large éventail de tests en offrant plus de richesse d'information que les manipulations employées jusqu'à présent pour l'observation des ondulations.

Les moyens d'essai tels que les machines de traction usuelles ne sont pas adaptés à l'étude des films minces. La difficulté à manipuler ce type de structures provient de leur faible rigidité, et de ce fait, deux opérations en particulier posent problème :

- La mise en place des échantillons.
- L'observation du déplacement hors plan au moyen d'une méthode de mesure sans contact.

La mise en place des éprouvettes est une étape cruciale de l'expérimentation, puisque pour observer la création et l'évolution des ondulations sur une membrane tendue, il faut obtenir une surface initialement plane. Or, selon la géométrie des éprouvettes et les moyens de serrage, des plis peuvent se former à la surface de l'échantillon simplement en le positionnant. Enfin, le banc de traction doit être adapté pour permettre le relevé de forme tridimensionnel au moyen d'une méthode de mesure optique.

La conception d'un dispositif expérimental nécessite de déterminer, dans les grandes lignes, l'essai qui sera effectué et d'arrêter le choix des méthodes de mesure à employer. L'étude bibliographique et les manipulations préliminaires doivent permettre d'appréhender une partie des problèmes qui peuvent survenir et de choisir la technologie du moyen d'essai. Ces éléments ont permis d'élaborer le cahier des charges de notre montage que nous détaillons à la sous-section 1.2.1. Puis, les solutions technologiques retenues dans le banc d'essai que nous avons fait réaliser sont présentées à la sous-section 1.2.2.

1.2.1 Définition du cahier des charges

Le banc d'essai est dédié à l'étude d'échantillons de films polyimide ou polyester d'une épaisseur variant de 12.5 μm à 125 μm . Ces valeurs correspondent à l'épaisseur standard des produits laminés fabriqués pour des applications spatiales. Les caractéristiques que nous attendons de cet outil sont regroupées en trois catégories de contraintes :

- Le type d'essai que nous voulons réaliser.
- Les données expérimentales qu'il est nécessaire de relever.
- L'adaptation du moyen d'essai au test des films minces.

1.2.1.1 Description de l'essai

Nous souhaitons imposer à une éprouvette un état de contrainte bi-axial, en pilotant ses extrémités en déplacement suivant deux directions orthogonales. La mise en tension doit se faire de manière découplée suivant les deux axes du déplacement afin de maîtriser le trajet de chargement. Cette spécification permet une grande latitude dans le choix des déplacements mais élimine toutes les solutions techniques de type "pantographe".

L'encombrement du montage est dicté par la taille et la géométrie des structures que l'on projette de tester. Au moment de l'élaboration du cahier des charges, deux types d'éprouvette sont envisagés :

- des spécimens de géométrie simple pour effectuer l'étalonnage des méthodes numériques.
- des maquettes de structures réelles (type antenne ou lentille) pour valider la faisabalité d'une technologie.

Pour cette raison, il est préférable d'opter pour un banc permettant de réaliser des

essais sur des échantillons de tailles et de géométries variées. Notre montage doit être capable d'accepter des éprouvettes allant d'un encombrement de 400 $mm \times 400 mm$ jusqu'à 1000 $mm \times 1000 mm$ avec une course suffisante pour imposer une déformation de 1% aux plus grandes structures.

1.2.1.2 Données expérimentales.

Une fois la cinématique arrêtée, on spécifie les données expérimentales à collecter pendant un essai :

- les déplacements aux extrémités de l'éprouvette.
- les efforts imposés suivant les directions de mise en tension.
- le déplacement hors plan de la surface de l'échantillon.

Les déplacements et les efforts sont relevés grâce à des capteurs classiques dont les signaux sont enregistrés sur une centrale d'acquisition. La numérisation en trois dimensions de la surface de l'échantillon est effectuée avec la méthode de projection de franges. Le laboratoire possédait un capteur CCD de 14 millions de pixels et un logiciel de traitement de franges avant le début de nos travaux. Nous avons utilisé ce matériel en raison de son adaptation à l'observation des surfaces ondulées. Le principe de la mesure par projection de franges, détaillé à la section 1.4.2, nécessite deux éléments : un appareil photographique et un dispositif de projection. Un schéma de l'ensemble des composantes du montage est donné sur la figure 1.4.



Fig. 1.4 — Dispositif expérimental.

1.2.1.3 Adaptation du banc d'essai aux structures minces.

Pour des raisons pratiques, il est préférable, pendant la mesure, d'opter pour un montage avec une éprouvette à la verticale comme montré sur la figure 1.4. Cela permet notamment de donner du recul à l'appareil photographique et au système de projection. A l'inverse, lors de la mise en place des éprouvettes, il est plus aisé de travailler avec un dispositif en position horizontale, comme c'est le cas sur le schéma 1.5. Nous avons alors choisi un ensemble pivotant, de manière à posséder une position de mesure verticale ainsi qu'une position de travail horizontale pour fixer nos échantillons.

Afin d'obtenir une position initialement plane de la surface de notre éprouvette, il faut que le châssis de la structure soit le plus plan possible. De plus, ce dernier doit pouvoir être considéré comme rigide et indéformable pour ne pas influencer la cinématique de la déformation de l'échantillon. L'effort maximal que nous souhaitons imposer est fixé à 5000 N, force équivalente à la tension nécessaire pour obtenir 3% de déformation dans l'éprouvette de 125 μm présentée à la figure 1.15. La flèche du châssis doit rester faible à ce niveau de chargement.

Enfin, comme expliqué précédemment, la manipulation de structures minces présentant une rigidité très faible nécessite quelques précautions. Il faut notamment prévoir un dispositif permettant d'imposer un faible niveau de précontrainte avant le serrage des mors. Ces composants devront être adaptés au serrage des films minces pour éviter de créer des instabilités à l'interface entre le bord libre de l'échantillon et sa partie encastrée.

L'ensemble des spécifications ayant été détaillées, nous allons maintenant présenter et commenter les solutions techniques que nous avons retenues.

1.2.2 Description du moyen d'essai.

Le banc de traction que nous avons conçu est présenté sur la figure 1.5 en position horizontale.



Fig. 1.5 — Banc de traction bi-axial.

Il est composé d'un châssis fixe et d'une partie mobile en rotation par rapport à un support vissé dans le sol du laboratoire. Le bâti mobile est un ensemble mécano soudé en forme de croix. Les quatre branches supportent un chariot monté en liaison glissière par rapport au châssis. Chaque chariot est muni de mors dans lesquels on vient fixer l'éprouvette. Les chariots en vis-à-vis sont entraînés symétriquement en translation par le biais d'un système vis écrou actionné avec une manivelle. La glissière est réalisée avec deux barres de guidage parallèles sur lesquelles sont montés des roulements linéaires.

1.2.2.1 Les chariots.

Les chariots sont constitués de deux sous-ensembles : la partie supportant les mors du côté intérieur du dispositif, et la partie d'entraînement dans laquelle se trouve un écrou en bronze. Les deux composantes sont reliées entre elles par l'intermédiaire d'un capteur de force. Ce montage en série au moyen de deux rotules permet de relever, au frottement près, l'effort imposé à l'extrémité de l'éprouvette. L'ensemble est visible sur la figure 1.6.



Fig. 1.6 — Schéma des chariots.

Les mors sont constitués de deux plaques rectangulaires percées régulièrement. L'échantillon à tester est ajouré suivant le même motif et maintenu entre les deux plaques par la pression des vis. On considère que l'extrémité de la membrane est encastrée après le serrage. Pour éviter de créer des plis lors du serrage, un soin particulier a été apporté à la réalisation du mors inférieur. La pièce a été rectifiée et les arêtes vives ont été usinées pour former des congés.

Chaque demi-chariot comporte quatre roulements linéaires SKF standard de diamètre 25 mm. Ils sont conçus pour coulisser sur des arbres de guidage en acier STUB. Les barres de guidage et les roulements linéaires permettent de réaliser une glissière autorisant des courses importantes pour un coût beaucoup moins élevé qu'avec une platine de translation.

Le montage des chariots sur les deux arbres parallèles est hyperstatique. Si ces derniers ne sont pas parfaitement parallèles, il y a un phénomène d'arc-boutement, avec comme conséquence l'apparition d'un effort de frottement parasite. Ce dernier est extrêmement gênant car il est enregistré par le capteur de force et altère ainsi la validité de la mesure de l'effort imposé à l'éprouvette. Pour garantir le parallélisme, nous avons imposé aux perçages et taraudages du bâti des contraintes de localisation serrées. Enfin, après réception du banc d'essai, le frottement à vide dans les chariots a été mesuré. Il est inférieur à 5 Nen tout point des glissières.

1.2.2.2 Le dispositif d'entraînement des chariots.

Les chariots sont entraînés en translation à l'aide de la vis présentée sur la figure 1.7. Ce composant est constitué d'une tige filetée avec un pas à droite et d'une tige filetée avec un pas à gauche. Les deux pièces sont assemblées par un manchon pour permettre d'actionner simultanément les deux chariots montés sur un même axe. Ainsi, leur déplacement est symétrique par rapport au centre du montage. La tige est entraînée en rotation manuellement grâce à une manivelle. Elle coulisse dans des paliers en bronze fixés sur les



supports qui servent également à maintenir les barres de guidage.

Fig. 1.7 — Assemblage des tiges filetées

Les tiges filetées de diamètre 30 mm ont été usinées avec un pas fin non standard de 1 mm. Ce choix permet un pilotage en déplacement plus précis pour l'utilisateur qui peut contrôler le déplacement au $\frac{1}{100}$ de millimètre. En outre, le jeu entre la vis d'entraînement et les écrous en bronze montés sur les chariots est ainsi minimisé. La tige filetée et les deux barres de guidage sont fixées sur le châssis mobile.

1.2.2.3 Le châssis mobile.

Le châssis est un ensemble mécano soudé assemblé à partir de profilé IPN de 120 mm. Cette pièce sert de support à l'ensemble des composants en contact avec l'éprouvette. La qualité de sa réalisation est primordiale pour garantir la planéité du montage et le parallélisme des barres de guidage. Une vue isométrique du châssis est donnée à la figure 1.8.



Fig. 1.8 — Le châssis mobile.

Chargement	Position du montage	Flèche au bout du châssis
Poids propre du châssis	Horizontale	$0,035\ mm$
Poids des chariots	Horizontale	0,11 mm
Poids propre du châssis	Verticale	$0,03\ mm$
Poids des chariots	Verticale	$0,1\ mm$
Chargement de 5000 N dans l'éprouvette	Verticale	$0,15\ mm$

Tableau 1.1 — Flexion de la structure constituée du châssis et des barres de guidages

Le positionnement des supports de barres est assuré par des pions de centrage. La tolérance de localisation des alésages dans lesquels sont fixés ces pions est de 0.02 mm par rapport au centre du montage. Enfin, la tolérance de planéité des quatre plans aux extrémités du châssis a été fixée à 0.02 mm par rapport au plan central choisi comme élément de référence. Pour satisfaire ces contraintes de fabrication, un traitement de recuit a été effectué après le soudage. Ensuite, l'assemblage a été surfacé et l'ensemble des perçages a été réalisé lors d'une seule phase d'usinage. Après réalisation, la structure a été mesurée sur un marbre avec un palpeur tridimensionnel afin de vérifier les tolérances réelles de fabrication.

La rigidité du bâti est également une caractéristique importante. On doit pouvoir le considérer comme un élément indéformable. Les chargements qui lui sont appliqués sont le poids propre de l'assemblage (la masse linéique d'un profilé IPN de 120 mm est d'environ $11 \ kg \ m^{-1}$) et le couple dû à la mise en tension de 5000 N dans l'éprouvette. En considérant la structure formée par le châssis et les barres de guidage, nous avons calculé les flèches obtenues par la théorie des poutres à l'extrémité des profilés métalliques pour différents cas de chargement. Les résultats sont donnés dans le tableau 1.1.

1.2.2.4 Le système de mise en tension initiale.

A chaque extrémité du châssis, on trouve deux supports d'axe sur lequel sont montées deux poulies. Ce système est visible sur la figure 1.9.

Il s'agit du dispositif de mise en tension initiale de l'éprouvette. Pendant la mise en place de l'échantillon à tester, le bâti mobile est en position horizontale. On applique une faible tension initiale à l'éprouvette au moyen de contrepoids reliés par deux cordes à une baguette rigide, elle-même collée à chacune des extrémités de l'échantillon. C'est un système semblable à ceux mis en œuvre par Wong et Pellegrino (2006a) et Miyamura (2000). De cette manière, la tension initiale imposée avant le serrage des mors est connue et maîtrisé par l'expérimentateur.



Fig. 1.9 — Système de mise en tension initiale.

1.2.2.5 La plaque centrale.

Au centre du montage se trouve la plaque représentée sur la figure 1.10. Cette pièce démontable n'a pas été dessinée sur le schéma d'ensemble (figure 1.5) pour permettre une meilleure visualisation des composantes de la tige filetée. La plaque a deux fonctions principales. Tout d'abord, elle a servi de butée de référence lors de l'assemblage des chariots. Les mors ont été placés contre la plaque centrale et ont ensuite été solidarisés à l'écrou en bronze garantissant ainsi la symétrie du montage et donc celle du déplacement des chariots par rapport au centre du dispositif. L'autre fonction de cette pièce est de fournir un plan de référence au centre du montage. Ce plan de référence est utile lors de l'étalonnage de la méthode de mesure optique expliquée en 1.4.2, il sert de support aux cales étalons.



Fig. 1.10 — La plaque centrale.

1.2.2.6 Capteurs et moyens d'acquisitions.

Pour relever l'ensemble des données expérimentales utiles au dépouillement des essais, le montage est équipé de :

- 4 capteurs de force.
- 4 capteurs de déplacement.
- 1 centrale d'acquisition à 8 voies.
- 2 comparateurs numériques.
- 1 dispositif de numérisation de la surface de l'éprouvette par mesure optique.

Chaque chariot est pourvu d'un capteur de force dont la charge nominale est de 10 kN. L'erreur de linéarité maximale de ces capteurs est inférieure à 0.02 %.

Le déplacement du mors inférieur est enregistré avec un capteur inductif de déplacement fixé sur le châssis mobile par l'intermédiaire d'un support magnétique. L'erreur de linéarité maximale de ces sondes est de 0.01 % pour une course de 50 mm. Les données de ces huit capteurs sont recueillies sur une centrale d'acquisition HBM à huit voies. Le signal analogique est ensuite converti en données numériques et enregistré sur un ordinateur pendant le déroulement d'un essai.

On a également disposé sur le montage deux comparateurs numériques qui ne sont pas utilisés comme des outils de mesure mais comme afficheurs. Pendant la manipulation, ils nous permettent de visualiser le déplacement imposé. Ils sont positionnés de la même manière que les capteurs inductifs de déplacement. L'agencement des capteurs sur le montage est donné sur la figure 1.11.



Fig. 1.11 — Disposition des capteurs.

1.2.3 Bilan concernant la conception du banc d'essai.

Dans cette section, nous avons décrit les problématiques spécifiques à l'expérimentation que nous avons souhaité réaliser sur des éprouvettes de faible épaisseur. Nous avons ensuite conçu un banc de traction bi-axial à axes découplés équipé de capteurs pour enregistrer l'ensemble des déplacements et des forces imposés dans le plan de l'éprouvette. Le montage est complété par un dispositif de mesure optique destiné au relevé des déplacements hors du-plan.

Nous avons identifié les éléments pouvant perturber nos mesures, ou modifier la réponse de la structure, en termes de déplacement hors plan, à une sollicitation donnée. Nous avons détaillé et pris en compte ces éléments lors de la conception du banc d'essai pour proposer des solutions technologiques visant à minimiser les biais de mesure.

D'autres solutions technologiques auraient évidement pu être envisagées. Des montages employés pour tester des structures textiles utilisent des solutions différentes alors que les problématiques sont relativement proches (Quaglini et al., 2008). Le dispositif que nous proposons nous semble être un bon compromis en considérant le coût de réalisation, la modularité du montage et la richesse des données expérimentales.

Les tests que nous avons effectués et dont nous exposons les résultats dans les sections 1.4 et 1.5 ont été réalisés sur des éprouvettes de film polyimide mince : le Kapton ®. La section suivante est consacrée à la caractérisation de ce matériau.

1.3 Caractérisation du film polyimide.

Les polyimides sont un groupe de polymères possédant des qualités de résistance mécanique, chimique et thermiques élevées. On les retrouve dans des applications industrielles courantes (renfort de châssis automobile ou isolant thermique dans des appareils électroménagers). Les polyimides sont disponibles commercialement en films minces sous différentes appellations, notamment le Kapton (R), proposé par Dupont de Nemours. Voici ses principales qualités :

- Il conserve pratiquement ses caractéristiques mécaniques (son excellente endurance au pliage de 285 000 cycles et son module élastique), ainsi que ses propriétés électriques, thermiques et chimiques dans une plage de température étendue (de -269°C à 250°C).
- Il offre une bonne résistance aux produits chimiques, on ne lui connaît pas de solvant organique mais il est sensible à l'attaque par les composés basiques.
- Il ne brûle ni ne fond, et se voit attribuer la plus haute classification dans l'échelle de la non inflammabilité.

Ces caractéristiques remarquables, en particulier la stabilité thermique, expliquent son utilisation courante par l'industrie spatiale et son emploi potentiel pour la fabrication des antennes souples ou de la lentille de Fresnel. C'est pour ce motif que nous avons testé des éprouvettes de ce matériau. Le Kapton (R) a pour principal inconvénient d'être sujet à la dégradation par oxydation : il est peu résistant à l'oxygène atomique. Pour des applications à basse orbite, il est souvent recouvert d'une couche de matériau inorganique. Sur les échantillons que nous avons utilisés, il s'agit de dioxyde d'aluminium. Cette couche a été déposée par électrolyse et le fabriquant (DuPont, 2006) affirme que son épaisseur ne dépasse pas quelques nanomètres. Le film proprement dit est quant à lui obtenu par un procédé de laminage.

La connaissance des caractéristiques mécaniques du Kapton (R) est indispensable à la simulation par éléments finis du flambement des films minces. Les auteurs qui ont travaillé avec ces matériaux considèrent qu'il est isotrope et que sa loi de comportement est élastique linéaire. Toutefois, les données bibliographiques ne s'accordent pas sur la valeur du module de Young et du coefficient de Poisson de ces films polyimides. On donne quelques valeurs dans le tableau 1.2.

Tableau 1.2 — Caractéristiques mécaniques du Kapton ®		
Source	Module d'Young	Coefficient de Poisson
	E(MPa)	ν
DuPont (2006)	2800	0,34
Wong et Pellegrino (2006a)	3500	0,31
Wang et al. (2009)	4910	0, 3

Devant de tels écarts, nous avons décidé de caractériser le comportement mécanique du Kapton, mais avant de chercher à évaluer le module de Young et le coefficient de Poisson, deux questions se posent :

- La couche d'aluminium a-t-elle un impact sur le comportement mécanique du film Kapton R ? En d'autres termes, faut-il négliger la présence de l'oxyde d'alumine ou considérer que la structure de l'éprouvette est un "sandwich" aluminium-polyimide ?
- Le film obtenu par laminage est-il réellement isotrope?

Nous avons d'abord observé la couche d'oxyde d'alumine. Les résultats sont donnés à la sous-section 1.3.1, puis à la sous-section 1.3.2, l'éventuelle anisotropie du film de Kapton (R) est étudiée. Enfin, la caractérisation des modules élastiques du polyimide est effectuée en 1.3.3.

1.3.1 Étude du dépôt métallique

Nous avons observé au microscope en transmission la section d'un échantillon de Kapton \mathbb{R} VN d'une épaisseur de 50 μm . Ce film est recouvert, sur une de ses faces, d'une couche d'oxyde d'alumine que nous souhaitons étudier. Pour ce faire, on prépare un échantillon en l'enrobant sous vide avec une résine époxyde. Les clichés obtenus pendant l'observation au microscope optique sont présentés sur la figure 1.12.

La trace du liséré brillant correspond à la couche métallique. Celle-ci semble effectivement de très faible épaisseur mais nous ne sommes pas à même de la mesurer précisément à partir des observations microscopiques. En effet, la couche d'alumine n'est pas constante en raison de la diffusion des atomes d'aluminium dans le polymère. Il n'y a alors aucune assurance que l'épaisseur du liséré brillant correspond à l'épaisseur de l'aluminium. Nous avons choisi de considérer le film polyimide recouvert de sa couche d'oxyde d'alumine



Fig. 1.12 — Vue microscopique d'une section d'un film de Kapton VN aluminisé d'une épaisseur de 50 $\mu m.$

comme un ensemble homogène. N'ayant pas remarqué de dissymétrie particulière lors des manipulations ou d'écarts avec les résultats de simulations, cette question n'a pas été approfondie par la suite.

1.3.2 Essais de traction uni-axiaux.

Les produits obtenus par laminage peuvent présenter une anisotropie matérielle. Cette dernière est causée par le procédé de fabrication qui a tendance à orienter les macromolécules polymères dans une direction préférentielle.

Pour évaluer l'isotropie du Kapton (\mathbb{R}) , on a effectué des tests de traction uni-axiaux sur des bandes découpées dans un rouleau de film polyimide suivant des orientations différentes. Les dimensions de ces spécimens sont de 500 $mm \times 15 mm$ pour une épaisseur de 25 μm . En prenant la direction du laminage comme référence, nous avons prélevé trois échantillons suivant les trois directions (0°, 45°, 90°). Les résultats des tests de traction sont présentés sur la figure 1.13.

A partir de ces courbes expérimentales, on identifie le module de Young de chaque spécimen par régression linéaire. Les résultats sont donnés dans le tableau 1.3 :

On observe que les coefficients de variation du module d'élasticité calculés pour les trois spécimens d'une direction donnée restent inférieurs à 2%. En revanche, le constat est différent si l'on considère l'orientation des échantillons. Les modules de Young correspondant aux spécimens taillés à 0° et 45° sont relativement proches, alors qu'il y a un écart de 4,5% entre la moyenne des valeurs obtenues pour des échantillons découpés à 90° et celles identifiées pour les spécimens orientés à 45° .

Ces résultats montrent que le film polyimide obtenu par laminage n'est pas rigoureusement isotrope. Toutefois, au vu de la faiblesse des différences constatées entre les


Fig. 1.13 — Essais de tractions uni-axiaux réalisés sur une éprouvette de Kapton \mathbb{R} d'une épaisseur de 25 μm .

	Orientation 0°			Orientation 45°			Orientation 90°		
Spécimen	E (<i>MPa</i>)	$\begin{array}{c} \text{Coefficient} \\ \text{variation} \\ 0^{\circ} \end{array}$	Coefficient variation ensemble	E (MPa)	Coefficient variation 45°	Coefficient variation ensemble	$\begin{array}{c} \mathbf{E} \\ (MPa) \end{array}$	Coefficient variation 90°	Coefficient variation ensemble
$\begin{array}{c c}1\\2\\3\end{array}$	$3366 \\ 3416 \\ 3345$	0.28 1.2 0.9	0.78 0.7 1.4	3328 3315	0.2 0.19	1.89 2.28	3465 3424 3551	0.43 1.61 2	2.14 0.93 4.75
Moyenne	3375			3321			3480		
Moyenne totale	3392								

Tableau 1.3 — Dépouillement des tests de traction uni-axiaux.

valeurs des courbes de traction suivant l'orientation des échantillons, nous pensons qu'il est suffisant d'utiliser une loi de comportement isotrope pour la modélisation du matériau.

De même, il ressort de ces tests que la réponse du Kapton (R) à une sollicitation donnée est pratiquement linéaire pour des niveaux de déformation faibles. Lorsque ce matériau est soumis à des niveaux de déformation importants, la réponse n'est plus linéaire et il faut prendre en compte le phénomène de fluage (DuPont, 2006). Pendant les tests de caractérisation des ondulations, nous nous sommes limités à des déformations inférieures à 2%. Dans ces conditions, l'emploi d'une loi de comportement élastique linéaire est acceptable. Le comportement du film Kapton (R) est alors caractérisé par deux coefficients : le module de Young et le coefficient de Poisson.

1.3.3 Essais de traction bi-axiaux.

L'identification du module d'élasticité et du coefficient de Poisson d'un matériau quelconque est possible à partir de simples tests de traction uni-axiaux. Le module de Young est identifié sur la courbe charge vs déplacement dans la direction de traction, et le coefficient de Poisson est obtenu grâce à la déformation transverse à la direction de traction. La documentation normalisée ASTM E-132 préconise d'utiliser des extensomètres optiques ou des jauges de déformation électrique qu'il est difficile d'employer sur des structures faiblement rigides. Cet essai suppose que le champ de contrainte est homogène dans l'échantillon testé. Or, Cerda et al. (2002) ont montré que des plis se forment à la surface d'une éprouvette rectangulaire de film mince lorsqu'elle est mise en tension. L'hypothèse d'homogénéité du champ de contrainte n'est pas respectée et les essais standard ne sont donc pas adaptés aux films minces. Il faut donc utiliser un test pour lequels la mise en tension de l'éprouvette ne s'accompagne pas de la formation de plis à sa surface.

Une des techniques d'identification des propriétés matérielles de ces structures consiste à réaliser un essai de mise en pression sur une éprouvette hémisphérique (Vialettes et al., 2004). Le contour de l'échantillon est ensuite relevé grâce à une méthode de mesure optique. Une analyse inverse couplée à une simulation par éléments finis permet de trouver les coefficients d'élasticité de la structure pressurisée.

Chevalier et Marco (2004) ont cherché à caractériser le comportement des films polymères en effectuant des essais bi-axiaux, pendant lesquels ils ont mesuré le champ de déplacement dans le plan de l'éprouvette, par corrélation d'image. L'identification a été menée en faisant une analyse inverse à partir des données expérimentales et des résultats de simulation par éléments finis. Lors de cette expérience, les auteurs ont enregistré les efforts et les déplacements appliqués aux quatre extrémités de l'éprouvette. Ils ont ensuite confronté les courbes de réponse expérimentales force vs déplacement avec celles prédites par simulation. La comparaison entre les deux courbes a montré des écarts de l'ordre de 5%.

Nous avons ainsi choisi d'identifier les caractéristiques mécaniques des films Kapton (R) à partir des courbes force vs déplacement relevées lors d'un essai bi-axial. Ces données expérimentales sont comparées avec les résultats d'une simulation par éléments finis. On effectue ensuite une analyse inverse en cherchant à minimiser la norme des écarts avec les courbes expérimentales.

Pour effectuer ces tests, il convient de définir la géométrie de l'éprouvette de telle sorte qu'il n'y ait pas de formation de plis au cours de l'essai. Un schéma de la géométrie des spécimens est donné sur la figure 1.15. Le cas de charge correspond au premier trajet de chargement effectué lors de l'étude des ondulations qui est présentée à la section 1.4.1. Pour ces conditions de chargement, nous n'avons pas observé de plis. La simulation par éléments finis est effectuée avec le logiciel ABAQUS dans le cadre d'une analyse élastique linéaire plane. On trouve des détails concernant le modèle à la section 4.1. Nous donnons un aperçu des résultats sur la figure 1.14.



Fig. 1.14 — Essais de tractions bi-axiaux.

Avec cette méthode, nous avons obtenu les coefficients d'élasticité suivants : E = 3350 MPa et $\nu = 0.31$.

Ces valeurs sont relativement proches de celles proposées par Wong et Pellegrino (2006a) et on trouve une valeur du module d'élasticité comparable avec celle que nous avons obtenue lors des essais uni-axiaux ($E = 3390 \ MPa$). Cependant, la valeur du module d'élasticité $E = 2800 \ MPa$ donnée par le fournisseur DuPont (2006) est sensiblement inférieure à la nôtre. Elle correspond à la moyenne des valeurs obtenues pour des taux de déformation de 3%, 5% et 7%, alors que dans notre étude l'identification a été effectuée pour des taux de déformation inférieurs à 1%. Étant donné que la réponse du film polymère n'est pas parfaitement linéaire et qu'il a tendance à s'assouplir quand le chargement augmente, ces données sont cohérentes. En revanche, la valeur de 4910 MPa

établie par Wang et al. (2009) semble exagérément élevée.

La caractérisation du film polyimide nous amène à modéliser le comportement du matériau par une loi élastique linéaire, et à considérer que le Kapton® est isotrope et homogène. C'est le modèle que nous avons utilisé lors de l'étude numérique avec les valeurs des coefficients d'élasticité données précédemment.

Les travaux préliminaires ayant été effectués, nous allons désormais nous consacrer à la caractérisation du flambement des films minces.

1.4 Étude des ondulations sur une éprouvette soumise à un chargement bi-axial.

À travers cette étude, nous souhaitons observer les ondulations des films minces soumis à des sollicitations dans leur plan, pour constituer une base de données expérimentale utile à l'étalonnage des méthodes numériques.

La formation et l'évolution des ondulations sont étudiées sur des éprouvettes bi-axiales. Celles-ci sont testées sur le banc de traction présenté à la section 1.2 pour des trajets de chargement variés. Au cours de l'essai, les déplacements et les efforts imposés dans le plan de l'échantillon sont enregistrés. On complète ces données expérimentales par le relevé des déplacements hors plan de l'éprouvette, obtenu avec la méthode de mesure optique de projection de franges.

L'épaisseur des spécimens est une variable de nos expériences. Nous voulons étudier son influence sur le motif des plis en testant des éprouvettes de trois épaisseurs différentes. Nous allons également observer la reproductibilité d'une configuration cinématique de plis, lorsque plusieurs échantillons identiques --en termes de géométrie, de matériau et d'épaisseur- sont soumis à un même cas de chargement.

Dans ce but, nous avons effectué les mêmes manipulations sur trois spécimens identiques d'une épaisseur donnée. Au total, ce sont donc neuf échantillons de trois épaisseurs différentes que nous avons testés, pour lesquels nous présentons des résultats expérimentaux.

1.4.1 Matériel et méthodes

1.4.1.1 Les éprouvettes

La géométrie des éprouvettes que nous avons utilisées est décrite sur la figure 1.15. Elles sont réalisées en Kapton (R). Le nombre d'échantillons testés et leur épaisseur sont données dans le tableau 1.4.

Tableau 1.4 — Caractéristiques des échantillons testés.					
Épaisseur (μm)	Nombre de spécimens testés	Module de Young E (MPa)	Coefficient de Poisson ν		
125	3	3350	0,31		
50	3	3350	0, 31		
25	3	3350	0, 31		



Fig. 1.15 — Géométrie des éprouvettes.

Ces spécimens sont découpés à partir d'un plan papier à l'échelle une. Une bande de film polyimide est collée sur une table de découpe à l'aide d'un ruban adhésif. Sur ce film, on fixe le plan de l'éprouvette. Ensuite, on découpe à la fois la couche de Kapton \mathbb{R} et le modèle, en suivant au scalpel les contours de l'échantillon imprimés sur le plan (voir 1.16 a). Avec cette méthode, on peut estimer que l'intervalle de tolérance pour les cotes nominales définies sur le schéma 1.15 est de l'ordre de $\pm 1mm$.

Après la découpe de l'éprouvette, on colle des baguettes en aluminium de dimensions $300 \ mm \times 20 \ mm \times 2mm$ à chacune de ses extrémités. La dernière étape de la préparation des échantillons consiste à opacifier leur surface. Les films polyimides aluminisés sont naturellement réfléchissants, ce qui est incompatible avec la technique de mesure optique que nous employons. On pulvérise donc un produit de ressuage commercialisé comme révélateur de fissures. Suite à l'évaporation du solvant (butane-propane), la surface traitée est recouverte d'une fine couche de poudre blanche. Les particules qui la composent n'ont pas de liant entre elles, cette couche n'est pas structurelle et ne modifie pas la réponse de l'échantillon. Une vue de l'éprouvette préparée est visible sur la figure 1.16 b.

1.4.1.2 Procédure expérimentale

Les différentes étapes du protocole expérimental appliqué à nos échantillons incluent la mise en place de l'éprouvette sur le banc d'essai. Une manipulation soigneuse lors de cette étape est nécessaire pour garantir la validité des résultats qui seront observés par la suite. Il convient donc de définir une procédure reproductible pour l'ensemble des échantillons.

Pendant la mise en place de la membrane, le montage est en position horizontale. On suspend deux masses à chaque extrémité de l'éprouvette par l'intermédiaire des baguettes en aluminium. La fonction première de ces masses est de garantir la planéité de la surface



Fig. 1.16 — Préparation d'une éprouvette.

initiale de notre échantillon, ce qui nécessite de la mettre légèrement en tension. La masse totale des poids accrochés à chaque extrémité de l'éprouvette est donnée sur le tableau 1.5. Elle dépend de l'épaisseur, de manière à obtenir la même carte de contrainte initiale dans l'échantillon, quelle que soit son épaisseur.

Épaisseur (μm)	Masse des contrepoids (g)
125	1000
50	400
25	200

Tableau 1.5 — Valeurs des masses utilisées pour la mise en tension initiale de l'éprouvette

Les poids sont des bouteilles en plastique remplies d'eau que nous avons pesées avec une balance de précision à ± 1 g. Ensuite, l'éprouvette est pincée puis serrée entre les mors supérieurs et inférieurs. Ces différentes étapes sont illustrées sur la figure 1.17.

Une fois l'échantillon fixé dans le banc de traction, on le bascule en position verticale. Les mors sont pilotés en déplacement, et on effectue les trajets de chargement notés sur le tableau 1.6 où i = 1 à 7. On utilise ici les notations des déplacements δ_i définies sur la figure 1.15.

Pour un déplacement horizontal δ_1 donné on impose un déplacement vertical δ_2 de 0 à 3 mm. Ces cas de chargement sont décrits dans le tableau 1.6 et pour chacun d'eux on effectue un cartographie des déplacements hors du plan initial de l'éprouvette.

1.4.2 Mesure du déplacement hors plan.

Le relevé de la forme des ondulations est effectué grâce à la technique de projection de franges (Robinson et Reid, 1993; Yoshizawa, 2009). Cette procédure est basée sur l'analyse



Fig. 1.17 — Mise en place des éprouvettes.

Chemin de chargement i					
$\delta_1 mm$	$\delta_2 mm$				
$-[0.5 \times (i-1)]$	0				
-[0.5 × (<i>i</i> - 1)]	0.5				
-[0.5 × (<i>i</i> - 1)]	1.0				
-[0.5 × (<i>i</i> - 1)]	1.5				
-[0.5 × (<i>i</i> - 1)]	2.0				
-[0.5 × (<i>i</i> - 1)]	2.5				
-[0.5 × (<i>i</i> - 1)]	3.0				

de la déformation des franges projetées sur la surface d'étude qui joue le rôle d'un écran. Les franges sont affichées grâce à un vidéoprojecteur standard. C'est une méthode de mesure de champ sans contact qui fournit la flèche z en tout point de la surface déformée. Pendant les essais, nous avons pris des photographies de l'éprouvette en "croix" à chaque pas de chargement (i = 1..7). Ces photographies (voir1.18) nous permettent de numériser en trois dimensions l'intégralité de la surface du spécimen testé.



Fig. 1.18 — Exemple de photographie de l'éprouvette prise au cours du chargement.

1.4.2.1 Analyse de la déformation des franges.

Pour mesurer les ondulations induites par le flambement local de l'éprouvette, deux photographies des franges projetées à sa surface sont nécessaires : une image correspondant à la configuration initialement plane, et l'autre de la surface ondulée. La déformation des franges entre ces deux états est directement reliée à la flèche de la structure et c'est cette propriété que nous allons utiliser.

Un motif de franges verticales formant une grille est projeté sur le film polyimide. L'axe de projection du vidéoprojecteur forme un angle noté θ avec l'axe optique du capteur CCD. L'intensité du signal lumineux relevé sur la surface de l'éprouvette s'exprime :

$$I(x,y) = I_0(x,y) \left[1 + \gamma(x,y) \cos(\frac{2\pi x}{p}) \right]$$

$$(1.1)$$

où $I_0(x, y)$ est l'intensité moyenne du signal, $\gamma(x, y)$ le contraste, p est le pas de la grille et où l'on suppose que les franges sont alignées avec l'axe y.

Lorsque des plis apparaissent à la surface de l'échantillon, celle-ci n'est plus plane.

Comme la surface déformée joue le rôle d'un écran, la grille projetée se déforme en fonction de la flèche de la surface z et de l'angle de projection θ (voir figure 1.19).



Fig. 1.19 — Principe de la mesure par projection de franges.

Le déplacement apparent subi par une frange dans le plan de l'éprouvette est donné par :

$$u_x = z(x, y) \tan \theta \tag{1.2}$$

Les distorsions des traits lumineux entraînent une variation locale du pas p des franges. Cette modification est assimilable à un déphasage du signal $\varphi(x, y)$. L'intensité du signal lumineux projeté sur la surface déformée devient alors (Surrel et Surrel, 1998) :

$$I(x,y) = I_0(x,y) \left[1 + \gamma(x,y) \cos(\frac{2\pi x}{p} + \varphi(x,y)) \right]$$
(1.3)

où :

$$\varphi(x,y) = \frac{2\pi tan\theta}{p} z(x,y) \tag{1.4}$$

La carte de phase $\varphi(x, y)$ d'une photographie donnée est obtenue en réalisant une transformation de Fourrier puis une transformation de Fourrier inverse. Dans ce but, le traitement des images a été effectué grâce au logiciel Fringe Analysis®.

Si l'on désigne par $\varphi(x, y)$ la carte de phase relevée pour une surface dans sa configuration déformée, et par $\varphi_0(x, y)$ celle qui correspond à la configuration de référence, la différence entre les deux s'écrit :

$$\Delta\varphi(x,y) = \varphi(x,y) - \varphi_0(x,y) = \frac{2\pi x}{p} z(x,y) tan\theta$$
(1.5)

La différence de phase contient l'information qui nous intéresse : le déplacement hors plan z(x, y) de l'éprouvette en tout point de la surface. La modulation du signal (modulo 2π) introduite au cours du calcul nécessite, pour retrouver la continuité du signal $\Delta\varphi(x, y)$, une opération de démodulation. Celle-ci est réalisée à l'aide de l'un des algorithmes du logiciel commercial Fringe Analysis®. Les différentes étapes du traitement des photographies sont résumées sur la figure 1.20.



Fig. 1.20 — Traitement des photographies permettant la mesure du déplacement hors plan grâce à l'analyse de la déformation des franges

Pour démoduler la différence de phase et retrouver la flèche z(x, y) correspondante, la connaissance du paramètre θ –i.e. l'angle entre l'axe optique du vidéo-projecteur et du capteur CCD– est nécessaire. Cet angle est pratiquement impossible à déterminer avec précision. Plutôt que de le mesurer, nous avons opté pour la calibration de la mesure. La méthode de calibration la plus répandue a été présentée par Zhang et al. (2004). Elle consiste à modifier de manière incrémentale la distance entre le capteur CCD et le plan de référence, afin de déterminer le coefficient reliant la différence de phase et le déplacement hors plan z(x, y). Dans cette étude, nous avons employé des cales étalons de hauteur connue que nous avons fixées dans le plan de référence du banc de traction. En jouant sur la valeur du coefficient θ on ajuste la valeur du déplacement z(x, y) mesurée par la méthode optique sur la hauteur réelle de la cale.

1.4.2.2 Estimation de la résolution Δz de la mesure optique

Surrel et Surrel (1998) proposent de calculer la résolution de la mesure optique par projection de franges grâce à la formule suivante :

$$\Delta z = \frac{L}{RN\tan(\theta)} \tag{1.6}$$

où L est la longueur de l'échantillon suivant l'axe x, que l'on suppose perpendiculaire à l'orientation de la grille de franges, N est le nombre de franges et R est la résolution de la phase — i.e. le nombre de niveaux de gris exploitable par le logiciel d'analyse de franges-. Les paramètres expérimentaux correspondant aux mesures que nous avons réalisées sont résumés dans le tableau 1.7. Avec ces valeurs, la résolution de nos mesures optiques est estimée à 25 μm .

