l'université nantes angers le mans
COMMUNAUTÉ D'UNIVERSITÉS ET ÉTABLISSEMENTS

UNIVERSITÉ DE NANTES

Thèse de Doctorat

Huu Kien BUI

Mémoire présenté en vue de l'obtention
du grade de Docteur de l'Université de Nantes
Sous le label de l'Université Nantes Angers Le Mans

Discipline : Électronique et Génie Électrique
Spécialité : Génie Electrique
Laboratoire : Institut de Recherche en Énergie Électrique de Nantes Atlantique (IREENA)

École doctorale : Sciences et technologies de l'information, et mathématiques (ED STIM 503)

Soutenue le 27 novembre 2014

Contribution à la modélisation multiphysique des matériaux composites stratifiés

Application au CND thermo-inductif

JURY

Président :	**M. Noël BURAIS**, Professeur, AMPERE, Université Claude Bernard Lyon 1
Rapporteurs :	**M. Xavier MININGER**, Professeur, LGEP, Université Paris-Sud **M. Yvonnick LE MENACH**, Maître de Conférences HDR, L2EP, Université de Lille 1
Examinateur :	**M. Brahim RAMDANE**, Maître de Conférences, G2ELab, INP Grenoble
Invité :	**M. Eric SOCCARD**, Ingénieur, Airbus Group Innovations Nantes
Directeur de thèse :	**M. Gérard BERTHIAU**, Professeur, IREENA, IUT Saint Nazaire
Co-directeur de thèse :	**M. Didier TRICHET**, Professeur, IREENA, Polytech'Nantes
Co-encadrant :	**M. Guillaume WASSELYNCK**, Maître de Conférences, IREENA, IUT Saint Nazaire

Contribution à la modélisation multiphysique des matériaux composites stratifiés

Application au CND thermo-inductif

Thèse de doctorat

Huu Kien BUI

Laboratoire IREENA, Saint Nazaire
UNIVERSITÉ DE NANTES
Saint Nazaire, France, 2014

Remerciement

Je tiens tout d'abord à remercier tous les membres du jury : M. Noël BURAIS d'avoir accepté de présider le jury, M. Yvonnick LEMENACH et M. Xavier MININGER qui ont gentiment accepté de rapporter ce travail de thèse, M. Brahim RAMDANE qui a accepté de le juger et M. Éric SOCCARD qui a accepté notre invitation à la soutenance. Leurs remarques et suggestions qui sont très judicieuses m'ont permis d'apporter des améliorations à la qualité de mon rapport.

J'adresse de mes sincères remerciements à mes encadrants pour leurs grandes qualités professionnelles et humaines qui m'ont aidée à aller au bout de ce travail dans la confiance et la reconnaissance. Il est difficile d'exprimer dans quelques mots mes sentiments qui sont très profonds mais je vais essayer. Merci Gérard pour ta gentillesse, pour ton humour de papi et pour tes clins d'œil sous-entendus d'un directeur de thèse que je n'ai jamais complètement compris mais ça m'a donné un sentiment d'être protégé. Merci Guillaume pour tes efforts d'interprétation de mon langage que tu maîtrise maintenant (désolé pour ça), et pour ta jeunesse (mais attention quand même, tu commences déjà à faire des clins d'œil). Merci Didier pour ta grande maturité scientifique que j'ai beaucoup^2 appris, et pour tes encouragements « bien expliqués » avec l'analyse précise de mes sentiments qui m'a profondément touché (je devine que tu captes les rayonnements électromagnétiques de mes pensées avec ton nez mais je ne suis pas vraiment sûr). Je n'oublierai pas d'avoir été très bien encadré, merci à vous tous.

Je tiens à remercier M. Stéphane AUFFRAY, M. Pascal HERRIOU de la société Airbus pour leurs échantillons composites et leurs cartographies ultrasons.

J'exprime mes remerciements à M. Mohamed MACHMOUM, Directeur du laboratoire IREENA, à Mesdames Christine BROHAN et Sabrina SAMSON, Secrétaires, et à M. Franck JUDIC, Technicien, pour leur travail remarquable pour l'ensemble du laboratoire.

Je remercie mes amis vietnamiens, français, chinois, algériens, marocains, tunisiens, sénégalais, tchadiens pour leur chère amitié.

Je n'aurais pas pu surmonter les moments difficiles durant ces trois années de thèse sans avoir le soutien de mon chérie, Linh. Je te remercie de m'avoir accompagné dans la vie.

Je tiens à remercier mon beau-père, ma belle-mère et tous les membres de mes deux familles nombreux qui sont loin de nous pour leurs soutiens sans frontière.

Pour finir, je souhaite dédier cette thèse à mon père et à ma mère qui m'ont fait connaître le monde.

Bùi Hũu Kiên, SaintNazaire, Novembre 2014

Table des matières

Liste des figures **viii**

Liste des tableaux **ix**

Introduction générale **1**

1 État de l'art **3**
1.1 Matériaux composites . . . 3
1.1.1 Combinaisons matrice-renfort . . . 3
1.1.2 Composites à fibres de carbone longues . . . 4
1.1.3 Fabrication des stratifiés . . . 6
1.2 Défauts dans les CFRP . . . 6
1.2.1 Porosité . . . 7
1.2.2 Décohésions fibre/matrice . . . 7
1.2.3 Délaminage . . . 8
1.2.4 Rupture de fibres . . . 8
1.3 Contrôle Non Destructif (CND) . . . 10
1.3.1 Ultrasons . . . 10
1.3.2 Shearographie . . . 11
1.3.3 Courants de Foucault . . . 12
1.3.4 Thermographie infrarouge . . . 12
1.3.5 Détectabilité de défaut des techniques de CND . . . 13
1.4 Thermographie inductive . . . 15
1.4.1 Données brutes . . . 17
1.4.2 Contraste absolu . . . 18
1.5 Problématiques principales et objectif de la thèse . . . 19
1.6 Démarche . . . 22

2 Outils de simulation **25**
2.1 Équations de Maxwell . . . 25
2.1.1 Lois de comportement . . . 26
2.1.2 Conditions aux limites . . . 27
2.2 Formulations en potentiels . . . 27
2.2.1 Formulation $\boldsymbol{A}-\phi$ . . . 27
2.2.2 Formulation $\boldsymbol{T}-\Omega$ . . . 28
2.2.3 Formulation $\boldsymbol{\Gamma}-\boldsymbol{\Pi}$ . . . 29
2.3 Équations de la diffusion thermique . . . 30
2.3.1 Source de chaleur . . . 30
2.3.2 Formulation thermique . . . 30
2.3.3 Condition aux limites . . . 30
2.4 Modèle numérique . . . 31
2.4.1 Maillage . . . 32

2.4.2 Éléments de Whitney . . . 33
2.4.3 Formulation $\boldsymbol{A}-\phi$ . . . 34
2.4.4 Formulation $\boldsymbol{T}-\Omega$ . . . 36
2.4.5 Formulation thermique . . . 38
2.5 Modèle analytique . . . 38
2.5.1 Méthode de résolution . . . 39
2.5.2 Détermination du champ source . . . 40
2.5.3 Détermination des courants induits . . . 40
2.6 Conclusion . . . 42

3 Validation du modèle numérique 43
3.1 Comparaison avec le modèle analytique . . . 43
3.1.1 Objectif . . . 43
3.1.2 Description des simulations . . . 44
3.1.3 Résultat de comparaison . . . 46
3.1.4 Cas d'un pli composite réel . . . 47
3.2 Comparaison avec des mesures expérimentales . . . 49
3.2.1 Objectif . . . 49
3.2.2 Description des essais expérimentaux . . . 49
3.2.3 Résultat de comparaison . . . 53
3.3 Conclusion . . . 57

4 Évaluation de la performance de la technique thermographie inductive 59
4.1 Modèle du défaut . . . 59
4.2 Détectabilité . . . 61
4.2.1 Description des cas test . . . 62
4.2.2 Courants induits dans la zone du défaut . . . 64
4.2.3 Zone de détection . . . 66
4.2.4 Détectabilité avec prise en compte du bruit . . . 67
4.2.5 Augmentation de la probabilité de détection . . . 69
4.2.6 Influence de l'orientation relative de l'inducteur . . . 73
4.2.7 A propos de l'incertitude de détection . . . 74
4.3 Éléments de Whitney dégénérés multicouche . . . 75
4.3.1 Éléments nodaux . . . 76
4.3.2 Éléments d'arête . . . 77
4.3.3 Formulation $\boldsymbol{A}-\phi$ en région mince . . . 77
4.3.4 Comparaisons . . . 79
4.4 Conclusion . . . 85

Conclusion générale 87

Bibliographie 89

Annexes 93

A Opérateurs différentiels discrets et matrices de masse 95

B Solution analytique.
Application des conditions aux limites 103
B.1 Les conditions aux limites . . . 103
B.2 Détermination du champ source . . . 104
B.3 Quelques exemples . . . 105

C Autres résultats de simulation du CND par thermographie inductive 111
C.1 Détectabilité 113
C.2 Possibilité d'optimisation de la technique 115
C.3 Possibilité de caractérisation des défauts 116

Liste des figures

1 Composite dans le Boeing-787 1

1.1 Composites à particules, à fibres courtes et longues. 4
1.2 Coupe micrographique de fibres de carbone. 4
1.3 Matériaux composites tissés 5
1.4 Un stratifié et son plan de drapage 6
1.5 Coupe de microscopie présentant de la porosité (en noir) au niveau de 4.5% du volume. 7
1.6 Défauts de décohésion fibres/matrice à l'échelle microscopique et mésoscopique. . . . 8
1.7 Délaminage induit d'une rupture de matrice. 8
1.8 Rupture de fibres. 9
1.9 L'ondulation des fibres. 9
1.10 Le principe de la technique ultrason. 10
1.11 Principe de la shearographie conventionnelle 11
1.12 Schéma de principe du contrôle par courants de Foucault – mesure de l'impédance de la bobine d'excitation. 12
1.13 Schéma de principe de la thermographie infrarouge. 13
1.14 Le principe de la thermographie inductive 15
1.15 Banc d'essai du CND thermo-inductif. 16
1.16 Détection de défaut par la méthode thermographie inductive. 17
1.17 Séquence de n_t d'images de $n_x \times n_y$ pixels. 18
1.18 Contraste absolu au cours de chauffe. Il est obtenu par la soustraction des images dans la FIGURE 1.16 (e) et la FIGURE 1.16 (b). La zone de défaut est révélée par les valeurs non-nulles du C^a. 18
1.19 Caractéristiques multi-échelles des CFRP stratifiés. 19
1.20 (a) La plaque composite avec un défaut d'impact, (b) L'image du défaut obtenue par la technique ultrasonore. 20
1.21 L'image du contraste absolu du défaut A2 (a) l'inducteur en orientation de 0° et (b) 90° (zoom sur la zone d'impact). 21

2.1 Constitution du domaine d'étude 26
2.2 Constitution du domaine 29
2.3 Création d'un maillage 3D à partir de celui en 2D. 32
2.4 Cas d'un cylindre conducteur. Le cylindre de rayon $2cm$ ayant une longueur de $20cm$. Sa conductivité isotrope est de $2 \times 10^4 S/m$. 37
2.5 Deux exemples de calcul 41
2.6 Variation du module de $\boldsymbol{J}$ à la surface de la plaque, suivant Ox et Oy. "*Analytique 1*" est la solution donnée par Dodd et Deeds [Dodd et Deeds, 1968]. "*Analytique 2*" est obtenu avec notre modèle dans le cas isotrope. 41
2.7 Variation du module de $\boldsymbol{J}$ à la surface de la plaque, suivant Ox et Oy. 42