 Tableau 1.7 — Paramètres expérimentaux pour la mesure optique

 An ele de englisation $\theta_{i}(deg)$

Angle de projection θ (deg) 40	
Nombre de pixels 45	00×3000
Nombre de franges N 28	0
Résolution de la phase R 10	0
Longueur du champ d'observation (mm) 60	0

L'atout majeur de la méthode de projection de franges est qu'elle offre la possibilité de choisir la résolution axiale Δz .

Si une résolution accrue est nécessaire, différentes solutions sont envisageables :

- augmenter l'angle θ
- réduire la taille du champ d'observation
- augmenter le nombre de franges projetées sur la surface d'étude

Cependant, si l'angle θ est trop important, des zones d'ombres peuvent apparaître derrière les plis de plus grande amplitude. Surrel et Surrel (1998) préconisent de définir le nombre de franges N de telle sorte qu'il y ait au minimum quatre pixels par frange. Ici, nous avons environ 12 pixels par frange.

1.4.3Résultats expérimentaux.

Cette partie est consacrée à la présentation détaillée des résultats expérimentaux concernant l'évolution de la forme d'une éprouvette soumise à un chargement dans son plan. Nous avons observé le mécanisme de création des plis puis la reproductibilité d'une configuration cinématique d'ondulation.

1.4.3.1 Motif des ondulations.

Le motif typique des plis formés à la surface d'un échantillon (voir figure 1.21) laisse apparaître des déplacements hors plan symétriques par rapport aux axes x et y, avec trois

zones d'instabilités différentes. On note la présence de zones détendues à proximité des découpes circulaires. Dans la partie centrale se trouvent des plis « principaux » parfaitement parallèles à la direction de tension y. Enfin, on observe des zones de transition entre les parties détendues et les « plis principaux ». On les qualifie de plis secondaires par analogie avec la dénomination proposée par Wang et al. (2009).



Fig. 1.21 — Exemple de carte expérimentale des déplacements hors plan (épaisseur de l'échantillon : 50 μm).

Le motif des ondulations présenté sur la figure 1.21 est générique. Plus spécifiquement, la présence des zones détendues et des plis secondaires dépend du trajet de chargement.

Des exemples de cartes des déplacements hors plan sont présentés sur la figure 1.22. La représentation matricielle montre une grande variété de configurations géométriques des ondulations. La multiplicité des configurations est liée à la stratégie de contrôle en déplacement de l'essai avec deux axes indépendants. Les sept trajets de chargement étudiés pour chacun des neuf spécimens forment une base de données expérimentale conséquente car chaque cas de chargement constitue un cas de validation numérique possible.

1.4.3.2 Modification de la forme des ondulations au cours du chargement.

La géométrie des plis est examinée en traçant des sections de l'éprouvette déformée, en particulier par la représentation du déplacement hors plan z le long de l'axe x. pour différentes valeurs de y. Les courbes 1.23 b) et 1.23 c) montrent des exemples de coupes transversales obtenues pour le cas de chargement ($\delta_1 = -0.5 \ mm$ et $\delta_2 = 3 \ mm$). La section centrale (y = 0), fournit les caractéristiques des plis principaux, alors que les sections à $y = \pm 150 \ mm$ procurent des données concernant les plis secondaires et les zones détendues.

Pendant les expériences, plusieurs mécanismes de formation et de disparition des ondulations ont été identifiés. Tout d'abord, en fixant le déplacement négatif (δ_1) , et en



Fig. 1.22 — Carte des déplacement hors plan observées pour différents paramètres (δ_1, δ_2) lors d'essais menés sur un échantillon d'un épaisseur de 25 μm .



Fig. 1.23 — Exemple de dépouillement des résultats expérimentaux (épaisseur de l'échantillon : $25 \ \mu m$).

augmentant graduellement le déplacement de tension (δ_2), nous avons observé la création soudaine de plis par la division d'un pli existant. La figure 1.27 donne un exemple de ce phénomène. Cette modification brutale de la configuration cinématique des plis, appelée « saut de mode », a déjà été rencontrée lors de l'étude du flambement des plaques métalliques minces (Stein, 1959). Dans le cas particulier de l'étude des films minces en tension, l'observation du saut de mode a été rapportée par Wong et Pellegrino (2006a).

Nous avons également observé la création de plis secondaires dans les zones initialement détendues. Dans certains cas, ils se rejoignent pour former des plis principaux. Ce processus d'évolution des plis secondaires a été décrit par Wang et al. (2009).

Le mécanisme de création de plis le plus fréquent est celui de la division soudaine d'un pli existant, lorsque le déplacement de tension et donc l'effort de tension augmente.

1.4.3.3 Le mécanisme de division des plis.

La division d'un pli existant résulte de la bifurcation à partir d'une situation d'équilibre de deux forces opposées.



Fig. 1.24 — Évolution de la forme d'un pli au cours de sa division.

Un pli peut être schématisé par une surface présentant une double courbure. Les directions de courbures principales coïncident avec la direction longitudinale du pli (en tension) et la direction transversale (en compression). Le long de la direction longitudinale, la contrainte de tension agit comme une force de rappel. Elle tend à ramener le pic du pli dans son plan initial (voir figure 1.24). A l'inverse, la contrainte de compression le long de la direction transversale a tendance à mettre la structure en flexion et l'empêche de revenir dans sa position initialement plane. Une fine bande d'un film ondulé ainsi que les efforts qui lui sont imposés ont été dessinés sur le schéma 1.25.

Cet équilibre est maintenu tant que la charge critique de flambement de cette fine branche n'est pas atteinte. Lorsque l'on accroît le chargement de tension, l'amplitude des plis augmente. Une explication possible de ce phénomène est qu'il résulte de la contraction du film par effet Poisson. Quand un pli atteint une amplitude critique, il s'affaisse et entraîne une nouvelle configuration géométrique. La surface peut alors présenter un pic et



Fig. 1.25 — Bande de film ondulé avec les efforts qui lui sont imposés.

un creux, si le flambement est asymétrique, ou deux pics et un creux, si le flambement est symétrique comme illustré par la figure 1.26.



Fig. 1.26 — Flambement d'un pli existant.

Afin d'observer le mécanisme de création des plis par division, une expérience spécifique a été réalisée sur un échantillon de 125 μm . Le relevé des plis a été effectué juste avant puis juste après le flambement d'un pli. Les courbes 1.27 montrent, pour les conditions aux limites $\delta_2 = 0.08 \ mm$, la division du pli central qui s'affaisse avec l'accroissement du déplacement de tension de $\delta_2 = 0.08 \ mm$ à $\delta_2 = 0.09 \ mm$.

La superposition des deux courbes correspondant aux coupes transversales de la surface ondulée, juste avant et après l'affaissement du pli central, indique clairement que seul ce dernier a été affecté par le flambement. La création des plis est expliquée ici comme un « saut de mode local », ou flambement local d'un pli existant. Ensuite, après la création du nouveau pli, lorsque l'on augmente encore le déplacement de tension jusqu'à $\delta_2 = 0.15 mm$, on observe sur la figure 1.27 b, l'évolution des ondulations en termes d'amplitude et de répartition spatiale. Néanmoins, jusqu'à ce qu'un pli existant flambe à nouveau, l'évolution du motif des ondulations s'effectue avec un nombre de plis constant.



Fig. 1.27 — Observation expérimentale du mécanisme de création des plis par division.(épaisseur de l'échantillon : $125 \ \mu m$).

1.4.3.4 Reproductibilité de la configuration cinématique des ondulations.

En testant trois éprouvettes identiques dans les mêmes conditions expérimentales, nous avons vérifié la reproductibilité d'un motif de plis donné. Cette étude expérimentale a prouvé que des manipulations similaires – i.e. matériau, épaisseur, géométrie et cas de chargement quasi identiques — peuvent conduire à des configurations cinématiques de plis différentes d'un échantillon à l'autre. La figure 1.28 représente la section centrale de deux éprouvettes de 50 μm soumises au cas de chargement $\delta_1 = -3 mm$ et $\delta_2 = 1 mm$. Pour l'échantillon 1, le motif des plis est symétrique alors que la surface de l'échantillon 2 présente une géométrie d'ondulation asymétrique. Le nombre de plis diffère également. Si chaque extremum local compte pour un pli (à l'exception de l'affaissement local du plus grand pli de l'échantillon 1), le spécimen 1 présente 17 plis contre 16 pour le spécimen 2.

Wong et Pellegrino (2006a) ainsi que Balmforth et al. (2008), ont relevé les plis formés à la surface d'éprouvettes rectangulaires en cisaillement soumises à des cycles de chargement, déchargement .Ils ont eux aussi obtenu des motifs de plis différents pour des conditions aux limites identiques. Leurs observations peuvent être expliquées d'une part par la boucle d'hystérésis résultant du déchargement sur une branche d'équilibre instable et d'autre part, du fait de la plastification de l'échantillon après le premier trajet de chargement (Wong et Pellegrino, 2006a).

Dans le cas de cette étude, l'incertitude liée à l'obtention d'une géométrie de plis donnée, est causée par les très faibles perturbations des conditions expérimentales, telles que la flèche ou les conditions aux limites initiales de l'éprouvette. Pour appuyer ces propos, la géométrie du mode de flambement initial qui survient lorsque l'on impose un



Fig. 1.28 — Comparaison entre deux motifs d'ondulations obtenues pour des conditions expérimentales quasi identiques.

déplacement négatif δ_1 , a été noté. Deux modes différents ont été observés : un mode symétrique et un mode asymétrique. Un exemple des deux géométries de la surface de l'éprouvette correspondant à ces modes a été relevé expérimentalement. Les courbes sont données sur la figure 1.29.

Le tableau 1.8 résume la géométrie des ondulations initiales observées pour chacune des trois éprouvettes d'une épaisseur de 125 μm . Des résultats similaires sont présentés dans le tableau 1.9 pour les spécimens d'une épaisseur de 50 μm . Toutefois, pour cette épaisseur, la symétrie du mode de bifurcation a été relevée pour un déplacement de tension de $\delta_2 = 0.5 mm$. Cela permet de stabiliser la forme de la surface, qui est extrêmement chaotique, lorsque le déplacement vaut $\delta_2 = 0 mm$, à cause de la faible rigidité en flexion et en compression du film polyimide.

Le tableau 1.8 montre que le mode asymétrique a été observé plus fréquemment que le symétrique – quinze fois pour l'asymétrique contre trois fois pour le symétrique–. La déformée symétrique correspond au premier mode de flambement obtenu lors de l'analyse numérique, comme expliqué à la section 4.1. Concernant les spécimens d'une épaisseur de $50\mu m$, le tableau 1.9 fait état de douze apparitions du mode asymétrique contre six apparitions du symétrique. Il semble donc que l'incertitude, liée à l'obtention d'une géométrie de plis donnée, augmente lorsque l'épaisseur de la structure décroît.

Chemin de chargement i	Spécimen 1	Spécimen 2	Spécimen 3
2	$sym \acute{e} trique$	asymétrique	asymétrique
3	asymétrique	asymétrique	$sym \acute{e} trique$
4	asymétrique	asymétrique	asymétrique
5	$sym \acute{e} trique$	asymétrique	asymétrique
6	asymétrique	asymétrique	asymétrique
7	asymétrique	$\operatorname{asym}\acute{e}trique$	asymétrique

Tableau 1.8 — Géométrie du mode de bifurcation initial (épaisseur du spécimen : $125 \ \mu m$)

Chemin de chargement i	Spécimen 1	Spécimen 2	Spécimen 3
2	asymétrique	asymétrique	$sym \acute{e} trique$
3	$sym \acute{e} trique$	$sym \acute{e} trique$	asymétrique
4	asymétrique	asymétrique	asymétrique
5	asymétrique	asymétrique	asymétrique
6	$sym \acute{e} trique$	asymétrique	$sym \acute{e} trique$
7	$sym \acute{e} trique$	asymétrique	asymétrique

Tableau 1.9 — Géométrie du mode de bifurcation initial (épaisseur du spécimen : 50 μm)



Fig. 1.29 — Les deux configurations de plis observées expérimentalement (épaisseur du spécimen : 125 μm).

Néanmoins, la configuration cinématique des plis formés à la surface d'une éprouvette n'est pas seulement dictée par son mode de flambement initial. Lorsque l'on impose les mêmes conditions de chargement à deux éprouvettes présentant, à un moment donné, une géométrie déformée quasi-similaire, leur forme finale peut être différente. Plusieurs modes de flambement peuvent se produire en parcourant le chemin de chargement, c'est-à-dire en augmentant le déplacement δ_2 . Un exemple est donné sur la figure 1.30. Dans cet exemple, les deux spécimens présentent des motifs de plis quasi-similaires pour les conditions aux limites $\delta_1 = -2.5 \ mm$ et $\delta_2 = 0.5 \ mm$. Puis lorsque $\delta_1 = -2.5 \ mm$ et $\delta_2 = 3 \ mm$, la surface du spécimen 1 présente un pli de plus que celle du spécimen 2.

Le motif des ondulations est fortement dépendant des conditions expérimentales. De très faibles perturbations de celles-ci peuvent affecter la géométrie des plis. Lors d'une analyse numérique, effectuer des comparaisons entre des résultats de simulation et des observations expérimentales n'a de sens que si l'on prend en compte ce phénomène. Il faut garder à l'esprit que la géométrie des ondulations observée expérimentalement n'est qu'une des configurations que la structure peut potentiellement atteindre. Prédire la configuration particulière des ondulations qui va se produire à la surface d'une structure mince pour un



Fig. 1.30 — Évolution des ondulations pour deux spécimens présentant initialement la même déformée (épaisseur du spécimen : 50 μm).

cas de chargement donné semble incertain.

1.4.4 Analyse de la géométrie des ondulations.

La sensibilité du motif des plis aux conditions initiales nous conduit à étudier des caractéristiques invariantes entre les différentes configurations cinématiques observées pour un même cas de chargement. Le nombre, la longueur d'onde et l'amplitude des plis sont représentés en fonction de la valeur des paramètres de chargement. Ces résultats synthétiques peuvent être utilisés comme données de référence pour l'étalonnage des méthodes numériques. A cette fin, nous proposons également d'utiliser les « courbes enveloppes » des plis. Enfin à l'aide de ces résultats, l'influence de l'épaisseur des spécimens est discutée.

1.4.4.1 Les "courbes enveloppes" des plis.

Pour éviter de prendre en considération l'incertitude concernant la configuration cinématique des plis, des " courbes enveloppes" ont été utilisées pour représenter la forme de la surface ondulée.

Tout d'abord, donnons la démarche permettant de les tracer. On suppose dans un premier temps que le signe (positif ou négatif) du déplacement hors plan est totalement aléatoire et n'impacte pas les propriétés géométriques des plis. On ne considère alors que la valeur absolue de z. Ensuite, les maxima locaux correspondant aux crêtes des plis sont identifiés. La courbe enveloppe est tracée en reliant ces points entre eux.

Afin de ne pas étudier les zones détendues dont la forme est quelque peu chaotique, la zone d'intérêt est limitée à la partie centrale $(-150 \ mm \ge x \ge 150 \ mm)$. La figure 1.31



Fig. 1.31 — Exemple de courbe enveloppe reliant les maxima de la section centrale (épaisseur du spécimen : 125 μm).

montre comment la section centrale visible sur la figure 1.31 a) a été traitée pour obtenir la courbe enveloppe présentée sur la figure 1.31 b).

Les courbes enveloppes obtenues pour un cas de chargement donné sont comparées en superposant les neuf courbes sur le même graphique. Des exemples de courbes enveloppes sont visibles sur les figures 1.32 et 1.33.



Fig. 1.32 — Courbes enveloppes expérimentales obtenues pour $\delta_1 = -0.5 mm$ et $\delta_2 = 3 mm$.

Les courbes enveloppes correspondant aux trois spécimens d'une même épaisseur sont très proches. Cette constatation permet de faire des comparaisons entre le résultat d'une seule configuration cinématique obtenue par le calcul numérique et nos résultats expérimentaux. De plus, on remarque des différences notables entre les courbes enveloppes des échantillons d'épaisseur différente. Les figures 1.32 et 1.33 montrent que l'amplitude des courbes enveloppes décroît lorsque l'épaisseur du film diminue.



Fig. 1.33 — Courbes enveloppes expérimentales obtenues pour $\delta_1 = -3 mm$ et $\delta_2 = 3 mm$.

1.4.4.2 Évolution des propriétés géométriques des ondulations.

Pour examiner la modification des propriétés géométriques des plis sous chargement, l'évolution du nombre, de l'amplitude et de la longueur d'onde des plis a été tracée pour les spécimens d'une même épaisseur. Les surfaces de réponse sont présentées sur les figures 1.34, 1.35 et 1.36 respectivement pour les éprouvettes d'une épaisseur de 125 μ , 50 μ m et 25 μ m.

Les résultats présentés dans ces graphiques sont obtenus en faisant la moyenne des valeurs relevées sur les trois spécimens d'une épaisseur donnée. Le nombre de plis est défini en comptabilisant les maxima et les minima locaux de la section transversale y = 0 dans la zone $(-150 \ mm \le x \le 150 \ mm)$. La longueur d'onde correspond à la distance entre deux maxima de cette même courbe et l'amplitude maximale est le maximum des extrema locaux en valeur absolue. Pour les mêmes raisons que celles que nous avons invoquées lors du traitement des courbes enveloppes, la zone d'étude est limitée à la partie centrale $(-150 \ mm \le x \le 150 \ mm)$.

On peut noter que l'amplitude maximale des plis et leur longueur d'onde décroissent lorsque l'on augmente le chargement de tension δ_2 . Cependant, on ne peut pas tirer le même genre de conclusion concernant l'évolution du nombre de plis. Les données issues du trajet de chargement $\delta_1 = -0.5 \ mm$ montrent clairement que le nombre de plis atteint un maximum, avant de décroître lorsque δ_2 augmente.

Au début du test, avant de commencer à appliquer le chargement de tension, la surface de l'éprouvette est caractérisée par la présence d'un unique pli présentant une amplitude et une longueur d'onde importantes. Lorsque le chargement de tension est appliqué progressivement, de nouveaux plis sont créés par division des plis existants. C'est pour cela que l'on observe une diminution de la longueur d'onde des plis. Par ailleurs, l'amplitude des plis tend à s'homogénéiser à la surface de l'échantillon, entraînant la décroissance de l'amplitude maximale des plis.

1.4. Étude des ondulations sur une éprouvette soumise à un chargement 46 bi-axial.



Fig. 1.34 — Synthèse des résultats expérimentaux concernant les échantillons d'une épaisseur de 125 μm .



Fig. 1.35 — Synthèse des résultats expérimentaux concernant les échantillons d'une épaisseur de 50 μm .



Fig. 1.36 — Synthèse des résultats expérimentaux concernat les échantillons d'une épaisseur de $25 \ \mu m$.

L'explication de l'évolution du nombre de plis doit prendre en compte la géométrie particulière de l'éprouvette. En raison de la forme du spécimen, la surface des zones en compression diminue lorsque l'on accroît le chargement de tension. Par conséquent, on observe d'abord la création de plis qui se resserrent ensuite dans la partie centrale de l'éprouvette. Dans certains cas, les zones détendues et les plis secondaires disparaissent totalement (voir la figure 1.22 où $\delta_1 = -0.5 mm$ et $\delta_2 = 3 mm$).

1.4.4.3 Influence de l'épaisseur de l'échantillon sur les caractéristiques des ondulations.

L'étude de l'influence de l'épaisseur sur la géométrie des plis est menée en superposant sur un même graphique les données issues des expériences réalisées sur les échantillons de trois épaisseurs différentes. L'évolution des caractéristiques géométriques est tracée en augmentant le chargement δ_2 , pour un déplacement δ_1 fixé.

Des exemples sont donnés sur les figures 1.37, 1.38 et 1.39 avec $\delta_1 = -3 mm$. Elles concernent respectivement l'évolution du nombre, de la longueur d'onde et de l'amplitude des plis.

On remarque que le nombre de plis décroît lorsque l'épaisseur du spécimen augmente. L'amplitude et la longueur d'onde des plis suivent elles aussi la même évolution.

L'énergie de flexion d'une structure mince modélisée par une coque est pondérée par son épaisseur au cube h^3 . Il est donc moins pénalisant pour une éprouvette mince de former de nombreuses ondulations que pour une structure plus épaisse. Cette remarque laisse présager que plus l'épaisseur du film est faible, plus le comportement de la structure se rapproche de celui d'une "membrane pure". Malgré tout, le comportement de "membrane pure" n'a pas de réalité physique dans le cadre de l'étude des films minces, puisque la rigidité de flexion est toujours présente, aussi faible soit-elle.



Fig. 1.37 — Nombre moyen de plis formés dans la partie centrale de spécimens de différentes épaisseurs.

Dans le chapitre 3, une revue des travaux dédiés à prédiction analytique ou numérique du phénomène d'ondulation des films minces est présentée. Un certain nombre d'entre eux



Fig. 1.38 — Longueur d'onde moyenne des plis formés dans la partie centrale de spécimens de différentes épaisseurs.



Fig. 1.39 — Amplitude moyenne des plis formés dans la partie centrale de spécimens de différentes épaisseurs.

ne prennent pas en compte l'épaisseur de la structure. Or, il apparaît ici que même pour des structures très fines, cette donnée est fondamentale. En effet, c'est l'énergie de flexion et donc l'épaisseur, conjointement avec la tension dans le plan, qui détermine la forme des plis.

1.4.5 Bilan de l'étude des ondulations.

Dans cette section, les résultats d'expériences menées sur des éprouvettes bi-axiales de géométrie simple sont présentés. Pour chaque cas de chargement, un relevé complet de la géométrie de la surface est effectué grâce à la méthode optique d'analyse de franges. On propose ainsi des données détaillées telles que le nombre, l'amplitude et la longueur d'onde des plis. À la différence des travaux précédents, les expériences ont été réalisées en considérant trois paramètres d'étude : deux paramètres cinématiques et l'épaisseur des éprouvettes. On a également mis l'accent sur l'étude de la reproductibilité d'un motif de plis donné pour des spécimens identiques soumis à des conditions de chargement quasi identiques – i.e aux incertitudes expérimentales près –. Les résultats marquants de cette campagne d'essais sont les suivants :

- Le mécanisme de création des plis par division a été observé expérimentalement. La création d'un pli est expliquée comme un « saut de mode local », ou le flambement local d'un pli existant.
- La configuration cinématique des plis formés à la surface d'un film mince soumis à des conditions de chargement quasi identiques n'est pas unique. L'étude numérique présentée à la section 4.1 permet d'expliquer la non unicité de la réponse. On montre par l'analyse des modes de flambement que les différentes configurations cinématiques correspondent à des états d'équilibre issus de branches de bifurcation distinctes.

1.5 Étude des ondulations sur une éprouvette découpée en son centre.

En parallèle de la création d'une base de données, le dispositif d'essai a été conçu pour tester des concepts ou des démonstrateurs de structures spatiales. Parmi les applications potentielles des films polyimide, on trouve des instruments optiques. Certains d'entre eux, notamment la lentille de Fresnel, présentent des découpes internes. Or, à ce jour, il n'existe pas de données expérimentales concernant l'étude de ce type de structures.

Le test d'une grille de Fresnel, même simplifiée, semblait difficilement réalisable puisque la présence des découpes complique énormément la manipulation des échantillons. Nous avons alors envisagé d'effectuer des essais sur une éprouvette ne présentant qu'une découpe interne en forme de carré. L'étude de cette structure simplifiée est intéressante à double titre. Elle procure un cas de validation supplémentaire pour l'étalonnage des méthodes d'analyse numérique. Puis, d'un point de vue expérimental, elle permet d'établir une démarche visant à tester des concepts de lentilles fabriqués à partir de film ajouré.

1.5.1 Matériel et méthodes.

1.5.1.1 Éprouvette.

Les méthodes et les outils d'essai employés dans cette étude sont les mêmes que ceux utilisés lors des essais précédents. Seuls les paramètres modifiés sont détaillés. Les tests ont été effectués sur un seul spécimen réalisé en Kapton \mathbb{R} VN d'une épaisseur de 50 μm . Sa géométrie est décrite sur la figure 1.40.



Fig. 1.40 — Géométrie de la membrane ajourée.

La définition de la découpe centrale a fait l'objet d'une étude numérique préalable pour déterminer sa forme et sa taille.

La taille du motif a été choisie pour occuper la zone centrale de l'éprouvette dans laquelle les contraintes principales σ_I et σ_{II} sont uniformes et positives. Une analyse élastique linéaire plane effectuée avec l'élément COQ4 du code CASTEM a permis d'obtenir les cartes de contraintes principales pour un déplacement imposé $\delta_1 = 0 mm$ et $\delta_2 = 5 mm$ (voir figure 1.41).

Ces résultats de simulations montrent l'absence de zone en compression dans l'éprouvette, ce qui explique que l'on n'observe pas de plis à la surface de l'échantillon quand on le soumet au premier trajet de chargement défini à la section 1.4. Dans la partie centrale de la structure, les contraintes sont pratiquement uniformes alors qu'il existe des disparités importantes dans le voisinage des découpes qui sont liées aux effets de bord. La taille de la découpe de 40 $mm \cdot 40 mm$ permet de s'affranchir des effets de couplage entre les effets de bord liés aux contours du spécimen et ceux occasionnés par le motif de découpe interne. Ici, seule l'influence du motif de découpe sur son voisinage est observée.

Enfin, la forme de la découpe a été choisie en effectuant des tests numériques préliminaires avec l'algorithme de gradient que nous présentons à la section 3.3. Le motif carré assure



Fig. 1.41 — Carte de contraintes principales obtenues en soumettant une éprouvette de $50\mu m$ au cas de chargement $\delta_1 = 0 mm$ et $\delta_2 = 5 mm$.

la présence de plis à la surface de l'éprouvette lors de sa mise en tension, ce qui n'est pas le cas par exemple lorsque la découpe est circulaire.

1.5.1.2 Procédure expérimentale.

À l'instar des spécimens précédents, l'éprouvette présentée sur la figure 1.40 est taillée au scalpel à partir d'un plan à l'échelle une. Cependant, une fois que le motif central est découpé, on le remet en position et on le fixe à l'aide d'un ruban adhésif sur la face du film qui est cachée lors de la mesure (voir figure 1.42 a).



Fig. 1.42 — Mise en place de l'éprouvette ajourée.

De cette manière, on manipule un spécimen homogène et la mise en place de l'échantillon est identique à celle décrite dans la partie 1.4.1.2. L'éprouvette ne présente pas initialement de découpe et cela permet de disposer d'un plan de référence pour la mesure optique. Ensuite, on impose à l'éprouvette le cas de chargement $\delta_1 = 1 mm$ et $\delta_2 = 1 mm$ afin de rigidifier la structure, puis on enlève l'adhésif et la partie centrale. Enfin, on relâche la tension pour revenir à l'état initial $\delta_1 = 0 mm$ et $\delta_2 = 0 mm$. L'échantillon est alors soumis à un unique trajet de chargement : $\delta_1 = 0 mm$ et $\delta_2 = 0 mm$ à 5 mm avec un pas de 1 mm.

L'autre problème que posent les expérimentations sur les structures ajourées concerne la mesure optique. La méthode de projection de franges permet d'obtenir le déplacement d'un point hors du plan initial de l'échantillon, mais pas le déplacement d'un point dans son plan. Pour contourner cette difficulté et suivre la déformation des bords du motif de découpe, il faut identifier son contour. Sur notre structure d'étude, on peut envisager de le relever manuellement, mais l'imprécision et la lenteur de cette procédure nous a amené à l'automatiser.

Un plan peint en noir est placé derrière l'éprouvette, et pour chaque cas de chargement, on prend une photographie des franges et un cliché en lumière blanche. La surface de l'échantillon apparaît alors d'une couleur plus claire que son contour (voir figure 1.42 b). On applique ensuite un filtre binaires à cette image en fixant un seuil de niveau de gris correspondant à la partie la plus sombre de la surface de l'échantillon. On obtient alors un masque utilisé par le logiciel d'analyse de franges. La zone blanche de l'image correspond à la partie de la photographie traitée par analyse de franges, alors que la couleur noire définit les zones d'exclusion de la mesure.

1.5.2 Résultats expérimentaux.

Après le dépouillement des résultats, on obtient la carte de déplacements hors plan visible sur la figure 1.43.

On remarque que les plis sont concentrées dans le voisinage du motif de découpe. Les bords supérieurs et inférieurs de ce dernier ont "fléchi" alors que les bords latéraux sont restés droits. Autour du pli principal, on observe la formation de plis secondaires d'une amplitude de quelques dizaines de microns. Pour étudier plus en détail, le flambement du motif de découpe, on trace une coupe longitudinale de l'éprouvette sur la figure 1.44.

Ce profil est parfaitement asymétrique, la flèche maximale, d'environ 3 mm est localisée au niveau des bords libres inférieur et supérieur. Le flambement asymétrique des bords correspond au premier mode de bifurcation de la structure prédit par la simulation numérique.

L'étude de l'éprouvette ajourée est complétée avec l'analyse par éléments finis présentées à la section 4.2. Les essais menés sur cette géométrie clôturent notre partie expérimentale.

1.6 Conclusion de l'étude expérimentale.

L'objectif principal de ces travaux expérimentaux était la constitution d'une base de données expérimentale destinée à la validation des méthodes numériques du flambement



Fig. 1.43 — Carte expérimentales des déplacements hors plan.



Fig. 1.44 — Coupe longitudinale (x = 0 mm) de l'éprouvette ajourée.

des films minces. Un travail conséquent en amont a été nécessaire pour établir un cahier des charges puis concevoir un dispositif d'essai dédié à l'étude de ces structures. Des tests ont ensuite été menés sur des éprouvettes de géométrie simple permettant, en plus de la base de données, d'obtenir des résultats importants :

- L'identification du mécanisme de création et d'évolution des plis.
- L'observation de la non unicité de la réponse d'une structure à des sollicitation quasi-identiques en termes de configuration cinématique des plis.

Au total, pour les éprouvettes de géométrie simple, nous disposons de données exploitables sur les ondulations, issues de 36.9 = 324 cartes de déplacement hors plan provenant de 9 échantillons de 3 épaisseurs différentes. Cette base de donnée est extrêmement fournie et pour remplir les objectifs initiaux de l'étude expérimentale, on aurait pu envisager de cibler davantage les essais et d'avoir à réaliser ainsi moins de manipulations.

Cependant, cette abondance de résultats nous a permis d'observer différentes configurations de plis pour un cas de chargement donné, ce qui offre un meilleur recul par rapport à l'exploitation des données expérimentales. La compréhension des résultats expérimentaux est importante pour effectuer des comparaisons avec les résultats issus d'une analyse numérique. Si la prédiction d'une configuration de plis ne correspond pas avec l'observation expérimentale, cela ne signifie pas nécessairement que le modèle a convergé vers une solution erronée : il est possible que l'échantillon se stabilise dans cette configuration en réitérant la manipulation. En conclusion, dans les cas où l'on ne dispose pas de données numériques ou expérimentales suffisamment riches pour identifier plusieurs configurations de plis, il est préférable de travailler avec des données telles que le nombre, l'amplitude et la longueur d'onde des ondulations.

La modularité du dispositif d'essai nous a également permis de tester une membrane présentant une découpe carrée en son centre. On a ainsi pu évaluer la faisabilité des tests sur des structures ajourées en modifiant en conséquence notre protocole expérimental. Cette étude ouvre le champ à des tests sur des éprouvettes de géométrie complexe telles que la lentille de Fresnel.

Les objectifs expérimentaux initiaux ayant été atteints, la suite de l'étude est consacrée au développement des outils numériques de simulation du flambement des films minces.

CHAPITRE 2

Théorie des coques minces et discrétisation par éléments finis.

Les films utilisés dans l'industrie spatiale sont assimilables à des coques très minces soumises à de grands déplacements et à de grandes rotations. Lors de leur mise en tension, des ondulations apparaissent sur leur surface. Ce phénomène d'ondulation est dû au flambement local de la structure. Son traitement numérique nécessite de prendre en considération les non-linéarités géométriques lors de la formulation du modèle de coques.

Pour une formulation correspondant à de petites transformations, le système discret à résoudre s'écrit classiquement :

$$\{\mathbf{q}\} = [\mathbf{K}_0] \cdot \{\mathbf{u}\} \tag{2.1}$$

Avec $\{q\}$ le vecteur des forces imposées, $\{u\}$ le vecteur des déplacements et $[\mathbf{K}_0]$ la matrice de rigidité tangente initiale calculée à l'état non chargé.

La prise en compte des non-linéarités géométriques fait apparaître une raideur supplémentaire proportionnelle au chargement appliqué, appelée raideur géométrique : $[\mathbf{K}_{\mathbf{G}}] = \lambda [\mathbf{K}_{\mathbf{G}0}]$ où $[\mathbf{K}_{\mathbf{G}0}]$ est la matrice tangente de rigidité géométrique évaluée pour le chargement de référence $\{\mathbf{q}_0\}$. Le système 2.1 s'écrit alors sous la forme incrémentale suivante :

$$\Delta \{\mathbf{q}\} = [[\mathbf{K}_0] + \lambda [\mathbf{K}_{\mathbf{G}0}]] \cdot \Delta \{\mathbf{u}\}$$
(2.2)

 λ est un facteur de chargement tel que $\Delta{\{\mathbf{q}\}} = \lambda{\{\mathbf{q}_0\}}$. Pour certaines valeurs de λ , le système 2.2 peut ne plus être inversible du fait de la singularité de la matrice de rigidité tangente $[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}_0] + \lambda [\mathbf{K}_{\mathbf{G}0}]$. D'un point de vue physique, cette dernière se traduit par une raideur nulle de la structure suivant certaines directions de chargement, susceptible de conduire à l'apparition de solutions bifurquées.

Dans ce chapitre, les principaux résultats de la théorie des coques de Love-Kirchhoff sont rappelés, et le problème continu est discrétisé par la méthode des éléments finis en utilisant une formulation prenant en compte les non-linéarités géométriques. Le chapitre suivant sera consacré au traitement numérique de l'instabilité.

L'objectif commun de ces deux chapitres est d'établir la formulation d'un élément fini et de l'associer à une méthode numérique adaptée au calcul du flambement des films minces.

Les éléments finis de coques minces utilisés ici sont des éléments triangulaires prenant en compte d'une part le comportement de membrane permettant d'évaluer l'énergie de tension, et d'autre part le comportement de plaque nécessaire à l'estimation de l'énergie de flexion. L'énergie de membrane est évaluée à l'aide de la variation de la métrique dans le plan de l'élément triangulaire. Pour la discrétisation de l'énergie de flexion, deux formulations d'éléments de plaque ont été testées et sont présentées ici : l'élément DKT proposé par Batoz et Dhatt (1990), et un élément sans degrés de liberté de rotation constitué de l'élément triangulaire principal et de ces trois triangles adjacents. Cette formulation est basée sur les travaux de Gärdsback et Tibert (2007).

Les objectifs de ce chapitre sont de :

- Donner les principaux résultats issus de la théorie des coques de Love-Kirchhoff qui seront utiles dans la suite du manuscrit.
- Détailler la formulation du modèle discret de membrane en grande transformation commune aux différents éléments finis mis en œuvre dans cette étude.
- Décrire les éléments finis de plaque utilisés lors de la simulation des problèmes d'ondulation des films minces.

Un rappel des résultats de la théorie des coques est effectué dans la section 2.1. La section 2.2 est consacrée à la présentation de l'élément fini membrane et aux deux formulations de plaque. Enfin, la section 2.3 conclut le chapitre.

2.1 Théorie des coques minces

Cette section résume les équations du modèle de coque "géométriquement exact". Une présentation détaillée de la théorie classique des coques est disponible dans l'ouvrage de Naghdi (1972). La formulation de la théorie de Reissner-Midlin décrite ici, s'appuie sur celle proposée par Simo et Fox (1989) puis Cirak et al. (2000) qu'on restreint ensuite à la théorie des coques minces de Love-Kirchhoff. Pour cela, on contraint la normale initiale à la surface moyenne de la coque à rester normale à la surface moyenne dans la configuration déformée. Cette hypothèse dite de "coque mince" conduit à négliger les effets du cisaillement dans l'épaisseur de la structure.

Dans la suite du document, nous utiliserons la convention de sommation d'Einstein d'après laquelle il y a sommation implicite de tout indice répété.

Soit $[\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}]$ une base quelconque, on peut écrire un vecteur quelconque sous la forme :

$$\overrightarrow{v} = \xi^1 \overrightarrow{e_1} + \xi^2 \overrightarrow{e_2} + \xi^3 \overrightarrow{e_3} \tag{2.3}$$

En utilisant la convention d'Einstein, on aura :

$$\overrightarrow{v} = \xi^k \overrightarrow{e_k} \tag{2.4}$$

Pour l'ensemble de cette section, les exposants et les indices latins prennent les valeurs 1..3 alors que les indices grecs prennent les valeurs 1, 2.

2.1.1 Cinématique des coques minces.

Une coque est un corps mince composé d'une surface médiane bordée de deux surfaces extérieures, une surface supérieure Ω^+ et une surface inférieure Ω^- séparées d'une épaisseur h supposée faible par rapport à son rayon de courbure r i.e. $\frac{h}{r} << 1$.

La géométrie de la coque est caractérisée par sa surface moyenne Ω_0 et par son contour $\Gamma_0 = \partial \Omega_0$. Cette coque se déforme sous l'action des chargements qui lui sont imposés et adopte une nouvelle configuration qui sera décrite par Ω et $\Gamma = \partial \Omega$.

La position d'un point matériel de la coque dans sa configuration initiale \vec{X} et déformée \vec{x} peut être paramétrée en utilisant un système de coordonnées curvilignes $\{\xi^1, \xi^2, \xi^3\}$ de telle manière que l'on ait :

$$\vec{X} = \vec{X}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$$

$$\vec{x} = \vec{x}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$$
(2.5)

Les coordonnées $\{\xi^1, \xi^2\}$ constituent une "grille de coordonnées" permettant de repérer la position d'une particule sur la surface moyenne de la coque. La troisième coordonnée ξ^3 localise la position de la particule le long de la normale à la surface de référence.

La position d'un point matériel de la coque dans sa configuration de référence \overrightarrow{X} et déformée \overrightarrow{x} prend alors la forme :

$$\vec{X}(\xi^1,\xi^2,\xi^3) = \vec{X}(\xi^1,\xi^2,0) + \xi^3 \vec{\hat{A}}_3(\xi^1,\xi^2) \qquad -\frac{h}{2} \le \xi^3 \le \frac{h}{2} \vec{x}(\xi^1,\xi^2,\xi^3) = \vec{x}(\xi^1,\xi^2,0) + \xi^3 \vec{a}_3(\xi^1,\xi^2) \qquad -\frac{h}{2} \le \xi^3 \le \frac{h}{2}$$
(2.6)

Les fonctions $\overrightarrow{X}(\xi^1,\xi^2,0)$ et $\overrightarrow{x}(\xi^1,\xi^2,0)$ permettent une représentation paramétrique de la surface moyenne de la coque. \overrightarrow{A}_3 est la normale unitaire à la surface de référence moyenne et l'accent circonflexe ^ indique que le vecteur est unitaire. A ce stade, aucune hypothèse n'est prise pour $\overrightarrow{a_3}$ qui est l'image de \overrightarrow{A}_3 par le gradient de la transformation $\overrightarrow{x} \circ \overrightarrow{X}^{-1}$. Le vecteur $\overrightarrow{a_3}$ n'est par conséquent ni unitaire, ni normal à la surface moyenne



Fig. 2.1 — Base curviligne pour une coque dans sa position actuelle et dans la position de référence

dans sa position actuelle.

Les dérivées partielles des vecteurs \vec{X} et \vec{x} par rapport aux coordonnées ξ^i constituent les vecteurs de la base curviligne notée \vec{G}_i pour la configuration initiale, et \vec{g}_i dans la configuration déformée. Ces vecteurs \vec{G}_i et \vec{g}_i sont tangents aux lignes pour lesquelles seule une coordonnée ξ^i varie. Les bases constituées des vecteurs \vec{G}_i et \vec{g}_i varient avec la déformation de la grille de coordonnées { ξ^1, ξ^2 } et sont appelées bases "covariantes".

$$\overrightarrow{G}_{i} = \frac{\partial \overrightarrow{X}}{\partial \xi^{i}} \qquad \qquad \overrightarrow{g}_{i} = \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial \xi^{i}}$$
(2.7)

Sur la surface moyenne, les vecteurs \overrightarrow{G}_i et \overrightarrow{g}_i sont notés respectivement \overrightarrow{A}_i et \overrightarrow{a}_i :

$$\overrightarrow{A}_i(\xi^1,\xi^2) = \overrightarrow{G}_i(\xi^1,\xi^2,0) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{a}_i(\xi^1,\xi^2) = \overrightarrow{g}_i(\xi^1,\xi^2,0) \quad (2.8)$$

 $(\overrightarrow{A}_1, \overrightarrow{A}_2, \overrightarrow{A}_3)$ et $(\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3)$ sont les vecteurs de la base naturelle de la surface moyenne, respectivement en configuration de référence, et en configuration actuelle.

On définit alors les bases duales aux bases covariantes définies en 2.7 et 2.8 appelées bases contravariantes :

$$\overline{\overrightarrow{G}}^{i} \cdot \overline{\overrightarrow{G}}_{j} = \delta^{i}_{j} \quad \text{et} \quad \overline{\overrightarrow{g}}^{i} \cdot \overline{\overrightarrow{g}}_{j} = \delta^{i}_{j}
\overline{\overrightarrow{A}}^{i} \cdot \overline{\overrightarrow{A}}_{j} = \delta^{i}_{j} \quad \text{et} \quad \overline{\overrightarrow{a}}^{i} \cdot \overline{\overrightarrow{a}}_{j} = \delta^{i}_{j}$$
(2.9)

Où δ_j^i est le symbole de Kronecker. On remarque ici que chaque vecteur \overrightarrow{a}^i est normal à la surface définie par ξ_i constant.

En utilisant les équations 2.6, 2.7 et l'expression de la base naturelle tangente à la surface moyenne 2.8, L'expression de la base curviligne à une distance ξ^3 de la surface moyenne s'exprime alors :

$$\vec{G}_{\alpha} = \vec{X}_{,\alpha}|_{\xi_{3}=0} + \xi^{3}\vec{A}_{3,\alpha} = \vec{A}_{\alpha} + \xi^{3}\frac{\partial\vec{A}_{3}}{\partial\xi^{\alpha}} \qquad \text{et} \qquad \vec{G}_{3} = \vec{A}_{3}$$

$$\vec{g}_{\alpha} = \vec{x}_{,\alpha}|_{\xi_{3}=0} + \xi^{3}\vec{a}_{3,\alpha} = \vec{a}_{\alpha} + \xi^{3}\frac{\partial\vec{a}_{3}}{\partial\xi^{\alpha}} \qquad \text{et} \qquad \vec{g}_{3} = \vec{a}_{3}$$

$$(2.10)$$

L'hypothèse selon laquelle le déplacement varie de manière linéaire à travers l'épaisseur de la coque permet de passer d'une description de la transformation en trois dimensions à une description en deux dimensions. Celle ci est augmentée d'un terme linéaire ξ^3 dans la direction transverse de la coque. Le mouvement des particules de coordonnées (ξ^1, ξ^2, ξ^3) est alors assimilé à celui des particules de la surface moyenne $(\xi^1, \xi^2, 0)$.

Comme il a été expliqué précédemment, le vecteur $\overrightarrow{g}_3(\xi^1, \xi^2, 0) = \overrightarrow{a}_3(\xi^1, \xi^2)$ n'est pas nécessairement normal à la surface moyenne du système déformé. On peut donc projeter ce vecteur dans la base $(\overrightarrow{a}^1, \overrightarrow{a}^2, \overrightarrow{n})$ où \overrightarrow{n} désigne la normale unitaire à la surface moyenne dans sa configuration déformée, de telle sorte que : $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{a}_1$ et $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{a}_2$. On obtient alors :

$$\overrightarrow{a}_3 = \overrightarrow{\hat{n}} + 2\gamma_\mu \overrightarrow{a}^\mu$$
 et $\gamma_\mu \equiv \frac{1}{2} \overrightarrow{a}_3 \cdot \overrightarrow{a}_\mu$ (2.11)

Dans son exposé sur la théorie des plaques, Kirchhoff (1883) fait l'hypothèse que la fibre matérielle sur la ligne de coordonnée ξ^3 ne s'allonge pas et reste orthogonale à la surface moyenne. Cette hypothèse reprise par Love (1888) permet d'écrire :

$$\vec{G}_3 = \vec{A}_3 = \vec{\hat{N}}$$

$$\vec{g}_3 = \vec{a}_3 = \vec{\hat{n}}$$
(2.12)

On a ainsi :

$$\overrightarrow{a}_{\alpha} \cdot \overrightarrow{a}_{3} = 0$$
 et $|\overrightarrow{a}_{3}| = 1$ (2.13)

L'hypothèse de Love-Kirchhoff conduit à négliger le terme γ_{μ} dans l'expression 2.11. Ce terme étant lié au cisaillement transverse dans l'épaisseur de la coque, cela revient à ne pas pas prendre en compte la contribution du cisaillement lors de la résolution du problème de coque. Deux aspects permettent de motiver le choix de ce type de modèle : d'une part, la très faible épaisseur des films mis en œuvre dans cette étude et d'autre part les problèmes de verrouillage numérique du modèle discrétisé. Les éléments coques basés sur des formulations pour lesquelles le cisaillement est pris en compte sont souvent confrontés à des problèmes de verrouillage en cisaillement lorsque l'épaisseur de la structure étudiée devient faible (Belytschko et al., 2000).

Dans cette sous-section, nous avons rappelé les équations gouvernant la cinématique des coques minces. Nous souhaitons désormais établir la formulation du potentiel élastique de déformation de ce type de structures. A cette fin, nous donnons l'expression du tenseur de déformation (sous-section 2.1.2) et du potentiel élastique pour un matériau isotrope (sous-section 2.1.3) dans le cadre général de la mécanique des milieux continus avant de les modifier pour prendre en compte la description cinématique spécifique aux coques minces.

2.1.2 Tenseur de déformation.

On définit les coefficients des tenseurs métriques G_{ij}, G^{ij} et g_{ij}, g^{ij} par les produits suivants :

$$\begin{array}{lll}
G_{ij} = \overrightarrow{G}_i \cdot \overrightarrow{G}_j & \text{et} & g_{ij} = \overrightarrow{g}_i \cdot \overrightarrow{g}_j \\
G^{ij} = \overrightarrow{G}^i \cdot \overrightarrow{G}^j & \text{et} & g^{ij} = \overrightarrow{g}^i \cdot \overrightarrow{g}^j
\end{array}$$
(2.14)

 G_{ij} et g_{ij} sont les composantes covariantes du tenseur métrique, alors que G^{ij} et g^{ij} sont les composantes contravariantes du tenseur métrique, respectivement pour le système initial, et pour le système actuel.

L'expression du tenseur de Green Lagrange, est établie en s'intéressant à la variation d'un élément de longueur dL:

$$dL^2 = \vec{dX} \cdot \vec{dX}$$
 et $dl^2 = \vec{dx} \cdot \vec{dx}$ (2.15)

Avec :

$$\overrightarrow{dX} = \overrightarrow{G}_i d\xi^i$$
 et $\overrightarrow{dx} = \overrightarrow{g}_i d\xi^i$ (2.16)

En utilisant l'expression 2.14, la variation d'un élément de longueur entre une coque à l'état initial et à l'état déformé est donnée par :

$$dl^{2} - dL^{2} = (g_{ij} - G_{ij}) d\xi^{i} d\xi^{j}$$

$$dl^{2} - dL^{2} = 2E_{ij} d\xi^{i} d\xi^{j}$$
(2.17)
Le tenseur des déformations de Green Lagrange est ainsi obtenu à partir de la différence des tenseurs métriques de la configuration initiale et de la configuration déformée, soit :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(g_{ij} - G_{ij} \right) \tag{2.18}$$

En coordonnées curvilignes, les invariants du tenseur de déformation de Green Lagrange s'expriment à l'aide des composantes mixtes. Comme pour les composantes covariantes ou contravariantes, les composantes mixtes du tenseur de déformation sont obtenues en faisant la différence du tenseur métrique de la coque dans sa configuration déformée et de référence :

$$E_{i}^{j} = E_{ik}G^{kj} = \frac{1}{2} \left(g_{ik}G^{kj} - G_{ik}G^{kj} \right) = \frac{1}{2} \left(g_{i}^{j} - \delta_{i}^{j} \right)$$

$$E_{i}^{j} = \frac{1}{2} \left(C_{i}^{j} - \delta_{i}^{j} \right)$$
(2.19)

Les composantes C_i^j sont les composantes du tenseur des dilatations de Cauchy-Green. En utilisant l'expression 2.19, les invariants du tenseur de déformation s'expriment alors :

$$E_{I} = tr\left(\overline{\overline{E}}\right) = E_{ij}G^{ij} = E^{ij}G_{ij} = E_{k}^{k}$$

$$E_{II} = \frac{1}{2}\left[(tr\\overline{\overline{E}})^{2} - \overline{\overline{E}}:\overline{\overline{E}}\right] = \frac{1}{2}\left[\left(E_{k}^{k}\right)^{2} - E_{l}^{m}E_{m}^{l}\right]$$

$$E_{III} = \det\left(\overline{\overline{E}}\right) = \det\left[E_{\bullet}^{\bullet}\right]$$

$$(2.20)$$

Ces invariants sont utilisés pour construire des potentiels élastiques de déformation objectif. Il existe des relations directes entre les invariants de $\overline{\overline{E}}$ et ceux de $\overline{\overline{C}}$:

$$E_{I} = \frac{1}{2} C_{I} - \frac{3}{2}$$

$$E_{II} = \frac{1}{4} C_{II} - \frac{1}{2} C_{I} + \frac{3}{4}$$

$$E_{III} = \frac{1}{8} C_{III} - \frac{1}{8} C_{II} + \frac{1}{8} C_{I} - \frac{1}{8}$$
(2.21)

2.1.3 Potentiel élastique pour un matériau isotrope.

Les essais de caractérisation effectués sur les films en Kapton nous permettent de considérer que l'utilisation d'une loi de comportement élastique isotrope associée à l'hypothèse des petites déformations est appropriée à notre étude. Nous avons donc choisi de travailler avec le potentiel élastique de Saint Venant Kirchhoff en prenant en compte les non-linéarités géométriques grâce au tenseur des déformations de Green Lagrange. La densité d'énergie de déformation de Saint-Venant Kirchhoff s'écrit :

$$\Psi_V = \frac{1}{2} D^{ijkl} E_{ij} E_{kl} = \frac{1}{2} \overline{\overline{E}} : \overline{\overline{\overline{D}}} : \overline{\overline{E}} \ge 0 \ \forall \ \overline{\overline{E}}$$
(2.22)

où $\overline{\overline{D}}$ est le tenseur d'ordre quatre des modules d'élasticité.

Découlant des principes de la thermodynamique, le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff (PK2) est obtenu en différenciant la densité d'énergie Ψ_V par rapport à la déformation :

$$\overline{\overline{\Sigma}} = \frac{\partial \Psi_V(\overline{\overline{E}})}{\partial \overline{\overline{E}}} = 2 \frac{\partial \Psi_V(\overline{\overline{C}})}{\partial \overline{\overline{C}}}$$
(2.23)

soit encore :

$$\Sigma_{j}^{i} = D_{\bullet j \bullet l}^{i \bullet k \bullet} E_{k}^{l} \qquad , \qquad \Sigma^{ij} = D^{ijkl} E_{kl} \qquad , \qquad \overline{\overline{\Sigma}} = \overline{\overline{\overline{D}}} : \overline{\overline{E}}$$
(2.24)

Lorsque la coque est supposée isotrope, D^{ijkl} s'écrit :

$$D^{ijkl} = \lambda \ G^{ij}G^{kl} + \mu \ (G^{ik}G^{jl} + G^{il}G^{jk})$$
(2.25)

avec les symétries suivantes : $D^{ijkl} = D^{jikl} = D^{ijlk} = D^{klij}$

 λ et μ désignent les coefficients de Lamé, que l'on peut exprimer à l'aide du module de Young E et du coefficient de Poisson ν :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} , \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$
(2.26)

En utilisant l'expression 2.25, l'équation 2.22 devient :

$$\Psi_V = \frac{\lambda}{2} (E_k^k)^2 + \mu E_l^m E_m^l = \frac{\lambda}{2} (tr\overline{\overline{E}})^2 + \mu \overline{\overline{E}} : \overline{\overline{E}} \ge 0 \ \forall \ \overline{\overline{E}}$$
(2.27)

L'équation 2.27 est l'expression classique du potentiel de Saint Venant Kirchhoff exprimée à l'aide des composantes mixtes du tenseur de Cauchy Green. Elle sera utilisée pour la discrétisation de l'élément membrane en grande transformation.

2.1.4 Potentiel élastique pour une coque mince.

Dans le cadre de la théorie des coques minces, le tenseur de déformation de Green Lagrange est réécrit à l'aide des équations 2.10, 2.14 et 2.18 : Chapitre 2. Théorie des coques minces et discrétisation par éléments finis. 63

$$E_{\alpha\beta} = \chi_{\alpha\beta} + \xi^3 \rho_{\alpha\beta} \tag{2.28}$$

 $\overline{\overline{\chi}}$ est le tenseur des déformations de membrane et $\overline{\overline{\rho}}$ est le tenseur des déformations de flexion appelé tenseur des courbures. Les composantes non nulles de ces tenseurs sont :

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{a_{\alpha}} \cdot \overrightarrow{a_{\beta}} - \overrightarrow{A_{\alpha}} \cdot \overrightarrow{A_{\beta}} \right) \rho_{\alpha\beta} = \overrightarrow{a}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{a}_{3}}{\partial \xi_{\beta}} - \overrightarrow{A}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{A}_{3}}{\partial \xi_{\beta}}$$
(2.29)

On utilisant l'hypothèse de conservation des normales $(\overrightarrow{a_3} \cdot \overrightarrow{a_\alpha} = 0)$, on peut montrer que :

$$\rho_{\alpha\beta} = \overrightarrow{A}_3 \cdot \frac{\partial \overrightarrow{A}_{\alpha}}{\partial \xi_{\beta}} - \overrightarrow{a}_3 \cdot \frac{\partial \overrightarrow{a}_{\alpha}}{\partial \xi_{\beta}}$$
(2.30)

Les composantes $\chi_{\alpha\beta}$ correspondent à la déformation de la surface moyenne et les composantes $\rho_{\alpha\beta}$ quantifient la variation de sa courbure. Puisque $\overrightarrow{A_3}$ est normal à la surface initiale, on a : $G^{\alpha3} = G^{3\alpha} = 0$, et $G^{33} = 1$. On démontre alors que :

$$D^{333\alpha} = D^{3\alpha\beta\lambda} = 0$$

$$D^{33\alpha\beta} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} G^{\alpha\beta} ; D^{3\alpha3\beta} = \frac{E}{2(1+\nu)} G^{\alpha\beta}$$

$$D^{3333} = \frac{E(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}$$
(2.31)

En se servant des équations établies précédemment, nous allons chercher à simplifier l'expression de l'énergie surfacique de déformation de la coque définie par la somme de l'énergie volumique sur l'épaisseur de la coque :

$$\Psi_s = \frac{1}{2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} D^{ijkl} E_{kl} E_{ij} d\xi^3$$
(2.32)

L'hypothèse des contraintes planes $\Sigma^{33} = 0$, impose :

$$E_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu} G^{\alpha\beta} E_{\alpha\beta} \tag{2.33}$$

Cette hypothèse diffère de celle proposée par Kirchhoff en 2.13. Dans le cas présent, la normale $\overrightarrow{a_3}$ n'est plus unitaire. En utilisant les relations définies en 2.31, l'hypothèse des contraintes planes 2.33 et après intégration sur l'épaisseur, la densité surfacique d'énergie de la coque prend la forme suivante :

$$\Psi_s = \underline{D}^{\alpha\beta\lambda\mu} \left[\frac{h}{2} \chi_{\alpha\beta} \chi_{\lambda\mu} + \frac{h^3}{24} \rho_{\alpha\beta} \rho_{\lambda\mu} \right]$$
(2.34)

Avec:

$$\underline{D}^{\alpha\beta\lambda\mu} = \lambda A^{\alpha\beta} A^{\lambda\mu} + \mu \left(A^{\alpha\lambda} A^{\beta\mu} + A^{\alpha\mu} A^{\beta\lambda}\right)$$
(2.35)

 et

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \overrightarrow{A}_i \cdot \overrightarrow{A}_j \\
A^{ij} &= \overrightarrow{A}^i \cdot \overrightarrow{A}^j
\end{aligned}$$
(2.36)

 A_{ij} et A^{ij} sont respectivement les composantes covariantes et contravariantes du tenseur métrique, du système initial, ramenées à la surface moyenne et $\underline{D}^{\alpha\beta\lambda\mu}$ désigne les composantes du tenseur des modules d'élasticité ramenées à cette même surface. Le premier terme de l'équation 2.34 correspond à l'énergie de déformation du mode membrane alors que le second terme correspond à l'énergie de flexion. Il est important de remarquer ici, que le comportement et le potentiel élastique d'une coque est entièrement décrit à l'aide des coordonnées de sa surface moyenne.

Pour une variation élémentaire, de la configuration de la coque $\delta \phi$ avec $\phi = \overrightarrow{x} \circ \overrightarrow{X}^{-1}$, le travail des efforts intérieurs est :

$$\delta\Psi_S = n^{\alpha\beta} \,\delta\chi_{\alpha\beta} \,+\, m^{\alpha\beta} \,\delta\rho_{\alpha\beta} \tag{2.37}$$

 $n^{\alpha\beta}$ désigne le tenseur des efforts de tensions et $m^{\alpha\beta}$ désigne le tenseur des moments de flexion. L'expression de ces tenseurs est la suivante :

$$n^{\alpha\beta} = \frac{\partial \Psi_S}{\partial \chi_{\alpha\beta}} = h \underline{D}^{\alpha\beta\lambda\mu} \chi_{\lambda\mu}$$
(2.38)

$$m^{\alpha\beta} = \frac{\partial \Psi_S}{\partial \rho_{\alpha\beta}} = \frac{h^3}{12} \underline{D}^{\alpha\beta\lambda\mu} \rho_{\lambda\mu}$$
(2.39)

2.1.5 Problème final.

La coque est soumise à un ensemble de chargements extérieurs regroupant une densité de force surfacique \overrightarrow{q} appliquée sur Ω et une densité de force linéique \overrightarrow{N} appliquée à Γ . Avec ces conditions, l'énergie potentielle totale de la coque soumise à un déplacement \overrightarrow{u} est:

$$\pi(\vec{u}) = \Psi^{int}(\vec{u}) + \Psi^{ext}(\vec{u})$$
(2.40)

 avec :

$$\Psi^{int}(\overrightarrow{u}) = \int_{\Omega_0} \Psi_S(\overline{\overline{\chi}}, \overline{\overline{\rho}}) \ d\Omega_0 \tag{2.41}$$

et:

$$\Psi^{ext}(\vec{u}) = -\int_{\Omega_0} \vec{q} \cdot \vec{u} \, d\Omega_0 - \int_{\Gamma_0} \vec{N} \cdot \vec{u} \, d\Gamma_0$$
(2.42)

 $\Psi^{int}(\overrightarrow{u})$ désigne ici l'énergie potentielle élastique interne et $\Psi^{ext}(\overrightarrow{u})$ l'énergie potentielle des chargements extérieurs.

La configuration d'équilibre stable de la coque obéit au principe du minimum de l'énergie potentielle, soit :

$$\pi(\overrightarrow{u}) = \inf_{\overrightarrow{v} \in \mathbb{V}} \pi(\overrightarrow{v}) \tag{2.43}$$

 \mathbb{V} est l'espace vectoriel contenant l'ensemble des déplacements \overrightarrow{v} du domaine Ω_0 cinématiquement admissible ayant une énergie potentielle finie $\pi(\overrightarrow{v})$. En écrivant l'équation 2.40 pour un déplacement virtuel $\delta \overrightarrow{u}$, on obtient :

$$\nabla \overrightarrow{\pi}(\overrightarrow{u}) \cdot \delta \overrightarrow{u} = \nabla \overrightarrow{\Psi}^{int}(\overrightarrow{u}) \cdot \delta \overrightarrow{u} + \nabla \overrightarrow{\Psi}^{ext}(\overrightarrow{u}) \cdot \delta \overrightarrow{u}$$
(2.44)

C'est une expression du principe des travaux virtuels où $\nabla \overrightarrow{\pi}(\overrightarrow{u}) \cdot \delta \overrightarrow{u}$ représente la variation d'énergie pour un déplacement virtuel $\delta \overrightarrow{u}$.

$$\nabla \overline{\Psi}^{int}(\overrightarrow{u}) \cdot \delta \overrightarrow{u} = \int_{\Omega_0} \left[n^{\alpha\beta} \delta \chi_{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta} \delta \rho_{\alpha\beta} \right] d\Omega_0$$
(2.45)

désigne le travail interne virtuel et :

$$\nabla \overrightarrow{\Psi}^{ext}(\overrightarrow{u}) \cdot \delta \overrightarrow{u} = -\int_{\Omega_0} \overrightarrow{q} \,\delta \overrightarrow{u} \,d\Omega - \int_{\Gamma_0} \overrightarrow{N} \delta \overrightarrow{u} \,d\Gamma_0$$
(2.46)

représente le travail virtuel des chargements extérieurs.

Le principe du minimum d'énergie, ou son équivalent, le principe des travaux virtuels, est à la base des formulations par éléments finis des problèmes d'équilibre de coques.

Le cadre théorique à l'origine de la formulation par la méthode des éléments finis a été précisé dans cette section. Les équations de la théorie des coques minces de Love-Kirchhoff ont été rappelées et l'expression des potentiels qui sont utilisés dans la suite a été explicitée. La section suivante sera consacrée à la discrétisation des équations du modèle de coques minces, en utilisant des éléments finis triangulaires à trois nœuds.

2.2 Discrétisation du modèle de coques minces par éléments finis.

Du fait de la très faible épaisseur des structures étudiées, les éléments coques sont sensibles au phénomène de verrouillage numérique en membrane. En effet, l'énergie de tension est pondérée par l'épaisseur h tandis que pour l'énergie de flexion, le terme multiplicateur est h^3 . L'énergie de flexion tend alors à devenir extrêmement faible pour un film mince $h \to 0$. La difficulté principale est que c'est précisément cette énergie qui gouverne le phénomène d'ondulation. Le choix d'un élément coque adapté à cette problématique est alors prépondérant, car il peut sensiblement affecter le résultat des simulations numériques du flambement des films minces.

Les auteurs qui se sont intéressés à la problématique de la simulation des plis ont utilisé différents types d'éléments pour lesquels nous donnons ici un bref aperçu. Le pertinence du choix de certains de ces éléments sera discutée au chapitre 4. Diaby et al. (2006) ont utilisé un élément membrane pur pour simuler le flambement local de différentes structures pressurisées, ainsi que les ondulations d'un film mince cisaillé. Wong et Pellegrino (2006b) et Wang et al. (2007) ont employé les éléments coques minces S4R5 du code code ABAQUS (R) pour prédire numériquement la forme des plis sur des films minces en tension. L'élément S4R5 est constitué de la superposition d'un élément membrane pur en grande transformation avec un élément de plaque DKQ (Discrete Kirchhoff Quadrangle). La formulation de l'élément plaque DKQ dérive de celle du DKT (Discrete Kirchhoff Triangle) proposée par Batoz et Dhatt (1990).

On trouve également dans Wong et Pellegrino (2006b) une évaluation comparative de différents éléments, notamment un élément membrane pur M3D4, trois éléments coques quadrangles le S4, le S4R5 et le S9R5, ainsi qu'un élément coque triangulaire, le S3. Les éléments S4 et S3 sont des éléments "généraux". En effet, l'élément de plaque les constituant est basé sur la formulation de plaque épaisse de Midlin-Reissner qui est dégénérée en formulation de Love-Kirchhoff lorsque l'épaisseur devient faible. La formulation de l'élément plaque des éléments S4R5 et S9R5 est quant à elle basée sur la théorie de Love-Kirchhoff. Ces éléments ont en commun d'avoir six degrés de liberté par noeud : trois degrés de liberté correspondant à la translation du nœud selon les directions $\overrightarrow{e_i}$ ainsi que trois degrés de liberté correspondant aux rotations des normales autour des axes $\overrightarrow{e_i}$. Dans le cas des éléments basés sur la théorie de Love-Kirchhoff, la rotation de la normale autour de son axe est un degré de liberté fictif. Le problème de ces formulations est l'introduction

des degrés de liberté correspondant aux rotations des normales. Cela peut conduire à un mauvais conditionnement de la matrice de rigidité.

Pour contourner cette difficulté numérique, et pour réduire le nombre de degrés de liberté nécessaires à l'estimation de l'énergie de flexion, des auteurs tels que Sabourin et Brunet (1995) ou Laurent et Rio (2001) se sont intéressés à des formulations, sans degrés de liberté de rotation, appelées "rotation-free". Dans ces modèles, la flexion des coques minces est discrétisée à partir des translations aux nœuds des éléments voisins à l'élément considéré. Ainsi, ils possèdent exactement le même nombre de degré de libertés par nœud que l'élément membrane pur équivalent. Ce type de formulation, pour le moment relativement peu utilisé, a pourtant été employé avec succès pour traiter des problèmes de flambement des coques minces. Guo et al. (2002) et Brunet et Sabourin (1995) ont notamment proposé des formulations "rotation-free" pour traiter des problèmes de mise en forme de pièces métalliques. Flores et Oñate (2005) ont également mis en œuvre ce type d'élément pour étudier la mise en pression d'un air-bag. Une monographie détaillée des formulations sans degrés de liberté de rotation est disponible dans Gärdsback et Tibert (2007).

Dans cette étude numérique, nous avons choisi de retenir trois éléments différents en vue d'effectuer des comparaisons sur l'efficience de leur formulation. Nous avons programmé un élément membrane pur en transformation finie ainsi que deux éléments coque. L'élément membrane est présenté en 2.2.1. Les deux éléments coque sont constitués de la superposition de l'élément membrane et d'un élément de plaque. Le premier élément retenu est l'élément plaque DKT 18 (Batoz et Dhatt, 1990) car il est très couramment utilisé pour traiter les problèmes de coques minces. Pour le second élément, nous avons programmé un élément sans degrés de libertés de rotation, puisque cette formulation semblait particulièrement bien adaptée à la résolution de notre problème de flambement de films minces.

Pour chaque formulation, nous donnons l'expression de l'énergie potentielle élastique, son gradient ainsi que la matrice de rigidité de l'élément. En effet, comme nous le verrons au chapitre 3, le problème numérique de la bifurcation associée au flambement est résolu en utilisant un algorithme de descente par gradient conjugué qui nécessite la connaissance de l'énergie et de son gradient.

2.2.1 Discrétisation de la membrane en éléments finis triangulaires

Dans cette section, nous allons établir l'expression de l'énergie élastique de l'élément membrane, puis son gradient et la matrice Hessienne correspondante, en fonction des neufs coordonnées x_i^j de la facette triangulaire. L'indice inférieur désigne ici le numéro du nœud de l'élément tandis que l'indice supérieur correspond à la coordonnée projetée sur le vecteur $\overrightarrow{e_j}$.

Les vecteurs de la base naturelle correspondent aux côtés 1-2 et 1-3 du triangle comme indiqué sur la figure 2.2. Leur expression en fonction des coordonnées initiales X_i^j



Fig. 2.2 — Discrétisation de la membrane en éléments finis triangulaires.

et actuelles x_i^j est la suivante :

$$\overrightarrow{A_1} = \overrightarrow{X_2} - \overrightarrow{X_1} , \qquad \overrightarrow{a_1} = \overrightarrow{x_2} - \overrightarrow{x_1}
\overrightarrow{A_2} = \overrightarrow{X_3} - \overrightarrow{X_1} , \qquad \overrightarrow{a_2} = \overrightarrow{x_3} - \overrightarrow{x_1}$$
(2.47)

Pour la suite des calculs, on va introduire les notations :

$$a_{1}^{i} = x_{12}^{i} = x_{2}^{i} - x_{1}^{i}$$

$$a_{2}^{i} = x_{13}^{i} = x_{3}^{i} - x_{1}^{i}$$
(2.48)

Ces termes correspondent aux composantes des vecteurs de la base naturelle $\overrightarrow{a_1}$ et $\overrightarrow{a_2}$.

La formulation de l'élément fini "membrane pure" suppose que seule la variation d'aire de l'élément est utilisée dans l'évaluation de l'énergie potentielle élastique de la structure. La variation de courbure de la surface moyenne n'est pas prise en compte. Le tenseur de déformation s'écrit alors :

$$E_{\alpha\beta} = \chi_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{a_{\alpha}} \cdot \overrightarrow{a_{\beta}} - \overrightarrow{A_{\alpha}} \cdot \overrightarrow{A_{\beta}} \right)$$
(2.49)

Soit en composantes mixtes :

$$E_{\alpha}^{\beta} = \chi_{\alpha}^{\beta} = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{a_{\alpha}} \cdot \overrightarrow{a_{\beta}} \, \overrightarrow{A^{\alpha}} \cdot \overrightarrow{A^{\beta}} \, - \, \delta_{\alpha}^{\beta} \right) = \frac{1}{2} \left(C_{\alpha}^{\beta} \, - \, \delta_{\alpha}^{\beta} \right)$$
(2.50)

En utilisant les égalités 2.21 et l'hypothèse des contraintes planes 2.33 , l'expression du potentiel élastique de Saint Venant Kirchhoff présenté en 2.27, est exprimé en fonction des composantes C_i^j du tenseur de dilatations soit :

$$\Psi^{M} = \frac{\mu\lambda}{2(\lambda+2\mu)} \left[3 - 3C_{1}^{1} + (C_{1}^{1})^{2} + C_{1}^{1}C_{2}^{2} + C_{1}^{2}C_{2}^{1} - 3C_{2}^{2} + (C_{2}^{2})^{2}\right] + \frac{\mu^{2}}{2(\lambda+2\mu)} \left[2 - 2C_{1}^{1} + (C_{1}^{1})^{2} + 2C_{1}^{2}C_{2}^{1} - 2C_{2}^{2} + (C_{2}^{2})^{2}\right]$$
(2.51)

Il est important de noter ici que le choix de ce potentiel suppose une rigidité en traction ou en compression identique pour notre élément membrane. En effet, à l'inverse de nombreuses études nous ne supposons pas que lorsque ce dernier est en compression l'énergie de déformation est nulle.

Les composantes du gradient de l'énergie sont obtenues en dérivant l'expression du potentiel 2.51 par rapport aux coordonnées $x_i^{\ j}$:

$$\left(\nabla\Psi^{M}\right)_{ij} = \frac{\partial\Psi^{M}}{\partial x_{i}^{j}} = \frac{\partial\Psi^{M}}{\partial C_{\alpha}^{\beta}} \frac{\partial C_{\alpha}^{\beta}}{\partial x_{i}^{j}}$$
(2.52)

Le détail de ces expressions est donné en annexe A. Les composantes de la matrice Hessienne, sont obtenues en dérivant les composantes du gradient par rapport aux coordonnées x_i^{j} . On a alors :

$$H_{ijkl} = \frac{\partial}{\partial x_i^j} \left(\frac{\partial \Psi^M}{\partial x_k^l} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i^j} \left(\frac{\partial \Psi^M}{\partial C_\alpha^\beta} \frac{\partial C_\alpha^\beta}{\partial x_k^l} \right)$$

$$H_{ijkl} = \left(\frac{\partial^2 \Psi^M}{\partial C_\alpha^\beta \partial C_\lambda^\mu} \frac{\partial C_\lambda^\mu}{\partial x_i^j} \right) \frac{\partial C_\alpha^\beta}{\partial x_k^l} + \frac{\partial^2 C_\alpha^\beta}{\partial x_i^j \partial x_k^l} \frac{\partial \Psi^M}{\partial C_\alpha^\beta}$$
(2.53)

Les différents termes de cette matrice sont explicités en annexe A. La matrice de rigidité de l'élément membrane est obtenue à partir des composantes de la matrice Hessienne par la relation suivante :

$$K_{ijkl}^{M} = A h H_{ijkl} \tag{2.54}$$

A désigne l'aire initiale de l'élément triangulaire et h son épaisseur initiale. Différentes formulations de l'élément membrane triangulaire à trois nœuds sont disponibles dans la littérature, citons en exemple Tabarrok et Qin (1992). La formulation, quelque peu atypique de l'élément membrane triangulaire que nous donnons ici, trouve son utilité dans son adéquation avec la méthode numérique de traitement des plis que nous avons utilisé. En effet, nous avons mis en œuvre une méthode de descente, qui nécessite la connaissance de l'énergie, de son gradient et éventuellement de sa matrice Hessienne. La formulation présentée ici permet de disposer de ces trois entités pour toutes les configurations spatiales sans avoir à associer un plan et un repère à l'élément pour chaque pas de calcul, comme c'est souvent le cas pour des formulations "classiques". La discrétisation de l'élément membrane ayant été expliquée, nous nous intéresserons dans la suite à deux types d'éléments finis de plaque afin d'évaluer l'énergie de flexion. On va en particulier s'attacher à présenter la formulation d'un élément fini sans degré de liberté de rotation.

2.2.2 Discrétisation par éléments finis de l'élément plaque sans degré de liberté de rotation

L'élément fini plaque sans degré de liberté de rotation que nous détaillons ici, est très proche de celui présenté par Sabourin et Brunet (1995). Les notations et la formulation employées correspondent à ce qui a été proposé par Gärdsback et Tibert (2007). A la différence de l'élément membrane prenant en compte les non-linéarités géométriques, l'élément plaque est linéaire.

2.2.2.1 Notations

On considère ici l'élément "patch", initialement plan, constitué d'un élément triangulaire central 1 - 2 - 3 et de ses trois triangles adjacents, (voir FIG. 2.3). Nous allons discrétiser le tenseur des courbures $\overline{\rho}$ à partir des déplacements, hors plan, des nœuds des quatre éléments constituant le "patch". $\overrightarrow{n_i}$, (i = 1..3) désigne la normale sortante associée au côté *i*, et h_i est la hauteur du triangle adjacent au triangle central associée au nœud i, (i = 4..6).



Fig. 2.3 — Définition des notations utilisées pour l'élément fini "patch".

La flèche de l'élément triangulaire central est approximée à partir des flèches w_i i = 1..3aux trois nœuds du triangle. Pour cela, on utilise les fonctions de forme L_i définies par :

$$L_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2A} \tag{2.55}$$

La flèche en tout point de l'élément est alors :

$$w = \sum_{i=1}^{3} w_i L_i \tag{2.56}$$

Les constantes c_i et b_i correspondent aux coordonnées Δx et Δy entre deux nœuds appartenant à un même côté du triangle. On a $a_1 = x_2y_3 - x_3y_2, b_1 = y_2 - y_3$ et $c_1 = x_3 - x_2$. Les constantes a_2, b_2, c_2 et a_3, b_3, c_3 sont obtenues par permutation circulaire des indices.

L'aire du triangle central 1 - 2 - 3, notée A s'écrit alors :

$$2A = c_3b_2 - c_2b_3 = c_1b_3 - c_3b_1 = c_2b_1 - c_1b_2$$
(2.57)

La longueur l_i du coté i du triangle est :

$$l_i = \sqrt{b_i^2 + c_i^2} \tag{2.58}$$

Les normales sortantes $\overrightarrow{n_i}$ au côté i dans le plan de l'élément sont définies par :

$$\overrightarrow{n_i} = \begin{bmatrix} \cos\zeta_i \\ \sin\zeta_i \end{bmatrix} = -\frac{1}{l_i} \begin{bmatrix} b_i \\ c_i \end{bmatrix}$$
(2.59)

Les angles ζ_i donnent l'orientation des normales $\overrightarrow{n_i}$.

2.2.2.2 Courbures suivant la direction $\overrightarrow{n_i}$.

Le point clef des formulations de plaques "rotation-free" est d'évaluer la courbure suivant une direction $\overrightarrow{n_i}$, (i = 1..3) à l'aide du déplacement hors plan des nœuds des deux triangles adjacents au côté *i*. Pour cela, la courbure dans la direction orthogonale au côté considéré est supposée constante. On admet alors que la flexion dans l'élément central est causée par la flèche relative w^* entre les différents nœuds constituant le patch. La supposition selon laquelle la courbure est constante dans la direction orthogonale au côté considéré, impose d'avoir une flèche parabolique (voir FIG. 2.4).

Ainsi, la flèche relative suivant la direction de la normale $\overrightarrow{n_1}$, s'exprime :



Fig. 2.4 — Système de coordonnées utilisé pour déterminer la courbure unidirectionnelle.

$$w^* = \frac{n(n-h_4)}{h_1(h_1+h_4)}w_1^* + \frac{n(h_1+n)}{h_4(h_1+h_4)}w_4^*$$
(2.60)

n désigne la coordonnée suivant la direction de la normale. La courbure dans la direction $\overrightarrow{n_1}$ est la dérivée seconde de la flèche w^* par rapport à la coordonnée n, i.e.

$$\rho_{\overrightarrow{n_1}} = \frac{d^2 w^*}{d n^2} = \frac{2}{(h_1 + h_4)} (\alpha_1 + \alpha_4)$$
(2.61)

Les angles $\alpha_i = \frac{w_i^*}{h_i}$ correspondent aux angles de rotation entre deux éléments adjacents. Ces rotations sont supposées être des rotations de corps rigide de ces deux triangles. Des expressions analogues sont obtenues pour les courbures suivant les directions $\overrightarrow{n_2}$, $\overrightarrow{n_3}$ et permettent d'écrire le vecteur $\{\rho_{\overrightarrow{n_i}}\}$ sous la forme suivante :

$$\{\rho_{\overrightarrow{n_{i}}}\} = \begin{bmatrix} \rho_{\overrightarrow{n_{1}}} \\ \rho_{\overrightarrow{n_{2}}} \\ \rho_{\overrightarrow{n_{3}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{h_{1}+h_{4}} & 0 & 0 & \frac{2}{h_{1}+h_{4}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{h_{2}+h_{5}} & 0 & 0 & \frac{2}{h_{2}+h_{5}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{h_{3}+h_{6}} & 0 & 0 & \frac{2}{h_{3}+h_{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{1} \\ \alpha_{2} \\ \alpha_{3} \\ \alpha_{4} \\ \alpha_{5} \\ \alpha_{6} \end{bmatrix}$$
(2.62)

soit encore :

$$\{\rho_{\overrightarrow{n_i}}\} = [\mathbf{T}]\{\alpha\} \tag{2.63}$$

2.2.2.3 Relation entre les rotations de corps rigide α_i des facettes, et les flèches w_i .

Afin d'établir l'expression du vecteur des courbures $\{\rho_{\vec{n}i}\}$ en fonction des déplacements hors plan w_i des nœuds constituant le patch, on doit exprimer les angles α_i à l'aide des déplacements w_i .