3.1 Géométrie de la plaque et de la bobine dans l'étude. L = 5mm, 2t = 10mm, a1 = 20mm, a2 = 40mm. h est varié. La plaque est suffisamment grande (400mm × 400mm) pour qu'on puisse négliger l'effet de bord. La fréquence de la source est égale à 10kHz. . . 44
3.2 Maillage tétraédrique et hexaédrique dans la région conductrice 44
3.3 L'évolution de la valeur moyenne normalisée de quelques indicateur de qualité de maillage pour les maillages hexahédriques (Q_h) et tétraédrique (Q_i). 45
3.4 Variation des erreurs numériques par rapport à l'épaisseur des éléments pour différents ratio d'anisotropie avec les éléments (a) hexaédriques et (b) tétraédriques. 'rN' signifie que le ratio d'anisotropie est égal à N. 46
3.5 Maillages du pli CFRP. 47
3.6 Variation du champ électrique $\boldsymbol{E}$ à la surface de la plaque suivant l'axe Ox comparée avec la solution analytique 48
3.7 Variation du champ électrique $\boldsymbol{E}$ à la surface de la plaque suivant l'axe Oy comparée avec la solution analytique 48
3.8 Convergence des modèles. Dans ce cas, l'erreur de la résolution numérique du système $Ax = b$ pour chaque pas d'itération i est déterminé par $\|Ax^i - b\|/\|b\|$, $\|.\|$ désigne la norme euclidienne. 49
3.9 Banc d'essai de thermographie inductive présent au laboratoire. 50
3.10 Échantillon. 50
3.11 Géométrie et dimension des essais. 51
3.12 Évolution temporelle de la température au centre de la plaque simulée et mesurée. Cas du modèle d'inducteur filaire. $fr = 240kHz$. 54
3.13 Évolution temporelle de la température au centre de la plaque simulée et mesurée. Cas du modèle d'inducteur massif. $fr = 240kHz$. 54
3.14 Distribution des courants induits dans les cas d'inducteur 0° et 90°. $fr = 240kHz$. . . 55
3.15 P_i totale de chaque pli pour les deux orientations de l'inducteur. $fr = 240kHz$. 55
3.16 Distribution des courants induits dans les cas d'inducteur 0° et 90°. $fr = 1663kHz$. 56
3.17 P_i totale de chaque pli pour les deux orientations de l'inducteur. $fr = 1663kHz$. . . . 57
3.18 Évolution temporelle de la température au centre de la plaque simulée et mesurée. $fr = 1663kHz$ 57

4.1 Modèle de la rupture de fibre. 60
4.2 Modèle du délaminage. 60
4.3 Maillage d'un délaminage. Le pli défectueux est divisé en 2 couches. 61
4.4 Plaque DR8 avec défauts. 62
4.5 Position de l'inducteur U utilisé. 63
4.6 Interaction des courants induits avec les délaminages D1, D2 et les défauts de rupture de fibre R1, R2. Cas de $h_{def} = h_{pli}/2$ 65
4.7 Interaction des courants induits avec les délaminages D3, D4 et les défauts de rupture de fibre R3, R4. Cas de $h_{def} = h_{pli}/2$ 65
4.8 Évaluation de la zone de détection. 66
4.9 Contraste absolue de la plaque DR8 avec les signaux bruités. Cas de $h_{def} = h_{pli}/2$. . . 68
4.10 Comparaison entre le contraste absolu maximal C^a_{max} du défaut R4 et le seuil déterminé par valeur maximale du bruit ayant un $\epsilon = 0.15°C$. 68
4.11 Cartographie du contraste logarithmique. Cas avec $h_{def} = h_{pli}/2$, $\epsilon = 0.20°C$. 70
4.12 Cartographie du contraste d'amplitude. Cas avec $h_{def} = h_{pli}/2$, $\epsilon = 0.20°C$. 71
4.13 Cartographie du contraste absolu avec différentes orientation de l'inducteur θ. (a) 0°, (b) 45°, (c) 90°, (d) 135°. Cas du délaminage. Les traces blanches indiquent la face de l'inducteur vue au dessus. 73
4.14 Cartographie du contraste absolu avec différentes orientation de l'inducteur θ. (a) 0°, (b) 45°, (c) 90°, (d) 135°. Cas de la rupture de fibre. 74

4.15 Fausses signatures de défaut. Cas de fréquence de $2MHz$, $I = 100A$, $t_{chauffe} = 2s$. . . 75
4.16 Élément dégénéré d'un hexaèdre régulier. 76
4.17 Les maillages bicouches d'une région multicouche volumique. 78
4.18 L'inducteur U et le domaine conducteur. 80
4.19 Comparaison de la variation de la densité des courants induits. 80
4.20 Comparaison de la puissance totale dans chaque pli. Inducteur à 0° 81
4.21 Comparaison de la puissance totale dans chaque pli. Inducteur à 90° 81
4.22 L'inducteur U filaire et le domaine conducteur avec une fissure au centre. 82
4.23 Les maillages. Un quart du domaine conducteur est tracé. 82
4.24 Partie imaginaire de $\boldsymbol{J}$, couche 2 (45°) 83
4.25 Partie réelle de $\boldsymbol{J}$, couche 2 (45°) 83
4.26 Comparaison de l'évolution de la densité des courants induits suivant Ox. $h = 136\mu m$ et $h/\delta = 0.054$. 84
4.27 Comparaison de l'évolution de la densité des courants induits suivant Ox. $h = 13.6\mu m$ et $h/\delta = 0.0054$. 84
4.28 Comparaisons de la convergence. 85

A.1 Tétraèdre de référence. 95
A.2 Définition des arêtes et des facettes du tétraèdre. 96
A.3 Détermination des opérateurs différentiels discrets sur le tétraèdre de référence. . . . 96
A.4 Prisme de référence. 97
A.5 Définition des arêtes et des facettes du prisme. 97
A.6 Détermination des opérateurs différentiels discrets sur le prisme de référence. 98
A.7 Hexaèdre de référence. 98
A.8 Définition des arêtes et des facettes du hexaèdre. 99
A.9 Détermination des opérateurs différentiels discrets sur l'hexaèdre de référence. 100

B.1 Géométrie de l'inducteur, où a_1, a_2 et $2t$ sont respectivement le rayon intérieur, le rayon extérieur et l'épaisseur de l'inducteur, d est la distance entre le centre de l'inducteur et la surface supérieure de la plaque. 105
B.2 Deux exemples de calcul 105
B.3 Distribution de la composante normale à la surface du domaine conducteur de l'induction magnétique B_z. 106
B.4 Partie imaginaire de $\boldsymbol{J}$. 106
B.5 Partie réelle de $\boldsymbol{J}$. 107
B.6 Distribution de $\boldsymbol{J}$ à la surface de la plaque. 107
B.7 Variation du module de $\boldsymbol{J}$ à la surface de la plaque, suivant Ox et Oy. "*Analytique 1*" est la solution donnée par Dodd et Deed [Dodd et Deeds, 1968]. 108
B.8 Partie imaginaire de $\boldsymbol{J}$. 108
B.9 Partie réelle de $\boldsymbol{J}$. 109
B.10 Distribution de $\boldsymbol{J}$ à la surface de la plaque. 109
B.11 Variation du module de $\boldsymbol{J}$ à la surface de la plaque, suivant Ox et Oy. 110

C.1 Géométrie du cas test. 111
C.2 Cartographie du contraste absolu avec différents entrefers. (a) 2mm, (b) 4mm. 113
C.3 Cartographie du contraste absolu en déplacement de l'inducteur suivant la largeur du défaut. (a) 0mm (centre), (c) 20mm. 113
C.4 Cartographie du contraste absolu en déplacement de l'inducteur suivant la longueur du défaut. (a) 0mm, (b) 7.5mm, (c) 15mm, (d) 22.5mm. 113
C.5 Cartographie du contraste absolu avec différents entrefers. (a) 3mm, (b) 5mm. 114
C.6 Cartographie du contraste absolu en déplacement de l'inducteur suivant la largeur du défaut. (a) 0mm, (b) 20mm. 114

C.7 Cartographie du contraste absolu en déplacement de l'inducteur suivant la longueur du défaut. (a) 7.5mm, (b) 15mm. 114
C.8 Contraste d'amplitude au centre du défaut pour différents courants. 115
C.9 Contraste d'amplitude au centre du défaut pour différentes fréquences. 115
C.10 Contraste d'amplitude au centre du défaut pour différentes largeurs de l'inducteur. . 116
C.11 Contraste d'amplitude suivant la largeur du défaut. 116
C.12 Contraste d'amplitude suivant la longueur du défaut. 117
C.13 Contraste d'amplitude des défauts de différentes épaisseurs h_{def}. 117
C.14 Contraste d'amplitude des défauts de différentes profondeurs pr. 117

Liste des tableaux

1.1 Les techniques de CND et leur détectabilité 14

2.1 Les fonctions de coefficient 40

3.1 Information des maillages 45
3.2 Information des maillages 47
3.3 L'intensité de courant et le temps de chauffe dans les deux essais à fréquences différentes. 51
3.4 Données numériques des dimensions de la plaque. 52
3.5 Dimensions des inducteurs pour les essais à $240kHz$ et à $1663kHz$. 52
3.6 Données numériques des propriétés électromagnétique et thermique prises dans les simulations. 52
3.7 Comparaison des modèles d'inducteur 53

4.1 Dimension et profondeur des défauts. 63
4.2 Dimensions de l'inducteur. 63
4.3 Les paramètres du contrôle. 64
4.4 Probabilité de détection avec le contraste absolu. 69
4.5 Probabilité de détection avec le contraste logarithmique. 71
4.6 Probabilité de détection avec le contraste d'amplitude. 72
4.7 Probabilité de détection des contrastes avec $t_{chauffe} = 5s$. Cas avec $h_{def} = h_{pli}/4$, $\epsilon = 0.20°C$. 72

C.1 Configuration de référence. 112
C.2 Caractéristiques du défaut de référence. 112

Introduction générale

L'utilisation des matériaux composites n'a cessé de croître ces dernières décennies. A titre d'exemple, le taux de composite dans la structure de l'Airbus A320 représente environ 20% de la masse totale. Ce taux passe à 25% dans l'A380 et dépasse les 50% dans l'A350-XWB [Air, 2009]. Le Boeing-787 est le premier avion commercial dans lequel le nombre de grandes pièces de structure est plus important en composite qu'en alliages d'aluminium (le taux de composite est de 50% comme le montre la FIGURE 1). Le gain de masse obtenu a permis d'augmenter le rendement en carburant de l'avion de 20% [Talbot, 2009].

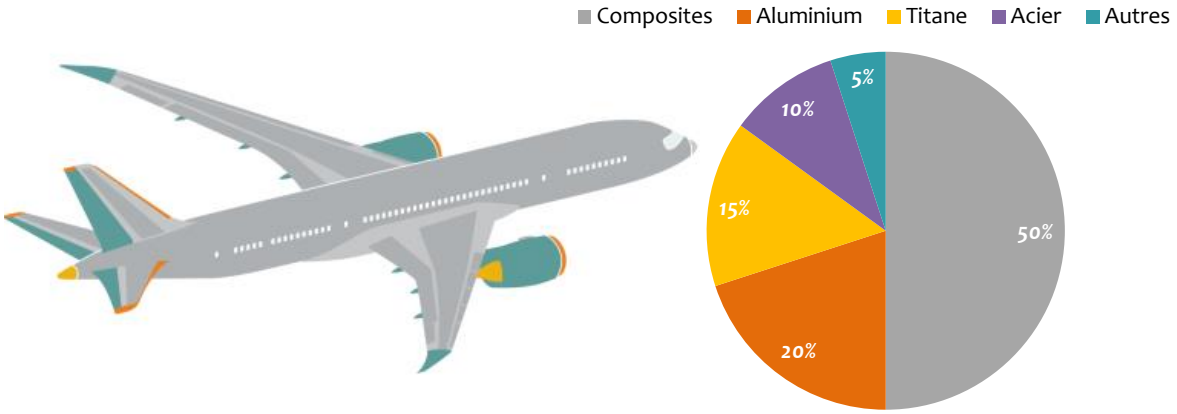


FIGURE 1 – Composite dans le Boeing-787

Cependant, le développement à grande échelle de ces matériaux passe par une amélioration des procédés utilisés pendant les différentes étapes du cycle de vie (élaboration, formage, assemblage, contrôle, recyclage). Les verrous technologiques à lever sont principalement liés à des problématiques de cadence, de maîtrise de procédé ou encore d'évaluation de la santé matière.