Pour cela, on va considérer l'expression de la dérivée de la flèche suivant la direction $\overrightarrow{n_i}$ soit :

$$\alpha_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\zeta_i \\ \sin\zeta_i \end{bmatrix} = -\sum_{j=1}^3 \left(\cos\zeta_i \frac{\partial L_j}{\partial x} w_j + \sin\zeta_i \frac{\partial L_j}{\partial y} w_j \right)$$
(2.64)

On obtient les angles α_i avec i = 1..3 en utilisant les fonctions de forme L_j du triangle principal. Pour les angles α_i , i = 4..6, on utilise les fonctions de forme des triangles voisins, soit le triangle 1 pour définir α_4 , le triangle 2 pour obtenir α_5 , enfin les fonctions L_j du triangle 3 permettent de trouver l'angle α_6 . La numérotation correspondante est donnée en FIG. 2.5.



Fig. 2.5 — Définition de la numérotation pour l'élément fini "patch".

On peut ainsi donner l'expression reliant les angles α_i aux flèches w_i sous forme matricielle, soit :

$$\{\alpha_{\mathbf{i}}\} = [\mathbf{W}]\{\mathbf{w}\} \tag{2.65}$$

$$\left[\mathbf{W}\right] = \begin{bmatrix} \frac{l_1}{2A} & \frac{c_2c_1+b_2b_1}{2Al_1} & \frac{c_3c_1+b_3b_1}{2Al_1} & 0 & 0 & 0\\ \frac{c_1c_2+b_1b_2}{2Al_2} & \frac{l_2}{2A} & \frac{c_3c_2+b_3b_2}{2Al_2} & 0 & 0 & 0\\ \frac{c_1c_3+b_1b_3}{2Al_3} & \frac{c_2c_3+b_2b_3}{2Al_3} & \frac{l_3}{2A} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{c_2c_3^2+b_2b_3^2}{2A^2l_1} & \frac{c_1^2c_3^2+b_1^2b_3^2}{2A^2l_1} & \frac{l_1}{2A^2l_1} & 0 & 0\\ \frac{c_1^2c_3^2+b_1^2b_3^2}{2A^2l_2} & 0 & \frac{c_2^2c_3^2+b_2^2b_3^2}{2A^2l_2} & 0 & \frac{l_2}{2A^2} & 0\\ \frac{c_3^2c_3^3+b_2^3b_3^3}{2A^3l_3} & \frac{c_1^2c_3^3+b_1^3b_3^3}{2A^3l_3} & 0 & 0 & 0 & \frac{l_3}{2A^3} \end{bmatrix}$$
 et $\{\mathbf{w}\} = \begin{bmatrix} w_1\\ w_2\\ w_3\\ w_4\\ w_5\\ w_6 \end{bmatrix}$ (2.66)

Les constantes A^j désignent l'aire des triangles j. Les coefficients $\frac{b_i^j}{l_i}$ et $\frac{c_i^j}{l_i}$ correspondent respectivement aux cosinus et aux sinus directeurs de l'arrête i du triangle j.

2.2.2.4 Matrice de passage des courbures suivant les directions $\overrightarrow{n_i}$ aux composantes du tenseur des courbures $\rho_{\alpha\beta}$.

Dans le but d'exprimer les composantes du tenseur des courbures $\rho_{\alpha\beta}$, on définit une base orthonormée liée à l'élément central. Ce repère est décrit en FIG. 2.6.



Fig. 2.6 — Définition de la base locale utilisée pour évaluer le tenseur des courbures.

Le vecteur $\overrightarrow{e_x}$ est le vecteur normé porté par le côté 1-2. $\overrightarrow{e_z}$ est obtenu en faisant le produit vectoriel entre $\overrightarrow{e_x}$ et le vecteur porté par le coté 1-3 du triangle central. Enfin, $\overrightarrow{e_y}$ complète le trièdre orthonormé direct $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

Avec les expressions 2.66 et 2.63, il est possible de relier le vecteur $\{\mathbf{w}\}$ aux trois courbures suivant les directions $\overrightarrow{n_i}$. Pour calculer l'énergie de flexion, nous avons besoin de l'expression des composantes du tenseur $\rho_{\alpha\beta}, (\rho_{xx}, \rho_{yy}, \rho_{xy})$.

Sabourin et Brunet (1995) proposent de sommer les contributions des trois courbures $\rho_{\vec{n}_i}$ afin d'obtenir les composantes du tenseur des courbures du triangle central. Gärdsback et Tibert (2007) soulignent que cette méthode a été utilisée par la suite, par l'ensemble des auteurs travaillant avec un "patch" constitué d'un triangle central et de ses trois triangles adjacents.

Soit $[\mathbf{P}_i]$ la matrice de passage entre la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$ et la base $(\overrightarrow{n_i}, \overrightarrow{s_i})$ définie sur la figure 2.3. $[\mathbf{P}_i]$ est de la forme :

avec :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\zeta_i & -\sin\zeta_i \\ \sin\zeta_i & \cos\zeta_i \end{bmatrix}$$
(2.67)

On va noter $\overline{\overline{\rho_i}}'$ le tenseur des courbures exprimé dans la base $(\overline{n_i}, \overline{s_i}, \overline{e_z})$ correspondant à la courbure évaluée dans la direction $\overline{n_i}$.

$$\overline{\overline{\rho_i}}' = \begin{bmatrix} \rho_{\overline{n_i}} & 0\\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
(2.68)

En utilisant l'hypothèse de sommation des courbures de Sabourin et Brunet (1995), on aura :

$$\overline{\overline{\rho}} = \sum_{i=1}^{3} [\mathbf{P}_{i}] \quad \overline{\overline{\rho}_{i}}' \quad [\mathbf{P}_{i}]^{-1}$$
(2.69)

On transforme l'équation 2.69 de manière à écrire les composantes du tenseur $\overline{\overline{\rho}}$ sous forme de vecteur :

$$\overrightarrow{\rho} = \begin{bmatrix} \rho_{xx} \\ \rho_{yy} \\ 2\rho_{xy} \end{bmatrix} = [\mathbf{R}] \{\rho_{\overrightarrow{n_i}}\}$$
(2.70)

Avec $[\mathbf{R}]$:

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \frac{b_1^2}{l_1^2} & \frac{b_2^2}{l_2^2} & \frac{b_3^2}{l_1^2} \\ \frac{c_1^2}{l_1^2} & \frac{c_2^2}{l_2^2} & \frac{c_3^2}{l_3^2} \\ \frac{2b_1 c_1}{l_1^2} & \frac{2b_2 c_1}{l_2^2} & \frac{2b_3 c_3}{l_3^2} \end{bmatrix}$$
(2.71)

L'hypothèse de Sabourin et Brunet (1995) conduit à une approximation du vecteur des courbures. La formulation de l'élément décrit ici ne permet pas de reproduire correctement la courbure constante d'une parabole étalon $\rho_{xx} = 1$, $\rho_{yy} = 1$, comme l'ont montré Gärdsback et Tibert (2007). Cette raison nous pousse à proposer une expression différente pour [**R**], de celle que nous venons de décrire.

2.2.2.5 Modification de la matrice de passage [**R**] afin d'améliorer la discrétisation du tenseur des courbures $\overline{\overline{\rho}}$.

On suppose d'abord que les courbures sont constantes au sein d'un élément. Ainsi, quelle que soit la position d'une particule sur l'élément triangle, on peut lui associer le tenseur des courbures $\overline{\overline{\rho}}$. La courbure dans la direction $\overrightarrow{n_i}$ est par définition calculée avec la forme bilinéaire suivante :

$$\rho_{\overrightarrow{n_i}} = \overline{\overline{\rho}} (\overrightarrow{n_i}, \overrightarrow{n_i})
\rho_{\overrightarrow{n_i}} = \rho_{xx} (\cos\zeta_i)^2 + \rho_{yy} (\sin\zeta_i)^2 + 2\rho_{xy} (\sin\zeta_i \cos\zeta_i)$$
(2.72)

En écrivant l'équation 2.72 pour les trois normales aux arêtes du triangle, on peut poser le système de trois équations à trois inconnues suivant :

$$\begin{bmatrix} \rho_{\overrightarrow{n_1}} \\ \rho_{\overrightarrow{n_2}} \\ \rho_{\overrightarrow{n_3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \zeta_1 & \sin^2 \zeta_1 & 2\sin\zeta_1 & \cos\zeta_1 \\ \cos^2 \zeta_2 & \sin^2 \zeta_2 & 2\sin\zeta_2 & \cos\zeta_2 \\ \cos^2 \zeta_3 & \sin^2 \zeta_3 & 2\sin\zeta_3 & \cos\zeta_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho xx \\ \rho yy \\ \rho xy \end{bmatrix}$$
(2.73)

La résolution de ce système va nous permettre d'identifier les composantes $(\rho_{xx}, \rho_{yy}, \rho_{xy})$, supposées constantes, du vecteur des courbures. Soit, en utilisant les constantes a_i, b_i, l_i :

$$\begin{bmatrix} \rho xx \\ \rho yy \\ 2\rho xy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c_2c_3l_1^2}{D_1} & \frac{-c_1c_3l_2^2}{D_2} & \frac{c_1c_2l_3^2}{D_3} \\ \frac{b_2b_3l_1^2}{D_1} & \frac{-b_1b_3l_2^2}{D_2} & \frac{b_1b_2l_3^2}{D_3} \\ \frac{-(c_2b_3+b_2c_3)l_1^2}{D_1} & \frac{(c_1b_3+b_1c_3)l_2^2}{D_2} & \frac{-(c_1b_2+c_2b_1)l_3^2}{D_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{\overrightarrow{n_1}} \\ \rho_{\overrightarrow{n_2}} \\ \rho_{\overrightarrow{n_3}} \end{bmatrix}$$
(2.74)

avec :

$$D_{1} = -c_{2}b_{1}c_{1}b_{3} + c_{2}b_{1}^{2}c_{3} + c_{1}^{2}b_{2}b_{3} - b_{2}c_{3}b_{1}c_{1}$$

$$D_{2} = c_{1}b_{2}c_{2}b_{3} - c_{1}b_{2}^{2}c_{3} - b_{1}c_{2}^{2}b_{3} + c_{2}c_{3}b_{1}b_{2}$$

$$D_{3} = -c_{1}b_{3}c_{3}b_{2} + c_{1}b_{3}^{2}c_{2} + b_{1}c_{3}^{2}b_{2} - c_{2}c_{3}b_{1}b_{3}$$
(2.75)

On utilisera donc, dans la relation 2.70, la matrice [**R**] suivante :

~

$$\left[\mathbf{R}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\frac{c_2c_3l_1^2}{D_1} & \frac{-c_1c_3l_2^2}{D_2} & \frac{c_1c_2l_3^2}{D_3}\\ \frac{b_2b_3l_1^2}{D_1} & \frac{-b_1b_3l_2^2}{D_2} & \frac{b_1b_2l_3^2}{D_3}\\ \frac{-(c_2b_3+b_2c_3)l_1^2}{D_1} & \frac{(c_1b_3+b_1c_3)l_2^2}{D_2} & \frac{-(c_1b_2+c_2b_1)l_3^2}{D_3} \end{bmatrix}$$
(2.76)

Énergie de Flexion 2.2.2.6

En utilisant les relations 2.63, 2.66 et 2.70, le vecteur des courbures discrètes devient :

$$\overrightarrow{\rho} = [\mathbf{B}^{\mathbf{B}}] \{\mathbf{w}\}$$
 (2.77)

où la matrice d'interpolation $\begin{bmatrix} \mathbf{B}^{\mathbf{B}} \end{bmatrix}$ est :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W} \end{bmatrix}$$
(2.78)

On cherche ensuite à exprimer l'énergie de flexion au sein d'un élément, en utilisant l'expression du vecteur des courbures discrètes établie en 2.77.

$$\psi_S^B = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \overrightarrow{\rho}^T \cdot \overrightarrow{m} \, d\Omega_0 \tag{2.79}$$

 $\vec{m} = \begin{bmatrix} m_{xx} \\ m_{yy} \\ m_{xy} \end{bmatrix}$ est le vecteur des moments de flexion dont les composantes sont

décrites par la loi de comportement 2.39. En développant les composantes du vecteur \vec{m} à l'aide des relations 2.39 et avec la définition du vecteur des courbures discrètes 2.77, il vient :

$$\psi^B = \frac{h^3}{24} \int_{\Omega_0} \{\mathbf{w}\}^T \cdot \left[\mathbf{B}^{\mathbf{B}}\right]^T \cdot \overline{\overline{D^B}} \cdot \left[\mathbf{B}^{\mathbf{B}}\right] \cdot \{\mathbf{w}\} \ d\Omega_0$$
(2.80)

que l'on peut écrire sous la forme :

$$\psi^B = \frac{1}{2} \{ \mathbf{w} \}^T \cdot \left[\mathbf{K}^{\mathbf{B}} \right] \cdot \{ \mathbf{w} \}$$
(2.81)

 $\left[\mathbf{K}^{\mathbf{B}}\right]$ désigne la matrice de rigidité en flexion et s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \frac{h^3}{24} \int_{\Omega_0} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{\mathbf{B}} \end{bmatrix}^T \cdot \overline{\overline{D^{B}}} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{\mathbf{B}} \end{bmatrix} d\Omega_0$$
(2.82)

avec :

$$\overline{\overline{D^B}} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}$$
(2.83)

Le gradient de l'énergie de flexion pour un élément est la dérivée de l'énergie ψ^B par

rapport aux déplacements hors plan des nœuds constituant le patch, soit :

$$\frac{\partial \Psi^B}{\partial \{\mathbf{w}\}} = [\mathbf{K}^{\mathbf{B}}] \cdot \{\mathbf{w}\}$$
(2.84)

Pour les cas que nous avons traités dans cette étude, les structures sont initialement planes, ainsi les flèches w_i sont égales aux coordonnées x_j^3 , j = 1..6 des noeuds du patch.

L'élément de plaque sans degrés de liberté en rotation que nous venons de présenter n'est pas un élément standard disponible dans la plupart des codes de calcul par éléments finis. En conséquence, même si cet élément a déjà été utilisé pour des problèmes de flambement, il sera intéressant de comparer son comportement avec celui d'un élément fini de plaque mince couramment utilisé. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi de programmer l'élément plaque DKT. Sa formulation est brièvement décrite en 2.2.3.

2.2.3 Discrétisation par éléments finis de l'élément plaque "DKT"

Les éléments de type Kirchhoff discret tels que le DKT et le DKQ ont été proposés par Batoz et Dhatt (1990) afin de résoudre les problèmes de plaques minces pour lesquels le cisaillement transverse est négligeable. L'élément DKT possède trois nœuds comportant

chacun trois degrés de liberté :
$$\begin{bmatrix} w \\ \beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \\ \beta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}.$$





Batoz et Dhatt (1990) supposent que la rotation β_s définie sur la figure 2.7 est quadratique en s et que la rotation β_n est linéaire en s. Les rotations β_x et β_y sont obtenues à partir d'un simple changement de base des rotations β_n et β_s . Ces hypothèses permettent de garantir la continuité C^0 de β_x et β_y .

Les hypothèses de Kirchhoff sont introduites sur le contour. Elles traduisent le fait que

les déformations de cisaillement transverses sont nulles.

$$\int_{i}^{j} \gamma_{sz} ds = \int_{i}^{j} \frac{\partial w}{\partial s} + \beta_{s} ds = 0$$
(2.85)

 γ_{sz} désigne le cisaillement sur le contour. Avec ces hypothèses, Batoz et Dhatt (1990) construisent la matrice d'interpolation des courbures $[\mathbf{B}^{\mathbf{B}}]$ de telle manière que :

$$\overrightarrow{\rho} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{bmatrix}$$
(2.86)

Nous ne donnons pas ici l'expression de la matrice d'interpolation des courbures de l'élément DKT. Le lecteur intéressé pourra se référer à Batoz et Dhatt (1990) ou il trouvera l'expression exacte de la matrice d'interpolation que nous avons programmée.

A l'instar de l'élément patch décrit dans la section précédente, on associe à chaque élément, lors de l'initialisation du calcul numérique, un plan de référence, un repère et une matrice de rigidité $[\mathbf{K}^{\mathbf{B}}]$ qui ne sont pas ré-évalués lors de la simulation. L'élément plaque DKT est donc un élément en petites déformations et en petits déplacements. L'expression de sa matrice de rigidité est la suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \frac{h^3}{24} \int_{\Omega_0} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{\mathbf{B}} \end{bmatrix}^T \cdot \overline{\overline{D^B}} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{\mathbf{B}} \end{bmatrix} J d\xi d\eta$$
(2.87)

 ξ et η sont les coordonnées décrites sur la figure 2.7, et J est la jacobienne de la transformation entre la configuration de référence de l'élément présenté sur la figure 2.7 et une configuration initiale quelconque.

De même que pour l'élément patch, l'énergie de flexion est calculée par :

$$\psi^B = \frac{1}{2} \{\mathbf{u}\}^T \cdot \left[\mathbf{K}^{\mathbf{B}}\right] \cdot \{\mathbf{u}\}$$
(2.88)

Le gradient de l'énergie de flexion est alors :

$$\frac{\partial \Psi^B}{\partial \{\mathbf{u}\}} = \left[\mathbf{K}^{\mathbf{B}}\right] \cdot \{\mathbf{u}\}$$
(2.89)

Lors de l'assemblage des matrices élémentaires, et notamment lors de l'assemblage des matrices de rigidité en flexion et en membrane, tous les degrés de liberté doivent être exprimés dans le repère global de la structure. Dans ce repère, les degrés de liberté sont les trois déplacements par rapport aux trois axes du repère cartésien global u, v, w, et les trois

rotations par rapport aux trois axes globaux $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. On a donc utilisé des matrices de passage du repère local au repère global pour chaque élément. Toutefois, l'élément plaque DKT ne possède que deux degrés de liberté en rotation. Ces rotations ne correspondent pas directement à des rotations par rapport aux axes du repère local de la plaque puisque dans les repères locaux $\beta_x = \theta_2$ et $\beta_y = -\theta_1$. Cela implique, lors de l'assemblage des matrices de rigidité locale, une réorganisation des lignes et des colonnes de cette matrice.

Nous remarquons également que la rotation par rapport à la normale à la plaque dans le repère local n'apparaît pas comme un degré de liberté. Pour assurer la compatibilité entre le passage du mode local au mode global, on ajoute donc un degré de liberté supplémentaire correspondant à cette rotation. Ceci implique une expansion des blocs de dimension (5,5) de la matrice de rigidité locale en des blocs de dimension (6,6) en ajoutant une ligne et une colonne correspondant à la rotation par rapport à la normale à la plaque. Ces lignes et ces colonnes supplémentaires devant à priori être nulles étant donné qu'aucune énergie de déformation n'est associée à la rotation de la normale autour de son axe. Dans le cadre des structures initialement planes, l'ajout de lignes et de colonnes nulles conduit à la singularité de la matrice de rigidité globale. Pour pallier cette difficulté, on rajoute un terme diagonal non nul correspondant à la raideur associée à la rotation θ_3 . Cette rigidité est bien sûr fictive et elle doit être faible. Dans cette étude, nous avons choisi d'imposer une rigidité correspondant à $\frac{1}{1000}$ de la plus petite rigidité non nulle de notre matrice $[\mathbf{K}^{\mathbf{B}}]$.

Les éléments finis de plaque de type Kirchhoff discrets sont des éléments standard disponibles dans la plupart des codes de calcul par éléments finis notamment ABAQUS. En conséquence, ils ont été utilisés par différents auteurs pour traiter les problèmes d'instabilités impliquant des structures minces. Ainsi, le DKT nous servira d'élément de référence.

2.2.4 Les éléments finis coque minces

Dans notre étude numérique, les deux éléments coques utilisés sont constitués de la superposition de l'élément membrane présenté dans la section 2.2.1 et d'un élément de plaque, le DKT de Batoz et Dhatt (1990), ou l'élément patch, dont la formulation est donnée en 2.2.2.

Pour ces deux éléments, l'énergie de déformation élastique est la somme de l'énergie de déformation de la membrane et de l'énergie de déformation de la flexion, soit :

$$\psi^{int}(\{\mathbf{u}\}) = \psi^M(\{\mathbf{u}\}) + \psi^B(\{\mathbf{u}\})$$
(2.90)

Le gradient de l'énergie potentielle totale est également obtenu en sommant les contributions des deux énergies :

$$\nabla \psi^{int}(\{\mathbf{u}\}) = \nabla \psi^M(\{\mathbf{u}\}) + \nabla \psi^B(\{\mathbf{u}\})$$
(2.91)

Il en est de même pour les matrices de rigidité :

$$[\mathbf{K}(\{\mathbf{u}\})] = [\mathbf{K}^{\mathbf{M}}(\{\mathbf{u}\})] + [\mathbf{K}^{\mathbf{B}}]$$
(2.92)

Les éléments coques que nous avons présentés ici sont formés de la superposition d'un élément membrane géométriquement non linéaire avec un élément de plaque en petite déformation et en petit déplacement.

2.3 Conclusions

L'objectif de ce chapitre était de rappeler les principaux résultats de la théorie des coques minces et de proposer des éléments finis permettant de traiter les problèmes de flambement des films minces.

Nous avons exposé à la section 2.2.1 la formulation discrète d'un élément membrane en grande transformation. La section 2.2.2 introduit l'élément fini de plaque proposé par Sabourin et Brunet (1995) qui a été légèrement modifié pour obtenir une discrétisation plus fidèle de la courbure. Enfin, à la section 2.2.3, l'élément fini DKT a été présenté. Trois types d'élément fini seront ainsi programmés et testés lors de l'étude numérique, un élément membrane et deux éléments coque mince. Les deux éléments coque sont constitués de la superposition d'un élément membrane en grande transformation avec l'élément de plaque "patch" ou "DKT". Ces deux éléments plaque correspondent à des formulations en petite déformation.

La décision d'implémenter les éléments "patch" et DKT est justifiée par leur robustesse vis-à-vis du verrouillage numérique en membrane. Étant donnée la très faible épaisseur des structures étudiées, ce phénomène est important, puisqu'il peut avoir des répercussions considérables sur le résultat des simulations du flambement des films minces.

Ce choix est cohérent avec nos objectifs initiaux. En effet, la rigidité géométrique inhérente à la formulation de l'élément membrane que nous avons détaillée à la section 2.2.1 nous permet d'utiliser les trois éléments présentés ici (membrane, membrane et DKT, membrane et patch) pour résoudre les problèmes de bifurcation.

CHAPITRE 3

TRAITEMENT NUMÉRIQUE DU FLAMBEMENT DES FILMS MINCES.

Au chapitre précédent, nous avons établi les formulations de différents éléments finis nous permettant de considérer l'étude du système 2.2 :

 $\triangle \{\mathbf{q}\} = [[\mathbf{K_0}] + \lambda [\mathbf{K_{G0}}]] \cdot \triangle \{\mathbf{u}\}$

Lorsque la matrice de rigidité $[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}_0] + \lambda [\mathbf{K}_{\mathbf{G}0}]$ est inversible, la résolution numérique de l'équation 2.2 à l'aide d'un algorithme usuel tel que celui de Newton-Raphson ne pose pas de difficultés. Or, dans ce chapitre, nous nous intéressons au calcul numérique du flambement, d'où la nécessité de traiter numériquement la perte d'unicité du système 2.2 au cours d'une simulation.

L'étude des ondulations sur les films minces rentre dans le cadre général du flambement, et de nombreux auteurs ont proposé des méthodes permettant de le traiter. Ces méthodes sont généralement basées sur l'analyse des points de la courbe d'équilibre pour lesquels [**K**] n'est plus inversible. Nous en présenterons deux : la méthode de continuation et l'analyse post-bifurcatoire.

A l'inverse, d'autres méthodes sont dédiées exclusivement à l'étude des membranes en tension. Elles reposent sur les travaux de Wagner (1929) concernant la "Tension field theory". Nous les expliquerons dans ce chapitre, car ce sont les outils les plus couramment employés pour prédire la localisation et l'étendue des zones ondulées sur ce type de structure.

Les résultats que nous présentons, concernant la méthode de continuation et les méthodes inspirées de la "Tension field theory", sont purement bibliographiques. En revanche, nous avons employé la méthode d'analyse post-bifurcatoire lors de notre étude numérique et son utilisation est discutée en s'appuyant sur un exemple de simulation.

Certains inconvénients de l'analyse post-bifurcatoire nous ont poussé à proposer une méthode originale pour le traitement numérique du flambement. Nous avons ainsi mis en œuvre une méthode de descente de premier ordre à l'aide d'un algorithme de gradient conjugué. Cet algorithme est classiquement utilisé pour résoudre les problèmes d'optimisation, mais n'est pas employé pour traiter des problèmes de bifurcation. Les résultats espérés et les limites de cette méthode sont détaillés.

L'objectif de ce chapitre est de proposer des méthodes numériques permettant de mener à bien une simulation, quand au cours du chargement, la matrice de rigidité $[\mathbf{K}]$ de la structure n'est plus inversible. À cette fin, les méthodes fondées sur la "Tension field theory" sont abordées en 3.1, puis à la section 3.2, on effectue un rappel de la théorie de la stabilité avant de présenter deux méthodes classiques de traitement numérique du flambement : la méthode de continuation et l'analyse post-bifurcatoire. L'étude des branches de bifurcation avec une méthode de premier ordre est discutée à la section 3.3. Enfin, la section 3.4 est consacrée au bilan de ce chapitre.

3.1 Les méthodes basées sur la "Tension field theory".

De nombreux travaux concernant la problématique de la prédiction des plis sur des structures minces en tension considèrent une représentation en deux dimensions de la structure en négligeant l'énergie de flexion. Les premières études basées sur une analyse de la structure en deux dimensions sont attribuées à Wagner (1929) qui formula sa théorie sur les membranes en tension intitulée "Tension field theory" en faisant les suppositions suivantes :

- Les films minces ne peuvent pas résister à la compression. Au lieu de cela, la structure s'organise sous forme de plis. En conséquence, la plus petite contrainte principale doit être supérieure ou égale à zéro.
- Les lignes de crêtes des ondulations sont orientées dans la direction de la contrainte principale.
- Une surface pliée ne supporte que les charges orientées dans la direction des plis. La valeur du minimum des contraintes principales dans une zone pliée est nulle, et la direction principale associée est orientée perpendiculairement à la direction des plis.

Ces travaux ont été repris par Mansfield (1968) et Pipkin (1986).

Par la suite Miller et al. (1985) ont utilisé la méthode des éléments finis pour traiter le problème des membranes partiellement ondulées. Ils se sont appuyés sur les hypothèses de la "Tension field theory" pour implémenter une routine qui consiste à modifier la loi de comportement du matériau de la structure selon son état de chargement. Trois cas sont envisagés :

- La structure est tendue et ne présente pas de pli.
- Le film est tendu dans une direction et comprimé dans l'autre, nous sommes en présence d'un pli.
- La structure est comprimée dans deux directions, elle est entièrement détendue.

Ainsi Miller et al. (1985) proposent de remplacer le tenseur usuel des coefficients d'élasticité en contraintes planes :

$$\overline{\overline{D^T}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$
(3.1)

par le tenseur modifié :

$$\overline{\overline{D^W}} = \frac{E}{4} \begin{bmatrix} 2(1+P) & 0 & Q\\ 0 & 2(1-P) & Q\\ Q & Q & 1 \end{bmatrix}$$
(3.2)

Avec :

$$P = \frac{E_x - E_y}{E_I - E_{II}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{2E_{xy}}{E_I - E_{II}}$$
(3.3)

 E_I et E_{II} sont les déformations principales. Les contraintes principales sont notées Σ_I et Σ_{II} .

Pour aboutir à cette formulation, Miller et al. (1985) effectuent un changement de base. Les composantes du tenseur des déformations $\overline{\overline{E}}$ exprimées dans la base locale $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ associée à l'élément sont calculées dans la base principale. Ils supposent ensuite que dans le cas d'un pli on ait :

$$\Sigma_I = E E_I \qquad ; \qquad \Sigma_{II} = 0 \tag{3.4}$$

Ils obtiennent alors l'expression 3.2 de $\overline{\overline{D^W}}$. Enfin, si la membrane est détendue, les contraintes principales Σ_I et Σ_{II} sont fixées à 0.

Ces méthodes sont ainsi appelées IMP pour "Iterative Membrane Properties" et ont été mises en œuvre notamment par Adler et al. (2000) ou plus récemment par Jarasjarungkiat et al. (2008). Adler et al. (2000) ont intégré cette routine dans le code ABAQUS. Les algorithmes IMP sont initialisés en supposant que la membrane est initialement tendue. Au cours du calcul, un critère d'apparition des plis est évalué pour déterminer l'état actuel de la structure au sein de chaque élément fini. L'efficience de ce critère est primordiale afin de garantir la convergence de la méthode. Différentes formulations ont été proposées au cours de ces dernières années et sont résumées dans le tableau 3.1. Kang et Im (1997) puis Liu et al. (2001) en ont discuté la pertinence et ont montré qu'il est préférable d'utiliser le critère mixte.

Une approche alternative consiste à modifier le tenseur des dilatations $\overline{\overline{C}}$ en ajoutant un terme concernant le comportement du pli $\overline{\overline{C^W}}$ au tenseur nominal des dilatations :

iubicuu bii iiteeapitulatii ues eriteres u appartitei des piis		
Critère en contraintes principales	Critère en déformations principales	Critère mixte
$\Sigma_{min} > 0$	$E_{min} > 0$	$\Sigma_{min} > 0$
$\Sigma_{min} \leq 0$ et	$E_{min} \leq 0$ et	$\Sigma_{min} \leq 0$ et
$\Sigma_{max} > 0$	$E_{max} > 0$	$E_{max} > 0$
$\Sigma_{min} \le 0 \text{ et} \\ \Sigma_{max} \le 0$	$ E_{min} \le 0 \text{ et} \\ E_{max} \le 0 $	$E_{max} \leq 0$
	Critère en contraintes principales $\Sigma_{min} > 0$ $\Sigma_{min} \le 0 \text{ et}$ $\Sigma_{max} > 0$ $\Sigma_{min} \le 0 \text{ et}$ $\Sigma_{max} \le 0$	Critère en contraintes principalesCritère en déformations principales $\Sigma_{min} > 0$ $E_{min} > 0$ $\Sigma_{min} \leq 0$ et $\Sigma_{max} > 0$ $E_{min} \leq 0$ et $E_{max} > 0$ $\Sigma_{min} \leq 0$ et $\Sigma_{max} \leq 0$ et $\Sigma_{max} \leq 0$ $E_{min} \leq 0$ et $E_{max} \leq 0$

Tableau 3.1 — Récapitulatif des critères d'apparition des plis

$$\overline{\overline{C^r}} = \overline{\overline{C}} + \overline{\overline{C^W}}$$
(3.5)

 $\overline{C^r}$ est le tenseur effectif des dilatations encore appelé tenseur relaxé. Les travaux de Kang et Im (1997), Epstein et Forcinito (2001) ou plus récemment de Mosler et Cirak (2009) concernent cette méthode.

Les routines éléments finis issues de la "Tension field theory" permettent de prédire efficacement les zones de plis, leur orientation et les contraintes. En revanche aucun détail concernant la géométrie des plis n'est disponible. Il est ainsi impossible d'avoir une idée précise de la géométrie des plis ou de leur nombre. On donne à la figure 3.1 un exemple de résultat obtenu avec cette méthode. La structure étudiée est une membrane en Kapton circulaire de 1m de rayon et de 50 μm d'épaisseur, présentant des découpes circulaires sur sa périphérie. Un chargement de 10 N est imposé à chacune de ses extrémités. Pour des raisons de symétrie, nous avons effectué le traitement sur le quart de la structure.

L'avantage des méthodes décrites ici est leur relative facilité à être implémentées dans des codes éléments finis standard. En effet, elles sont compatibles avec les algorithmes de résolution usuels, tels que l'algorithme de Newton Raphson. De plus, si l'information souhaitée concerne exclusivement l'étendue des zones de plis ou la distribution des contraintes, ces méthodes numériques peuvent s'avérer suffisantes et moins lourdes à mettre en œuvre que celles que nous décrivons aux sections 3.2 et 3.3. Ainsi Adler et al. (2000) ont prédit les zones de plis dans une membrane carrée en tension et Mosler et Cirak (2009) ont donné la distribution des contraintes dans une membrane rectangulaire cisaillée en observant une bonne corrélation entre leurs résultats numériques et les données expérimentales. Toutefois, Adler et al. (2000) ont montré que l'utilisation des méthodes "IMP" peut conduire à la divergence des résultats de simulation en raison du mauvais conditionnement de la matrice de rigidité. Cette difficulté numérique est induite par la modification de la loi de comportement et peut conduire à la singularité de la matrice de rigidité notamment en présence de nombreuses zones détendues.

Les modèles inspirés de la "Tension Field theory" sont des modèles non linéaires même lorsque l'on utilise une loi de comportement élastique linéaire. De fait, la non linéarité du modèle est induite par la présence des plis. La direction des plis et, par conséquent, la loi



Fig. 3.1 — Prédiction des zones de plis lors de la mise en tension d'une membrane circulaire en Kapton (Rayon = 1m, épaisseur = 50 μm)

de comportement matérielle de la structure varient en fonction du champ de déplacement et du champs de contrainte qui lui sont appliqués. La matrice de rigidité de la structure dépend donc du déplacement imposé. L'apparition d'un pli n'est pas traité comme une instabilité dans le cadre de la "Tension Field theory". Le problème est résolu en calculant la réponse non linéaire de la structure par itérations successives.

Dans la section 3.2, nous allons considérer une représentation en trois dimensions des structures étudiées afin d'obtenir une description complète de la géométrie des ondulations. Pour cela, nous nous attacherons à identifier les modes de bifurcation d'une structure, c'est à dire, les champs de déplacements pour lesquels le système 2.2 n'est plus inversible. Ensuite, nous exposerons les méthodes numériques permettant de résoudre le problème du flambement local.

3.2 Les méthodes classiques d'analyse des branches de bifurcation.

Pour obtenir une représentation en trois dimensions des surfaces ondulées, il faut modéliser la structure avec des éléments finis de coques minces puis résoudre le système non-linéaire 2.2. Les techniques de résolution qui sont classiquement utilisées pour traiter les problèmes de flambement diffèrent seulement par la manière de piloter le calcul, notamment au voisinage des points singuliers de la courbe d'équilibre. Dans cette section, nous exposons deux méthodes numériques de résolution du système non-linéaire 2.2 :

- Les analyses post-bifurcatoires dans lesquelles on retrouve les travaux de Wong et Pellegrino (2006b), Wang et al. (2007) et que nous avons utilisées dans Lecieux et Bouzidi (2010).
- Les méthodes de continuation appliquées à la problématique du traitement des ondulations notamment par Diaby et al. (2006).

Avant de les étudier, nous allons rappeler les résultats importants de la théorie générale de la bifurcation. Ensuite, nous présenterons brièvement les méthodes de continuation. Puis l'analyse post-bifurcatoire que nous avons utilisée dans le cadre de cette thèse sera discutée en détail en faisant un parallèle avec l'emploi de la méthode de continuation.

3.2.1 Introduction à la théorie de la bifurcation.

3.2.1.1 Concept de chemin d'équilibre.

Considérons le diagramme de la réponse d'une structure quelconque soumise à un chargement représentatif (tel que décrit sur la figure 3.2)



Fig. 3.2 — Courbe de réponse chargement déplacement

Il s'agit d'une courbe continue dont les points sont appelés des "points d'équilibre" correspondant chacun à une configuration d'équilibre possible de la structure. La courbe de réponse peut être constituée de plusieurs branches. Dans ce cas, la branche qui passe par l'état de référence est appelée chemin fondamental. Les branches issues d'un point critique sont appelées branches bifurquées.

3.2.1.2 Stabilité d'un équilibre statique.

En élasticité et pour des systèmes conservatifs, le flambement est associé avec l'instabilité de la structure. Avant de pouvoir discuter de la nature des instabilités, nous allons rappeler la définition de la stabilité d'un équilibre statique.

L'énergie potentielle totale d'une structure quelconque soumise à un chargement conservatif et proportionnel λ {**q**} s'écrit :

$$\pi(\{\mathbf{u}\},\lambda) = \Psi^{int}(\{\mathbf{u}\}) - \lambda\{\mathbf{q}\}^T \cdot \{\mathbf{u}\}$$
(3.6)

 $\{\mathbf{q}\}$ désigne un chargement de référence et Ψ^{int} est l'énergie élastique interne. C'est

une fonction des déplacements {**u**}. En appliquant un développement en série de Taylor à l'équation précédente, on obtient l'expression de l'énergie potentielle totale après une faible variation (δ {**u**}, $\delta\lambda$), soit :

$$\pi(\{\mathbf{u}\} + \Delta\{\mathbf{u}\}, \lambda + \Delta\lambda) = \pi(\{\mathbf{u}\}, \lambda) + \{\frac{\partial \pi}{\partial\{\mathbf{u}\}}\}^T \Delta\{\mathbf{u}\} + \frac{\partial \pi}{\partial\lambda} \Delta\lambda + \frac{1}{2}\Delta\{\mathbf{u}\}^T \frac{\partial^2 \pi}{\partial\{\mathbf{u}\}^2} \Delta\{\mathbf{u}\} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \pi}{\partial\lambda^2} (\Delta\lambda)^2 + \frac{\partial^2 \pi}{\partial\{\mathbf{u}\}\partial\lambda} \Delta\{\mathbf{u}\}\Delta\lambda + O(\Delta\lambda^3, \Delta\{\mathbf{u}\}^3) = \pi(\{\mathbf{u}\}, \lambda) + \{\mathbf{g}\}^T \cdot \delta\{\mathbf{u}\} - \{\mathbf{q}\}^T \cdot \{\mathbf{u}\}\Delta\lambda + \frac{1}{2}\Delta\{\mathbf{u}\}^T [\mathbf{K}] \Delta\{\mathbf{u}\} - \{\mathbf{q}\}^T \cdot \Delta\{\mathbf{u}\}\Delta\lambda + O(\Delta\lambda^3, \Delta\{\mathbf{u}\}^3)$$

$$(3.7)$$

 $\{g\}$ désigne le gradient de l'énergie potentielle totale et [K] est la matrice Hessienne représentant la raideur de la structure.

En considérant un paramètre de chargement λ fixé, la variation de l'énergie potentielle totale s'écrit :

$$\Delta \pi = \{\mathbf{g}\}^T \cdot \Delta \{\mathbf{u}\} + \frac{1}{2} \Delta \{\mathbf{u}\}^T [\mathbf{K}] \Delta \{\mathbf{u}\} + O(\Delta \{\mathbf{u}\}^3)$$
(3.8)

À l'équilibre, la variation de l'énergie $\Delta \pi$ est stationnaire par rapport à $\Delta \{\mathbf{u}\}$. En conséquence, nous avons :

$$\frac{\partial \pi}{\partial \{\mathbf{u}\}} = \{\mathbf{g}\}(\{\mathbf{u}\}, \lambda) = \{\mathbf{0}\}$$
(3.9)

Dans le cas d'un équilibre stable, la variation de l'énergie $\delta \pi$ doit être positive pour n'importe quelle perturbation infinitésimale $\Delta{\{\mathbf{u}\}}$ autour du point d'équilibre, soit :

$$\Delta \pi > 0 \quad \forall \ \Delta \{\mathbf{u}\} \tag{3.10}$$

C'est la condition d'équilibre stable. En écrivant cette équation 3.10 à l'aide des équations 3.8 et 3.9, elle devient :

$$\Delta\{\mathbf{u}\}^T [\mathbf{K}] \Delta\{\mathbf{u}\} > 0 \qquad \forall \ \Delta\{\mathbf{u}\}$$
(3.11)

En conséquence, la matrice $[\mathbf{K}]$ doit être définie positive et ne posséder ainsi que des valeurs propres positives. La limite de stabilité est définie par :

$$\Delta\{\mathbf{u}\}^T \left[\mathbf{K}\right] \Delta\{\mathbf{u}\} = 0 \tag{3.12}$$

Cela implique que la matrice [K] possède au moins une valeur propre nulle. On a alors :

$$det([\mathbf{K}]) = 0 \tag{3.13}$$

Les points pour lesquels $det([\mathbf{K}])$ s'annulent sont des points critiques.

3.2.1.3 Classification des points critiques.

Nous allons maintenant analyser la nature des points critiques d'une courbe d'équilibre pour un contrôle en force par un paramètre de charge λ . Pour cela, considérons deux points voisins A et B pour lesquels il existe une configuration d'équilibre telle que :

$$\{\mathbf{g}\} (\{\mathbf{u}\}, \lambda)|_{B} = \{\mathbf{g}\} (\{\mathbf{u}_{\mathbf{A}}\} + \Delta\{\mathbf{u}\}, \lambda + \Delta\lambda)$$

$$= \{\mathbf{g}\} (\{\mathbf{u}\}, \lambda)|_{A} + \{\frac{\partial\{\mathbf{g}\}}{\partial\{\mathbf{u}\}}\}|_{A} \Delta\{\mathbf{u}\} + \{\frac{\partial\{\mathbf{g}\}}{\partial\lambda}\}|_{A} \Delta\lambda$$

$$+ O(\Delta\{\mathbf{u}\}^{2}, \Delta\lambda^{2}, \Delta\{\mathbf{u}\}\Delta\lambda)$$
(3.14)

Les points A et B sont des points d'équilibre, en conséquence :

$$\{\mathbf{g}\}(\{\mathbf{u}\},\lambda)|_A = 0$$

$$\{\mathbf{g}\}(\{\mathbf{u}\},\lambda)|_B = 0$$
(3.15)

En négligeant les termes de plus haut degré $O(\Delta \{\mathbf{u}\}^2, \Delta \lambda^2, \Delta \{\mathbf{u}\} \Delta \lambda)$ l'équation 3.14 devient :

$$\left\{\frac{\partial\{\mathbf{g}\}}{\partial\{\mathbf{u}\}}\right\}|_{A}\Delta\{\mathbf{u}\} + \left\{\frac{\partial\{\mathbf{g}\}}{\partial\lambda}\right\}|_{A}\Delta\lambda = [\mathbf{K}]\Delta\{\mathbf{u}\} - \Delta\lambda\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{0}\}$$
(3.16)

Si la matrice **[K]** est définie positive, on peut écrire :

$$\Delta\{\mathbf{u}\} = \Delta\lambda \ [\mathbf{K}]^{-1}\{\mathbf{q}\}$$
(3.17)

C'est la solution classique que l'on trouve lorsque l'on néglige les termes du plus haut degré de l'équation 3.14. Lorsque la matrice [**K**] n'est pas inversible, nous sommes en présence d'un point critique. La discussion concernant la nature de ce point, suit celle proposée par Crisfield (1997). A cette fin, on introduit les valeurs propres θ_i et les vecteurs propres {**z**_i} de la matrice de rigidité [**K**], soit :

$$[\mathbf{K}] \{ \mathbf{z}_{\mathbf{i}} \} = \theta_{\mathbf{i}} \{ \mathbf{z}_{\mathbf{i}} \}$$
(3.18)

De plus, on considère d'une part que les vecteurs orthogonaux z_i sont unitaires :

$$\{\mathbf{z}_{\mathbf{i}}\}^T \cdot \{\mathbf{z}_{\mathbf{j}}\} = \delta_{ij} \tag{3.19}$$

et d'autre part que les valeurs propres sont ordonnées de la façon suivante :

$$\theta_1 < \dots < \theta_i < \theta_{i+1} \tag{3.20}$$

Supposons que la réponse de la structure, à un incrément de charge $\Delta\lambda$, suit un chemin d'équilibre stable. Lorsque un point critique est atteint, soit lorsque l'on arrive à la limite de la stabilité de l'équilibre, la plus faible valeur propre de la matrice de rigidité θ_1 devient nulle, ainsi :

$$[K] \{z_1\} = \{0\}$$
(3.21)

En multipliant les termes de l'équation 3.16 par $\{z_1\}$, on a :

$$\Delta\{\mathbf{u}\}^{T} [\mathbf{K}] \{\mathbf{z}_{1}\} - \Delta \lambda\{\mathbf{q}\}^{T} \cdot \{\mathbf{z}_{1}\} = 0$$
(3.22)

Lorsque l'on atteint un point critique, la condition 3.21 doit être vérifiée. L'équation 3.22 devient :

$$\Delta \lambda \{\mathbf{q}\}^T \cdot \{\mathbf{z}_1\} = 0 \tag{3.23}$$

Il y a deux solutions possibles permettant de satisfaire l'égalité 3.23. On est en présence d'un point limite lorsque l'icrément de chargement est nul :

$$\Delta \lambda = 0 \quad \text{et} \quad \{\mathbf{q}\}^T \cdot \{\mathbf{z}_1\} \neq 0 \tag{3.24}$$

Un point de bifurcation est un point pour lequel le chargement est orthogonal au déplacement, soit :

$$\{\mathbf{q}\}^T \cdot \{\mathbf{z_1}\} = 0 \tag{3.25}$$

Physiquement, un point limite correspond à un maximum de la courbe de réponse de la structure. Considérons comme exemple une membrane circulaire pressurisée modélisée avec un potentiel néo-hookéen compressible. Si l'on trace la flèche de cette structure en fonction du chargement de pression, celle ci augmente jusqu'à un maximum. Au delà, la pression chute au fur et à mesure que la flèche augmente (Diaby, 2005). Un point de bifurcation marquera le passage de la branche fondamentale à une branche bifurquée. Cette bifurcation peut être stable ou instable, comme c'est le cas pour le phénomène bien connu du flambement de la colonne d'Euler. La figure 3.3 donne des exemples de courbes de réponse en présence d'un point limite ou d'un point de bifurcation.



Fig. 3.3 — Classification des points critiques.

De nombreux auteurs se sont penchés sur le problème de la prédiction numérique de la bifurcation stable ou instable. On peut citer en exemple les méthodes asymptotiques numériques (Potier-Ferry et al., 1997) ainsi que les méthodes de continuation. On trouvera une monographie détaillée présentant ces différents algorithmes dans Crisfield (1997) et Felipa (2001). Quelque soit la procédure de calcul utilisée, il s'agit toujours de résoudre le système non-linéaire présenté en 2.1. Seule la technique de résolution diffère entre ces différentes méthodes. Les technique de résolution précédemment citées n'étant pas utilisées dans cette thèse, nous allons brièvement exposer le principe des méthodes de continuation afin de discuter des différences avec les outils que nous avons mis en œuvre dans cette étude numérique i.e. l'analyse post-bifurcatoire et la minimisation directe de l'énergie potentielle.

3.2.2 Les méthodes de continuation.

Les méthodes de suivi des branches bifurquées nécessitent l'utilisation d'un schéma de résolution itératif associé à un pilotage, le plus souvent en longueur d'arc. Le chargement est divisé en incréments et on cherche la position de la structure à l'incrément n + 1 connaissant la position et l'état de la structure à l'incrément n. On veut obtenir :

$$\Delta \{\mathbf{u_n}\} = \{\mathbf{u_{n+1}}\} - \{\mathbf{u_n}\} \quad , \quad \Delta \lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n \quad (3.26)$$

Tels que :

$$\{\mathbf{r}\}(\{\mathbf{u}_{n+1}\},\lambda_{n+1}) = \{\mathbf{r}\}(\{\mathbf{u}_n\}+\Delta\{\mathbf{u}_n\},\lambda_n+\Delta\lambda_n)$$
(3.27)

où $\{\mathbf{r}\}$ ($\{\mathbf{u_n}\}, \lambda_n$) est le résidu d'équilibre à l'incrément n, i.e. la différence entre les efforts intérieurs et les efforts extérieurs imposés à la structure d'étude. A l'équilibre, le résidu est nul. Pour résoudre ce système de N équations à N + 1 inconnues, on ajoute une équation liée à la stratégie de pilotage du problème soit :

$$c\left(\Delta\{\mathbf{u_n}\}, \Delta\lambda_n\right) = 0 \tag{3.28}$$

En supposant que les incréments de chargement sont proportionnels à un chargement de référence $\{q_0\}$:

$$\Delta\{\mathbf{q_n}\} = \Delta\lambda_n\{\mathbf{q_0}\} \tag{3.29}$$

L'équation additionnelle est de la forme (Zienkiewicz et Taylor, 2000) :

$$\Delta\{\mathbf{u}_{\mathbf{u}}\}^{T} \cdot \Delta\{\mathbf{u}_{\mathbf{n}}\} + \Upsilon^{2} \Delta \lambda^{2}\{\mathbf{q}_{\mathbf{0}}\}^{T} \cdot \{\mathbf{q}_{\mathbf{0}}\} = \Delta l^{2}$$
(3.30)

 Δl est la longueur d'arc imposée. Le paramètre Υ est variable selon les auteurs. Riks (1979) a proposé $\Upsilon = 1$ tandis que Crisfield (1981) fixe ce paramètre à 0 –dans ce cas, on parle de longueur d'arc cylindrique–. La figure 3.4 illustre cette stratégie de contrôle. La position de la structure ({ $\mathbf{u_{n+1}}$ }, λ_{n+1}) à l'incrément n + 1 est obtenue par l'intersection de l'ellipsoïde de rayon Δl avec la courbe d'équilibre. Cette ellipsoïde est centrée sur le point ({ $\mathbf{u_n}$ }, λ_n) correspondant à la position de la structure à l'itération n. La valeur du paramètre Δl est fixée arbitrairement par le numéricien. Si sa valeur est trop élevée pour permettre la convergence du calcul, il est alors nécessaire de la diminuer.

Cette méthode permet de passer les points limites. Toutefois, pour le franchissement des points de bifurcation, un traitement particulier s'impose. L'étape préalable au suivi des branches de bifurcation est la détection des points critiques pendant le parcours de la courbe d'équilibre.



Fig. 3.4 — La méthode de contrôle par longueur d'arc cylindrique.

3.2.2.1 Recherche des points critiques en parcourant la courbe d'équilibre de la structure.

Afin de repérer les points critiques d'une courbe d'équilibre, il faut définir une fonction test τ , évaluée à chaque itération du calcul, qui change de signe au passage de ce type de points. Crisfield (1997) propose les fonctions test suivantes :

$$\tau = det([\mathbf{K}])$$

$$\tau = min([\mathbf{D}_{\mathbf{p}}])$$

$$\tau = max([\mathbf{D}_{\mathbf{p}}]) \cdot min([\mathbf{D}_{\mathbf{p}}])$$

$$\tau = \theta_{1}$$
(3.31)

On utilise ici la décomposition dite factorisation de Crout :

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{L}] \ [\mathbf{D}_{\mathbf{p}}] \ [\mathbf{L}]^T \tag{3.32}$$

Où [L] est une matrice triangulaire inférieure dont la diagonale ne comprend que des 1, et $[\mathbf{D}_{\mathbf{p}}]$ est une matrice diagonale. Au cours du chargement, si la condition 3.33 est satisfaite, cela signifie qu'un point critique a été traversé dans l'intervalle $[\lambda_n, \lambda, \lambda_{n+1}]$. Il s'agit alors de déterminer la nature de ce point.

$$\tau(\{\mathbf{u_{n+1}}\}, \lambda_{n+1}) \ \tau(\{\mathbf{u_n}\}, \lambda_n) < 0 \tag{3.33}$$

La nature d'un point singulier est révélée par les conditions 3.24 et 3.25. Une solution est donc de calculer le produit scalaire $\{q_0\} \cdot \{z_1\}$. Cependant, cette méthode de détection de la nature du point critique est relativement coûteuse en termes de temps de calcul car il est nécessaire d'évaluer le vecteur propre $\{z_1\}$ à chaque fois que l'on rencontre un point singulier. Signalons les travaux de Bergan et al. (1978) qui proposent une méthode permettant de s'affranchir de cette contrainte en introduisant un paramètre capable de différencier le passage d'un point limite et d'un point de bifurcation.

3.2.2.2 Localisation du point de bifurcation.

Lorsque un point de bifurcation a été détecté dans l'intervalle $[\lambda_n, \lambda, \lambda_{n+1}]$, son traitement nécessite de se placer sur la courbe d'équilibre au plus près de la position de ce point i.e. ({ $\mathbf{u_c}$ }, λ_c). Shi (1996) propose notamment de chercher par dichotomie la valeur du paramètre Δl permettant de s'approcher à proximité du point de bifurcation.

3.2.2.3 Bifurcation sur une courbe d'équilibre.

Une fois qu'un point de bifurcation a été atteint, deux choix sont possibles : continuer de parcourir la branche fondamentale, ou bien passer sur la branche bifurquée. Si l'on prend la décision de poursuivre sur une branche de bifurcation, il faut définir un prédicteur, c'est à dire une direction de déplacement $\Delta{\{\mathbf{u_p}\}}$ permettant de passer sur la branche bifurquée. A partir du point critique $(\{\mathbf{u_c}\}, \lambda_c)$, l'expression la plus simple de la direction de bifurcation (Crisfield, 1997) est :

$$\Delta\{\mathbf{u}_{\mathbf{p}}\} = \Delta l\{\mathbf{z}_{\mathbf{1}}\} \quad , \quad \Delta\lambda_{p} = 0 \tag{3.34}$$

De nombreux autres prédicteurs existent, le lecteur intéressé trouvera une liste non exhaustive dans Crisfield (1997) et Felipa (2001).

3.2.2.4 Bilan concernant les méthodes de suivi de branches de bifurcation.

Le principal atout des méthodes de continuation, associées à une routine de traitement des points critiques de la courbe d'équilibre, est leur capacité à permettre le suivi d'une branche de stabilité donnée. Elles donnent ainsi la possibilité de trouver l'ensemble des configurations d'équilibre que la structure peut potentiellement atteindre. Toutefois, ces algorithmes sont lourds à mettre en œuvre et peuvent présenter des difficultés de convergence en présence de flambement localisé comme c'est le cas pour le phénomène des ondulations sur un film mince (Diaby, 2005).

Le commanditaire de cette thèse, le Centre National des Études Spatiales, avait pour volonté d'utiliser un code éléments finis commercial pour prédire numériquement l'apparition des plis sur un film mince en tension. Or, les algorithmes de suivi de branches bifurquées ne sont généralement pas implémentés dans les codes éléments finis classiques. Toutefois, les codes commerciaux sont pourvus d'outils permettant d'atteindre des résultats très proches de ceux obtenus via l'utilisation des méthodes de continuation. Nous les présentons dans la section 3.2.3.

3.2.3 L'analyse post-bifurcatoire : traitement de la bifurcation par introduction d'un défaut.

Dans cette première partie de l'étude numérique, nous avons utilisé le logiciel ABA-QUS pour mener une étude éléments finis non-linéaire couplée avec une analyse postbifurcatoire. Nous avons utilisé les outils présentés dans le manuel de l'utilisateur d'ABA-QUS (Hibbit et al., 2006) appliqués à l'étude du flambement d'un tube mince soumis à un chargement axial et à une pression interne. Cette notice est tirée des travaux de Arbocz (1985) et Wohlever (1999).

Une analyse post-bifurcatoire menée avec des éléments finis de coques minces est classiquement effectuée en trois étapes : la première étape consiste à régulariser le problème. On cherche ici à initialiser le calcul à partir d'un état de référence stable. Cet état est souvent obtenu en appliquant une faible pré-contrainte permettant d'augmenter la raideur initiale de la coque par sa rigidité géométrique qui est induite par la mise en tension initiale. La seconde étape est une analyse linéarisée des modes de bifurcation. Les modes de bifurcation sont nécessaires pour prédire la forme des ondulations de la membrane. Les plis prévus par cette analyse sont ensuite introduits sous forme de défauts de la surface initiale. Enfin, au cours de la dernière étape, une analyse par éléments finis non linéaire est effectuée sur la surface initialement perturbée. La technique de résolution du système non-linéaire décrite ici est très proche de celle que nous avons présentée en 3.2.2. Les seules différences concernent la manière d'identifier les points de bifurcation et la technique employée pour initier le calcul sur une branche bifurquée.

Des travaux récents ont démontré l'efficience d'une étude par éléments finis non-linéaire couplée avec une analyse post-bifurcatoire pour simuler l'apparition des plis sur un film mince en tension notamment Wong et Pellegrino (2006b) et Wang et al. (2007). Wong et Pellegrino (2006b) ont étudié les ondulations sur un film mince rectangulaire auquel est imposé un déplacement de cisaillement. Ils se sont également intéressés au cas d'une structure carrée soumise à des chargements à chacune de ses extrémités. L'étude réalisée dans le cadre de cette thèse est fortement inspirée de ces travaux. Outre le fait que nous avons mis en œuvre les mêmes méthodes numériques, leurs conclusions nous ont servi à fixer la norme des défauts introduits à l'initialisation de la simulation, et à choisir un élément fini adapté. Nous détaillons ici l'ensemble des outils employés pour mener une analyse post-bifurcatoire à travers l'étude de la membrane rectangulaire de Wong et Pellegrino (2006b). Il s'agit d'une membrane rectangulaire en Kapton de dimensions $380 \ mm \ \times \ 128 \ mm \ \times \ 25 \ \mu m$. Les nœuds du bord inférieur $y \ = \ 0 \ mm$ sont encastrés et on impose un déplacement de cisaillement de 3 mm aux nœuds du bord supérieur $y = 128 \ mm$ suivant l'axe \vec{x} . Enfin, les bords latéraux $x = 0 \ mm$ et $x = 380 \ mm$ sont laissés libres. La géométrie de cette structure est décrite sur la figure 3.5. Les résultats numériques présentés par Wong et Pellegrino (2006b) ont été reproduits et servent de base à l'illustration et à la critique de la méthode. Ils ont été obtenus en utilisant un maillage structuré contenant 6900 éléments coque S4R5. Seuls les résultats de simulations utiles
à description de la méthode d'analyse post bifurcatoire sont donnés dans cette section. L'ensemble des solutions numériques sera discuté dans le chapitre suivant.



Fig. 3.5 — Géométrie de la structure étudiée par Wong et Pellegrino (2006b)

3.2.3.1 Etude linéarisée des modes de bifurcation.

Considérons une structure dont la matrice de rigidité tangente [K] est définie par :

$$[\mathbf{K}] = \frac{\partial^2 \pi}{\partial \{\mathbf{u}\}^2} \tag{3.35}$$

En l'absence de force suiveuse, on peut écrire la relation 3.35 sous la forme :

$$[\mathbf{K}] = \frac{\partial^2 \Psi^{int}}{\partial \{\mathbf{u}\}^2} \tag{3.36}$$

On suppose que les composantes de la matrice colonne des déformations $\{\mathbf{E}\}$ sont reliées au déplacement par la formule suivante (Zienkiewicz et Taylor, 2000) :

$$\{\mathbf{E}\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{u}\} \tag{3.37}$$

où $[\mathbf{B}]$ dépend de $\{\mathbf{u}\}$.

Le potentiel Ψ^{int} est défini dans le cas élastique linéaire par :

$$\Psi^{int} = \int_{V} \frac{1}{2} \overline{\overline{\Sigma}} : \overline{\overline{E}} \, dV \tag{3.38}$$

En dérivant cette expression, on trouve alors :

$$\frac{\partial \Psi^{int}}{\partial \{\mathbf{u}\}} = \int_{V} \left[\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\right] \left[\mathbf{\Sigma}\right] dV
\frac{\partial^{2} \Psi^{int}}{\partial \{\mathbf{u}\}^{2}} = \int_{V} \left[\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\right] \left[\mathbf{D}\right] \left[\mathbf{B}\right] dV + \int_{V} \frac{\partial \left[\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\right]}{\partial \{\mathbf{u}\}} \left\{\mathbf{\Sigma}\right\} dV$$
(3.39)

On a ainsi :

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}_0] + [\mathbf{K}_G] \tag{3.40}$$

avec :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{0}} \end{bmatrix} = \int_{V} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} \end{bmatrix} dV$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{G}} \end{bmatrix} = \int_{V} \frac{\partial \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{\mathbf{T}} \end{bmatrix}}{\partial \{\mathbf{u}\}} \{\mathbf{\Sigma}\} dV$$
(3.41)

 $[\mathbf{K}_0]$ est la matrice de rigidité tangente initiale calculée à l'état non chargé, elle regroupe toutes les matrices de rigidités linéaires et $[\mathbf{K}_G]$ est la matrice tangente de rigidité géométrique.

Pour déterminer les valeurs critiques du chargement λ_c et les modes de bifurcation correspondants $\{\mathbf{z}_c\}$ de la structure associée à la matrice de rigidité $[\mathbf{K}]$ sans avoir à parcourir l'ensemble de la courbe d'équilibre, on a recours à l'étude linéarisée des modes de bifurcation "Linearized Prebuckling". Pour l'effectuer, on suppose que :

- Le chargement est conservatif et proportionnel :

$$\{\mathbf{q}\} = \lambda \{\mathbf{q}_0\} \tag{3.42}$$

- Le comportement de la structure est élastique et linéaire.
- Le déplacement et le gradient du déplacement précédant le point critique sont faibles.
 On peut ainsi considérer l'hypothèse des petits déplacements et petites transformations. Ces suppositions reviennent à linéariser le comportement de la structure au voisinage d'un point d'équilibre :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{0}} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{0}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{G}} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{G}\mathbf{0}} \end{bmatrix}$$

(3.43)

 $[\Sigma_0]$ est la matrice des contraintes correspondant au chargement de référence q_0 . La condition de limite de stabilité $det([\mathbf{K}]) = 0$, discutée en 3.11, et l'introduction des égalités établies en 3.40, 3.41, 3.43, nous permettent d'établir le problème aux valeurs propres suivant :

$$[\mathbf{K}] \{ \mathbf{z}_{\mathbf{c}} \} = ([\mathbf{K}_{\mathbf{0}}] + \lambda_{c} \ [\mathbf{K}_{\mathbf{G}\mathbf{0}}]) \ \{ \mathbf{z}_{\mathbf{c}} \} = \{ \mathbf{0} \}$$
(3.44)

La figure 3.6 donne des exemples de modes de flambement obtenus, pour différentes valeurs de λ_c , après une pré-tension de 0.5 mm suivant l'axe \vec{y} , lors de l'étude de la structure proposée par Wong et Pellegrino (2006b).



Fig. 3.6 — Exemple de mode de bifurcation obtenu par l'étude linéarisée des modes de flambement pour un déplacement imposé $\delta_c = 3 mm$.

Puisque la réponse de la structure est linéarisée autour d'un point d'équilibre, on peut écrire la relation incrémentale suivante :

$$[\mathbf{K}] \Delta \{\mathbf{u}\} = \Delta \{\mathbf{q}\} \tag{3.45}$$

d'où :

$$\Delta \{\mathbf{q}\} = [[\mathbf{K}_0] + \lambda [\mathbf{K}_{\mathbf{G}0}]] \cdot \Delta \{\mathbf{u}\}$$
(3.46)

C'est l'expression du système discret non-linéaire à résoudre lors de l'étude des ondulations des films minces.

3.2.3.2 Traitement de la bifurcation sur une branche bifurquée par introduction d'un défaut.

Lorsque l'on effectue l'analyse non linéaire par éléments finis d'une structure quelconque i.e. ne présentant pas de défauts géométriques ou matériels, l'algorithme de Newton convergera sur la branche d'équilibre fondamentale. Dans le cas de la structure présentée sur la figure 3.5, la surface restera parfaitement plane. Pour bifurquer, une technique couramment employée consiste à introduire un défaut qui va modifier la réponse de la structure. Une illustration comparant la réponse d'une structure idéale et d'une structure présentant un défaut est donnée sur la figure 3.7. La courbe de réponse de la structure imparfaite ne présente pas de point de bifurcation. En introduisant un défaut au début de l'analyse, on pourra estimer le comportement d'une structure quelconque à l'aide d'une simple simulation par éléments finis non linéaires. Cela permet de s'affranchir de la mise en place d'un traitement spécifique des points critiques pendant le calcul puisque les modes de bifurcation sont identifiés préalablement.



Fig. 3.7 — Courbe de réponse d'une structure en présence de défauts.

Considérons alors le cas où la géométrie du défaut correspond à un mode de flambement prédit par l'analyse linéarisée des modes de bifurcation (par exemple, un des deux modes présentés sur la figure 3.6). Perturber la surface de la structure d'étude en lui donnant la forme d'un mode de flambement particulier revient à faire le choix de la branche de bifurcation sur laquelle on souhaite faire converger le calcul.

Ainsi, le principe d'une analyse post-bifurcatoire est d'effectuer, dans un premier temps, une analyse linéarisée des modes de bifurcation. Ensuite, il faut choisir un mode ou une combinaison de modes à introduire sous forme d'un défaut géométrique Δz . Pour ce faire, on utilise la commande *IMPERFECTION du logiciel ABAQUS, dont les arguments sont w_i et { \mathbf{z}_i } :

$$\Delta z = \sum_{i} w_i \{ \mathbf{z}_i \} \tag{3.47}$$

 w_i représente le poids choisi pour le $i^{\text{ème}}$ mode propre $\{\mathbf{z}_i\}$. Dans notre modèle, les poids w_i retenus sont fixés à 12.5% de l'épaisseur de la membrane. Le choix de l'imperfection initiale a été discuté par Wong et Pellegrino (2006b) qui ont étalonné ce paramètre par comparaison entre leurs résultats numériques et expérimentaux. Les auteurs ont également établi que l'amplitude de la perturbation choisie n'a pas une influence déterminante sur le résultat de la simulation numérique.

Au début de l'analyse post-bifurcatoire, la structure conserve le motif des ondulations introduites comme défauts. On assiste simplement à une évolution de la répartition spatiale du motif ondulé et à une modification de l'amplitude des plis. Ces ondulations présentent initialement des amplitudes de l'ordre de quelques microns qui vont croître jusqu'à atteindre une taille de l'ordre du millimètre environ. Lors de l'étude de la membrane rectangulaire en cisaillement effectuée à la sous-section 4.1.1, on a choisi d'introduire le mode correspondant à $\lambda = 0.26490$ présenté sur la figure 3.6. La figure 3.8 illustre ces propos. Il s'agit du profil central de la membrane rectangulaire pour les déplacements $\delta_c = 0.05 \ mm$ puis $\delta_c = 0.1 \ mm$. On remarque que seules la répartition et la taille des plis évoluent. Leur nombre reste constant.



Fig. 3.8 — Exemple de traitement numérique d'un phénomène de flambement global par introduction d'un défaut.

L'introduction de défauts est une méthode appropriée pour étudier le flambement global de la structure. Dans notre cas, cela permet d'initier efficacement un motif d'ondulation. Toutefois, la simulation de la division d'un pli, pose d'importants problèmes numériques et la méthode exposée précédemment ne permet pas la convergence du calcul dans ce cas de figure. En effet, l'étude linéarisée des modes de bifurcation n'est pas adapté à la détection du flambement d'un pli. Or, nous avons observé à la section1.4.3.3 que le mécanisme de création des plis par division est un phénomène de flambement instable n'affectant qu'un seul pli. Pour résoudre cette difficulté numérique Hibbit et al. (2006) proposent d'examiner le flambement instable d'un point de vue dynamique.

3.2.3.3 Traitement dynamique d'une branche de bifurcation instable.

Physiquement, la division d'un pli peut être considérée comme un phénomène dynamique à l'instar de la plupart des phénomènes de flambement locaux. C'est donc avec une simulation dynamique que Riks et al. (1996) envisagent la résolution de ce type de problème. Les auteurs suggèrent, dans un premier temps, d'effectuer une analyse statique classique. L'équilibre satisfait alors la relation $\{\mathbf{r}\}(\{\mathbf{u}\}, \lambda) = \{\mathbf{0}\}$. Puis, dès que l'on est en présence d'une branche d'équilibre instable, le problème devient :

$$[\mathbf{M}] \ \frac{\partial^2 \{\mathbf{u}\}}{\partial t^2} \ - \ \gamma_d \ [\mathbf{M}] \ \frac{\partial \{\mathbf{u}\}}{\partial t} \ + \ \{\mathbf{r}\}(\{\mathbf{u}\},\lambda) \ = \ \{\mathbf{0}\}$$
(3.48)

où $[\mathbf{M}]$ est la matrice de masse et γ_d est un paramètre d'amortissement. Riks et al. (1996) ont observé qu'à nombreuses occasions, un système réel "sautait" entre deux points distants d'une courbe d'équilibre statique. L'objectif du traitement dynamique d'une branche instable est de passer le plus rapidement possible entre deux états d'équilibres statiques voisins, ce qui revient à passer directement du point A au point B de la figure 3.9 sans décrire la partie instable (symbolisée par des tirets) de la courbe d'équilibre. Cette opération est rendu possible grâce au traitement dynamique de la solution sur le tronçon AB.



Fig. 3.9 — Traitement dynamique d'un point de bifurcation instable.

Une procédure similaire celle que proposent Riks et al. (1996) peut être mise en place, avec le logiciel ABAQUS. Un algorithme de stabilisation destiné aux problèmes quasi statiques est implémenté dans ABAQUS et est accessible via la commande *STABILIZE. Lorsqu'un pivot nul est détecté, au cours de la résolution du système $\{\mathbf{r}\}(\{\mathbf{u}\},\lambda) = \{\mathbf{0}\}$, des forces d'amortissement sont ajoutées aux efforts extérieurs appliqués au système. Le système d'équations à résoudre est alors :

$$\{\mathbf{r}\}(\{\mathbf{u}\},\lambda) - \gamma_d \ [\mathbf{M}^*]\{\mathbf{v}\} = \{\mathbf{0}\}$$

$$(3.49)$$

Où $\{\mathbf{v}\} = \frac{\Delta\{\mathbf{u}\}}{\Delta t}$, le paramètre Δt n'a pas de réalité physique mais correspond au temps cinématique. $[\mathbf{M}^*]$ est une matrice de masse artificielle.

Une fois que le système parcourt à nouveau une branche d'équilibre stable, les forces de dissipation sont annulées et on utilise à nouveau une méthode de calcul quasi statique. Cette procédure est traitée automatiquement dans le logiciel à partir du moment ou l'utilisateur active la commande *STABILIZE. Seul le choix de la valeur du paramètre γ_d est laissé à sa discrétion.

La dissipation de l'énergie a pour effet de stabiliser le problème mais peut conduire à une prédiction incohérente des ondulations. En effet, la caractéristique du flambement des films minces est que de faibles variations de la valeur du potentiel peuvent entraîner des modifications importantes de la cinématique des ondulations. Dans ces conditions, la dissipation d'une quantité d'énergie même faible, peut avoir des répercussions importantes sur le motif des ondulations. Il conviendra alors de fixer la valeur du paramètre γ_d avec précaution. Dans cet exemple, nous avons initialisé la valeur de γ_d à 10⁻⁸. Elle a ensuite été augmentée à chaque fois qu'il était impossible de faire converger le calcul jusqu'à la valeur $\gamma_d = 10^{-6}$. Un exemple de traitement numérique du flambement instable est visible sur la figure 3.10. On peut remarquer que seule la zone dans laquelle le pli s'est affaissé a été affectée par le flambement.



Fig. 3.10 — Exemple de traitement numérique d'un phénomène de flambement localisé obtenu pour $\delta_c = 2.1 \ mm$.

3.2.3.4 Critique de l'analyse post-bifurcatoire.

L'analyse post-bifurcatoire demande au préalable d'effectuer une analyse linéarisée des modes de bifurcation, puis de choisir une combinaison de modes à introduire comme défaut. Il va de soit que l'efficience de la méthode nécessite une identification correcte des modes de flambement. Puis il faudra choisir intelligemment celui qui sera utilisé, pour initier le déplacement hors plan. C'est la première limite de la méthode car la détection des points de bifurcation n'est possible que si le comportement de la structure est relativement linéaire avant ces points critiques. Ensuite, le choix des modes de bifurcation peut s'avérer complexe et implique de ce fait une bonne compréhension physique du problème.

Prenons l'exemple de la membrane rectangulaire en cisaillement. Le premier mode

de bifurcation prédit par le calcul numérique est donné sur la figure 3.6 a). Ce mode correspond au flambement à proximité des bords latéraux, mais il ne renseigne en rien sur le développement des ondulations dans la partie centrale de la membrane. En fait, il s'agit du point de départ de la formation des zones détendues près des bords libres. Pour initier le déplacement hors plan, il est plus judicieux de considérer des modes de bifurcation situés dans la zone centrale du film. La figure 3.6 b) représente un des modes ($\lambda_c = 0.26490$) que l'on observe sur la partie centrale. C'est le mode qui a été introduit dans notre modèle et qui nous permis de faire converger le calcul alors qu'il a été impossible de faire de même avec le premier mode de bifurcation ($\lambda_c = 0.15979$) de la membrane rectangulaire présenté sur la figure 3.6 a).

Enfin, comme nous l'avons signalé précédemment, la dissipation de l'énergie, dans le cadre du traitement dynamique des instabilités, peut affecter la réponse de la structure et conduire à des résultats de simulation incohérents.

L'ensemble des points que nous venons de souligner montre que la prédiction d'un motif d'ondulation à l'aide de la méthode d'analyse post-bifurcatoire peut s'avérer complexe dès lors que le numéricien n'a pas une idée précise de la solution qu'il souhaite atteindre. Malgré ces difficultés, les simulations que nous avons réalisées avec ABAQUS ont donné d'excellents résultats pour l'ensemble des problèmes que nous avons traités. De plus, même si l'analyse post-bifurcatoire ne présente pas la même souplesse que les méthodes de continuation, elle permet d'étudier différentes branches d'équilibre. Il est possible de prédire plusieurs configurations cinématiques pour un chargement donné. Soulignons également, que la plupart des codes éléments finis présents sur le marché (ABA-QUS, SAMCEF, ANSYS) intègrent les outils numériques que nous avons mis en œuvre et sont à même de reproduire de tels résultats. Cependant, les contraintes inhérentes à l'utilisation de la méthode d'analyse post-bifurcatoire nous ont conduits à envisager une nouvelle approche pour le traitement des instabilités. Notre objectif principal est d'arriver à prédire l'évolution d'une surface ondulée même dans le cas d'une structure complexe pour laquelle nous ne disposerions pas de résultats expérimentaux. Notre choix a porté sur le développement de la méthode de minimisation directe de l'énergie potentielle en utilisant un algorithme de gradient conjugué. Elle est présentée à la section 3.3.

3.3 Résolution du système non-linéaire avec un algorithme de gradient.

Les algorithmes de descente du second ordre tels que l'algorithme de Newton, associés à une stratégie de contrôle (en force, en déplacement ou en longueur d'arc) sont bien adaptés au calcul des structures massives pour lesquelles la matrice de rigidité est bien conditionnée. Lorsque les valeurs des raideurs dans toutes les directions sont équivalentes, le traitement d'un problème élastique géométriquement non linéaire est généralement rapide. Toutefois, ces méthodes perdent de leur efficacité lorsque les raideurs dans certaines directions deviennent faibles. C'est le cas pour le traitement numérique du flambement des films minces. Dans cette thèse, nous avons choisi d'utiliser une méthode de descente du premier ordre, l'algorithme du gradient conjugué pour traiter numériquement le problème du flambement. De manière générale, cette méthode est adaptée à la résolution des problèmes mal conditionnés puisqu'elle repose sur l'évaluation du gradient de l'énergie potentielle totale de la structure, et non sur le calcul de la matrice de rigidité. Au voisinage d'une position hors équilibre d'une structure, le gradient permettra de déterminer une direction de recherche du point d'équilibre stable de plus faible énergie, pourvu que ce dernier existe.

L'algorithme du gradient conjugué a notamment été employé par Maurin et Motro (2001) pour déterminer la forme de structures constituées de membranes et de câbles en tension. Dans cette thèse, nous avons programmé nos éléments finis dans l'environnement de calcul Surface Evolver (Brakke, 1992). Ce code, initialement pensé pour la recherche en mécanique des fluides, permet de minimiser l'énergie de tension de surface d'un liquide. Il est utilisé pour déterminer l'évolution de la forme d'un liquide.

3.3.1 Description de l'algorithme de gradient conjugué.

Les algorithmes de gradient sont des méthodes itératives classiquement employées pour minimiser des formes quadratiques de type :

$$f(x) = \frac{1}{2} \{ \mathbf{x} \}^{T} [\mathbf{A}] \{ \mathbf{x} \} - \{ \mathbf{b} \}^{T} \cdot \{ \mathbf{x} \} + c$$
(3.50)

Lorsque $[\mathbf{A}] = [\mathbf{K}]$, $\{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{u}\}$, $\{\mathbf{b}\} = \{\mathbf{q}\}$ et c = 0, le problème à résoudre est celui présenté dans l'égalité 2.2. Si $[\mathbf{A}]$ est définie positive, la fonctionnelle f(x) est minimisée en résolvant le système : $[\mathbf{A}] \{\mathbf{x}\} = \{\mathbf{b}\}$. Lorsque $[\mathbf{A}]$ est définie positive, la surface de la fonctionnelle f(x) forme une paraboloïde et son gradient donne la direction de la plus grande pente. Au centre de cette paraboloïde, le gradient de la forme quadratique est nulle. C'est cette propriété qui est exploitée par les méthodes de gradient pour minimiser l'énergie d'une fonctionnelle. Pour les problèmes d'élasticité que nous traitons ici, le gradient de l'énergie est identique au résidu d'équilibre employé dans les méthodes des éléments finis classique, soit : $\{\mathbf{g}(\{\mathbf{x}_i\})\} = \{\mathbf{r}_i\}$. Ici $\{\mathbf{x}_i\}$ contient l'ensemble des coordonnées à l'itération *i*. Une illustration est donnée en figure 3.11.