À différents stades du cycle de vie du matériau, les méthodes de Contrôles Non Destructif (CND) permettent de caractériser son état d'intégrité. L'objectif des techniques de CND n'est pas seulement de trouver les défauts dans le matériau, mais aussi de les caractériser. Elles jouent un rôle indispensable dans le contrôle de la qualité et dans la gestion des risques. Leurs applications sont déjà très connues dans un grand nombre de secteurs industriels comme l'aéronautique, le nucléaire, la production d'électricité, l'automobile. Les principales exigences du CND sont : la capacité de détecter et discriminer les défauts de différentes natures, le dimensionnement précis des défauts, l'inspection et l'interprétation rapide et fiable, la capacité d'inspection des structures de formes complexes. En regard à ces besoins, les matériaux composites de natures très complexes (hétérogénéité, anisotropie forte et multicouche) posent encore des problèmes pour les méthodes actuels du CND.

Depuis 1996, l'IREENA travaille sur des nouvelles techniques d'élaboration et de contrôle non destructif (CND) des composites basées sur l'induction électromagnétique. La maîtrise optimale de ces procédés nécessite le développement d'outils de modélisation multi-physique et multi-échelle. Les travaux réalisés ces dernières années ont montré la pertinence et le potentiel de cette approche [Trichet, 2000] [Bensaid, 2006] [Ramdane, 2009] [Wasselynck, 2012].

Nos travaux de thèse s'inscrivent dans la thématique du CND par la technique de thermographie inductive. Cette technique est bien adaptée aux composites stratifiés à fibres de carbone longues. La maîtrise et l'évaluation précise des performances de cette technique nécessite le développement et l'utilisation d'un code de calcul spécifique.

Les matériaux composites sont un empilement de plusieurs couches appelées "plis". Dans un pli, les fibres de carbone longues sont toutes orientées dans la même direction et maintenues ensemble par une matrice polymère. L'orientation des fibres dans chaque pli peut être différentes afin de résister aux sollicitations mécaniques.

Les matériaux composites à base de fibres de carbone ont une nature anisotrope forte. L'anisotropie dépend essentiellement de l'orientation des fibres de carbone. L'anisotropie et la non-homogénéité implique que les courants de Foucault circulent suivant l'épaisseur du matériau ainsi la répartition des courants et de la puissante induits dans chaque pli dépend du plan de drapage. Nous cherchons alors à réaliser un modèle numérique qui permet de modéliser ce comportement essentiel.

Ce modèle contient des régions conductrices très minces fortement anisotropes. Les modèles déjà existants au laboratoire demandent un temps de calcul et une quantité de mémoire importants afin de préserver la qualité de la solution numérique. Nos travaux consisteront à améliorer ce code et auront pour l'objectif de garantir la fiabilité des simulations tout en réduisant le temps de calcul.

Présentation des chapitres

Dans le chapitre 1, nous présenterons les matériaux composites et les principaux défauts que l'on y rencontre comme les délaminages, les ruptures de fibres, les ruptures de matrice et la porosité. Leur présence diminue les performances mécaniques du matériau et font l'objet des techniques du contrôle non destructif. Nous présenterons d'une manière générale les différentes méthodes de CND appliquées aux matériaux composites, leurs intérêts et leurs limitations. Cette partie permettra de décrire le contexte de nos travaux. Elle sera suivie par les principes de la thermographie inductive. Nous préciserons enfin les problématiques principales et les objectifs associés à ce travail de thèse.

Dans le chapitre 2, les outils de simulation numérique et analytique permettant de simuler des procédés de la thermographie inductive seront présentés. Le modèle numérique utilise les éléments de Whitney pour discrétiser les équations de Maxwell en termes des potentiels en régime quasi - stationnaire. Le modèle analytique permet résoudre le problème des courants de Foucault dans un milieu anisotrope uni-axial et sera utilisé pour une validation du code numérique.

Dans le chapitre 3, une étude comparative entre les choix d'éléments pour la discrétisation spatiale du modèle numérique est présentée. Le modèle analytique est utilisé pour évaluer l'erreur commise par le modèle numérique dans le cas du problème électromagnétique. Cette partie est suivie par une validation expérimentale avec laquelle les résultats du modèle numérique couplé électromagnétique - thermique sont comparés.

Enfin, dans le chapitre 4, une étude de cas est effectuée où quelques exploitations potentielles du modèle développé seront présentées.

Chapitre 1

État de l'art

Le développement d'un code de calcul ne peut pas se faire sans une compréhension du matériau et de la nature des différents défauts. Nous consacrons donc la première partie de ce chapitre à présenter un état de l'art sur les matériaux composites et les principaux défauts associés. Cette étude a pour but de comprendre les caractéristiques des défauts, leur fréquence et leur importance. Elle nous permet également de mettre en évidence des contraintes de modélisation associées.

Dans la deuxième partie, une présentation des principales techniques de CND appliquées aux matériaux composites sera donnée. Ces dernières font appel à des domaines interdisciplinaires comme l'acoustique, l'optique, l'électromagnétique et la thermique. Ensuite, nous présenterons de façon détaillée le principe de la thermographie inductive.

Pour finir, les problématiques principales et les objectifs de la thèse seront précisés.

1.1 Matériaux composites

Un composite est un mélange d'une matrice et d'un renforcement. Le matériau ainsi obtenu possède des propriétés supérieures à ces constituants notamment d'un point de vue mécanique. Le rôle du renfort est d'assurer la résistance mécanique de la structure aux efforts extérieurs. La matrice assure la cohésion entre les renforts, répartit les efforts mécaniques aux renforts et assure la protection chimique [Gornet, 2011][Lucas et Zanella, 2007].

1.1.1 Combinaisons matrice-renfort

Du point de vue géométrique, on peut distinguer trois grands types de combinaisons renfort/matrice [Gendre, 2011] :

- Composite à particules ;
- Composite à fibres courtes ou fibres discontinues (longueur faible devant les dimensions de la pièce) ;
- Composite à fibres longues ou fibres continues (longueur comparable aux dimensions de la pièce).

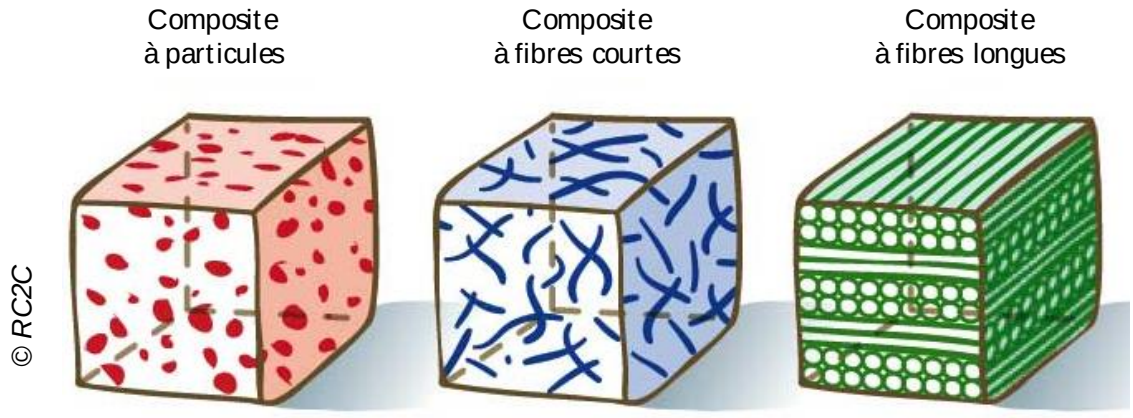


FIGURE 1.1 – Composites à particules, à fibres courtes et longues.

Pour des applications structurelles où les pièces doivent supporter des efforts importants, on utilise généralement des fibres longues dont on adapte l'orientation aux sollicitations subies par la pièce. Les composites ainsi conçus ont des comportements anisotropes.

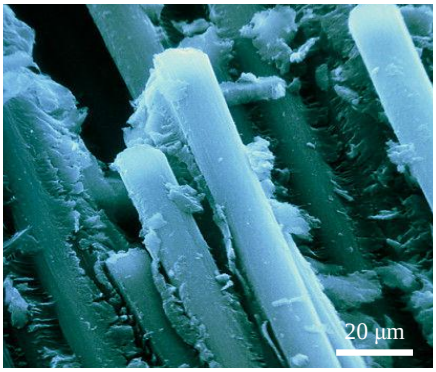
1.1.2 Composites à fibres de carbone longues

Matrice

La matrice de ces composites est généralement une résine polymère. Les polymères thermoplastiques sont souvent utilisés car ils peuvent se transformer de façon réversible de l'état solide à l'état pâteux par chauffage et donc faciliter la fabrication. Les principales résines thermoplastiques utilisées sont le polypropylène (PP), les polyamides (PA) et le poly-éther-éther-cétone (PEEK) [Gaston, 2010].

Renfort

Les fibres de carbone sont électriquement conductrices, de masse volumique faible, ayant de très bonnes propriétés mécaniques. Elles sont principalement utilisées pour les composites HP (Haute Performance) [Barrau et Guedra Degeorges, 2004]. Ces derniers présentent des propriétés mécaniques spécifiques élevées et un coût unitaire important.



Manfred Kage/Science photo library

FIGURE 1.2 – Coupe micrographique de fibres de carbone.

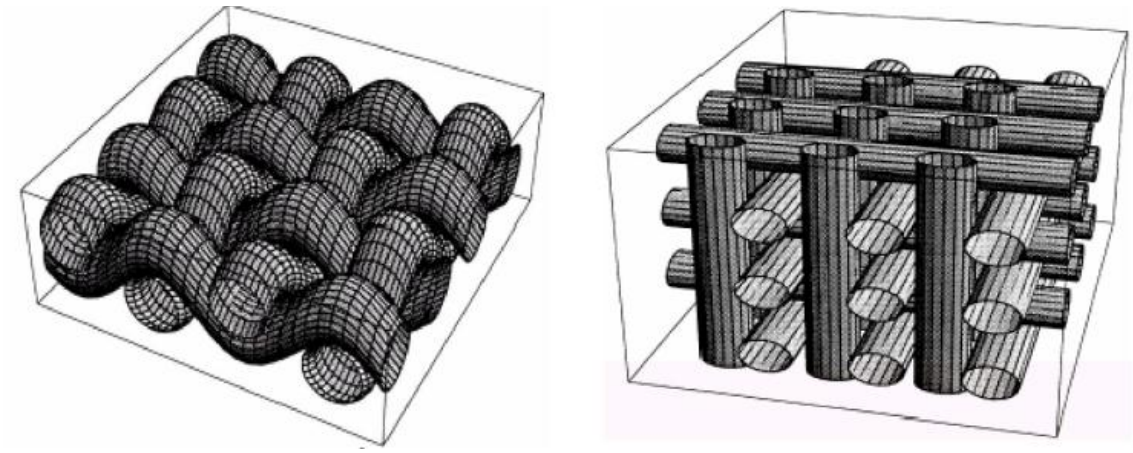
Le taux de remplissage volumique de renfort, défini par le rapport du volume de fibre sur le volume total du composite, dans les composites HP est généralement supérieur à 50% [Berreur *et al.*, 2002]. La FIGURE 1.2 présente une image microscopique des fibres de carbone.

Architecture de renforcement à fibres longues

Le taux de remplissage de renfort, la direction et la disposition des fibres agissent directement sur les propriétés du matériau composite. Il y a deux types de structure principalement : tissées multidirectionnelles et stratifiées [Gornet, 2011].

Matériaux composites tissés

Quelques exemples de composites tissés multidirectionnels sont illustrés dans la FIGURE 1.3. Ces matériaux restent très limités en raison de leur coût de production très élevé.