3.3.1.1 Un exemple de méthode de descente.

La méthode de descente la plus simple, la méthode de la plus grande pente, consiste à démarrer d'un point arbitraire $\{x_0\}$, la configuration initiale de la structure par exemple, et à descendre dans la direction de la plus grande pente jusqu'à un point $\{x_1\}$. On recalcule ensuite le gradient au point $\{x_1\}$ et on recommence jusqu'à atteindre un point $\{x_i\}$ suffisamment proche de la solution recherchée :



Fig. 3.11 — Représentation d'un potentiel (lignes de niveaux) et de son gradient (champ de vecteur)

$$\{\mathbf{x}_{i+1}\} = \{\mathbf{x}_i\} + \alpha\{\mathbf{r}_i\}$$

$$(3.51)$$

où le résidu d'équilibre à l'itération i est calculé par :

$$\{\mathbf{r}_{\mathbf{i}}\} = \{\mathbf{b}\} - [\mathbf{A}]\{\mathbf{x}_{\mathbf{i}}\}$$
(3.52)

Il s'agit alors de déterminer α pour atteindre le minimum d'une paraboloïde. Cette dernière est formée de l'intersection de la surface de la fonctionnelle avec son plan orthogonal contenant la direction de descente (voir figure 3.12). On atteint le minimum de cette courbe lorsque le résidu d'équilibre au point { \mathbf{x}_{i+1} } est perpendiculaire à la direction de descente { \mathbf{r}_i }, soit : { \mathbf{r}_i } · { \mathbf{r}_{i+1} } = 0. On obtient ainsi α_i :

$$\alpha_i = \frac{\{\mathbf{r}_i\}^T \cdot \{\mathbf{r}_i\}}{\{\mathbf{r}_i\}^T [\mathbf{A}] \{\mathbf{r}_i\}}$$
(3.53)

La figure 3.12 montre le schéma de convergence en escalier caractéristique de la méthode de la plus grande pente. Toutefois, ce schéma n'est pas optimal en terme de vitesse de convergence, et d'autre part cette méthode nécessite de calculer la matrice $[\mathbf{A}]$, où, dans notre cas, la matrice de rigidité à chaque itération. Ainsi dans cette thèse, nous avons utilisé l'environnement de calcul Surface Evolver (Brakke, 1992) qui met en œuvre la variante de Fletcher et Reeves (1964) de l'algorithme du gradient conjugué.



Fig. 3.12 — Une méthode de gradient : l'algorithme de la plus grande pente

3.3.1.2 L'algorithme de gradient conjugué de Fletcher et Reeves (1964).

L'idée directrice des méthodes de gradient conjugué est d'employer une direction de descente $\{d_i\}$ prenant en considération l'histoire des itérations précédentes plutôt que de chercher un minimum dans la direction du gradient de l'énergie :

$$\{\mathbf{x}_{i+1}\} = \{\mathbf{x}_i\} + \alpha_i\{\mathbf{d}_i\} \tag{3.54}$$

avec :

$$\{\mathbf{d}_{\mathbf{i}}\} = \begin{cases} -\{\mathbf{r}_{\mathbf{i}}\} & \text{pour } \mathbf{i} = 0\\ -\{\mathbf{r}_{\mathbf{i}}\} + \beta_{i}\{\mathbf{d}_{\mathbf{i}}\} & \text{pour } \mathbf{i} > 0 \end{cases}$$
(3.55)

 β_i est un scalaire. Fletcher et Reeves (1964) proposent la formulation suivante :

$$\beta_i = \frac{\{\mathbf{r}_i\}^T \cdot \{\mathbf{r}_i\}}{\{\mathbf{r}_{i-1}\}^T \cdot \{\mathbf{r}_{i-1}\}}$$
(3.56)

Enfin, on cherche α_i en utilisant une méthode "Line Search" de telle sorte que :

$$\alpha_i = \arg\min_{\alpha>0} f(\{\mathbf{x}_i\} + \alpha \{\mathbf{d}_i\})$$
(3.57)

Pour ce faire, on évalue la valeur de la fonction $f({\mathbf{x}_i} + \alpha {\mathbf{d}_i})$ pour trois valeurs de α et on suppose une interpolation quadratique de la fonction $f(\alpha)$, soit :

$$f^{int}(\alpha) = a^{int}\alpha^2 + b^{int}\alpha + c^{int}$$
(3.58)

 α_i est la valeur qui minimise la fonction $f^{int}(\alpha)$. Cette méthode ne nécessite pas l'évaluation de la matrice Hessienne à chaque itération. En effet, le gradient est calculé directement par dérivation de l'énergie potentielle totale de la structure soit :

$$\{\mathbf{r}\} = \{\mathbf{g}\} = \{\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x})\} \tag{3.59}$$

Dans le cas d'une analyse non linéaire, l'évaluation de la matrice Hessienne est extrêmement coûteuse eu égard au temps de calcul. La discrétisation du gradient proposée en 2.2.1 rend ainsi plus efficace l'utilisation de la méthode "Line Search" que l'évaluation du paramètre α via le calcul de la matrice de rigidité. La convergence de la méthode du gradient conjugué est illustrée sur la figure 3.13. On peut remarquer que cette méthode permet une convergence beaucoup plus rapide, en termes de nombre d'itérations, que la méthode de la plus grande pente même s'il existe parfois des risques de divergence.



Fig. 3.13 — Convergence de la variante Fletcher-Reeves de l'algorithme du gradient conjugué.

Plusieurs variantes de l'algorithme du gradient conjugué existent qui diffèrent principalement par l'évaluation des paramètres α_i et β_i . Citons en exemple Polak et Ribiere (1969).

3.3.2 Comportement de l'algorithme dans le cas d'un potentiel non convexe.

Dans le cadre des analyses non linéaires que nous effectuons ici, la surface de l'énergie potentielle totale de notre structure d'étude est assimilable à un "drap" que l'on déforme en fonction du chargement sur lequel est posée une bille symbolisant la position du système. Initialement, cette surface est convexe. Au cours du chargement, elle peut devenir non convexe, notamment en cas de flambement local. Pour un chargement fixé, cette surface peut présenter des minima locaux, en cas d'équilibre stable, ou des points "selles" si l'équilibre est instable. Lorsque que l'on rencontre une ligne de coordonnées selon laquelle le potentiel est constant, on parle d'équilibre neutre. Enfin, un point de bifurcation sera caractérisé par une courbure nulle suivant la direction de bifurcation. La figure 3.14 propose un exemple de la forme d'un potentiel lors d'une bifurcation stable en 3.14 a) et d'une bifurcation instable 3.14 b). La position de la bille symbolise la position occupée par la structure.



Fig. 3.14 — Un exemple d'évolution de la surface d'un potentiel au cours du chargement

La preuve de la convergence des méthodes de gradient est établie dans le cas des potentiels convexes. Cependant, la convexité d'un potentiel est une condition suffisante mais pas nécessaire à la convergence globale. Ainsi, Grippo et Lucidi (1997) ont discuté la convergence globale de l'algorithme de gradient conjugué dans le cas de la minimisation d'une fonctionnelle non convexe. Ils ont ainsi montré que la convergence dépend essentiellement du choix du paramètre α_i . En conséquence, l'algorithme de gradient conjugué peut converger vers un minimum global de la fonctionnelle à minimiser. Autrement, il convergera vers un minimum local voisin si celui ci existe.

La convergence de l'algorithme de gradient nécessite une direction de descente i.e. un gradient non nul. Nous allons étudier la variation de l'énergie potentielle d'une structure le long d'un chemin d'équilibre notamment au voisinage des points critiques afin d'appréhender la réponse de l'algorithme de gradient au passage de ces points.

3.3.3 Variation de l'énergie le long d'un chemin d'équilibre.

Pour étudier les point singuliers, Crisfield (1997) propose d'écrire l'incrément de déplacement dans la base des vecteurs propres de la matrice de rigidité $[\mathbf{K}]$:

$$\Delta\{\mathbf{u}\} = A_1\{\mathbf{z_1}\} + A_2\{\mathbf{z_2}\} + \ldots + A_n\{\mathbf{z_n}\}$$
(3.60)

Quand $\Delta{\{\mathbf{u}\}}$ appartient au chemin d'équilibre, l'équation 3.16 est satisfaite. La composante du déplacement A_i est obtenue en multipliant chaque terme de l'équation 3.16 par $\{\mathbf{z_i}\}$. Les relations 3.19 et 3.60 permettent alors d'écrire :

$$A_i = \Delta \lambda \frac{\{\mathbf{q}\}^T \cdot \{\mathbf{z}_i\}}{\theta_i} \tag{3.61}$$

Cette égalité n'est vraie que lorsque l'on se trouve sur un chemin d'équilibre. Elle suppose que ce chemin d'équilibre est linéarisé entre les points de coordonnées ({**u**}, λ) et ({**u**}+ Δ {**u**}, λ + $\Delta\lambda$). En conséquence, les termes de plus haut degré $O(\Delta$ {**u**}², $\Delta\lambda^2$, Δ {**u**} $\Delta\lambda$) de l'équation 3.16 sont négligés .

3.3.3.1 Variation de l'énergie au voisinage d'un point régulier d'une courbe d'équilibre stable.

Considérons la courbe de réponse d'une structure quelconque présentée sur la figure 3.15. La surface du potentiel a été superposée à la courbe de réponse afin de visualiser l'évolution de l'énergie au cours du chargement. La position de la structure est quant à elle symbolisée par une bille de couleur noire. Cette illustration ainsi que celles qui suivent sont inspirées des travaux de Felipa (2001).



Fig. 3.15 — Variation de l'énergie au voisinage d'un point régulier d'une courbe d'équilibre stable Supposons que la structure soit initialement en position d'équilibre au point A de

$$\pi(\{\mathbf{u}\} + \Delta\{\mathbf{u}\}, \lambda) - \pi(\{\mathbf{u}\}, \lambda) = \frac{1}{2}\Delta\{\mathbf{u}\}^T [\mathbf{K}] \Delta\{\mathbf{u}\} + O(\Delta\lambda^3, \Delta\{\mathbf{u}\}^3)$$
$$= \frac{1}{2} \left[\theta_1 A_1^2 + \theta_2 A_2^2 + \dots + \theta_n A_n^2\right]$$
(3.62)

Puisque A est un point régulier de la courbe d'équilibre, les valeurs propres θ_n sont toutes strictement positives et la quantité $\pi(\{\mathbf{u}\} + \Delta\{\mathbf{u}\}, \lambda) - \pi(\{\mathbf{u}\}, \lambda)$ est toujours positive. En conséquence, perturber l'équilibre de la structure au voisinage du point A, n'aura pas d'effet sur la position de la structure qui retournera à l'équilibre en A.

Lorsque l'on augmente le chargement de $\lambda \grave{a} \lambda + \Delta \lambda$, la surface du potentiel est modifiée. Le minimum de la surface d'énergie se trouve désormais en B i.e. au point de coordonnées $(\{\mathbf{u}\} + \Delta\{\mathbf{u}\}, \lambda + \Delta\lambda)$. Les points A $(\{\mathbf{u}\}, \lambda)$ et B $(\{\mathbf{u}\} + \Delta\{\mathbf{u}\}, \Delta\lambda + \lambda)$ sont des points d'équilibre. Dans ces conditions, la relation 3.17 reliant l'incrément de déplacement $\Delta\{\mathbf{u}\}$ à l'incrément de chargement $\Delta\lambda\{\mathbf{q}\}$ est satisfaite, soit : $\Delta\{\mathbf{u}\} = \Delta\lambda[\mathbf{K}]^{-1}\{\mathbf{q}\}$. La minimisation de l'énergie potentielle par algorithme de gradient démarre au point $A'(\{\mathbf{u}\}, \lambda + \Delta\lambda)$. Le gradient de l'énergie potentielle pour un point quelconque A'' situé sur la surface d'énergie $\grave{a} \pi(\lambda + \Delta\lambda)$ est donné par la relation 3.14, soit : $\{\mathbf{g}\}|_{A''} = [\mathbf{K}]\Delta\{\mathbf{u}\} - \Delta\lambda\{\mathbf{q}\}$. Au point A' il existe donc une direction de descente non nulle telle que :

$$\{\mathbf{g}\}(\{\mathbf{u}\}, \lambda + \Delta\lambda) = \Delta\lambda\{\mathbf{q}\}$$
(3.63)

Considérons alors la variation d'énergie entre une structure positionnée en A' et en B soit :

$$\pi(\{\mathbf{u}\} + \Delta\{\mathbf{u}\}, \lambda + \Delta\lambda) - \pi(\{\mathbf{u}\}, \lambda + \Delta\lambda) = \frac{1}{2}\Delta\{\mathbf{u}\}^T [\mathbf{K}] \Delta\{\mathbf{u}\} - \{\mathbf{q}\}^T \cdot \Delta\{\mathbf{u}\}\Delta\lambda + O(\Delta\lambda^3, \Delta\{\mathbf{u}\}^3) = \frac{1}{2} \left[\theta_1 A_1^2 + \theta_2 A_2^2 + \dots \theta_n A_n^2\right] - \{\mathbf{q}\}^T \cdot \Delta\{\mathbf{u}\}\Delta\lambda$$
(3.64)

La i^{eme} composante de $\{\mathbf{q}\}$ dans la base des vecteurs propres de $[\mathbf{K}]$ est donnée par $\Delta\lambda\{\mathbf{q}\}^T\{\mathbf{z}\}_i = A_i\theta_i$. Le produit $\{\mathbf{q}\}^T \cdot \Delta\{\mathbf{u}\}$ exprimé dans la base des vecteurs propres conduit donc à : $\theta_1 A_1^2 + \theta_2 A_2^2 + \ldots + \theta_n A_n^2$. L'expression de la variation d'énergie exprimée dans l'égalité 3.64 devient :

$$\pi(\{\mathbf{u}\} + \Delta\{\mathbf{u}\}, \lambda + \Delta\lambda) - \pi(\{\mathbf{u}\}, \lambda + \Delta\lambda) = -\frac{1}{2} \left[\theta_1 A_1^2 + \theta_2 A_2^2 + \dots + \theta_n A_n^2\right]$$
(3.65)

Cette variation d'énergie est négative. Pour un chargement fixé $(\lambda + \Delta \lambda)$, l'utilisation d'une méthode de descente dans le but de minimiser l'énergie potentielle totale de la structure convergera de la configuration $(\{\mathbf{u}\}, \lambda + \Delta \lambda)$ vers la configuration de plus basse énergie $(\{\mathbf{u}\} + \Delta \{\mathbf{u}\}, \lambda + \Delta \lambda)$.

Intéressons-nous maintenant à l'étude d'un point de bifurcation stable :

3.3.3.2 Variation de l'énergie au voisinage d'un point de bifurcation stable.

Ce cas est illustré par la figure 3.16



Fig. 3.16 — Variation de l'énergie au voisinage d'un point de bifurcation d'une courbe d'équilibre stable

Au point de bifurcation A, on a $\theta_1 = 0$. Si l'on écarte légèrement la structure de cette position d'une quantité $\Delta{\{\mathbf{u}\}}$, la variation d'énergie s'écrira :

$$\pi(\{\mathbf{u}\} + \Delta\{\mathbf{u}\}, \lambda) - \pi(\{\mathbf{u}\}, \lambda) = \frac{1}{2}\Delta\{\mathbf{u}\}^T [\mathbf{K}] \Delta\{\mathbf{u}\} + O(\Delta\lambda^3, \Delta\{\mathbf{u}\}^3)$$
$$= \frac{1}{2} \left[\theta_1 A_1^2 + \theta_2 A_2^2 + \dots \theta_n A_n^2\right]$$
$$= \frac{1}{2} \left[\theta_2 A_2^2 + \dots \theta_n A_n^2\right]$$
(3.66)

La variation de potentiel est nulle pour un déplacement $\Delta{\{\mathbf{u}\}} = \varepsilon{\{\mathbf{z}_1\}}$ avec $\varepsilon \ll 1$. L'équilibre est indifférent pour un déplacement dans la direction de $\{\mathbf{z}_1\}$, et stable pour un déplacement suivant une autre direction $\{\mathbf{z}_i\}$. En résumé, on aura :

$$\pi(\{\mathbf{u}\} + \varepsilon\{\mathbf{z}\}_1, \lambda) = \pi(\{\mathbf{u}\}, \lambda) \tag{3.67}$$

Cela implique, qu'au cours du chargement, lors du passage de l'état $(\lambda - \Delta \lambda)$ à l'état (λ) , l'algorithme de gradient peut converger vers n'importe quel point d'une "vallée" d'axe $\{\mathbf{z_1}\}$ au voisinage du point de bifurcation. Notons que cette remarque vaut également pour les points de bifurcation instables.

Ensuite lorsque l'on continue de charger la structure, la surface du potentiel présente

deux minima locaux B_1 et B_2 . Au voisinage de ces points, on peut se ramener à l'étude d'un point régulier. L'algorithme de gradient initialisé au point A peut potentiellement stabiliser la structure vers un des deux minima locaux, B_1 ou B_2 , puisque nous ne privilégions pas de direction de descente, comme c'est le cas pour les méthodes de continuation. La convergence vers un de ces deux points dépendra de l'histoire des directions de descente, de la pente au voisinage du point A' et de la position initiale du point A'. Ainsi, la méthode de gradient permet de résoudre le problème du passage des points de bifurcations stable mais le choix de la branche de bifurcation est aléatoire et est extrêmement sensible aux perturbations (voir sous section 4.2.2.1).

Nous allons maintenant nous intéresser à l'étude de la bifurcation sur une branche d'équilibre instable :

3.3.3.3 Variation de l'énergie au voisinage d'un point de bifurcation instable.

Un exemple de bifurcation instable est donné sur la figure 3.17



Fig. 3.17 — Variation de l'énergie au voisinage d'un point de bifurcation d'une courbe d'équilibre instable

Lors du passage de la position A à la position A' sur une branche d'équilibre instable, la variation d'énergie de la structure est :

$$\pi(\{\mathbf{u}\} + \Delta\{\mathbf{u}\}, \lambda + \Delta\lambda) - \pi(\{\mathbf{u}\}, \lambda + \Delta\lambda) = -\frac{1}{2} \left[\theta_1 A_1^2 + \theta_2 A_2^2 + \dots + \theta_n A_n^2\right]$$
(3.68)

Cette expression est identique à celle que l'on a trouvée lors de l'étude d'un point régulier. Ici, la limite de stabilité a été franchie, il y a donc au moins une valeur propre négative. $\theta_1 < 0$. Il existe donc des chargements $\Delta \lambda$ {**q**} pour lesquels $\pi(\{\mathbf{u}\} + \Delta\{\mathbf{u}\}, \lambda + \Delta\lambda) - \pi(\{\mathbf{u}\}, \lambda + \Delta\lambda) < 0$. Dans ces conditions, la structure s'écartera du point "selle" B. Ainsi, il sera impossible de décrire une branche d'équilibre instable avec une méthode de descente.

Si la surface du potentiel présente un minimum, même éloigné de la position d'ini-

tialisation de la méthode de descente, l'algorithme de gradient permettra de converger dans sa direction. On prend ici l'exemple donné sur la figure 3.18. Toutefois, les positions des points d'équilibre A et C auront une signification physique mais pas le trajet décrit entre elles. On peut noter la similitude entre cette approche et la méthode du traitement dynamique d'une branche instable, puisque dans les deux cas on cherche le premier point d'équilibre stable suivant le point de bifurcation.



Fig. 3.18 — Un exemple de potentiel présentant un point de bifurcation instable

Le dernier type de point critique que nous devons envisager est le cas du point limite.

3.3.3.4 Variation de l'énergie au voisinage d'un point limite.

Nous en donnons une représentation sur la figure 3.19.



Fig. 3.19 — Variation de l'énergie au voisinage d'un point limite

Au point limite A, on a $\theta_1 = 0$. Si l'on écarte légèrement la structure de cette position d'une quantité $\Delta{\{\mathbf{u}\}}$, la variation d'énergie s'écrira :

$$\pi(\{\mathbf{u}\} + \Delta\{\mathbf{u}\}, \lambda) - \pi(\{\mathbf{u}\}, \lambda) = \frac{1}{2}\Delta\{\mathbf{u}\}^T [\mathbf{K}] \Delta\{\mathbf{u}\} + O(\Delta\lambda^3, \Delta\{\mathbf{u}\}^3)$$
$$= \frac{1}{2} \left[\theta_1 A_1^2 + \theta_2 A_2^2 + \dots \theta_n A_n^2\right]$$
$$= \frac{1}{2} \left[\theta_2 A_2^2 + \dots \theta_n A_n^2\right]$$
(3.69)

On aboutit exactement à la même expression que celle que nous avons établie pour un point de bifurcation à la section 3.3.3.2. La variation de potentiel est nulle pour un déplacement Δ {**u**} = ε {**z**₁} avec $\varepsilon \ll$ 1. Là encore, lors du passage de l'état ({**u**} - Δ {**u**}, $\lambda - \Delta$ *lambda*) à l'état ({**u**}, λ) on pourra converger sur n'importe quel point d'une droite de direction {**z**₁} au voisinage de A. Ensuite, lorsque l'on augmente le chargement, la surface du potentiel ne présente pas de minimum, la solution diverge. En conséquence, un algorithme de descente ne pourra pas traiter le passage de ce type de point critique.

Le bilan que l'on peut tirer de l'étude de la variation d'énergie au voisinage des points de la courbe d'équilibre est le suivant :

- Lorsqu'une structure se trouve au voisinage d'un point d'équilibre stable, l'algorithme de gradient convergera vers ce dernier, qu'il soit ou non un minimum global de l'énergie potentiel total.
- Le traitement des branches instables dans le cas d'un contrôle en force est impossible puisque le potentiel ne présente pas de minimum.

3.3.4 Critique de l'utilisation d'une méthode de descente pour le traitement du flambement.

Parmi les avantages que l'on retiendra de l'utilisation d'une méthode de descente de premier ordre pour le traitement du flambement, on peut citer :

- L'absence d'algorithme spécifique nécessaire au traitement numérique de la bifurcation.
- La robustesse de la méthode que nous montrerons, résultats numériques à l'appui, dans le chapitre 4.
- Les algorithmes de gradient ne demandent pas de réaliser une analyse des modes de bifurcation contrairement au cas de l'analyse post-bifurcatoire, ce qui exige généralement une bonne compréhension de la physique du problème. Nous évitons ainsi, dans une certaine mesure, cette nécessité.

Le fait de pouvoir traiter les bifurcations sans intervenir au cours du calcul constituait l'objectif du développement de la méthode de descente avec un algorithme de gradient. En effet, nous espérons être capables de prédire "en aveugle" un motif d'ondulation possible pour un film mince soumis à un chargement donné. En comparaison avec les deux approches présentées en 3.2 : l'analyse post-bifurcatoire et la méthode de continuation, les méthodes de descentes sont intéressantes principalement pour leur facilité d'emploi, car elles n'ont pas recours à un pilotage spécifique du calcul au voisinage des points de bifurcation. Cependant la limite inhérente à ces avantages est qu'il est impossible de choisir la branche bifurquée vers laquelle on souhaite converger, comme c'est le cas pour les méthodes de continuation, et dans une moindre mesure pour la méthode d'analyse post-bifurcatoire. La convergence sur une branche de bifurcation donnée se fait de manière incontrôlée, et dépend de la perturbation initiale ainsi que de l'histoire des directions de descente. Il sera ainsi impossible de décrire l'ensemble des branches de réponse de la structure à une sollicitation donnée. Toutefois, si la description de l'ensemble des branches bifurquées est intéressante d'un point de vue académique, une prédiction numérique d'une seule solution "physique" est suffisante pour évaluer l'état de surface –i.e. le nombre, la géométrie et la localisation des plis – d'une structure mince.

3.4 Bilan sur les méthodes numériques de traitement des instabilités

L'objectif de ce chapitre était d'étudier les méthodes numériques capables de traiter le problème du flambement des films minces en tension. Nous en avons présenté plusieurs, et deux d'entre elles ont fait l'objet d'un traitement approfondi :

- La méthode d'analyse post-bifurcatoire.
- La minimisation directe de l'énergie potentielle totale avec un algorithme de gradient.

Si la première approche citée est relativement classique, le traitement des instabilités lors de la mise en tension de films minces à l'aide d'une méthode de premier ordre constitue une démarche originale. Les limites et les points forts de chaque méthode on été discutés.

On retiendra en particulier, pour la méthode d'analyse post-bifurcatoire, qu'elle offre, d'une part, la possibilité d'effectuer une simulation numérique de flambement à l'aide d'outils présents dans la plupart des codes éléments finis classiques. D'autre part elle permet d'étudier plusieurs configurations cinématiques de plis.

L'algorithme de descente a pour atout majeur qu'il ne nécessite pas d'intervention de l'utilisateur à des étapes clefs du calcul et de ce fait, nous espérons l'utiliser pour la prédiction en aveugle des motifs d'ondulations.

Toutefois, à ce stade, ces conclusions ne sont encore que provisoires. Une étude plus approfondie est nécessaire. Nous devrons notamment confronter les résultats numériques issues des deux approches que nous avons mises en œuvre avec des résultats expérimentaux, issus de nos travaux ou de la bibliographie. C'est ce que nous allons effectuer au cours du chapitre suivant.

CHAPITRE 4

Etude numérique.

L'objet du présent chapitre est d'appliquer les méthodes d'analyse post-bifurcatoire et de résolution par gradient conjugué à l'étude des problèmes identifiés lors de la bibliographie, puis à la prédiction des ondulations à la surface de nos propres structures expérimentales.

Quatre exemples ont été traités :

- les deux structures proposées par Wong et Pellegrino (2006b), une membrane rectangulaire à laquelle est imposée un déplacement de cisaillement, et une membrane carrée soumise à un chargement en force à ses quatre extrémités.
- l'éprouvette cruciforme présentée à la section 1.4 en considérant trois épaisseurs différentes 25 μm , 50 μm , et 125 μm .
- l'éprouvette en croix ajourée (voir en section 1.5).

La méthode d'analyse post-bifurcatoire a été discutée précédemment et de nouveaux éléments sont apportés pour étayer son utilisation. Cependant, il n'est pas question ici d'effectuer une évaluation exhaustive de la méthode en étudiant sa sensibilité à la valeur du paramètre de dissipation γ_d (voir 3.2.3) ou au type d'élément fini. Le lecteur intéressé par ces aspects pourra se référer à Wong et Pellegrino (2006b). L'analyse post bifurcatoire a été appliquée à l'étude de l'éprouvette en croix en vue de comprendre et d'analyser certains de nos résultats expérimentaux, notamment la non unicité d'une configuration cinématique de plis qui a été observée expérimentalement puis expliquée à la section1.4.

La seconde technique de résolution que nous avons utilisée est la méthode du gradient conjugué. À ce jour, il n'existe pas de références bibliographiques connues concernant la prédiction du flambement des films minces à l'aide de cet algorithme. Nous commençons donc cette partie de l'étude numérique en détaillant la procédure de simulation ainsi que les paramètres qui influent sur les résultats. Une évaluation complète de la méthode est ensuite effectuée à travers l'étude de la membrane rectangulaire en cisaillement. Enfin notre approche est validée grâce à la confrontation de nos prédictions numériques avec les résultats expérimentaux issus de la bibliographie et de notre campagne d'essais.

Ces simulations ont d'une part fourni des résultats spécifiques aux algorithmes de calcul, et d'autre part ont été l'occasion de tester la sensibilité des ondulations au choix d'un type d'élément fini (membrane, membrane et DKT ou membrane et patch) ainsi qu'à l'orientation du maillage. Les conclusions tirées de cette analyse de sensibilité sont transposables à n'importe quelle procédure de calcul des ondulations, car elles sont indépendantes de la technique de résolution mise en œuvre.

La section 4.1 est consacrée à la comparaison des résultats de simulations obtenus grâce à la méthode d'analyse post bifurcatoire avec nos mesures expérimentales pour comprendre l'origine de la non unicité d'une configuration cinématique de plis. Dans la section 4.2, nous effectuons une évaluation détaillée de la méthode de simulation des plis par éléments finis en utilisant l'algorithme de résolution du gradient conjugué.

4.1 Prédiction des plis avec la méthode d'analyse post-bifurcatoire.

Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre précédent (voir section 3.2.3), les méthodes d'analyse post-bifurcatoire reposent sur une étude linéarisée des modes de bifurcations couplée avec une résolution par éléments finis non-linéaire. Ces modes de bifurcation sont utiles pour amener le système à quitter la branche fondamentale et à évoluer sur une branche bifurquée.

Différentes techniques peuvent être utilisées pour initier le flambement de la structure. Outre l'introduction d'un défaut géométrique (Wong et Pellegrino, 2006b; Wang et al., 2007) commentée dans la partie 3.2.3, certains auteurs appliquent un champ de force de faible amplitude. Ce dernier est perpendiculaire à la surface du film mince et est enlevé au fur et à mesure de la simulation (Wang et al., 2009). Quelle que soit la méthode employée, ces travaux récents ont démontré la capacité de l'analyse post-bifurcatoire à prédire le phénomène d'ondulation à la surface d'un film mince. Cette procédure offre également la possibilité de choisir la branche bifurquée sur laquelle on souhaite converger, et ainsi d'étudier l'évolution des différentes configurations cinématiques qu'une structure peut potentiellement atteindre.

A l'instar de Wong et Pellegrino (2006b) et Wang et al. (2007), nous avons choisi d'utiliser le logiciel ABAQUS (R) qui présente l'avantage d'intégrer les outils numériques nécessaires à la mise en œuvre de la méthode d'analyse post-bifurcatoire. L'objectif était en effet d'évaluer la robustesse et la complexité d'utilisation de la méthode, ce qui a été fait pour une bonne part dans la partie 3.2.3, mais aussi de reproduire certains de nos résultats expérimentaux en vue de les analyser en détail.

4.1.1 La membrane rectangulaire cisaillée.

Dans cette partie, nous présentons le modèle, la procédure et les résultats des simulations numériques concernant l'étude de la membrane rectangulaire proposée par Wong et Pellegrino (2006b). Ces éléments sont destinés à compléter les informations de la partie 3.2.3 pour illustrer l'application de la méthode d'analyse post-bifurcatoire à la prédiction des ondulations sur la surface d'un film mince.

La géométrie de cette structure, décrite sur la figure 3.5, est une membrane rectangulaire en Kapton (R) de dimensions 380 $mm \times 128 \ mm \times 25 \ \mu m$. Son arête inférieure y = 0 mm est encastrée et un déplacement horizontal de 3 mm est imposé aux nœuds du bord supérieur y = 128 mm conduisant au cisaillement de la membrane. Les bords latéraux pour lesquels x = 0 mm et x = 380 mm sont laissés libres.

Les valeurs des coefficients mécaniques du Kapton \mathbb{R} que nous avons utilisées lors de cette simulation sont celles retenues par Wong et Pellegrino (2006b) soit E = 3500 Mpa et $\nu = 0.31$ et non les valeurs que nous proposons en 1.3. Toutefois, puisque nous avons identifié des valeurs très proches (E = 3350 Mpa et $\nu = 0.31$), on peut estimer que ce choix a des répercussions minimes sur les résultats numériques.

4.1.1.1 Le modèle numérique.

Les résultats donnés dans cette sous-section ainsi qu'à la sous-section 3.2.3 ont été obtenus en utilisant le maillage visible sur la figure 4.1. Ce dernier contient 6900 éléments S4R5. La densité du maillage a fait l'objet d'un étalonnage par Wong et Pellegrino (2006b) qui ont indiqué cette valeur comme étant optimale en considérant la convergence et le temps de calcul.



Fig. 4.1 — Le modèle numérique.

Cette étude a permis de fixer la densité du maillage. On peut en outre conclure qu'il faut réfléchir en termes de nombre d'éléments par pli, lorsque l'on effectue des simulations de plissement. Dans ces conditions, on comprend aisément qu'en deçà de deux éléments finis par pli il est impossible de représenter fidèlement une surface ondulée. Si l'on pousse un peu plus loin ce raisonnement en admettant qu'un pli peut être modélisé par une courbe sinusoïdale, on peut considérer que cinq à six éléments pour discrétiser une ondulation est le minimum acceptable si l'interpolation est linéaire. Le maillage de 6900 éléments correspond à cette situation. Cependant, si l'élément fini employé présente un degré d'interpolation élevé, on peut envisager d'utiliser moins d'éléments par pli mais cela ne se traduira pas forcément par un gain de temps de calcul (Wong et Pellegrino, 2006b).

4.1.1.2 Procédure numérique.

La procédure de simulation détaillée sur l'organigramme 4.2 a été proposée par Wong et Pellegrino (2006b). Elle comprend trois étapes distinctes.

La première consiste à mettre légèrement en tension le film mince. Pendant l'expérience, des masses ont été accrochées à l'arête supérieure de la membrane au moyen d'une baguette rigide. Lors de la simulation, les contraintes résultant de ce chargement ont été transposées



Fig. 4.2 — Procédure de simulation numérique proposée par Wong et Pellegrino (2006b).

en termes de déplacements équivalents. Une translation de 0.5mm est imposée suivant l'axe \vec{y} à l'arête supérieure du film rectangulaire. La carte des contraintes ainsi obtenue est utilisée comme donnée d'entrée pour la seconde étape du calcul : l'analyse linéarisée des modes de bifurcation de la structure que nous avons présentée à la sous-section 3.2.3. Un nouveau fichier de simulation est alors créé où l'on impose l'état de contrainte calculé lors de l'étape I en utilisant la commande *INITIAL CONDITIONS, TYPE = STRESS. Avant de lancer le calcul, un mode, –ou une combinaison de modes de bifurcation– évalué à l'étape II est introduit comme défaut géométrique du maillage d'origine pour initier le flambement de la structure. La résolution itérative du problème non-linéaire est alors effectuée avec un algorithme de Newton Raphson. Lors de cette phase, on a activé la commande *STABILIZE afin de stabiliser l'équilibre de la structure en dissipant une faible proportion de l'énergie (voir 3.2.3).

La géométrie de la structure déformée pour un déplacement de cisaillement de 3mm est visible sur la figure 4.3.

4.1.1.3 Déformée.

La disposition des plis et l'allure générale du motif des ondulations données par la simulation est en cohérence avec les observations expérimentales (voir figure 4.27). On trouve des zones détendues le long des bords libres du spécimen rectangulaire et des plis orientés à 45° par rapport à l'axe \vec{x} . Pour étudier en détail la géométrie de ces plis, on trace la coupe centrale de l'éprouvette pour y = 64 mm. Les résultats sont présentés sur la figure 4.4.

Sur ce profil, on compte 17 plis pour lesquels l'amplitude moyenne dans la région



Fig. 4.3 — Carte des déplacements hors plan pour $\delta_c = 3 mm$ obtenue en introduisant le mode de bifurcation correspondant à la valeur propre $\lambda = 0,26490$.



Fig. 4.4 — Section centrale pour $\delta_c = 3 mm$.

centrale est proche de 0,5 mm. Les ondulations de plus grande amplitude se situent à proximité des bords latéraux avec une flèche maximale de 1,068 mm. Expérimentalement, Wong et Pellegrino (2006a) ont relevé 19 plis pour la configuration $\delta_c = 3 mm$ avec une amplitude moyenne dans la partie centrale de l'ordre de 0, 4 mm et un maximum à 0,8 mm. On peut donc conclure que nos prédictions numériques concordent avec les observations expérimentales. Nous nous sommes ensuite intéressés à l'allure du champ de contrainte dans l'éprouvette cisaillée.

4.1.1.4 État de contrainte.

Les cartes des contraintes principales σ_I et σ_{II} sont représentées respectivement sur les figures 4.5 a) et b).



Fig. 4.5 — Cartes de contraintes principales.

Dans la partie centrale, la valeur de la contrainte principale σ_I est pratiquement constante et s'établit autour des 43 *Mpa*. Cette zone est en compression suivant la direction propre correspondant à la contrainte principale σ_{II} , soit la direction perpendiculaire à la ligne de crête des plis. Nous avons relevé une valeur moyenne de -1, 5 *Mpa* pour σ_{II} , ce qui montre que les films minces en tension peuvent accepter une légère contrainte de compression. On démontre ainsi les limites de "la Tension Field Theory" qui se base sur un modèle de membrane sans rigidité en compression.

Sur la figure 4.6, nous avons cherché à identifier les éléments soumis à un état de contrainte tel que : $\sigma_{II} \leq 0$ et $\sigma_I > 0$. Ils sont de couleur noire alors que les éléments gris correspondent à l'état de contrainte $\sigma_{II} < 0$ et $\sigma_I > 0$. Les éléments noirs appartiennent aux zones détendues de l'échantillon alors que les éléments gris correspondent aux plis.

4.1.1.5 Bilan de l'étude numérique du cas test de Wong et Pellegrino (2006b).

En conclusion de cette étude, on peut mettre en avant la qualité de la prédiction numérique car nos résultats sont relativement proches des observations expérimentales.



Fig. 4.6 — Carte des zones pliées et des zones détendues.

Cependant, même pour une structure de géométrie aussi simple, le temps de calcul est long. Pas moins de 22 heures de calcul ponctué de 9 redémarrages ont été nécessaires pour obtenir la convergence du modèle. Lorsque le logiciel ne peut pas résoudre le système nonlinéaire après un certain nombre d'itérations, le calcul s'arrête. Il convient alors de créer un fichier de redémarrage pour le relancer en modifiant la valeur du paramètre d'amortissement γ_d , ainsi que le pas initial de chargement. Il est alors important de contrôler attentivement les résultats en cours de simulation pour garantir la convergence optimale du calcul.

Grâce aux enseignements tirés de cette étude numérique, nous avons appliqué la méthode d'analyse post-bifurcatoire à notre propre structure : l'éprouvette biaxiale.

4.1.2 Analyse des modes de bifurcation pour l'éprouvette en croix.

Cette sous-section a pour objectif d'expliquer la non unicité des configurations cinématiques de plis que nous avons observées expérimentalement en soumettant trois spécimens identiques – en termes de matériau, de géométrie et d'épaisseur - à un cas de chargement donné. Les résultats de simulation que nous présentons ici montrent qu'il est possible de reproduire numériquement les différentes configurations cinématiques obtenues pendant les manipulations en s'appuyant sur la théorie de la bifurcation.

4.1.2.1 Le modèle numérique.

A l'instar de l'étude précédente, nous avons utilisé l'élément coque S4R5 (code ABAQUS®) pour effectuer les simulations. Un maillage structuré de 16 000 éléments (voir figure 4.7) a été adopté pour modéliser l'éprouvette de traction biaxiale. Il a été construit de manière à discrétiser la partie centrale du spécimen avec des éléments carrés de 2.5 mm de coté. Cette taille de maille est choisie afin de disposer d'un nombre suffisant d'éléments par plis pour capturer fidèlement la géométrie des ondulations i.e. 5 éléments par pli.

On suppose que les quatre extrémités de l'éprouvette sont parfaitement encastrées dans les mors. Un déplacement uniforme δ_1 est alors imposé aux nœuds des arêtes verticales du spécimen suivant la direction de l'axe \vec{x} (voir figure 1.15). Ensuite, les deux arêtes supérieures et inférieures sont soumises à un déplacement uniforme δ_2 suivant l'axe \vec{y} .

Les caractéristiques mécaniques du Kapton (R) ont été identifiées grâce à nos données



Fig. 4.7 — Le modèle numérique.

d'essais en procédant à une identification par analyse inverse sur le modèle numérique que nous présentons ici, pour le trajet de chargement $\delta_1 = 0 mm$ et $\delta_2 = 0.3 mm$, soit un trajet pour lequel il n'y a pas de plis. Les valeurs retenues pour les coefficients d'élasticité sont : E = 3350 Mpa et $\nu = 0.31$. Nous les utiliserons dès lors dans toute la suite de ce chapitre.

4.1.2.2 La procédure de simulation du flambement.

La procédure de simulation du flambement mise en œuvre au cours de cette étude est quasiment identique à celle qui a été utilisée dans la partie précédente. Elle est décomposée en quatre étapes.

La première étape consiste à imposer une faible tension initiale à l'éprouvette en appliquant un chargement réparti aux nœuds de ses quatre arêtes. Cet effort de tension traduit l'effet des contrepoids employés pour mettre en place le spécimen sur le banc de traction bi-axial. Le champ de contrainte résultant est introduit comme une donnée d'entrée lors des étapes suivantes de la simulation. La masse totale des contrepoids est fonction de l'épaisseur, sa valeur est donnée dans le tableau 1.5.

Au cours de la seconde étape, le déplacement négatif δ_1 est imposé aux deux extrémités verticales de l'éprouvette suivant la direction de l'axe \vec{x} . Pendant cette opération, les nœuds des deux arêtes horizontales sont supposés parfaitement encastrés. L'étape II est divisée en deux phases. Tout d'abord, une analyse linéarisée des modes de bifurcation est effectuée en considérant un déplacement imposé δ_1 suivant la direction de l'axe \vec{x} . Ensuite, le mode de flambement sélectionné est introduit sous la forme d'un défaut géométrique du maillage initial avant d'analyser la réponse post-bifurcatoire du système. L'amplitude du défaut géométrique est fixée à 12.5% de l'épaisseur de la structure étudiée soit la valeur recommandée par Wong et Pellegrino (2006b). La même démarche est à nouveau employée à l'étape III. Les deux arêtes verticales sont immobilisées et un déplacement δ_2 suivant l'axe \vec{y} est appliqué aux arêtes supérieures et inférieures de l'échantillon cruciforme. Lors de cette étape, l'étude des modes de flambement est menée afin d'introduire de nouvelles imperfections géométriques, offrant ainsi la possibilité d'initier la convergence du calcul sur une branche bifurquée secondaire, lorsque le déplacement de tension est appliqué.

Enfin, dans la dernière étape, la convergence de la solution est examinée, et nous effectuons l'étude précise de la géométrie des ondulations. Le schéma récapitulatif de la procédure numérique est visible sur la figure 4.8.



Fig. 4.8 — Procédure de simulation numérique appliquée à l'étude de l'éprouvette cruciforme.

4.1.2.3 Comparaison des ondulations issues de la prédiction numérique avec les relevés expérimentaux.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, divers motifs de plis peuvent apparaître à la surface d'un film en tension en appliquant le même chargement à des éprouvettes de géométrie identique. Ces formes de plis différentes correspondent à des modes de bifurcation distincts. Pour justifier cette affirmation, certains motifs de plis que nous avons observés pendant les mesures effectuées sur les échantillons de 125 μm ont été reproduits grâce à la procédure de calcul expliquée en 4.1.2.2. Nous avons introduit dans notre modèle des imperfections différentes correspondant à un mode de bifurcation donné pour initier la convergence du calcul sur la branche bifurquée de notre choix. Sur la figure 4.9 on montre les deux premiers modes de flambement de la structure que l'on obtient en fixant la valeur du déplacement négatif δ_1 à -2 mm. Le premier mode de flambement est asymétrique alors que le second est symétrique.



Fig. 4.9 — Premier et second mode de flambement obtenues à l'étape II pour $\delta_1 = -2 mm$ et $\delta_2 = 0 mm$ (épaisseur du spécimen 125 μm).

L'introduction de l'un de ces modes dans notre modèle conduit aux résultats présentés sur les figures 4.10 et 4.11 pour les cas de chargement respectifs $\delta_1 = -2 mm$, $\delta_2 = 0.5 mm$ et $\delta_1 = -2 mm$, $\delta_2 = 3 mm$. La superposition des sections centrales issues du calcul numérique et des relevés de mesures montre des géométries très similaires.

Dans les structures usuelles, il est rare d'obtenir plusieurs modes de flambement sans "forcer" leur apparition. Généralement, seul le premier mode de flambement survient. Lorsque la structure est de faible épaisseur, les valeurs propres associées aux premiers modes de bifurcation ont des valeurs extrêmement proches (voir figure 4.9). C'est pourquoi les deux premiers modes de flambement ont été observés expérimentalement. Cependant, le mode asymétrique à $\delta_2 = 0.5 \ mm$ a été relevé quinze fois contre trois fois seulement pour le mode symétrique. Il semble donc que l'apparition du premier mode de flambement soit plus probable que celle du second mode. Cette tendance est loin d'être aussi marquée lorsque l'épaisseur de l'échantillon diminue. La même étude effectuée avec des spécimens d'une épaisseur de 50 μm fait état de l'observation de douze modes asymétriques contre six modes symétriques. Enfin, pour les éprouvettes de 25 μm , l'épaisseur est trop faible pour identifier avec certitude la géométrie d'un mode de flambement donné.

Le motif final des ondulations ne dépend pas uniquement du mode de bifurcation initial de la structure. D'autres bifurcations peuvent subvenir lors du chargement. Ce phénomène a été observé expérimentalement lors de l'application du déplacement de tension (cf. la



Fig. 4.10 — Comparaison de la géométrie des ondulations issues du calcul numérique avec les relevés expérimentaux pour $\delta_1 = -2 \ mm$ et $\delta_2 = 0.5 \ mm$ (épaisseur : 125 μ m).



	Effort dans les mors verticaux (N)	Effort dans les mors horizontaux (N)
Capteurs de force Simulation	1503.0 Mode 1 : 1474.63 Mode 2 : 1474.62	45.9 Mode 1 : 58.91 Mode 2 : 58.85

Fig. 4.11 — Comparaison de la géométrie des ondulations issues du calcul numérique avec les relevés expérimentaux pour $\delta_1 = -2 \ mm$ et $\delta_2 = 3 \ mm$ (épaisseur : 125 μm).

partie 1.4.3.4). Nous avons reproduit numériquement l'évolution de la surface de deux spécimens identiques soumis au second trajet de chargement ($\delta_1 = -1 \ mm$ et $\delta_2 = 0$ à $3 \ mm$).

Pour le cas de chargement $\delta_2 = 0.5 \ mm$ (voir figure 4.13), les deux spécimens présentent le motif de plis associé avec le premier mode de flambement. Ensuite, une bifurcation survient au cours de l'application du déplacement de tension à la première éprouvette. La géométrie de ses ondulations passe d'une configuration initialement asymétrique à une configuration symétrique lorsque $\delta_2 = 3 \ mm$ (voir FIG. 4.14 sections de droite). Pour le même trajet de chargement, la seconde éprouvette montre toujours une disposition de plis asymétrique (sections de gauche). Les résultats expérimentaux observés pour le spécimen un, ont été reproduis en introduisant d'abord le premier mode de bifurcation au début de l'étape II (voir figure 4.9) puis le premier et le troisième mode de bifurcation calculés lors de l'étape III (voir figure 4.12).



Fig. 4.12 — Premier et troisième mode de flambement obtenues à l'étape III pour $\delta_1 = -1 mm$ and $\delta_2 = 3 mm$. (épaisseur du spécimen $125\mu m$).

Les résultats numériques présentés ici montrent que les différentes configurations cinématiques des plis observées expérimentalement sont issues de branches de bifurcations distinctes. Les procédures de simulations des ondulations implémentées dans les codes de calcul commerciaux sont à même de reproduire une géométrie particulière des plis.

Cependant, le problème physique du plissement des films minces est très instable et imprévisible par nature. La prédiction des modes de bifurcation est basée sur la détection des raideurs nulles de la matrice de rigidité lors du parcours du chemin d'équilibre. Lorsque la structure présente plusieurs rigidités proches de zéro, une bifurcation peut survenir. La bifurcation sur une nouvelle branche bifurquée associée à une valeur propre faible mais non nulle est possible. C'est le cas de la structure étudiée dans cette partie et ce phénomène rend difficile l'utilisation des données expérimentales, si l'on n'identifie pas quel mode de



Capteurs de force	238.6	_
Simulation	Mode 1 : 236.42	Mode $1: 0.84$
	Mode $2: 236.426$	Mode $2: 0.86$

Fig. 4.13 — Comparaison de la géométrie des ondulations issues du calcul numérique avec les relevés expérimentaux pour $\delta_1 = -1 \ mm$ et $\delta_2 = 0.5 \ mm$ (épaisseur : 125 μ m).



	Effort dans les mors verticaux (N)	Effort dans les mors horizontaux (N)
Capteurs de force Simulation	1560.2 Mode 1 : 1538.2 Mode 2 : 1538.2	122.2 Mode 1 : 132.74 Mode 2 : 132.69

Fig. 4.14 — Comparaison de la géométrie des ondulations issues du calcul numérique avec les relevés expérimentaux pour $\delta_1 = -1 \ mm$ et $\delta_2 = 3 \ mm$ (épaisseur : 125 μ m).

bifurcation survient. L'étude numérique l'a clairement souligné. En effet nous avons montré qu'il est possible de sélectionner une branche bifurquée à partir du point de bifurcation en introduisant le mode propre choisi lors du calcul comme une imperfection géométrique.

Au cours des manipulations, la sélection des modes est incontrôlée, du fait des incertitudes sur les conditions aux limites. Néanmoins, nous avons observé expérimentalement le premier mode de flambement plus souvent que le second.

4.2 Prédiction numérique des ondulations avec la méthode de gradient.

Malgré les bon résultats de simulations que nous avons obtenus avec la méthode d'analyse post-bifurcatoire, cette technique de résolution ne nous a pas totalement satisfait pour prédire le flambement des films minces. Nous avons montré qu'elle souffre d'un certain nombre d'inconvénients. La procédure est relativement complexe et difficile à employer par un numéricien néophyte. Pour mener une simulation d'ondulation à son terme, il faut guider l'algorithme en intervenant régulièrement dans le calcul, notamment par le choix des modes de flambement et le réglage de la valeur des paramètres de la routine de résolution.

L'objectif principal de cette thèse étant de définir des outils robustes pour la prédiction du phénomène d'ondulation, nous nous sommes intéressés à une technique plus simple à utiliser : la résolution par gradient conjugué. L'étude de la variation d'énergie au voisinage des points critiques effectuée à la sous-section 3.3.3 a montré qu'il est envisageable de traiter des problèmes de flambement avec cet algorithme. Dans cette sous-section, nous avons expliqué sa mise en œuvre avant de vérifier la robustesse de la méthode par le biais de la confrontation des données de simulation avec les résultats expérimentaux.

4.2.1 Discussion autour de l'utilisation de la méthode de gradient à travers l'étude de la membrane rectangulaire en cisaillement.

Il n'existe pas de ressources bibliographiques s'intéressant à la prédiction du flambement des films minces à l'aide de l'algorithme de gradient conjugué. En conséquence cette étude numérique débute par la présentation de la procédure de simulation. Les paramètres de calcul sont ensuite passés en revue.

La principale motivation de ces travaux est de réaliser l'évaluation complète de la méthode de résolution du flambement par gradient conjugué. Elle est effectuée ici à travers la prédiction des plis à la surface de la membrane rectangulaire en cisaillement présentée par Wong et Pellegrino (2006a).

Dans un second temps, la sensibilité de la réponse de la structure –en termes de configuration cinématique de plis- a été testée en considérant comme paramètres d'étude, le type d'élément fini, la densité et l'orientation du maillage. Ces résultats sont généraux, car ils restent valables quelle que soit la technique de résolution envisagée.

4.2.1.1 Description de la procédure de calcul employée avec l'algorithme de gradient.

Pour obtenir les résultats de simulations présentés dans cette section, nous avons utilisé l'algorithme 1.

Dans un premier temps, le modèle numérique est défini à partir des données classiques nécessaires à tous les programmes de résolution par éléments finis (coordonnées initiales, table des connectivités, conditions aux limites, coefficients élastiques). On spécifie également le chargement imposé δ_{imp} et le pas de chargement $\Delta\delta$. Le calcul est alors initialisé en procédant à l'évaluation des composantes du tenseur métrique $A_{\alpha\beta}$ et éventuellement de la matrice des rigidités de flexion [**K**_B].

Avant de lancer la résolution, il faut initier le flambement de la structure. On impose alors un déplacement hors plan aléatoire à l'ensemble des nœuds du maillage. On procède ensuite à la résolution non linéaire en effectuant un nombre fixé n d'itérations de descente. Cette valeur n correspond au nombre maximal de vecteurs que l'on va considérer pour déterminer l'histoire des directions de descente : {**d**_i} présentée à la partie 3.3.1.2. A chaque fois que n itérations ont été réalisées, la différence des énergies potentielles totales $\pi_0-\pi_1$ précédant et suivant la minimisation est évaluée. Si cette différence est inférieure à la valeur du paramètre de convergence ϵ , la procédure s'arrête, autrement elle recommence.

Données :

Coordonnées initiales, Table des connectivités, Conditions aux limites, Coefficients élastiques, δ_{imp} , $\Delta\delta$; Sorties : Coordonnées finales: Initialisation du calcul; Initialisation des composantes du tenseur métrique $A_{\alpha\beta}$; Évaluation de la matrice des rigidités de flexion $[\mathbf{K}_{\mathbf{B}}]$; Application d'une perturbation aléatoire d'amplitude p; tant que $\delta < \delta_{imp}$ faire Calcul de l'énergie potentielle totale π ; $\pi_0 = \pi, \ \pi_1 = 0;$ répéter Minimisation de π par gradient conjugué; Évaluation de π jusqu'à n_0 itérations de descente; $\pi_0 = \pi_1, \ \pi_1 = \pi;$ tant que $\pi_0 - \pi_1 > \epsilon$ faire répéter Minimisation de π par gradient conjugué; Évaluation de π jusqu'à *n* itérations de descente; $\pi_0 = \pi_1, \ \pi_1 = \pi;$ fin $\delta = \delta + \Delta \delta$

fin

Algorithme 1: Routine de calcul utilisée avec l'algorithme de gradient conjugué.

Lorsque l'on fait le bilan des paramètres à spécifier, on relève :

- l'amplitude de la perturbation aléatoire;
- l'incrément de chargement;
- le nombre *n* de directions de descente que l'on va considérer pour construire leur histoire $\overrightarrow{d_i}$;
- la valeur du paramètre de convergence $\epsilon.$

Les paramètres (p, n, $\Delta\delta$) n'impactent pas la convergence du calcul mais influencent son évolution sur une branche de bifurcation donnée. Ils conditionnent ainsi l'obtention de la configuration cinématique des plis. Comme nous l'avons montré précédemment, les points de bifurcation sont très proches pour des structures de faible épaisseur. La convergence sur une branche de bifurcation donnée est alors sensible à la position d'initialisation de l'algorithme -soit la perturbation initiale-, à l'histoire des directions de descente et aussi à l'incrément de chargement. Si ce dernier est petit et que la structure présente deux points de bifurcations très rapprochés, on peut penser que le système va poursuivre son évolution sur la première branche bifurquée. A l'inverse, si le pas est grand, il est possible que le calcul se poursuive sur la seconde branche bifurquée. Ainsi en choisissant une faible amplitude pour la perturbation initiale --- de l'ordre de l'épaisseur de la structure — et un petit pas de chargement, le système doit évoluer sur la branche bifurquée de plus basse énergie et aboutir à la configuration de plis la plus probable.

Si l'on considère que l'on cherche à trouver une géométrie de plis que l'éprouvette peut potentiellement présenter et pas une configuration cinématique précise, le choix des trois paramètres (p, n, $\Delta\delta$) n'est pas déterminant. Dans tous les cas, le gradient permet de trouver une direction de descente et un minimum local correspondant à une configuration d'équilibre stable de la structure. Cependant, le nombre de directions de descentes utilisées pour évaluer le vecteur {**d**_i} a des répercussions importantes en termes de temps de calcul. Lorsque *n* vaut un, on est en présence d'un algorithme de descente de la plus grande pente pour lequel la convergence est lente. A l'inverse, si *n* est grand, on va effectuer beaucoup d'itérations sans obtenir une minimisation significative. Dans ces simulations, nous avons choisi de fixer la valeur de *n* à 10.

A la différence des autres paramètres de la routine, ϵ impacte énormément la convergence du calcul. Si sa valeur est trop élevée, le résultat de la simulation peut être totalement aberrant, car pour de très faibles variations de l'énergie, les répercussions sur la cinématique d'un film mince sont importantes. Ce paramètre a donc fait l'objet d'une évaluation (voir 4.2.1.3) afin de le fixer à une valeur cohérente pour la suite de l'étude. Avant d'exposer ces résultats, nous allons décrire le modèle numérique qui a été utilisé.

4.2.1.2 Le modèle numérique.

Au cours de cette étude, la structure rectangulaire de Wong et Pellegrino (2006a) a été discrétisée avec quatre type de maillages différents. Le premier d'entre eux est obtenu en découpant chaque élément quadrangle du maillage initial présenté sur la figure 4.1 en
quatre éléments finis triangulaires. Ce maillage de 27600 éléments a été utilisé exclusivement pour obtenir les résultats présentés dans la section 4.2.1.3.

Nous avons également construit 3 types de maillages structurés qui diffèrent par leur orientation. Un exemple est visible sur la figure 4.15. L'orientation préférentielle du maillage de type B est dans le sens des plis alors que pour le type A, elle est perpendiculaire au plis. Le maillage C, n'est pas orienté suivant une direction privilégiée.



Fig. 4.15 — Orientation des trois types de maillages utilisés.

4.2.1.3 Sensibilité au paramètre de convergence.

Pour évaluer la sensibilité de notre procédure de calcul à la valeur du paramètre de convergence ϵ , nous avons effectué des simulations de cisaillement sur la membrane rectangulaire de Wong et Pellegrino (2006a) en faisant varier sa valeur. Les calculs ont été menés avec un élément fini membrane et DKT. Sur les figures 4.16 et 4.17, on a représenté respectivement les cartes des déplacements hors plan et la section centrale de l'éprouvette à $y = 64 \ mm$ pour $\epsilon = 10^{-5}$ et $\epsilon = 10^{-10}$.

Le profil obtenu avec $\epsilon = 10^{-5}$ est extrêmement perturbé alors qu'avec $\epsilon = 10^{-10}$, il est beaucoup plus régulier. Sur la figure 4.17 b) on observe 17 plis alors que pour le profil 4.17 a), il n'y a pas réellement de formation d'ondulation dans la partie centrale. Il s'agit plutôt d'un bruit numérique. Ces constatations indiquent que le premier calcul n'a pas convergé. Nous avons alors choisi d'étalonner le paramètre ϵ en considérant le nombre de plis prédit par le calcul numérique pour différentes valeurs de ϵ . Ces résultats sont données sur la figure 4.18.

Sur la courbe 4.18, on constate que le nombre de plis se stabilise quand ϵ franchit le seuil de $5 \cdot 10^{-10}$. C'est la valeur que nous avons fixée pour ce paramètre dans la suite de l'étude. Si on choisit de diminuer davantage cette valeur, le temps de simulation augmente sans qu'il y ait de gain substantiel par rapport à la qualité des prédictions numériques. Ici, les cartes de déplacement hors plan correspondant aux simulations effectuées avec $\epsilon = 5 \cdot 10^{-10}$ et $\epsilon = 10^{-10}$ sont identiques.



Fig. 4.16 — Cartes des déplacements hors plan obtenues pour différentes valeurs du paramètre ϵ $(\delta_c = 3 mm).$



Fig. 4.17 — Sections centrales obtenues pour différentes valeurs du paramètre ϵ ($\delta_c = 3 mm$).



Fig. 4.18 — Sensibilité au paramètre de convergence ϵ (maillage C).

Le motif des ondulations obtenu pour $\epsilon = 5 \cdot 10^{-10}$ avec la technique de résolution par gradient conjugué semble cohérent avec les observations expérimentales (Wong et Pellegrino, 2006a). De plus, la surface compte 17 plis, ce qui correspond aux prédictions numériques issues de l'analyse post-bifurcatoire. Lors de ces deux simulations, des éléments finis et un maillage comparable ont été employés. Pour chaque élément quadrangle DKQ du modèle ABAQUS, nous avons utilisé quatre éléments DKT. Dans ces conditions quasisimilaires, il est intéressant de comparer la géométrie des ondulations obtenues par les deux techniques de résolution mise en œuvre dans ces travaux. Ainsi, sur la figure 4.19, on a superposé les sections centrales des cartes de déplacement 4.16 b) et 4.3.



Fig. 4.19 — Comparaison des sections centrales obtenues avec l'analyse post-bifurcatoire et la méthode de gradient ($\delta_c = 3 mm$).

Les deux profils sont très similaires et se confondent presque parfaitement dans la partie droite de la figure. Dans la partie gauche, les deux motifs de plis sont distincts mais présentent des longueurs d'ondes et des amplitudes similaires. Cet écart ne remet pas en cause la pertinence d'un des deux modèles, car on peut simplement penser que les deux analyses ont abouti à une évolution sur des branches bifurquées différentes. On peut alors conclure à une bonne concordance des résultats issus des deux techniques de résolution par gradient conjugué, et par analyse post bifurcatoire. Ce constat nous conforte dans notre volonté d'utiliser une méthode de descente du premier ordre pour prédire le flambement des films minces.

4.2.1.4 Étude de la sensibilité à la densité du maillage.

L'étude numérique réalisée par Wong et Pellegrino (2006b) a mis en avant la dépendance du motif des ondulations à la densité du maillage. Nous avons donc cherché le nombre optimal d'éléments à utiliser en procédant à des simulations sur des maillages de densités variables pour une orientation de type C. Pour faire cet étalonnage, on choisi d'employer des éléments finis membrane et DKT. Le nombre de plis obtenus en fonction du nombre d'éléments est reporté pour chaque calcul sur la courbe 4.20.



Fig. 4.20 — Sensibilité à la densité du maillage.

La courbe d'étalonnage s'infléchit pour le dernier point correspondant à 26600 éléments. Cette densité de maillage est à peu près équivalente à quatre éléments triangle pour un élément quadrangle si l'on se réfère à la valeur établie par Wong et Pellegrino (2006b). Ici, chaque pli est discrétisé avec 7 à 8 éléments dans sa largeur. Dans la suite de l'étude, on travaille avec des maillages constitués de 26600 éléments et on s'intéresse à l'influence du choix de l'élément fini sur la géométrie des ondulations.

4.2.1.5 Choix des éléments finis.

Les structures minces sont classiquement modélisées par des éléments de coques. Cependant, dans le cadre de l'étude du flambement des films minces, de nombreux auteurs négligent l'énergie de flexion et utilisent à la place des éléments coques des éléments finis de membrane. Pour aboutir au choix de ce modèle, ils partent du constat que l'énergie de flexion des éléments coques, pondérée par l'épaisseur au cube de la structure h^3 tend à devenir extrêmement faible lorsque $h \to 0$.

Nous avons cherché à évaluer la pertinence de cette approche, en simulant l'apparition des ondulations sur la structure rectangulaire en cisaillement avec l'élément membrane présenté à la section 2.2.1. Les résultats numériques obtenus pour les maillage de type C et B sont donnés respectivement sur les figure 4.21 et 4.22.

Les profils et les cartes des déplacements hors plan présentés sur ces deux figures ne correspondent ni aux observations expérimentales ni à nos prédictions numériques précédentes. Ils comportent beaucoup plus de plis : 24 pour le maillage de type B et 25 pour le maillage de type C, alors que le relevé expérimental fait état de 19 plis et les simulations avec l'élément DKT ou DKQ de 17 ondulations. En regardant la partie centrale du profil tracé sur la figure 4.22 b) on s'aperçoit que certains plis sont constitués de deux éléments seulement. Tout porte à croire que si l'on raffine le maillage, il y aura



Fig. 4.21 — Résultats de simulation obtenues avec un élément de membrane et un maillage de type C.



Fig. 4.22 — Résultats de simulation obtenues avec un élément de membrane et un maillage de type B.

encore plus de plis mais ce n'est pas un problème de densité de maillage, c'est le choix du modèle de membrane qui est à remettre en cause.



Fig. 4.23 — Différentes configurations cinématiques énergétiquement équivalentes pour un élément cable 2D.

Si l'on considère un système de barres poly-articulées, déformables, auquel on impose un déplacement de compression, il peut se stabiliser dans plusieurs configurations cinématiques. Nous en avons dessiné quelques unes sur le schéma 4.23 et elles sont toutes équivalentes d'un point de vue énergétique, puisque toutes les barres sont de même taille. On peut même envisager une configuration où chaque rotule entre les barres devient un extremum du profil. En raisonnant en termes de plis, on a alors deux éléments par pli et plus le système compte de barres, plus il est susceptible de former des plis.

Ce modèle ne peut pas être appliqué pour simuler le comportement d'une corde soumise à un déplacement négatif, à son extrémité car une poutre en flambement même faiblement rigide va s'incurver sans présenter d'arêtes vives. Pour régulariser le problème, il suffit d'ajouter des ressorts de torsion dans les rotules, ce qui revient à modéliser une énergie de flexion. Les trois configurations cinématiques du système poly-articulé de la figure 4.23 ne présentent alors plus le même niveau d'énergie, et l'une d'elle est privilégiée par rapport aux deux autres. Cette remarque reste valable même si l'énergie de flexion est très faible, car dans le cas du flambement d'une corde modélisée par notre structure poly-articulée, c'est cette énergie qui gouverne la cinématique du système.

Le phénomène que nous venons de décrire pour les barres s'applique aux membranes même si, dans ce cas, intervient en plus de la rigidité de flexion la rigidité induite par la tension des éléments voisins à un élément en compression. Les deux maillages B et C ont des éléments pour lesquels une des arêtes est orientée suivant la direction des plis. La jonction entre chaque élément membrane est alors assimilable à une charnière et leur permet de s'organiser dans une configuration en dents de scie de manière à former un demi-pli par élément. Comme avec l'ensemble de barres, pour régulariser le problème et obtenir une modélisation physique de la structure, il faut rajouter une énergie de flexion et donc utiliser des éléments de coque.

On peut conclure de ces deux simulations qu'il est nécessaire d'utiliser des éléments de coques pour modéliser le flambement des films minces, alors que les éléments de membranes pures ne sont pas adaptés à ce type d'étude. Cependant, on trouve des références dans lesquelles les auteurs prédisent des ondulations régulières en utilisant un modèle de membrane rigide en compression et en traction comparable à celui présenté à la soussection 2.2.1, notamment Diaby (2005). Nous avons également obtenu ce type de résultats en utilisant le maillage de type A et les ondulations sont présentées sur la figure 4.24.



Fig. 4.24 — Résultats de simulation obtenues avec un élément de membrane et un maillage de type A ($\delta_c = 3 mm$).

Cette solution n'a en réalité rien de physique : l'amplitude, la longueur d'onde et le nombre de plis prédit par cette simulation sont très éloignés de nos résultats précédents, et il ne s'agit donc pas d'une solution issue d'une branche de bifurcation différente. La cinématique de ces ondulations est induite par la raideur de mécanisme du maillage. En fait cette solution correspond à ce qu'on aurait observé en cisaillant un ensemble de plaques triangulaires rigides assemblées par des charnières sans rigidité en torsion.

4.2.1.6 Étude de la sensibilité à l'orientation du maillage.

Dans la suite des travaux numériques, on élimine l'élément membrane pure pour n'utiliser que les éléments de coques minces, l'élément (membrane + DKT) ainsi que l'élément (membrane + patch). On compare alors les résultats de simulations réalisées avec ces deux types d'éléments pour les trois orientations du maillage A, B et C. L'objectif est double, d'une part étudier la robustesse de ces deux éléments en observant l'influence de la formulation de l'élément fini sur la cinématique des plis, et d'autre part analyser la sensibilité de la prédiction numérique à l'orientation du maillage. La question est notamment de savoir si l'énergie de flexion permet de compenser la raideur de mécanisme du maillage.

Les cartes des déplacements hors plan et leurs sections centrales issues de ces tests numériques sont présentées respectivement sur les figures 4.25 et 4.26. On a ensuite compté le nombre d'ondulations visibles sur chaque profil. Ces résultats synthétiques sont donnés sur le tableau 4.1.

Le constat que l'on effectue en observant ces résultats est la disparité importante des prédictions numériques obtenues entre les différentes orientations du maillage.

Les sections centrales correspondant à l'emploi du maillage de type A montrent que



Fig. 4.25 — Étude de la sensibilité à l'orientation du maillage : carte des déplacements hors plan obtenues pour $\delta_c = 3 mm$.

Tableau 4.1 — Tableau récapitulatif du nombre de plis suivant l'orientation du maillage et le type d'élément fini obtenues pour $\delta_c = 3 mm$.

Type de		Type d'élément	
maillage	Membrane	Membrane + DKT	Membrane + Patch
А	8	7	8
В	24	18	19
C	25	16	15



Fig. 4.26 — Étude de la sensibilité à l'orientation du maillage : sections centrales obtenues pour $\delta_c = 3 \ mm$.

le phénomène de verrouillage numérique induit par la raideur de mécanisme du maillage n'est pas corrigé par l'ajout de la rigidité de flexion. Il semble donc que cette rigidité fictive est prépondérante par rapport à la rigidité de flexion, probablement car cette dernière est très faible du fait de l'épaisseur de l'éprouvette $(25\mu m)$.

On observe également des écarts entre les simulations réalisées avec les orientations de maille B et C, même s'ils sont moins marqués qu'avec le maillage de type A.

Concernant le choix des éléments finis, on a obtenu des ondulations beaucoup plus régulières – avec les maillages de type B et C – en utilisant l'élément fini patch qu'avec l'élément DKT. Les sections centrales issues des calculs avec le modèle DKT apparaissent même légèrement perturbées. Cette perturbation de la surface indique que le calcul n'a pas totalement convergé, ce qui est probablement à mettre en relation avec un phénomène de verrouillage en membrane. L'élément patch est beaucoup moins sensible à ce problème de verrouillage, car les degrés de liberté utilisés pour évaluer l'énergie de flexion et de tension sont les mêmes. La prédiction numérique effectuée avec l'élément patch et le maillage de type B est la plus fidèle au relevé expérimental fourni par Wong et Pellegrino (2006a) (voir courbe 4.27). Cette simulation fait état de 19 plis d'une amplitude moyenne de 0.38 mm dans la zone centrale et d'une longueur d'onde de 16.6 mm. Les valeurs issues de l'observation expérimentale sont de 20 mm environ pour la longueur d'onde et de 0.4 mmpour l'amplitude moyenne.



Fig. 4.27 — Section centrale de l'éprouvette rectangulaire en cisaillement, tirée de l'étude de Wong et Pellegrino (2006a).

4.2.1.7 Bilan de l'étude numérique de la membrane rectangulaire cisaillée.

Cette étude a démontré l'efficacité de la technique de résolution par gradient conjugué pour résolute des problèmes de flambement avec la méthode des éléments finis.

Les tests numériques effectués avec des éléments de membrane pure ont mis en avant les insuffisances de ce modèle pour représenter le comportement d'un film mince. L'énergie de flexion est indispensable pour modéliser ces structures, même si elles sont très fines, car avec la tension dans le plan, la flexion gouverne la cinématique des ondulations. Il faut donc utiliser des éléments de coque mince, et nous en avons comparé deux qui différent par la formulation de l'élément plaque : le DKT et le patch. L'élément patch s'est révélé moins sensible au phénomène de verrouillage numérique et nous avons obtenu grâce à lui des résultats satisfaisants.

Quel que soit le type d'élément, la réponse de la structure est fortement influencée par l'orientation du maillage. Lors de l'analyse des résultats de simulations, il faut la comparer à l'orientation des plis. Si la direction préférentielle des mailles est différente de celle des plis, il faut construire une nouvelle table de connectivités.

Avec ces enseignements, on poursuit l'évaluation de méthode de résolution par gradient conjugué à travers la simulation des plis sur l'éprouvette cruciforme.

4.2.2 Étude numérique de l'éprouvette cruciforme.

Le but de cette étude est de confronter les prédictions numériques réalisées avec la méthode de gradient et le relevé expérimental des ondulations formées à la surface de l'éprouvette cruciforme présentée en 1.4. Nous nous sommes limités à simuler le trajet de chargement 7 (voir tableau 1.6) soit $\delta_1 = -3 mm$ et $\delta_2 = 0$ à $\delta_2 = 3 mm$ pour des spécimens de trois épaisseurs différentes (125 μm , 50 μm , 25 μm) ainsi que le cas de chargement ($\delta_1 = -2 mm$, $\delta_2 = 0.5 mm$) pour une éprouvette de 125 μm .

Les calcul ont été effectués en utilisant la procédure présentée sur l'algorithme 1 et en fixant la valeur du paramètre $\epsilon = 10^{-10}$. Les conditions aux limites, les caractéristiques mécaniques du matériau et la géométrie de l'éprouvette sont décrites en 4.1.2. Le maillage correspond au découpage de chaque élément quadrangle de la figure 4.7 en quatre éléments triangle. Il est orienté dans la direction préférentielle de la mise en tension et il compte 64 000 éléments finis triangulaires de type membrane + patch.

4.2.2.1 Incertitudes liées à l'utilisation d'une méthode de gradient.

Expérimentalement, nous avons montré que des incertitudes sur les conditions aux limites peuvent amener une éprouvette de faible épaisseur à évoluer sur des branches bifurquées distinctes. Ces résultats ont été reproduits numériquement avec la méthode d'analyse post-bifurcatoire en introduisant des modes de bifurcation différents sous la forme de défauts géométriques.

Avec la méthode de gradient, on n'effectue pas d'analyse modale, mais on perturbe le maillage initial en lui imposant un déplacement aléatoire pour initier le flambement de la structure. Nous avons cherché à évaluer l'influence de ce déplacement sur la cinématique des ondulations. Pour différentes perturbations aléatoires d'une amplitude comprise entre 0 et 1 mm, nous avons obtenu deux configurations cinématiques distinctes lors de l'étude d'un spécimen de 125 μm soumis au cas de chargement ($\delta_1 = -2 mm$, $\delta_2 = 0.5 mm$). Les résultats de simulation sont présentés sur la figure 4.28.

La superposition des profils expérimentaux et numérique montre que nous avons repro-



Fig. 4.28 — Comparaison des résultats expérimentaux et numériques obtenu avec la méthode de gradient pour $\delta_1 = -2 \ mm$ et $\delta_2 = 0.5 \ mm$ (épaisseur du spécimen 125 μ m).

duit par le calcul l'évolution de l'éprouvette cruciforme sur les branches bifurquées issues des deux premiers modes de flambement. La résolution d'un problème non linéaire en utilisant l'algorithme de gradient nous donne donc une configuration cinématique possible de la structure, mais pas forcément celle qui correspond à la première branche bifurquée. Ce constat est valable car la structure est de faible épaisseur et présente en conséquence des points de bifurcation très proches.

4.2.2.2 Confrontation entre les résultats numériques et expérimentaux.

Nous avons effectué des simulations numériques pour les trois épaisseurs des spécimens testés expérimentalement, en imposant un déplacement négatif $\delta_1 = -3 mm$ puis un déplacement δ_2 allant de 0 à 3 mm. Des exemples de résultats de simulation sont donnés sur les figures 4.29, 4.30 et 4.31 pour des échantillons d'une épaisseur respective de (125 μ m, 50 μ m et 25 μ m).

On superpose sur un graphique, les sections centrales obtenues par le calcul et les profils expérimentaux issus des mêmes branches bifurquées. L'allure générale des motifs prédits numériquement est relativement fidèle à nos observations expérimentales; cependant pour les éprouvettes de 50 μm et 25 μm , on note des disparités concernant les amplitudes des ondulations.

Dans la zone centrale de l'éprouvette -150 mm < x < 150 mm, l'amplitude des plis relevés expérimentalement est plus grande que ce qui est prédit par le calcul alors que pour les plis situés sur les bords, on fait le constat inverse.

Pour comparer plus en détail la géométrie des ondulations issues de la simulation avec nos relevés expérimentaux, on trace l'évolution du nombre, de la longueur d'onde et de l'amplitude moyenne des plis en fonction du déplacement de tension δ_2 respectivement sur



Fig. 4.29 — Comparaison des résultats expérimentaux et numériques obtenus avec la méthode de gradient pour $\delta_1 = -3 mm$ et $\delta_2 = 3 mm$ (épaisseur du spécimen 125 μm).



Fig. 4.30 — Comparaison des résultats expérimentaux et numériques obtenus avec la méthode de gradient pour $\delta_1 = -3 mm$ et $\delta_2 = 3 mm$ (épaisseur du spécimen 50 μm).



Fig. 4.31 — Comparaison des résultats expérimentaux et numériques obtenus avec la méthode de gradient pour $\delta_1 = -3 mm$ et $\delta_2 = 3 mm$ (épaisseur du spécimen 25 μm).

les figures 4.32, 4.33 et 4.34. Cette synthèse des résultats correspond au dépouillement des données expérimentales effectué dans la partie 1.4.4.3. Les valeurs obtenues pour une seule simulation numérique sont confrontées avec la moyenne des données mesurées pour trois manipulations.



Fig. 4.32 — Comparaison du nombre de plis observés expérimentalement avec les prédictions numériques obtenues avec la méthode de gradient pour $\delta_1 = -3 \ mm$.

Les prédictions numériques sont cohérentes avec les observations expérimentales pour les spécimens de 125 μm . Par contre, si on se focalise sur l'évolution des plis formés à la surface des échantillons de 25 μm et 50 μm , le calcul numérique conduit à des prédictions moins fidèles quant au nombre et à l'amplitude maximale des plis pour des niveaux de tension faibles. Lorsque le niveau de tension augmente ($\delta_2 > 2 mm$), on a alors des résultats cohérents quelle que soit l'épaisseur des échantillons.

Pour identifier la nature des écarts, nous avons superposé les sections centrales des



Fig. 4.33 — Comparaison de la longueur d'onde moyenne des plis observés expérimentalement avec les prédictions numériques obtenues avec la méthode de gradient pour $\delta_1 = -3 mm$.



Fig. 4.34 — Comparaison de l'amplitude maximale des plis observés expérimentalement avec les prédictions numériques obtenues avec la méthode de gradient pour $\delta_1 = -3 mm$.

cartes de déplacement expérimentales et numériques pour un spécimen cruciforme d'une épaisseur de 50 μm soumis au cas de chargement ($\delta_1 = -3 mm$, $\delta_2 = 1 mm$). Le tracé est visible sur la figure 4.35.



Fig. 4.35 — Comparaison des résultats expérimentaux et numériques obtenus avec la méthode de gradient pour $\delta_1 = -3 mm$ et $\delta_2 = 1 mm$ (épaisseur du spécimen 50 μm).

On note sur le profil numérique l'absence totale de plis dans la zone centrale, alors qu'expérimentalement trois ondulations d'une amplitude moyenne de 0.3 mm ont été observées. Les plis sur les bords sont également d'amplitudes différentes. La flèche maximale est de 5.4 mm pour le profil numérique contre 4.5 mm pour le relevé expérimental. Ce constat est à mettre en relation avec nos remarques précédentes. La répartition de la flèche est différente entre le modèle numérique et nos mesures. Plusieurs raisons pourraient expliquer ce phénomène. Il possible d'une part que le coefficient de Poisson du Kapton n'ait pas été correctement identifié, et d'autre part qu'une flèche initiale non nulle du spécimen soit induite par des jeux éventuels dans le montage, ou par la mise en position du film mince, influençant ainsi la répartition des amplitudes.

Du point de vue numérique, l'écart peut être causé par un problème de verrouillage numérique, car plus l'épaisseur de la structure est faible, plus les écarts entre le modèle et les mesures sont marqués.

Plusieurs de ces phénomènes, peuvent coexister. Pour affiner encore notre modèle numérique, il faut être capable de les quantifier. Cette étude est à mettre dans les perspectives de ces travaux.

4.2.3 Autres exemples numériques traités par la méthode de gradient.

L'évaluation de notre procédure numérique de simulation des ondulations est poursuivie à travers l'analyse des ondulations sur l'éprouvette cruciforme ajourée, puis sur une membrane carrée chargée à ses extrémités.

4.2.3.1 L'éprouvette en croix percée.

La membrane cruciforme ajourée est la seconde structure pour laquelle nous avons effectué le relevé de la forme des ondulations. Sa géométrie est visible sur la figure 1.40. Nous avons simulé la mise en tension d'un spécimen d'une épaisseur de 50 μm pour lequel les bords latéraux sont encastrés. Le calcul est mené avec un contrôle en déplacement, et on impose une translation de 5 mm aux bords supérieurs et inférieurs de l'éprouvette. La structure est discrétisée à l'aide 100 000 éléments membrane et patch.