Matériau avec deux directions de renfort Géométrie 3D orthogonale

FIGURE 1.3 – Matériaux composites tissés

Matériaux composites stratifiés

Dans le cadre de nos travaux, nous nous sommes particulièrement intéressés aux matériaux composites stratifiés. Nous les appellerons CFRP (pour Carbon Fiber Reinforced Polymer) dans la suite du document. L'aéronautique utilise les CFRP pour la fabrication de pièces de structure primaire en raison de leur légèreté et de leur facilité de mise en forme [Cinquin, 2002].

Un stratifié est un empilement de plusieurs plis unidirectionnels comme le montre la FIGURE 1.4. Dans chaque pli, les fibres de carbone sont orientées dans la même direction. Pour assurer les propriétés mécaniques, l'orientation des fibres peut être différente entre les plis voisins. Le diamètre d'une fibre est de l'ordre de quelques microns (μm), l'épaisseur d'un pli est de quelques dixièmes de millimètres et la taille de la pièce varie de quelques centimètres à plusieurs mètres [Gornet, 2011].

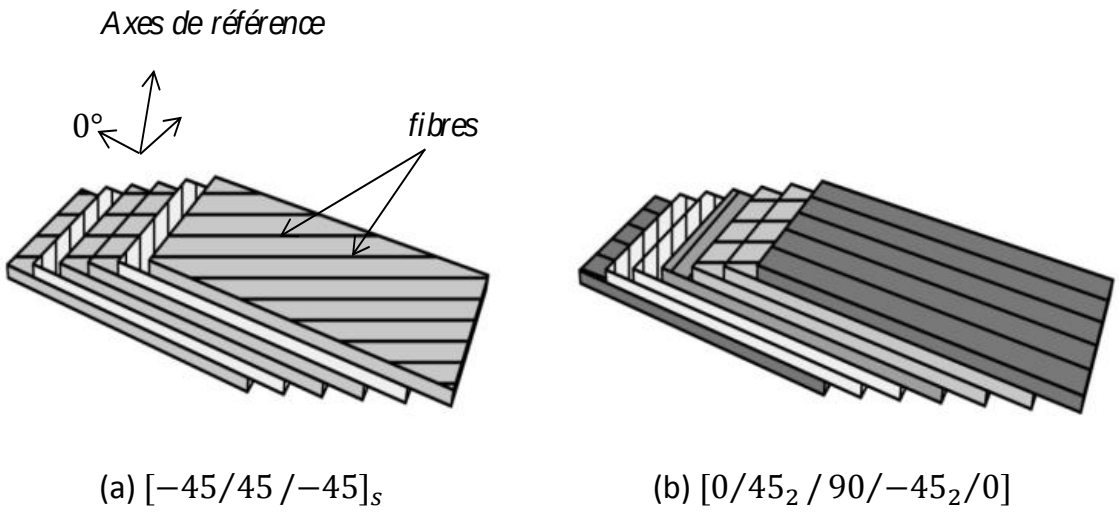


FIGURE 1.4 – Un stratifié et son plan de drapage

Le plan de drapage : est la séquence d'empilement des plis. Après avoir précisé les axes de référence, le plan de drapage peut être obtenu suivant la règle ci-dessous :

- Chaque pli est désigné par l'angle en degrés (°) entre la direction des fibres et l'axe de référence. Cela sera le nom de ce pli.
- Ces noms sont listés successivement entre crochets et séparés par un "/" du pli le plus bas au pli le plus haut.
- Dans le cas de structure symétrique ou si les plis successifs ont la même orientation, on utilise un indice $_s$ ou $_n$ (n, nombre de plis) pour indiquer ces spécifications. La FIGURE 1.4 donne deux exemples des plans de drapage [Gornet, 2011].

1.1.3 Fabrication des stratifiés

La fabrication des plaques composites stratifiées thermoplastiques se fait généralement par la consolidation des plis préimprégnés unidirectionnels. Ces derniers sont des semi-produits constitués de renforts en fibre de carbone imprégnés de matrice. Ils sont généralement fournis sous forme de rouleaux. Ensuite, ces plis sont empilés suivant le plan de drapage souhaité. La consolidation se fait par la mise sous vide et l'étuvage pour obtenir la plaque stratifiée finale.

1.2 Défauts dans les CFRP

La plupart des défauts dans les CFRP apparaissent durant la phase de fabrication ou en service. Pendant la fabrication, certains types de défauts ont été identifiés notamment, par ordre d'importance, :

- La porosité dûe aux composants volatiles de la matrice ou de l'air qui n'est pas correctement contrôlé pendant le traitement.
- Les corps étrangers.
- Le ratio volumique incorrect de fibres à cause de l'excès ou l'insuffisance de matrice.
- L'ondulation des fibres.

- Le plan de drapage incorrect.

En service, les défauts peuvent apparaître à cause des surcharges, d'impacts, de la fatigue, de la foudre, de la surchauffe,... Nous listons ici quelques défauts importants :

- Les délaminages.
- Les fissures à la surface.
- Les ruptures de fibres.
- La pénétration d'humidité.
- La décohésion de l'interface entre les fibres et la matrice.

Dans les paragraphes suivants, quelques défauts importants rencontrés dans les CFRP sont présentés.

1.2.1 Porosité

Ces défauts sont présents à l'échelle microscopique. Elle peut être exprimée par le rapport du volume de vide au volume total du composite (FIGURE 1.5) [Ledru, 2009].

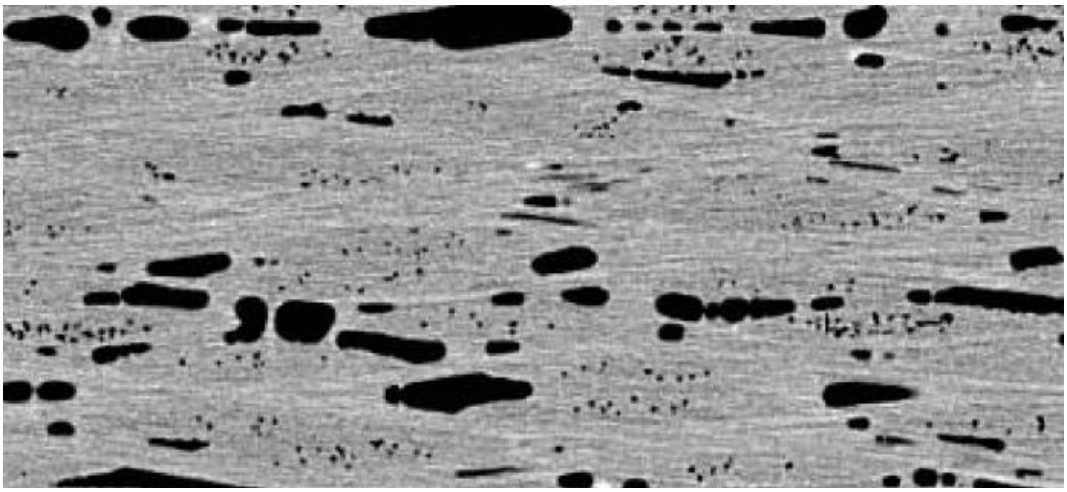


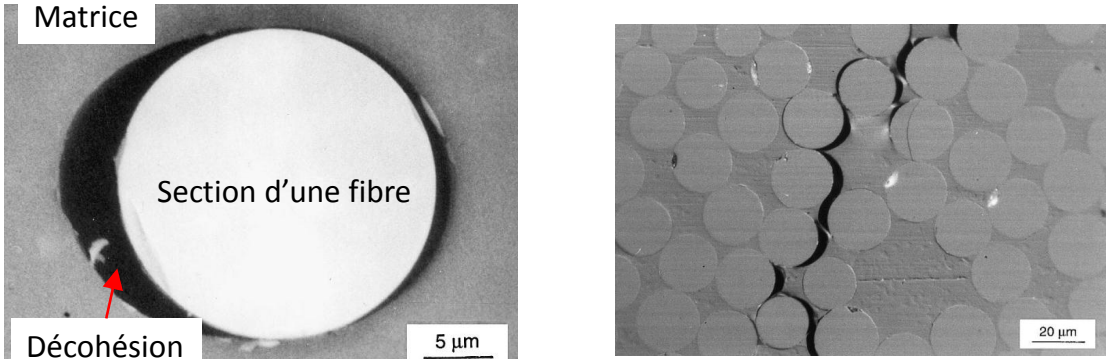
Image issue de [Kastner *et al.*, 2010].

FIGURE 1.5 – Coupe de microscopie présentant de la porosité (en noir) au niveau de 4.5% du volume.

Lorsque le diamètre de vide atteint 2500μm, ils deviennent des défauts macroscopiques [Ledru, 2009].

1.2.2 Décohésions fibre/matrice

Ces défauts qui apparaissent à l'échelle microscopique résultent des concentrations de contraintes dans la matrice autour des fibres. Ils conduisent à la perte d'adhérence entre fibres et matrice [Trovalet, 2010]. La FIGURE 1.6 (a) montre une image de ce défaut.



(a) Décohésion fibre/matrice. (b) Rupture de matrice.

Image issue de [Gamstedt et Sjogren, 1999].

FIGURE 1.6 – Défauts de décohésion fibres/matrice à l'échelle microscopique et mésoscopique.

Ces défauts se développent avec l'intensité du chargement et deviennent, à l'échelle mésoscopique (celle d'un pli) des ruptures de matrice (FIGURE 1.6 (b)) [Gamstedt et Sjogren, 1999].

1.2.3 Délaminage

Les délaminages se produisent au niveau de l'interface entre plis unidirectionnels. Ils peuvent être induits par les ruptures de matrice qui atteignent l'interface entre deux plis comme le montre la FIGURE 1.7 [Trovalet, 2010]. Ces défauts sont classifiés à l'échelle mésoscopique.

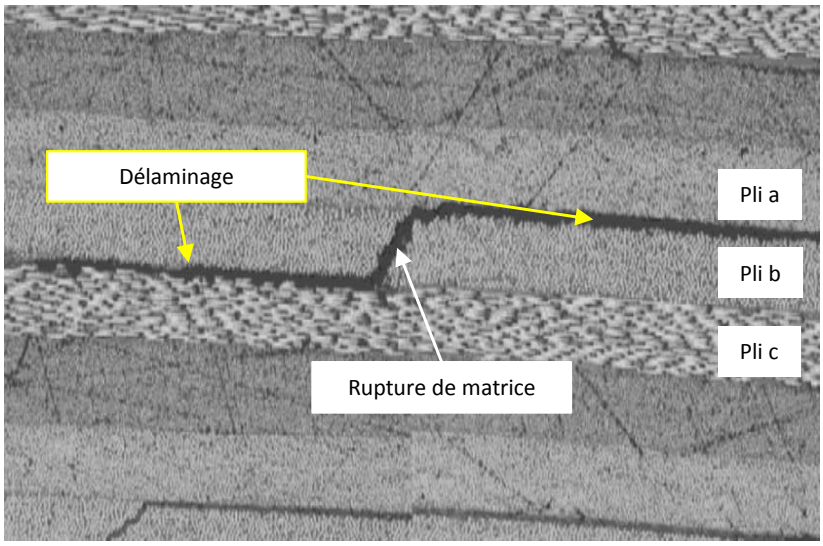


Image issue de [S Sridharan, 2008].

FIGURE 1.7 – Délaminage induit d'une rupture de matrice.

1.2.4 Rupture de fibres

Ces défauts peuvent apparaître en traction ou en compression lorsque les plis sont sollicités dans le sens des fibres [Trovalet, 2010]. Nous les considérons comme des défauts à l'échelle mésoscopique.

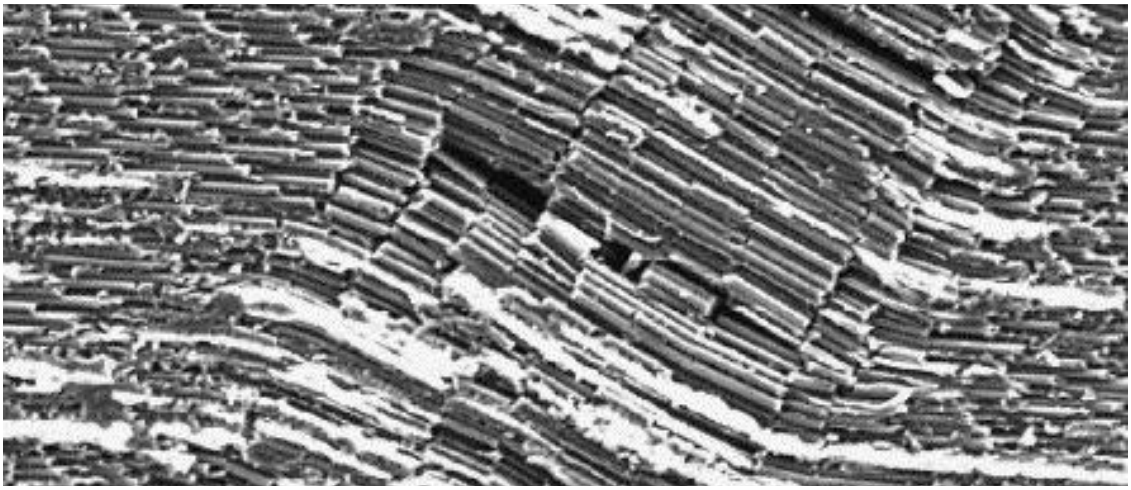


Image issue de [Yerramalli et Waas, 2003].

FIGURE 1.8 – Rupture de fibres.

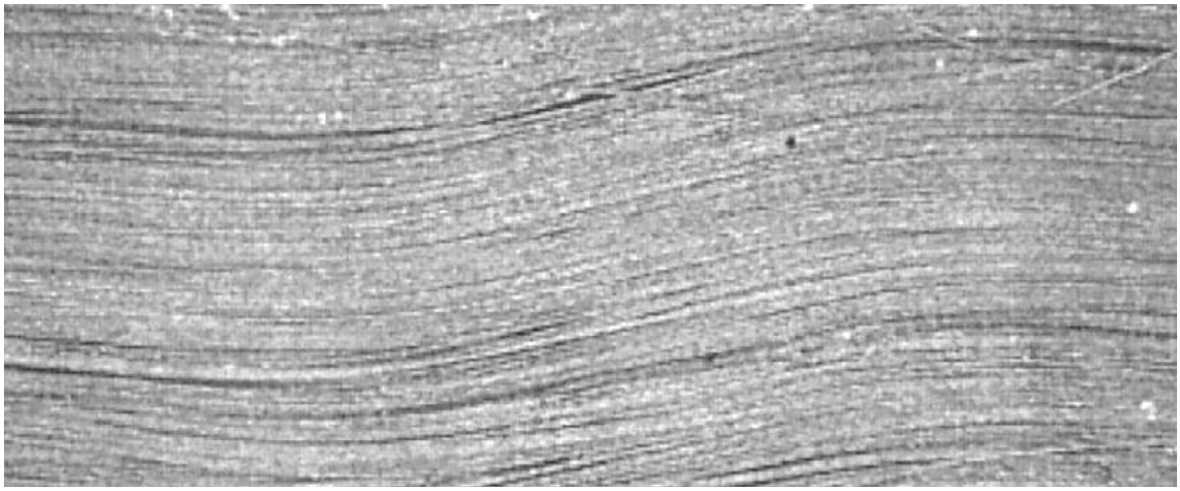


Image issue de [Feld, 2011].

FIGURE 1.9 – L'ondulation des fibres.

L'ondulation des fibres (FIGURE 1.9) peut influencer fortement sur le développement de ruptures de fibres en compression [Trovalet, 2010].

Les défauts dans le composite diminuent sa résistance mécanique et augmentent le risque de rupture. Ils peuvent se développer lors d'une augmentation de l'intensité de chargement et devenir des défauts macroscopiques qui conduisent à la rupture finale de la pièce.

Dans le cadre de nos travaux, nous nous intéressons particulièrement aux défauts à l'échelle mésoscopique. La détection des défauts à cette échelle est souhaitable car elle permet de révéler les défauts naissants et de prévenir ceux se propageant de façon catastrophique.

Cette tâche fait appel aux techniques de contrôle non destructif.

1.3 Contrôle Non Destructif (CND)

L'objectif des méthodes de CND est de :

- Détecter, localiser les défauts et les classifier selon leur type ;
- Mesurer quantitativement les caractéristiques des défauts ;
- Évaluer la fiabilité de ces données ;
- Donner ces informations à la gestion de la qualité et des réparations.

Les techniques de CND sont largement utilisées dans un grand nombre de secteurs industriels et durant tout le cycle de vie du produit.

En général, dans les techniques de CND, la structure à contrôler est soumise à une excitation externe (vibration, laser, courant alternatif). La réaction inhabituelle des zones contenant le défaut est détectée par un système de capteurs spécifiques.

La zone de détection : est définie par la région dans laquelle tous les défauts peuvent être détectés. Cette notion caractérise la globalité d'une technique de CND. Une technique est dite globale si elle permet une large zone de détection pour chaque acquisition de données.

Le traitement de ces données peut nous permettre de remonter aux caractéristiques des défauts. On trouvera dans les paragraphes suivants une brève présentation de quelques techniques qui sont actuellement appliquées aux CND des matériaux composites CFRP.

1.3.1 Ultrasons

Le principe est simple : une sonde émet une onde ultrasonore qui se propage à l'intérieur du matériau à contrôler, puis elle se réfléchit sur les obstacles éventuels (défauts, face verso de la pièce,...). Les échos reviennent ensuite à la surface de la sonde (FIGURE 1.10). Connaissant la vitesse de propagation des ultrasons dans le matériau et le temps aller-retour de l'onde envoyée par le sonde, on peut en déduire la présence et la profondeur de l'obstacle. En pratique, il existe des techniques de balayage 1D, 2D et 3D.

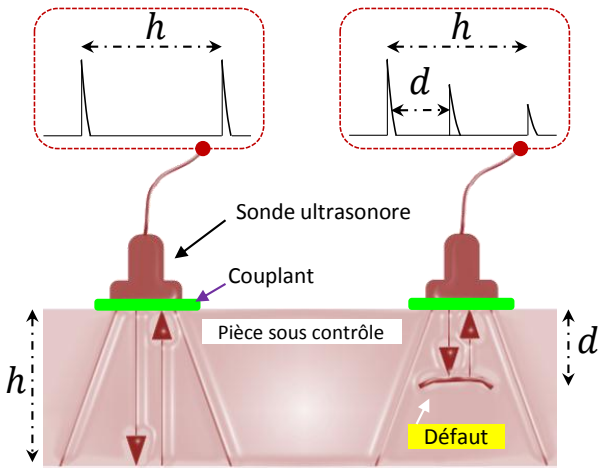


FIGURE 1.10 – Le principe de la technique ultrason.

Application : Les tests par ultrasons représentent environ un tiers des essais non destructifs des

matériaux ou des structures de tout genre [Castaings, 2008].
Limitation : Les ultrasons ne se propagent pas efficacement dans l'air, pour assurer le passage des ultrasons entre la sonde et la pièce à contrôler, il est nécessaire d'utiliser un agent couplant. Dans les contrôles manuels, on applique un liquide (graisse, huile, gel) sur la pièce à contrôler. Dans les contrôles automatiques, la solution consiste à immerger la pièce et la sonde dans l'eau. Avec les matériaux composites, la capacité de la méthode est considérablement réduite en raison de la forte atténuation des ultrasons [Kapadia, 2011]. La limite de la méthode est aussi l'identification du type de défauts et de la profondeur. Certaines méthodes sont peu adaptées pour l'inspection des zones courbes. L'utilisation de l'agent couplant nécessite un contrôle long et local. De plus, la technique d'immersion dans l'eau ne permet pas un test en service.

1.3.2 Shearographie

Un défaut près de la surface abaisse la résistance mécanique locale d'une structure. Par conséquence, sous une faible charge, la surface se déforme différemment lors de la présence d'un défaut. Une technique basée sur l'interférence optique peut détecter cette faible différence.

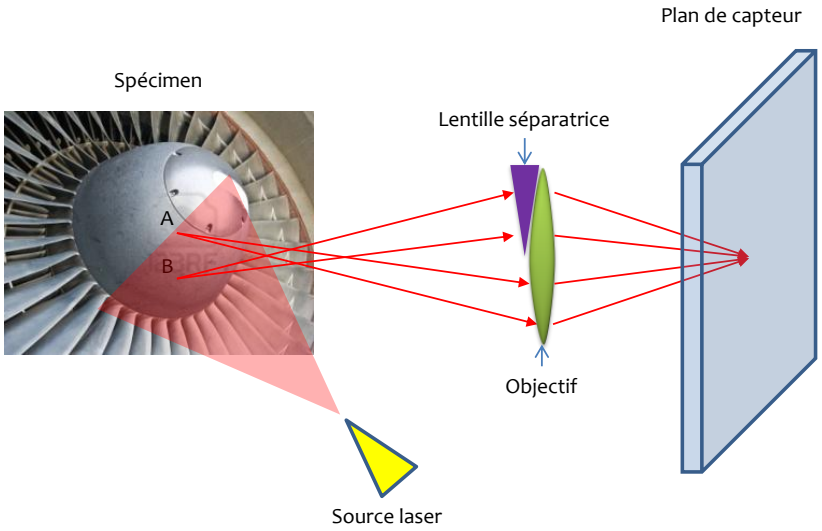


FIGURE 1.11 – Principe de la shearographie conventionnelle

Dans la shearographie [Lepiller et Framezelle, 2011] [Kapadia, 2011], le spécimen est d'abord illuminé par un faisceau laser divergent (FIGURE 1.11). Ensuite, les ondes lumineuses cohérentes diffusées par tous les points sur sa surface sont superposées à l'aide d'une lentille séparatrice. Puis, elles sont projetées sur le plan d'un capteur optique. L'image d'interférence obtenue est en fait une carte de la distribution des contraintes locales sur la surface. Elle représente également l'image de référence.

Une contrainte est ensuite appliquée sur la surface du spécimen (à l'aide de vibrations, de pression, ou charge thermique) et une seconde image d'interférence est enregistrée. La soustraction des images obtenues avec la structure en deux régimes sans charge et sous charge produit une image de franges. Chaque frange est une ligne de tension mécanique. Les zones de fortes tensions sont représentées par concentrations des franges où se trouve le défaut.
Application : Dans un avion, les fissures surfaciques sont souvent réparées par collage à l'aide d'un patch de bore. Le patch devrait prendre la tension sous charge. Dans ce cas-là, la carte de distribution

des contraintes peut indiquer si les concentrations de contraintes sont distribuées sur les extrémités de la fissure ou si elles sont réparties sur la surface du patch et la région voisine [Kapadia, 2011].
Limitation : L'efficacité de la shearographie dépend fortement de la rugosité de surface. L'interprétation des résultats est complexe et exige beaucoup d'expérience. Comme la shearographie est une technique basée sur l'optique, l'éclairage et l'emplacement de défauts influencent directement l'image résultante [Kapadia, 2011]. La technique ne permet pas de détecter les porosités [Lepiller et Framezelle, 2011].

1.3.3 Courants de Foucault

La pièce à contrôler est soumise à un champ magnétique variable dans le temps à l'aide d'une bobine d'excitation FIGURE 1.12. Il apparaît des courants induits dans le corps de la pièce conductrice. En présence d'un défaut, la circulation des courants de Foucault sera perturbée ce qui engendre une modification de l'impédance de la bobine. La variation de l'impédance sera mesurée pour en déduire les informations sur le défaut [García-Martín *et al.*, 2011].