Comme pour les simulations précédentes, on utilise la procédure de calcul présentée sur l'algorithme 1 où le coefficient ϵ est fixé à 10^{-10} . Après initialisation du calcul, le flambement de la structure est initié en lui imposant un champ de déplacement hors plan aléatoire d'une amplitude comprise entre 0 et 0.05 mm.



Les résultats numériques sont présentés sur la figure 4.36.

Fig. 4.36 — Comparaison des résultats expérimentaux et numériques obtenus avec la méthode de gradient pour $\delta_1 = 0mm$ et $\delta_2 = 5mm$ (épaisseur du spécimen 50 μm).

La forme et la répartition des plis visibles sur la carte des déplacements hors plan concorde avec nos observations expérimentales. Les bords supérieurs et inférieurs du motif de découpe ont flambé alors que les bords latéraux sont restés plans. Des plis secondaires d'une amplitude de quelques dizaines de microns encadrent cette zone d'instabilité. Pour étudier plus en détail le flambement du motif de découpe, on trace une coupe longitudinale de l'éprouvette (x = 0 mm) sur la figure 4.36 b) et on lui superpose le relevé de mesures expérimental présenté sur la figure 1.44.

Le motif de flambement observé expérimentalement est asymétrique alors que notre simulation prédit un motif de flambement symétrique. Dans la partie gauche de la courbe, les deux profils se superposent parfaitement, et l'amplitude maximale de la flèche près des bords est de 3.078 mm pour le profil expérimental contre 3.077 mm pour le profil numérique. Une étude des modes de flambement montre que le premier mode de bifurcation

de l'éprouvette ajourée correspond au flambement asymétrique de la zone à proximité du motif carré, alors que le second mode conduit au flambement symétrique. On a donc obtenu le premier mode lors de l'expérience tandis que la simulation numérique a prédit l'évolution de la structure sur la seconde branche bifurquée.

4.2.3.2 La membrane carrée chargée à ses extrémités.

Wong et Pellegrino (2006a) ont effectué une série d'expériences sur une éprouvette de Kapton \mathbb{R} d'une épaisseur de 25 μm chargée à ses extrémités par l'intermédiaire d'une corde en Kevlar attachée à des pièces rigides en acier collées sur le film polyimide. La structure est un carré de 500 mm par 500 mm et les pièces collées aux extrémités mesurent 25 mm × 20 mm. Un effort de 5N a été appliqué aux deux extrémités situées sur l'axe horizontal et un effort de 20 N a été imposé aux deux extrémités situées sur l'axe vertical.

Dans cet exemple nous avons fixé la valeur du paramètre ϵ à 10^{-10} . La structure a été discrétisée avec 62300 éléments et nous avons effectué deux simulations avec les éléments patch et DKT.

La figure 4.37 a) montre un large pli vertical traversant la surface de l'éprouvette de part en part. Pour cet exemple numérique, l'utilisation des éléments Patch ou DKT conduit à des résultats très similaires. Wong et Pellegrino (2006a) ont observé un motif de flambement asymétrique pour le pli central avec un maximum d'environ 2.6 mm et un minimum de -1.2 mm. Notre simulation numérique aboutit à une prédiction cohérente. L'allure du motif correspond aux mesures expérimentales, et la flèche maximale sur le profil numérique est de 2.76 mm avec la formulation de plaque DKT et 2.65 mm avec l'élément patch. Pour la flèche minimale on relève -0.96 mm avec le DKT et -1.066 mm pour le patch.



Fig. 4.37 — Prédiction des ondulations sur la structure étudiée par Wong et Pellegrino (2006a) soumise à des efforts à ses extrémités de 20N et 5N.

4.3 Bilan de l'étude numérique.

Au cours de cette étude numérique, nous avons utilisé deux techniques de calcul. La première est la méthode d'analyse post-bifurcatoire qui consiste à effectuer une étude linéarisée des modes de bifurcation, couplée à une résolution non linéaire du problème discret à l'aide d'un algorithme de Newton-Raphson. La seconde est la recherche d'un minimum de l'énergie potentielle totale de la structure avec une méthode de descente de premier ordre le gradient conjugué.

Dans la première partie de ce chapitre, la méthode d'analyse post-bifurcatoire est employée pour expliquer certains de nos résultats expérimentaux. L'objectif est de comprendre l'origine de la non unicité des configurations cinématiques de plis que nous avons observée expérimentalement en soumettant trois spécimens identiques – en termes de matériau, de géométrie et d'épaisseur - à un cas de chargement donné. Les tests numériques ont montré que les différentes configurations cinématiques des plis observées expérimentalement sont issues de branches de bifurcations distinctes. Il est ainsi possible de reproduire numériquement l'ensemble des configurations cinématiques que l'éprouvette peut atteindre en s'appuyant sur la théorie de la bifurcation.

La méthode d'analyse post bifurcatoire nous a permis d'obtenir des prédictions numériques très cohérentes, mais les difficultés inhérentes à son utilisation nous ont conduit à tester une technique de résolution plus simple à mettre en œuvre : la recherche d'un minimum de l'énergie potentielle totale avec l'algorithme de gradient conjugué.

Nous avons proposé une routine de calcul pour appliquer cet algorithme à l'étude du flambement des films minces, et réalisé une évaluation de cette technique de résolution. La qualité des prédictions numériques démontre l'intérêt d'utiliser les méthodes de descente du premier ordre pour traiter des problèmes de bifurcation.

Trois éléments finis ont été testé lors de ces tests numériques : un élément de membrane et deux éléments de coque mince. Les simulations ont montré l'incapacité de l'élément membrane pure à modéliser le comportement d'un film mince en flambement. La prise en compte de l'énergie de flexion dans le modèle est indispensable, et il convient d'utiliser des éléments de coque mince. L'étude comparative de l'élément de coque mince membrane + DKT et membrane + Patch a montré que ce dernier est moins sensible au phénomène de verrouillage numérique en membrane. Ces deux éléments de coques sont très sensibles à l'orientation des mailles, et nous avons montré la rigidité artificielle de mécanisme du maillage. Il convient donc de considérer ce phénomène pour obtenir des prédictions numériques cohérentes.

Conclusion Générale

Conclusions

L'emploi de film mince est actuellement envisagé pour la réalisation des satellites du futur. Cependant, l'utilisation de ces structures pose un certain nombre de problèmes inhérents à leur faible épaisseur, notamment le phénomène de plissement. Chaque application requiert des tolérances géométriques différentes et il est important de quantifier précisément les défauts de surface que sont les ondulations. C'est dans ce cadre que se situent nos travaux, qui comportent deux axes principaux : l'étude expérimentale et numérique du flambement des films minces.

Cette thèse a débuté par la conception d'un banc de traction bi-axial dédié à la réalisation de tests sur des films minces. Cet outil a été utilisé par la suite pour mener une campagne d'essais sur des éprouvettes de géométrie simple permettant de collecter des données expérimentales de qualité pour une grande variété de cas de chargement. Pour chaque cas de chargement, un relevé complet de la géométrie de la surface a été effectué grâce à la méthode optique d'analyse de franges. On dispose ainsi de données détaillées telles que le nombre, l'amplitude et la longueur d'onde des plis. L'intérêt de ces travaux est, d'avoir réalisé les expériences en considérant trois paramètres d'étude : deux paramètres cinématiques et l'épaisseur des éprouvettes. Nous avons également considéré la reproductibilité d'un motif de plis donné pour des spécimens identiques soumis aux mêmes conditions de chargement. En plus de cette base de données, indispensable à la confrontation des données empiriques avec les résultats issus des simulations, deux résultats expérimentaux importants ont été obtenus :

- L'identification du mécanisme de création des plis.
- L'observation de différents motifs de plis correspondant à des modes de flambement distincts de la structure.

De plus, le banc de traction nous a permis de tester une membrane présentant une découpe carrée en son centre. On a ainsi pu évaluer la faisabilité des tests sur des structures ajourées dans la perspective des essais futurs sur des éprouvettes de géométrie complexe, telles que la lentille de Fresnel.

La seconde partie de la thèse porte sur l'évaluation et le développement des outils numériques de prédiction des ondulations. Dans un premier temps, le flambement des films minces a été traité à l'aide du logiciel ABAQUS par la méthode d'analyse postbifurcatoire. Les simulations effectuées avec cette méthode ont montré que les motifs des plis observés expérimentalement pour des conditions d'essais quasi-similaires sont issus de branches de bifurcations distinctes. Différentes configurations cinématiques de plis ont ainsi été reproduites en s'appuyant sur la théorie de la bifurcation.

Cependant, malgré la pertinence des prédictions numériques obtenues avec la méthode d'analyse post-bifurcatoire, les contraintes liées à son utilisation nous ont poussé à employer une méthode de résolution du problème non-linéaire plus simple à mettre en œuvre : la recherche d'un minimum de l'énergie potentielle totale avec l'algorithme de gradient conjugué. A cette fin, trois éléments finis ont été implémentés dans le code de calcul Surface Evolver : un élément fini de membrane pure et deux éléments finis de plaques minces, le DKT et le Patch. Le choix d'employer des éléments de coques minces composés de la superposition d'un élément de membrane pure et d'un des ces éléments de plaques est motivé par la robustesse de leur formulation vis-à-vis du verrouillage numérique en membrane.

La mise en œuvre d'un algorithme de résolution du premier ordre pour le traitement des problèmes de bifurcation constitue une approche originale, dont l'intérêt est démontré par la qualité de nos prédictions numériques. Son atout majeur est de ne pas nécessiter l'intervention de l'utilisateur à des étapes clefs du calcul et de ce fait, nous espérons l'utiliser pour la prédiction "en aveugle" des motifs d'ondulations. Une procédure de calcul adaptée à l'étude du flambement des films minces avec l'algorithme de gradient conjugué est proposée dans le dernier chapitre de la thèse. Ensuite, nous avons procédé à l'évaluation et à la validation de cette technique de résolution en comparant les résultats des simulations numériques avec des données d'essais issues de sources bibliographiques et de nos expériences.

L'étude numérique a également été mise à profit pour comparer les résultats des prédictions numériques effectuées avec les trois éléments finis que nous avons implémentés : l'élément de membrane et les deux éléments de coque mince (membrane et DKT, membrane et patch). Les simulations ont montré l'incapacité de l'élément membrane pure à modéliser le comportement d'un film mince. La prise en compte de l'énergie de flexion dans le modèle est indispensable, et il convient d'utiliser des éléments de coque mince. L'étude comparative entre l'élément de coque mince membrane et DKT et membrane et Patch a montré que ce dernier est moins sensible au phénomène de verrouillage numérique en membrane. Ces deux éléments de coques sont très sensibles à l'orientation des mailles, et nous avons montré la rigidité artificielle de mécanisme du maillage. Il est important de prendre en compte ce phénomène pour obtenir des prédictions numériques cohérentes.

Perspectives

Au cours de l'étude expérimentale, nous avons constitué une base de données extrêmement fournie et nous possédons les cartes de déplacements hors plan pour plus de trois cents points de mesures. Cependant elle n'a pas été exploitée en totalité puisque nous avons principalement travaillé avec les données issues des profils centraux. Selon, les phénomènes que l'on souhaite mettre en avant, on peut espérer tirer des résultats utiles de cette base de données pour les études à venir.

Concernant l'étude numérique, les perspectives de prolongement que nous souhaitons lui donner sont les suivantes :

- Le contrôle actuel de l'algorithme de gradient conjugué s'effectue en force ou en déplacement. Il est ainsi impossible de décrire les branches instables de la courbe d'équilibre. Pour améliorer l'algorithme, il faut envisager d'utiliser un pilotage hybride de type "longueur d'arc".
- Nous avons mis en avant le phénomène de raideur artificielle du maillage pour des éléments finis de coques minces triangulaires à trois nœuds. Il serait intéressant de procéder à une évaluation plus complète de la bibliothèque des éléments finis couramment utilisés sur le test de la membrane rectangulaire en cisaillement pour observer la dépendance du motif des plis à l'orientation du maillage.
- La simulation des ondulations demande des maillages très denses. Dans l'exemple de la membrane ajourée, il comprenait plus de 100 000 éléments. Avec nos outils actuels, la simulation du plissement d'une structure réelle d'une surface de plusieurs dizaines de mètres carrés demanderait un temps considérable. Pour accélérer le calcul, il faudrait ajouter une procédure de remaillage afin de densifier le maillage seulement dans les zones affectées par les ondulations.

ANNEXE A

Vecteur gradient et matrice Hessienne de l'énergie de déformation élastique pour l'élément membrane triangulaire

A.1 Potentiel élastique de Saint Venant Kirchhoff

L'égalité A.1 est l'expression du potentiel élastique de Saint Venant Kirchhoff en fonction des composantes du tenseur de dilatations, soit :

$$\Psi^{M} = \frac{\mu \lambda}{2(\lambda + 2\mu)} \left[3 - 3C_{1}^{1} + (C_{1}^{1})^{2} + C_{1}^{1}C_{2}^{2} + C_{1}^{2}C_{2}^{1} - 3C_{2}^{2} + (C_{2}^{2})^{2} \right] + \frac{\mu^{2}}{2(\lambda + 2\mu)} \left[2 - 2C_{1}^{1} + (C_{1}^{1})^{2} + 2C_{1}^{2}C_{2}^{1} - 2C_{2}^{2} + (C_{2}^{2})^{2} \right]$$
(A.1)

A.2 Vecteur Gradient du potentiel élastique de Saint Venant Kirchhoff

Les composantes du gradient de l'énergie sont obtenues en dérivant l'expression de ce potentiel par rapport aux coordonnées $x_i^{\ j}$ où l'indice i désigne le numéro du noeud et l'indice j la composante :

$$\left(\nabla\Psi^{M}\right)_{ij} = \frac{\partial\Psi^{M}}{\partial x_{i}^{j}} = \frac{\partial\Psi^{M}}{\partial C_{\alpha}^{\beta}} \frac{\partial C_{\alpha}^{\beta}}{\partial x_{i}^{j}} = \frac{\partial\Psi^{M}}{\partial C_{1}^{1}} \frac{\partial C_{1}^{1}}{\partial x_{i}^{j}} + \frac{\partial\Psi^{M}}{\partial C_{2}^{2}} \frac{\partial C_{2}^{2}}{\partial x_{i}^{j}} + \frac{\partial\Psi^{M}}{\partial C_{1}^{2}} \frac{\partial C_{2}^{1}}{\partial x_{i}^{j}} + \frac{\partial\Psi^{M}}{\partial C_{1}^{2}} \frac{\partial C_{2}^{1}}{\partial x_{i}^{j}} + \frac{\partial\Psi^{M}}{\partial C_{1}^{2}} \frac{\partial C_{2}^{1}}{\partial x_{i}^{j}}$$

$$(A.2)$$

avec :

$$\frac{\partial \Psi^{M}}{\partial C_{1}^{1}} = \frac{\mu}{2(\lambda + 2\mu)} [2\lambda C_{1}^{1} - 3\lambda + \lambda C_{2}^{2} + 2C_{1}^{1}\mu - 2\mu]
\frac{\partial \Psi^{M}}{\partial C_{2}^{2}} = \frac{\mu}{2(\lambda + 2\mu)} [2\lambda C_{2}^{2} - 3\lambda + \lambda C_{1}^{1} + 2\mu C_{2}^{2} - 2\mu]
\frac{\partial \Psi^{M}}{\partial C_{1}^{2}} = \frac{\mu}{2} C_{2}^{1}
\frac{\partial \Psi^{M}}{\partial C_{2}^{1}} = \frac{\mu}{2} C_{1}^{2}$$
(A.3)

 ${\rm et}:$

$$\begin{split} \frac{\partial C_1^1}{\partial x_2^j} &= 2 x_{12}^j G^{11} + x_{13}^j G^{12} \\ \frac{\partial C_1^1}{\partial x_3^j} &= x_{12}^j G^{12} \\ \frac{\partial C_1^2}{\partial x_2^j} &= 2 x_{12}^j G^{12} + x_{13}^j G^{22} \\ \frac{\partial C_1^2}{\partial x_3^j} &= x_{12}^j G^{22} \\ \frac{\partial C_2^1}{\partial x_3^j} &= x_{12}^j G^{11} \\ \frac{\partial C_2^1}{\partial x_3^j} &= x_{12}^j G^{11} + 2 x_{13}^j G^{12} \\ \frac{\partial C_2^2}{\partial x_3^j} &= x_{13}^j G^{12} \\ \frac{\partial C_2^2}{\partial x_3^j} &= x_{12}^j G^{12} + 2 x_{13}^j G^{22} \\ \frac{\partial C_1^2}{\partial x_3^j} &= x_{12}^j G^{12} + 2 x_{13}^j G^{22} \\ \frac{\partial C_1^2}{\partial x_3^j} &= - \frac{\partial C_1^1}{\partial x_2^j} - \frac{\partial C_1^1}{\partial x_3^j} \\ \frac{\partial C_2^2}{\partial x_1^j} &= - \frac{\partial C_1^2}{\partial x_2^j} - \frac{\partial C_1^2}{\partial x_3^j} \\ \frac{\partial C_2^2}{\partial x_1^j} &= - \frac{\partial C_2^1}{\partial x_2^j} - \frac{\partial C_2^2}{\partial x_3^j} \\ \frac{\partial C_2^2}{\partial x_1^j} &= - \frac{\partial C_2^1}{\partial x_2^j} - \frac{\partial C_2^2}{\partial x_3^j} \\ \frac{\partial C_2^2}{\partial x_1^j} &= - \frac{\partial C_2^2}{\partial x_2^j} - \frac{\partial C_2^2}{\partial x_3^j} \\ \frac{\partial C_2^2}{\partial x_1^j} &= - \frac{\partial C_2^2}{\partial x_2^j} - \frac{\partial C_2^2}{\partial x_3^j} \\ \end{array}$$

A.3 Matrice Hessienne du potentiel élastique de Saint Venant Kirchhoff

Les composantes de la matrice Hessienne, sont obtenues en dérivant les composantes du gradient par rapport aux coordonnées $x_i^{\ j}$. On alors :

$$H_{ijkl} = \frac{\partial}{\partial x_i^j} \frac{\partial \Psi^M}{\partial x_k^l} = \left[\frac{\partial}{\partial x_i^j} \frac{\partial \Psi^M}{\partial C_\alpha^\beta} \frac{\partial C_\alpha^\beta}{\partial x_k^l} \right]$$

$$H_{ijkl} = \left(\frac{\partial^2 \Psi^M}{\partial C_\alpha^\beta \partial C_\lambda^\mu} \frac{\partial C_\lambda^\mu}{\partial x_i^j} \right) \frac{\partial C_\alpha^\beta}{\partial x_k^l} + \frac{\partial \Psi^M}{\partial C_\alpha^\beta} \frac{\partial^2 C_\alpha^\beta}{\partial x_i^j \partial x_k^l}$$
(A.5)

Les dérivées $\frac{\partial \Psi^M}{\partial C^{\beta}_{\alpha}}$ et $\frac{\partial C^{\beta}_{\alpha}}{\partial x_i^j}$ ont été utilisé pour le gradient, et ont été explicité en A.3 et A.3. Les termes $\frac{\partial^2 C^{\beta}_{\alpha}}{\partial x_i^j \partial x_k^l}$ et $\frac{\partial^2 \Psi^M}{\partial C^{\beta}_{\alpha} \partial C^{\mu}_{\lambda}}$ non nuls, sont détaillés en A.6 et A.7, A.8, A.9, A.10 :

$$\frac{\partial^2 \Psi^M}{\partial C_1^1 \partial C_1^1} = \frac{\mu (\mu + \lambda)}{\lambda + 2\mu}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi^M}{\partial C_1^1 \partial C_2^2} = \frac{\lambda \mu}{2\lambda + 4\mu}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi^M}{\partial C_1^2 \partial C_2^1} = \frac{\mu}{2}$$
(A.6)
$$\frac{\partial^2 \Psi^M}{\partial C_2^2 \partial C_1^1} = \frac{\mu \lambda}{2}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi^M}{\partial C_2^2 \partial C_1^1} = \frac{\mu \lambda}{2 (\lambda + 4\mu)}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi^M}{\partial C_2^2 \partial C_2^2} = \frac{\mu (\mu + \lambda)}{\lambda + 2\mu}$$

Dérivées secondes, non nulles, de ${\cal C}_1^1$:

$$\frac{\partial^2 C_1^1}{\partial x_1^i \partial x_1^l} = 2G^{11} + 2G^{12}
\frac{\partial^2 C_1^1}{\partial x_1^j \partial x_2^l} = \frac{\partial^2 C_1^1}{\partial x_2^j \partial x_1^l} = -2G^{11} - G^{12}
\frac{\partial^2 C_1^1}{\partial x_1^j \partial x_3^l} = \frac{\partial^2 C_1^1}{\partial x_3^j \partial x_1^l} = -G^{12}
\frac{\partial^2 C_1^1}{\partial x_2^j \partial x_2^l} = 2G^{11}
\frac{\partial^2 C_1^1}{\partial x_3^j \partial x_2^l} = \frac{\partial^2 C_1^1}{\partial x_2^j \partial x_3^l} = G^{12}$$
(A.7)

Dérivées secondes, non nulles, de ${\cal C}_2^1$:

$$\frac{\partial^2 C_1^2}{\partial x_1^i \partial x_1^l} = 2G^{12} + 2G^{22}
\frac{\partial^2 C_1^2}{\partial x_1^i \partial x_2^l} = \frac{\partial^2 C_1^2}{\partial x_2^j \partial x_1^l} = -2G^{12} - G^{22}
\frac{\partial^2 C_1^2}{\partial x_1^i \partial x_3^l} = \frac{\partial^2 C_1^2}{\partial x_3^j \partial x_1^l} = -G^{22}
\frac{\partial^2 C_1^2}{\partial x_2^j \partial x_2^l} = 2G^{12}
\frac{\partial^2 C_1^2}{\partial x_3^j \partial x_2^l} = \frac{\partial^2 C_1^2}{\partial x_2^j \partial x_3^l} = G^{22}$$
(A.8)

Dérivées secondes, non nulles, de ${\cal C}_1^2$:

$$\frac{\partial^2 C_2^1}{\partial x_1^1 \partial x_1^1} = 2G^{11} + 2G^{22}
\frac{\partial^2 C_2^1}{\partial x_1^1 \partial x_2^1} = \frac{\partial^2 C_2^1}{\partial x_2^2 \partial x_1^1} = -G^{11}
\frac{\partial^2 C_2^1}{\partial x_1^1 \partial x_3^1} = \frac{\partial^2 C_2^1}{\partial x_3^2 \partial x_1^1} = -G^{11} - 2G^{12}
\frac{\partial^2 C_2^1}{\partial x_3^1 \partial x_2^1} = \frac{\partial^2 C_2^1}{\partial x_2^2 \partial x_3^1} = G^{11}
\frac{\partial^2 C_2^1}{\partial x_3^2 \partial x_3^1} = 2G^{12}$$
(A.9)

Dérivées secondes, non nulles, de ${\cal C}_2^2$:

$$\frac{\partial^2 C_2^2}{\partial x_1^1 \partial x_1^1} = 2G^{12} + 2G^{22}
\frac{\partial^2 C_2^2}{\partial x_1^1 \partial x_2^1} = \frac{\partial^2 C_2^2}{\partial x_2^1 \partial x_1^1} = -G^{12}
\frac{\partial^2 C_2^2}{\partial x_1^1 \partial x_3^1} = \frac{\partial^2 C_2^2}{\partial x_3^3 \partial x_1^1} = -G^{12} - 2G^{22}
(A.10)
\frac{\partial^2 C_2^2}{\partial x_3^2 \partial x_2^1} = \frac{\partial^2 C_2^2}{\partial x_2^2 \partial x_3^1} = G^{12}
\frac{\partial^2 C_2^2}{\partial x_3^3 \partial x_3^1} = 2G^{22}$$

BIBLIOGRAPHIE

- A.L. Adler, M.M Mikulas et J.M. Hedgepeth. Static and dynamic analysis of parially wrinkled membrane structures. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 2000.
- Johann Arbocz. Post-buckling behaviour of structures numerical techniques for more complicated structures buckling and post-buckling : Four lectures in experimental, numerical and theoretical solid mechanics based on talks given at the cism-meeting held in udine, italy,. *Lecture Notes in Physics*, 288:83–142, September 29–October 3 1985.
- N. J. Balmforth, R. V. Craster et A. C. Slim. On the buckling of elastic plates. Q J Mechanics Appl Math, 61(2):267–289, 2008.
- J.L. Batoz et G. Dhatt. Modélisation des structures par éléments finis Volume 2 poutres et plaques. Hermès, 1990.
- Ted Belytschko, Wing Kam Liu et Brian Moran. Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures. John Wiley & Sons, 2000.
- P. G. Bergan, G. Horrigmoe, B. Bråkeland et T. H. Søreide. Solution techniques for non-linear finite element problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12:1677–1696, 1978.
- Joseph R. Blandino, John D. Johnston et Urmil K. Dharasi. Corner wrinkling of a square membrane due to symmetric mechanical loads. *Journal of Spacecraft and Rockets*, 39 (5):717–724, September-October 2002a. Expérimental.
- J.R. Blandino, J.D. Jonhston, J.J. Miles et U.K. Dharamsi. The effect of asymetric mechanical loading on membrane wrinkling. Dans 43th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Material Conference and Exhibit, 2002b.
- J.R. Blandino, J.D. Jonhston, J.J. Miles et J.S. Soplop. Thin film membrane wrinkling due to mechanical and thermal loads. Dans 42th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Material Conference and Exhibit., 2001.
- Kenneth A. Brakke. The surface evolver. Experimental Mathematics, 1:141–165, 1992.
- M. Brunet et F. Sabourin. A simplified triangular shell element with a necking criterion for 3-d sheet-forming analysis. *Journal of Materials Processing Technology*, 50(1-4):238

- 251, 1995. ISSN 0924-0136. 2nd International Conference on Numerical Simulation of
 3-D Sheet Metal Forming Processes.

- E. Cerda, Ravi-Chandar et L. K. Mahadevan. Thin films : Wrinkling of an elastic sheet under tension. *Nature*, 419:579–580, 10 2002.
- L. Chevalier et Y. Marco. Applications de la mesure de champs à la caractérisation uniaxiale ou multiaxiale des matériaux polymères. *Rhéologie*, 6:45–53, 2004.
- Fehmi Cirak, Michael Ortiz et Peter Schröder. Subdivision surfaces : a new paradigm for thin-shell finite-element analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 47:2039–2072, 2000.
- M.A. Crisfield. A fast incremental/iterative solution procedure that handles. *Computers* & *Structures*, 13(1-3):55 – 62, 1981. ISSN 0045-7949.
- M.A. Crisfield. Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures : Advanced Topics. John Wiley & Sons, Inc, New York, NY, USA, 1997. ISBN 047195649X.
- Adama Diaby. *Contribution à l'étude du flambement des structures gonflables*. Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2005.
- Adama Diaby, Anh Le van et Christian Wielgosz. Buckling and wrinkling of prestressed membranes. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42(11):992 – 1001, 2006. ISSN 0168-874X.
- DuPont. DupontTM kapton® vn polyimide film technical data sheet. Rapport technique, DuPont, 2006.
- Marcelo Epstein et Mario A. Forcinito. Anisotropic membrane wrinkling : theory and analysis. International Journal of Solids and Structures, 38(30-31):5253 5272, 2001.
- Carlos. A. Felipa. Non-linear finite element methods. Rapport technique, University of Collorado, 2001.
- R. Fletcher et C. M. Reeves. Function minimization by conjugate gradients. *The Computer Journal*, 7(2):149–154, 1964.
- Fernando G. Flores et Eugenio Oñate. Improvements in the membrane behaviour of the three node rotation-free bst shell triangle using an assumed strain approach. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194(6-8):907 – 932, 2005. ISSN 0045-7825.
- Mattias Gärdsback et Gunnar Tibert. A comparison of rotation-free triangular shell elements for unstructured meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(49-52):5001 – 5015, 2007. ISSN 0045-7825.

- L. Grippo et S. Lucidi. A globally convergent version of the polak-ribière conjugate gradient method. *Math. Program.*, 78(3):375–391, 1997. ISSN 0025-5610.
- Y. Q. Guo, W. Gati, H. Naceur et J. L. Batoz. An efficient dkt rotation free shell element for springback simulation in sheet metal forming. *Computers & Structures*, 80(27-30): 2299 – 2312, 2002. ISSN 0045-7949.
- Hibbit, Karlsson et Sorenson. Abaqus user's manual, version 6.6. Rapport technique, ABAQUS, Pawtucket, USA, 2006.
- A. Jarasjarungkiat, R. Wüchner et K.-U. Bletzinger. A wrinkling model based on material modification for isotropic and orthotropic membranes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(6-8):773 – 788, 2008. ISSN 0045-7825.
- C.H. Jenkins. Gossamer Spacecraft : Membrane and Inflatable structures technology for space applications. AIAA, 2001.
- C.H Jenkins, F. Haugen et W.H. Spicher. Experimental measurment of wrinkling in membranes undergoing planar deformation. *Experimental Mechanics*, 38:147–152, 1998.
- S. Kang et S. Im. Finite element analysis of wrinkling membranes. Journal of Applied Mechanics, 64:263–269, 1997.
- G. R. Kirchhoff. Vorlesungen über mathematische Physik : Mechanik. Leipzig, 1883.
- H. Laurent et G. Rio. Formulation of a thin shell finite element with continuity c 0 and convected material frame notion. *Computational Mechanics*, 27:218–232, 2001.
- Y. Lecieux et R. Bouzidi. Experimental analysis on membrane wrinkling under biaxial load
 comparison with bifurcation analysis. *International Journal of Solids and Structures*, 47(18-19):2459 – 2475, 2010. ISSN 0020-7683.
- Xinxiang Liu, Christopher H. Jenkins et Willi W. Schur. Large deflection analysis of pneumatic envelopes using a penalty parameter modified material model. *Finite Elements* in Analysis and Design, 37(3):233 – 251, 2001. ISSN 0168-874X.
- A. E. H. Love. The small free vibrations and deformations of a thin elastic shell. Royal Society London, A 179:491–546, 1888.
- E. H. Mansfield. Tension field theory : a new approach which shows its duality with inextensional theory. Dans XII Int. Cong. Appl. Mech., pages 305–320, 1968.
- E. H. Mansfield. Load transfer via a wrinkled membrane. Dans *Proceeding of the royal* society, 1970.
- B. Maurin et R. Motro. Investigation of minimal forms with conjugate gradient method. International Journal of Solids and Structures, 38(14):2387 – 2399, 2001. ISSN 0020-7683.

- Martin M. Mikulas. Behavior of a flat stretched membrane wrinkled by the rotation of an attached hub. Rapport technique D-2456, NASA, 1964.
- Richard K. Miller, John M. Hedgepeth, Victor I. Weingarten, Prasanta Das et Shahrzad Kahyai. Finite element analysis of partly wrinkled membranes. *Computers & Structures*, 20(1-3):631 – 639, 1985. ISSN 0045-7949.
- Tomoshi Miyamura. Wrinkling on stretched circular membrane under in-plane torsion :bifurcation analyses and experiments. *Engineering Structures*, 22(11):1407 – 1425, 2000.
- Jörn Mosler et Fehmi Cirak. A variational formulation for finite deformation wrinkling analysis of inelastic membranes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(27-29):2087 – 2098, 2009. ISSN 0045-7825.
- P.M. Naghdi. The theory of shells and plates, in :Handbuch der Physik, volume VI a-2. Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- A.C. Pipkin. The relaxed energy density for isotropic elastic membranes. IMA J. Appl. Math, 36:85–99., 1986.
- E. Polak et G. Ribiere. Note sur la convergence de méthodes de directions conjuguées. Revue Francaise d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, 16:35–43, 1969.
- Michel Potier-Ferry, Noureddine Damil, Bouazza Braikat, Juliette Descamps, Jean-Marc Cadou, Hua Lei Cao et Ahmad Elhage Hussein. Traitement des fortes non-linéarités par la méthode asymptotique numérique. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Series IIB Mechanics-Physics-Chemistry-Astronomy, 324(3):171 177, 1997. ISSN 1251-8069.
- Virginio Quaglini, Carola Corazza et Carlo Poggi. Experimental characterization of orthotropic technical textiles under uniaxial and biaxial loading. Composites Part A : Applied Science and Manufacturing, 39(8):1331 – 1342, 2008. ISSN 1359-835X. Fullfield Measurements in Composites Testing and Analysis.
- E. Riks. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. International Journal of Solids and Structures, 15(7):529 – 551, 1979.
- Eduard Riks, Charles C. Rankin et Francis A. Brogan. On the solution of mode jumping phenomena in thin-walled shell structures. *Computer Methods in Applied Mechanics* and Engineering, 136(1-2):59 – 92, 1996. ISSN 0045-7825.
- D. W. Robinson et G.T. Reid. Interferogram Analysis Digital Fringe Pattern Measurment Techniques. Institute of Physics Publishing, 1993.
- F. Sabourin et M. Brunet. Analysis of plates and shells with a simplified three node triangular element. *Thin-Walled Structures*, 21(3):209 – 223, 1995. ISSN 0263-8231. Finite Elements for Thin-Walled Structures.

- Denis Serre. L'Imageur Interférométrique de Fresnel : un instrument spatial pour l'observation à Haute Résolution Angulaire. Thèse de doctorat, Université Toulouse III - Paul Sabatier, 2007.
- J. Shi. Computing critical points and secondary paths in nonlinear structural stability analysis by the finite element method. *Computers & Structures*, 58(1):203 220, 1996. ISSN 0045-7949.
- J. C. Simo et D. D. Fox. On a stress resultant geometrically exact shell model. part i : Formulation and optimal parametrization. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 72(3):267 – 304, 1989. ISSN 0045-7825.
- Manuel Stein. Loads and deformation of buckled rectangular plates. Rapport technique R40, National Aeronautics and Space Administration, 1959.
- Mauel Stein et John Hedgepeth. Analysis of partly wrinkled membranes. Rapport technique D-813, NASA, 1961.
- Mark Steiner. Spartan 207 inflatable antenna experiment preliminary mission report. Rapport technique, NASA, 1997.
- J. Surrel et Y. Surrel. La technique de projection de franges pour la saisie des formes d'objets biologiques vivants. *Journal of Optics*, 29(1):6–13, 1998.
- W. Szyszkowski et P.G. Glockner. Spherical membranes subjected to vertical concentrated loads : an experimental study. *Engineering Structures*, 9(3):183 – 192, 1987. ISSN 0141-0296.
- B. Tabarrok et Z. Qin. Nonlinear analysis of tension structures. Computers & structures, 45:973–984, 1992.
- Pierre Vialettes, Jean Michel Siguier, Pascale GUIGUE, Sebastien MISTOU, Olivier DAL-VERNY, Moussa KARAMA et Frank PETITJEAN. Mesure par stéréo-corrélation des champs de déplacement et de déformation de sous- ensembles de ballons stratosphériques pressurisés. Dans Congrès Photomécanique 2004 : (étude du comportement des matériaux et des structures), 2004.
- Herbert Wagner. Flat sheet metal girders with very thin metal web. Rapport technique 604, National Advisory Committee for Aeronautics, 1929.
- C.G. Wang, X.W. Du, H.F. Tan et X.D. He. A new computational method for wrinkling analysis of gossamer space structures. *International Journal of Solids and Structures*, 46(6):1516 – 1526, 2009.
- C.G. Wang, H.F. Tan, X.W. Du et Z.M. Wan. Wrinkling prediction of rectangular shellmembrane under transverse in-plane displacement. *International Journal of Solids and Structures*, 44(20):6507 – 6516, 2007. ISSN 0020-7683.

- J. C. Wohlever. Some computational aspects of a group theoretic finite element approach to the buckling and postbuckling analyses of plates and shells-of-revolution. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 3-4:373–406, 1999.
- Y.W Wong et S. Pellegrino. Wrinkled membranes part i : experiments. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, 1:1–23, 2006a.
- Y.W. Wong et S. Pellegrino. Wrinkled membranes part iii : numerical simulations. *Journal* of Mechanics of Materials and Structures, 1:61–93, 2006b.
- Eun-Jung Yoo, Jin-Ho Roh et Jae-Hung Han. Wrinkling control of inflatable booms using shape memory alloy wires. *Smart Materials and Structures*, 16(2):340, 2007.
- Toru Yoshizawa. Handbook of optical metrology : principles and applications. CRC Press, 2009.
- Z. Zhang, D. Zhang et X. Peng. Performance analysis of a 3d full-field sensor based on fringe projection. Optics and Lasers in Engineering, 42(3):341 – 353, 2004.
- O.C. Zienkiewicz et R.L. Taylor. The Finite Element Method, Fifth Edition Volume 2, Solids Mechanics. 2000.

Résumé

Au cours des dernières années, de nombreux concepts de structures spatiales dépliables ou gonflables constituées de membranes de grande dimension ont vu le jour. Cependant, les films minces de faible épaisseur utilisés dans ces réalisations se plissent lorsqu'ils sont soumis à des contraintes de compression. L'existence de plis sur ces surfaces peut affecter la performance de certains dispositifs jusqu'à les rendre totalement inutilisables. C'est la raison pour laquelle la prédiction de l'apparition des zones plissées et de leur géométrie est un axe de recherche important pour les acteurs de l'industrie spatiale.

L'objectif de ces travaux est de proposer un ensemble d'outils permettant la simulation du plissement des films minces avec la méthode des éléments finis. La robustesse de nos procédures de calcul devra être évaluée en confrontant nos résultats numériques avec des données d'essai.

La première partie de l'étude est consacrée à la constitution d'une base de données expérimentale en procédant au relevé de la forme des ondulations sur des éprouvettes bi-axiales soumises à des trajets de chargement variés. Ces mesures sont destinées à l'évaluation des procédures de prédiction des plis par la méthode des éléments finis.

La faible épaisseur des films utilisés engendre des difficultés numériques qui nous ont amené à discrétiser ces structures avec des éléments finis coque sans degrés de liberté en rotation. Pour la résolution du problème de flambement de ces films minces, deux techniques ont été testées : la méthode d'analyse post-bifurcatoire et la minimisation de l'énergie potentielle totale avec l'algorithme de gradient conjugué.

Mots-clés : Membranes tendues, Ondulations, Essais bi-axiaux, Analyse de la bifurcation, Gradient conjugué, Structures "Gossamer", Éléments finis sans degré de liberté en rotation.

Summary

Over the past years there has been a large number of new structural concepts for large spacecraft applications involving stretched membranes. However, the membranes used in gossamer structures cannot undergo compressive stress because of their small bending stiffness. The result of compressive stress is that buckling occurs leading to membrane wrinkling. This may affect the performance and the reliability of the flexible gossamer structures. Thus, the prediction of wrinkle patterns in membrane surfaces is one of the many current technological interests in the aerospace industry.

The main purpose of this work is to propose a method able to predict wrinkling of thin structures. The ability of the wrinkling procedures to do it has to be compared to experimental results.

Firstly we present an experimental study of the wrinkle patterns that appear on flat membranes. Experiments were carried out on cruciform specimens stretched under in-plane uncoupled biaxial loads. Experimental data are used as validation cases for numerical procedures of wrinkling simulation with the finite element method.

Because of the small thickness of membranes, the shell element behavior can present numerical locking mechanism. To avoid it, thin structures are discretized with rotation free shell elements. Then, to predict films wrinkling, two numerical methods were tested : post buckling analysis and minimization of the total potential energy using the conjugate gradient algorithm.

Keywords : Membranes, Wrinkling, Bi-axial experiments, Bifurcation analysis, Conjugate gradient, Gossamer structures, Rotation free shell element.