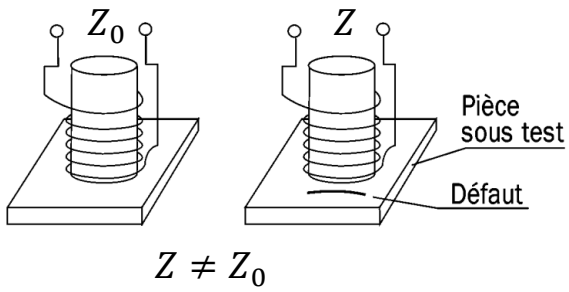


FIGURE 1.12 – Schéma de principe du contrôle par courants de Foucault – mesure de l'impédance de la bobine d'excitation.

Application : La méthode est appliquée à la détection des défauts débouchants (ouverts à la surface) ou à faible profondeur dans le composite. Elle est également utilisée pour contrôler le plan de drapage des CFRP [Cawley et Adams, 1989].
Limitation : Elle n'est pas adapté pour détecter des défauts en profondeur à cause de l'effet de peau qui limite la pénétration des courants de Foucault en profondeur. La méthode est relativement insensible à la porosité et au délaminage [Cawley et Adams, 1989]. La technique de courants de Foucault est souvent locale et demande donc un temps de contrôle important pour les larges pièces.

1.3.4 Thermographie infrarouge

La thermographie infrarouge est basée sur la mesure du rayonnement infrarouge émis par les pièces sous contrôle [Susa, 2009][Zöcke, 2010]. Ce rayonnement est directement lié à la température de la pièce. On utilise une caméra infrarouge pour reconstituer la température en tout point à la surface de la pièce. Les méthodes thermographiques les plus utilisées pour le contrôle de structures aéronautiques consistent d'abord à chauffer légèrement le matériau par une source lumineuse (par exemple, des lampes flash). Le flux de chaleur envoyé à la surface de la pièce sous contrôle se propage dans son volume (FIGURE 1.13). Les défauts ont des diffusivités thermiques différentes de celle de la pièce. Il s'agit généralement d'un isolant thermique dans la structure. Ces défauts perturbent la diffusion de la chaleur à la surface du matériau. Ainsi, l'analyse de la réponse thermique mesurée par la caméra infrarouge permet de détecter et caractériser les défauts.

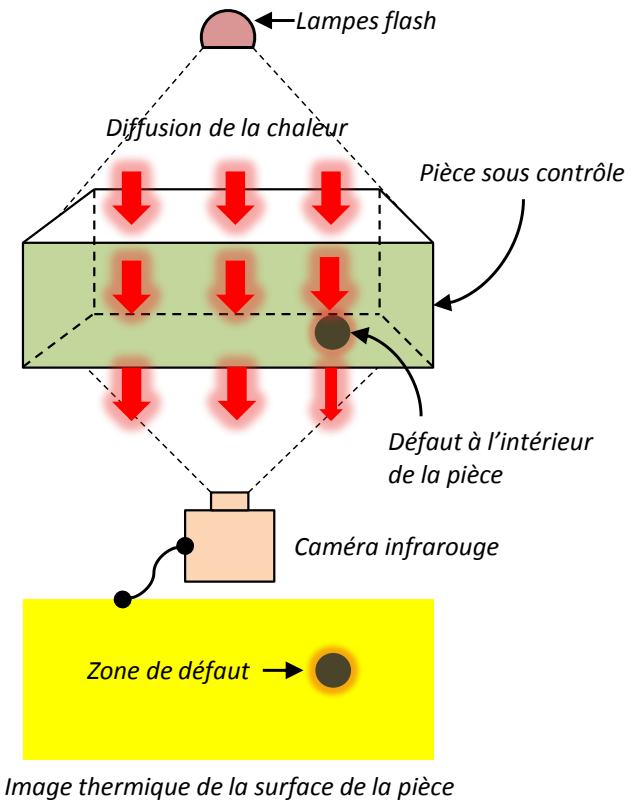


FIGURE 1.13 – Schéma de principe de la thermographie infrarouge.

Application : La technique est largement utilisée dans le domaine de l'aéronautique pour le contrôle de matériaux composites [Lepiller et Framezelle, 2011]. Elle permet un test global.
Limitation : La capacité de la méthode dépend de la performance de la caméra infrarouge [Lepiller et Framezelle, 2011].

1.3.5 Détectabilité de défaut des techniques de CND

La détectabilité de défaut est un critère important pour évaluer la performance des techniques de CND. Par exemple, pour les CFRP, les ultrasons montrent des performances de détections remarquables. Mais cette méthode possède des limitations en termes de cadence, de taille de pièce à immerger,... La technique de courants de Foucault s'avère très efficace pour détecter les ruptures, les désalignements de fibre et les défauts dûs aux impacts. Cependant, il est difficile de détecter les délaminages par cette technique. La thermographie est peu efficace pour détecter les défauts critique tels que les ruptures de fibres.

Le TABLEAU 1.1 récapitule des résultats bibliographiques sur la capacité de détection des défauts typiques des CFRP pour des différentes méthodes de CND [Cawley et Adams, 1989] [Wong *et al.*, 1999] [Kapadia, 2011] [Karbhari, 2013].

L'inspection des matériaux composites pose encore un défi particulier, puisque ces matériaux sont complexes de propriétés non homogènes et anisotropes. Aucune technique de CND n'est satisfaisante pour évaluer complètement l'intégrité des structures composites ou de ses composants. De plus, chaque méthode présente certaines limites.

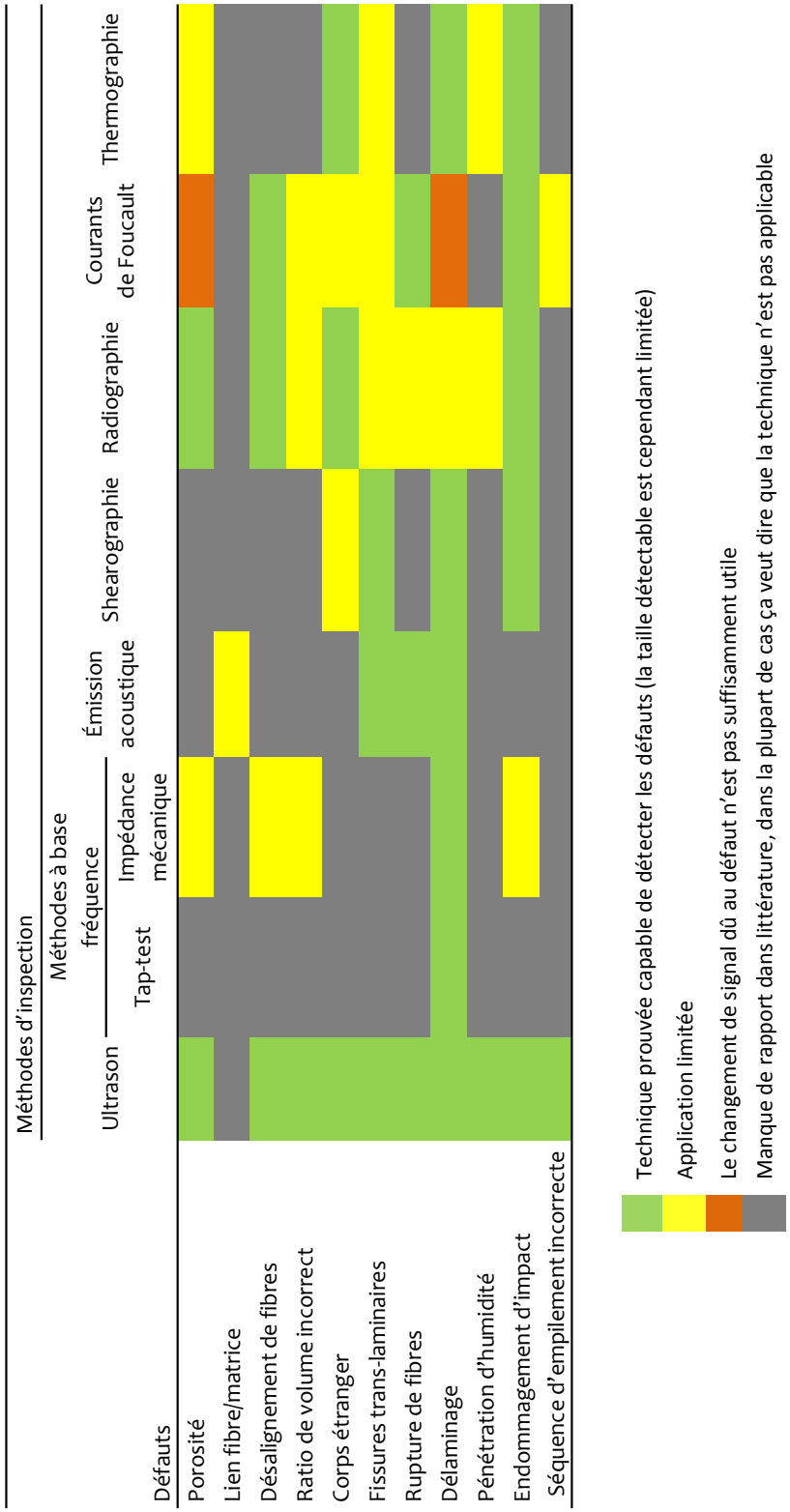


TABLEAU 1.1 – Les techniques de CND et leur détectabilité

La combinaison de méthodes de CND est une tentative d'amélioration de la performance des techniques de CND. On peut citer quelques techniques hybrides utilisée pour les composites CFRP : Laser – ultrasons [Schnars et Henrich, 2006], Thermographie ultrasonique [Zöcke, 2010], Thermographie inductive [Sakagami et Ogura, 1994].

La thermographie inductive est la combinaison des méthodes des courants de Foucault et de la thermographie infrarouge. Nous détaillerons par la suite quelques éléments de la méthode et expliquerons pourquoi cette méthode est bien adaptée au CND des matériaux composites stratifiés.

1.4 Thermographie inductive

Par le principe de chauffage par induction, on génère, à l'aide d'un inducteur alimenté par un courant alternatif des courants de Foucault à l'intérieur du composite. Ces derniers chauffent le matériau par l'effet Joule (FIGURE 1.14). On mesure la température exposée à la surface accessible de la pièce à l'aide d'une caméra infrarouge.

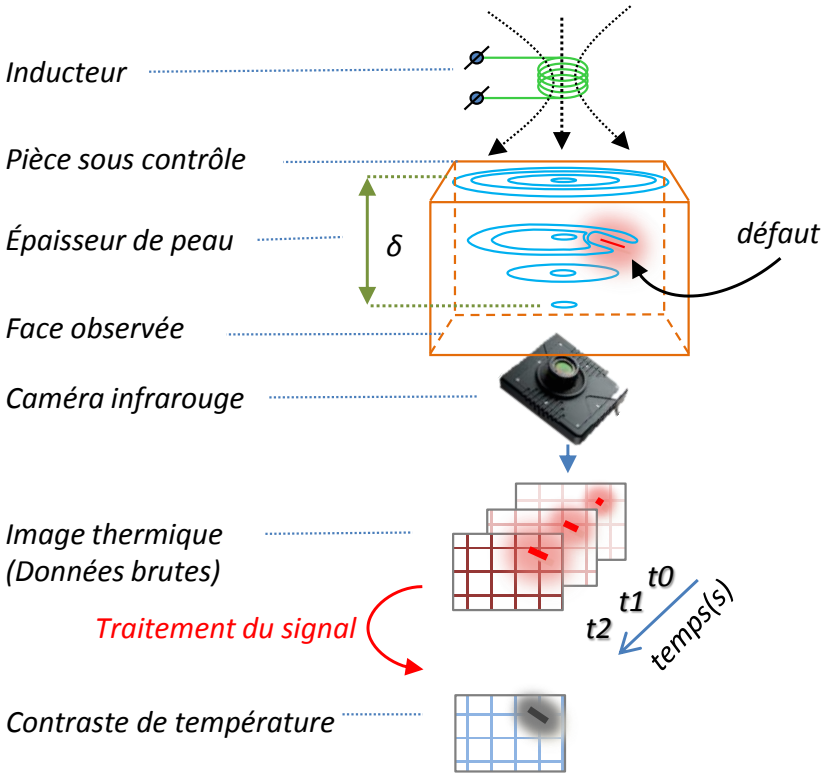


FIGURE 1.14 – Le principe de la thermographie inductive

Les défauts sur la surface ou en sous-surface peuvent [Sakagami et Ogura, 1994] :

- perturber la circulation des courants induits et générer les zones de courants intensifiés.
- perturber la diffusion de la chaleur dans le composite.

Ces perturbations entraînent des distributions et des évolutions temporelles inhabituelles de la température à la surface du matériau. Cette dernière est ensuite analysée pour détecter et caractériser les défauts.

Afin d'illustrer ce principe, nous présentons dans la FIGURE 1.15 un exemple d'un CND thermo-inductif. Dans ce contrôle, un inducteur de forme U est utilisé. Le matériau à contrôler a un défaut rectangulaire à l'intérieur. Nous observons l'évolution de la température de la surface inférieure de la plaque au cours de la chauffe et du refroidissement. Ce dernier est déterminé à partir du moment où on arrête le courant inducteur.

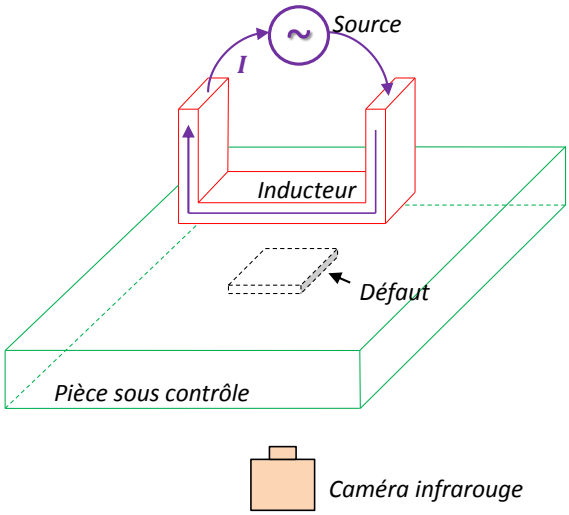
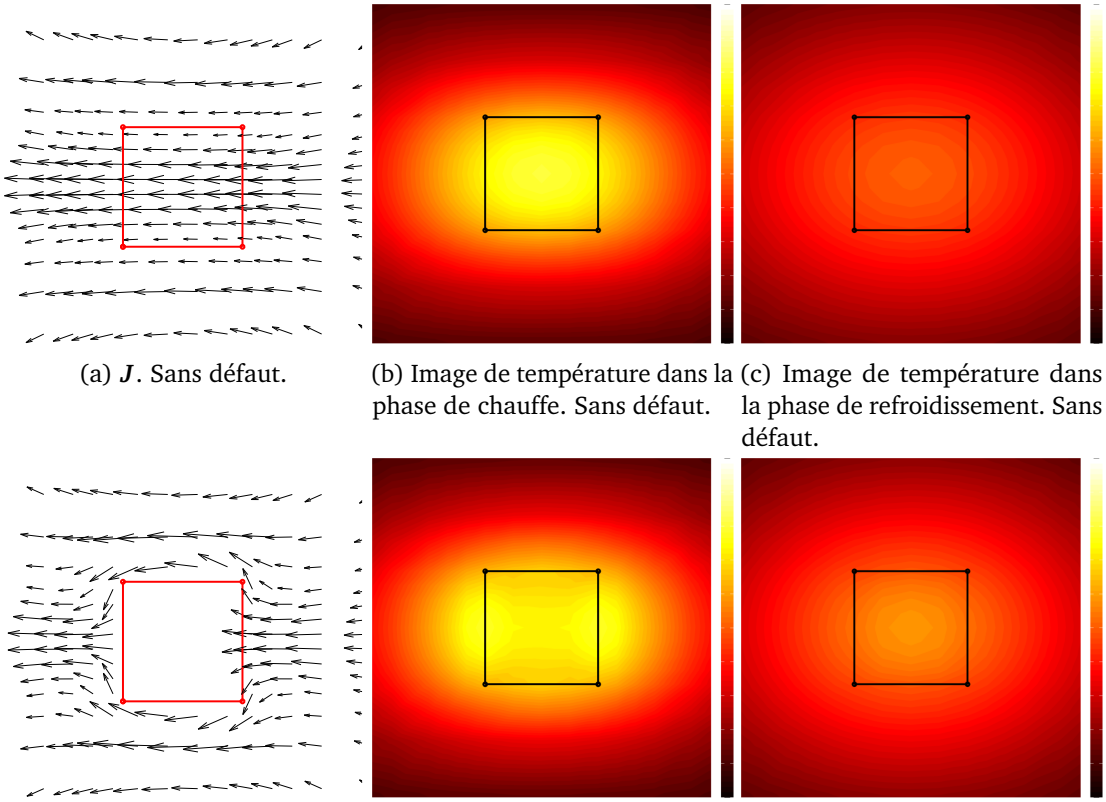


FIGURE 1.15 – Banc d'essai du CND thermo-inductif.

La FIGURE 1.16 montre les perturbations de la circulation des courants de Foucault par la présence du défaut. Cette perturbation est corrélée aux régions plus chaudes des deux côtés du défaut comme montré sur la FIGURE 1.16 (e). La distribution de température dans ces régions est inhabituelle comparée avec le matériau sans défaut (FIGURE 1.16 (b)). En plus, le défaut empêche la diffusion de la chaleur à la surface du matériau. Par conséquence, la zone à la surface qui correspond à la région du défaut a une température plus faible par rapport au cas d'un matériau sain. Dans la phase de refroidissement, cette zone a une température plus chaude (FIGURE 1.16 (c) et (f)).



(a) $\boldsymbol{J}$. Sans défaut.

(b) Image de température dans la phase de chauffe. Sans défaut.

(c) Image de température dans la phase de refroidissement. Sans défaut.

(d) $\boldsymbol{J}$. Avec défaut.

(e) Image de température dans la phase de chauffe. Avec défaut.

(f) Image de température dans la phase de refroidissement. Avec défaut.

FIGURE 1.16 – Détection de défaut par la méthode thermographie inductive.

Ce double mécanisme de détection peut permettre une haute capacité de détection de défaut par la méthode thermo-inductive. De plus, l'interprétation par la caméra infrarouge rend la méthode simple et globale.

Souvent, afin de mieux détecter le défaut, on utilise les contrastes de température. Les contrastes sont des post-traitements du profil de la température à la surface de la pièce test. L'analyse de ces contrastes permet de détecter et remonter aux caractéristiques des défauts. Ils seront ainsi nos données thermographiques.

1.4.1 Données brutes

La séquence des images représentées dans la FIGURE 1.17 décrit la structure normale des données acquises d'une caméra infrarouge. L'ensemble des données est définie par une matrice 3D $T(x, y, t)$ où $x = \overline{1, n_x}$, $y = \overline{1, n_y}$ et $t = \overline{1, n_t}$. La valeur de la température peut être donnée en $°K$ ou $°C$.

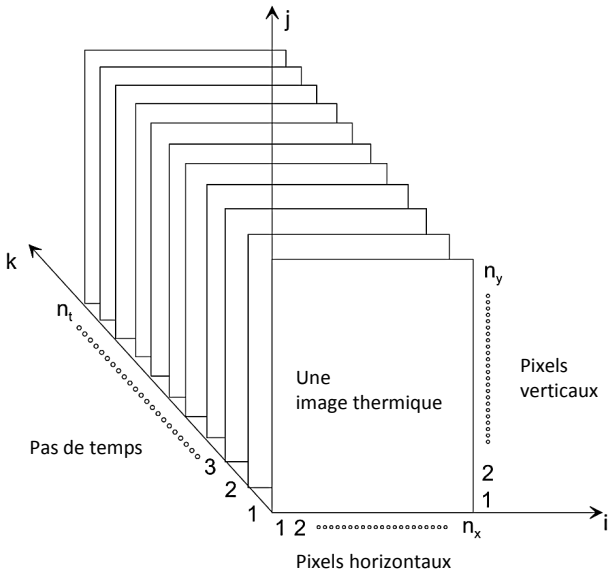


FIGURE 1.17 – Séquence de n_t d'images de $n_x \times n_y$ pixels.

1.4.2 Contraste absolu

Initialement, un échantillon sans défauts, fait du même matériau et de même dimension que la pièce à tester, est examiné. L'échantillon sain est excité et l'évolution de la température $T_s(x, y, t)$ est enregistrée. Ensuite, l'évolution de la température de l'échantillon défectueux $T_d(x, y, t)$ soumis à la même excitation électromagnétique est comparée à T_s. Le contraste absolu est alors défini selon [Ibarra-Castanedo, 2005] :

$$C^a(x, y, t) = \Delta T = T_d(x, y, t) - T_s(x, y, t) \tag{1.1}$$

Dans les régions sans défaut le contraste est nul. D'autre part, une valeur non-nulle indique l'existence d'un défaut dans ces régions. Une image du contraste absolu pour le cas test précédant est présentée sur la FIGURE 1.18.

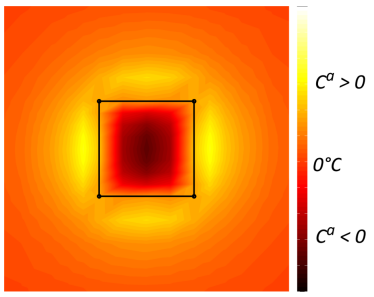


FIGURE 1.18 – Contraste absolu au cours de chauffe. Il est obtenu par la soustraction des images dans la FIGURE 1.16 (e) et la FIGURE 1.16 (b). La zone de défaut est révélée par les valeurs non-nulles du C^a.

La performance de la technique thermographie inductive dépend des dispositifs utilisés, de plusieurs paramètres opératoires et de la méthode de traitement du signal de température mise en œuvre. L'optimisation de la technique passe par une détermination optimale de ces facteurs. Par exemple, dans la conception de l'inducteur, plusieurs formes de l'inducteur sont à évaluer afin de l'adapter aux

matériaux sous contrôle.

Les conceptions optimales peuvent être déterminées par une approche expérimentale. Cependant, de part le grand nombre de paramètres à optimiser, plusieurs essais expérimentaux doivent être réalisés. Cela peut demander un coût d'investissement important. De plus, il est difficile de retirer des connaissances sur les phénomènes physiques et les comportements du matériau par des mesures. Par exemple, les courants induits ne sont pas directement accessibles par des mesures expérimentales. Or, la compréhension de la circulation des courants de Foucault dans le matériau est indispensable pour établir les mécanismes de détection de défaut.

Dans ce contexte, les outils de simulation sont une alternative intéressante. En offrant des essais numériques, les simulations limitent le nombre des essais expérimentaux à réaliser. De plus, les phénomènes physiques mis en jeu peuvent être clairement décrits et quantifiés.

Cependant, pour les matériaux composites stratifiés, le développement d'un tel outil se heurte aux problématiques liés à la complexité du matériau, des défauts et des contraintes de la technique de CND. Nous détaillerons par la suite les problématiques principales de la modélisation des CFRP.

1.5 Problématiques principales et objectif de la thèse

La modélisation des composites est une tâche difficile car les CFRP possèdent une structure à plusieurs échelles : les constituants élémentaires (fibres et matrice) sont assemblés pour former des plis, qui sont quant à eux empilés pour former des stratifiés. On distingue généralement :

- L'échelle microscopique – l'échelle des fibres et de la matrice. Sa taille caractéristique est le diamètre d'une fibre (quelques μm).
- L'échelle mésoscopique – l'échelle d'un pli. Sa taille caractéristique est l'épaisseur d'un pli (un dixième de mm).
- L'échelle macroscopique – l'échelle d'ensemble de la pièce sous contrôle. Sa taille caractéristique est généralement de l'ordre du m.

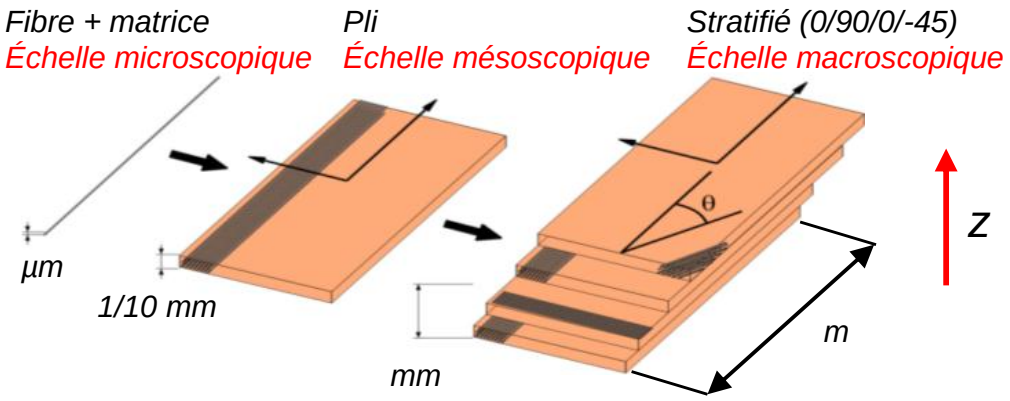


Image issue de [Gendre, 2011]

FIGURE 1.19 – Caractéristiques multi-échelles des CFRP stratifiés.

De part le facteur d'échelle important, il est pratiquement impossible de modéliser l'ensemble du matériau à l'échelle microscopique. La construction du modèle de comportement macroscopique fait

généralement appel à des techniques d'homogénéisation multi-échelle. Ces dernières se reposent sur :

- Un modèle microscopique qui modélise le comportement détaillé des fibres et de la matrice.
- Un modèle mésoscopique qui représente un pli composite.
- Un modèle macroscopique qui représente le stratifié avec des plis de différentes orientations.

L'homogénéisation consiste à trouver un modèle de comportement homogène équivalent à l'échelle mésoscopique ou macroscopique à partir du modèle microscopique. Ce dernier utilise une géométrie et un modèle de comportement détaillé des constituants élémentaires. Il se limite à une ou plusieurs cellules élémentaires représentatives. La problématique principale est liée à la distribution aléatoire des fibres. Les modèles microscopiques peuvent être construits en 2D [Pr *et al.*, 2013] ou 3D [Wasselynck *et al.*, 2013].

En électromagnétique, l'objectif des différentes approches dépend des phénomènes mis en jeu. Par exemple, à haute fréquence, la permittivité équivalente est le principal paramètre à identifier [Holloway *et al.*, 2005] [Pr *et al.*, 2013] [Corcolle *et al.*, 2014]. Notre cas concerne des phénomènes à basse fréquence (inférieure à 10MHz), la conductivité électrique homogénéisée est le principal paramètre à déterminer pour les calculs des phénomènes dûs aux courants de Foucault.

Nécessité de la prise en compte du plan de drapage et de la forme de l'inducteur

Un essai de CND par thermographie inductive est réalisé dans notre laboratoire. La plaque composite à contrôler est composée de 37 plis (FIGURE 1.20 (a)). Le défaut est créé par un impact de 21 Joules. La FIGURE 1.20 (b) présente l'allure du défaut obtenu par la technique des ultrasons.

Un inducteur en forme U est placé au-dessus et centré sur le défaut. Deux cas tests sont effectués où seule l'orientation de l'inducteur est différente. Elle est respectivement de 0° et de 90° comme le montre la FIGURE 1.20 (a). La soustraction entre l'image thermique obtenue dans le cas où l'inducteur est posé sur la zone du défaut et sur la zone sans défaut nous donne l'image du contraste absolu du défaut. Cette dernière est seuillée et présentée dans la FIGURE 1.21. La valeur de seuil est fixée à $-1°C$ pour les deux cas afin d'éliminer les bruits thermiques et la non-uniformité de la température à la surface du matériau.

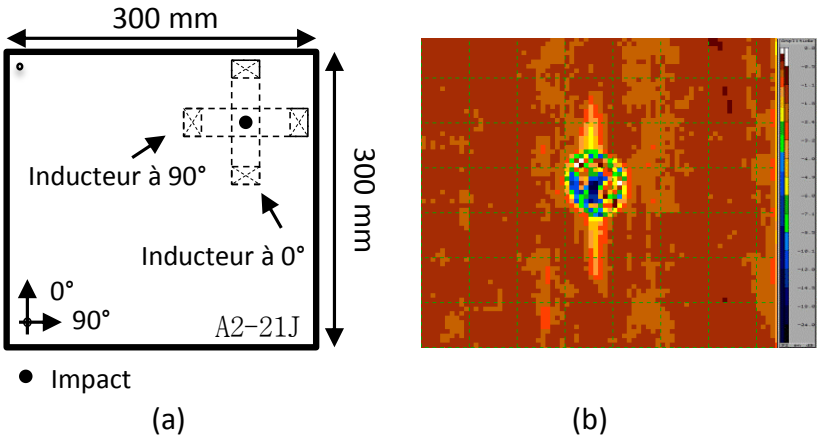


FIGURE 1.20 – (a) La plaque composite avec un défaut d'impact, (b) L'image du défaut obtenue par la technique ultrasonore.

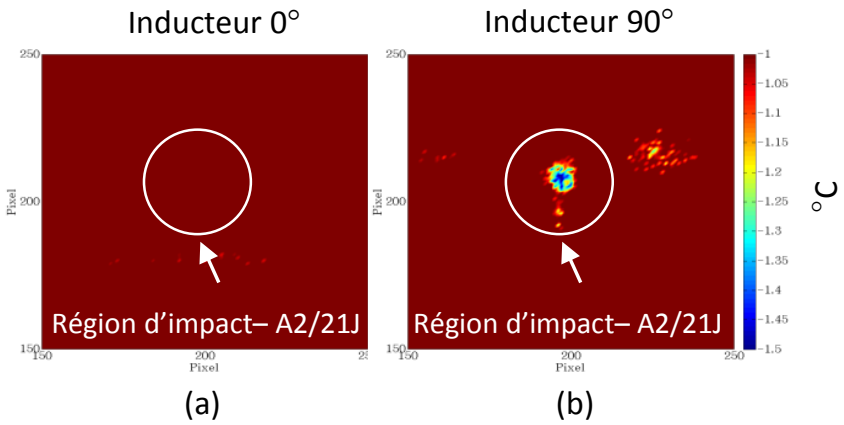


FIGURE 1.21 – L'image du contraste absolu du défaut A2 (a) l'inducteur en orientation de 0° et (b) 90° (zoom sur la zone d'impact).

On peut voir clairement sur la FIGURE 1.21 que la détectabilité de défaut dépend de l'orientation relative de l'inducteur. Cela peut être expliquée par la nature du défaut et aussi par le fait que la distribution des courants induits dans chaque pli du composite dépend de son plan de drapage. Entre les deux cas, si on choisit les axes de référence fixés sur l'inducteur, le plan de drapage "vu" par l'inducteur est différent et décalé de 90° l'un par rapport à l'autre. Les circulations des courants induits sont alors fortement changées. Cela implique que leurs interactions avec le défaut sont totalement différentes entre les deux cas tests.

Le modèle d'évaluation de la performance de la technique doit prendre en compte le plan de drapage du CFRP ce qui n'est pas le cas du code de calcul actuel présent au laboratoire.

Le modèle macroscopique représente le comportement globalement homogénéisé du matériau. Dans ce cas, on considère le stratifié comme un matériau homogène [Cacciola *et al.*, 2009] [Ramdane, 2009]. Ce modèle ne permet pas de modéliser précisément le comportement mésoscopique où l'on cherche à observer la circulation des courants de Foucault et la distribution de la puissance induite dans chaque pli. Il est alors logique d'utiliser un modèle mésoscopique.

Nos travaux de thèse s'inscrivent dans la continuité des travaux de Brahim Ramdane [Ramdane, 2009] et Guillaume Wasselynck [Wasselynck, 2012]. Nous souhaitons passer d'une étude à l'échelle macroscopique à une échelle mésoscopique. Cette approche permettra de prendre en compte de façon plus précise le plan de drapage du composite. Ces améliorations permettront d'étudier plus précisément la détectabilité de défauts critiques (délaminage, rupture de fibres) et notamment d'investiguer de nouveaux critères discriminants pour des défauts à l'échelle mésoscopique dont la taille peut être inférieure à l'épaisseur d'un pli.

Le code éléments finis 3D du laboratoire développé par Ramdane [Ramdane, 2009] permet d'obtenir la distribution de température dans un matériau composite homogénéisé à l'échelle macroscopique. Le code repose sur la résolution de la formulation électromagnétique $\boldsymbol{A}-\phi$ discrétisée par les éléments d'arête de Whitney. Cette formulation nous permet de mieux prendre en compte des courants induits dans le domaine multiplement connexe comme le cas des défauts non-débouchants. La discrétisation spatiale se fait à l'aide des éléments tétraédriques.

Dans ses travaux de thèse, Wasselynck développe un modèle d'homogénéisation, appelé modèle de percolation [Wasselynck, 2012] [Wasselynck *et al.*, 2013], qui permet d'obtenir le tenseur de conductivité électrique équivalent d'un pli composite. Chaque pli a un comportement anisotrope,

très conducteur dans la direction des fibres et très peu conducteur dans les sens orthogonaux car les fibres de carbone sont conductrices tandis que la matrice est isolante et par conséquent, les propriétés électriques du composite stratifié dépendent fortement de l'orientation des fibres. Afin de modéliser ce comportement, l'homogénéisation nous donne un tenseur à trois composants $\sigma_{\parallel}$, $\sigma_{\perp}$ et σ_z qui sont respectivement la conductivité électrique homogène dans l'axe des fibres, perpendiculaire à l'axe des fibres et selon l'épaisseur du pli unidirectionnel (FIGURE 1.19).

Ratio d'anisotropie : la conductivité électrique dans le sens des fibres est beaucoup plus grande que celle dans d'autres sens. L'anisotropie du matériau peut être caractérisée par le rapport entre la conductivité dans l'axe des fibres et celle dans les sens orthogonaux, ie. $\sigma_{\parallel}/\sigma_z$ ou $\sigma_{\parallel}/\sigma_{\perp}$.

Modèle mésoscopique

Le comportement macroscopique du stratifié est construit en se basant sur un modèle d'éléments finis 3D multi-plis (multi-couches). Dans ce cas, selon l'orientation des fibres, chaque pli a son propre tenseur.

Cependant, le modèle mésoscopique nécessite l'utilisation d'un maillage du domaine conducteur à l'échelle d'un pli. De part le facteur d'échelle important entre l'épaisseur d'un pli et les dimensions de la pièce sous contrôle, il en résulte un maillage de très mauvaise qualité dont les éléments sont fortement déformés. A cela s'ajoute également la forte anisotropie du composite, ce qui peut conduire à un système matriciel très mal conditionné pour le modèle d'éléments finis. Cela pose souvent problème pour le calcul numérique, notamment en termes de précision et de temps de calcul.

Afin d'améliorer le temps de calcul, certaines méthodes peuvent être envisagées telles que les éléments coques monocouches développés par Guérin [Guérin, 1994] qui ont été appliqués aux matériaux isotropes homogènes ou encore les éléments coques multicouches développés par Bensaid [Bensaid, 2006] qui ont été appliqués aux matériaux composites multiplis. Cependant, la circulation des courants de Foucault suivant l'épaisseur du matériau ne peut pas être prise en compte par les modèles réduits.

Face à ces complexités numériques, nous devrons améliorer la précision et la fiabilité du logiciel de calcul dont on dispose déjà.

1.6 Démarche

Afin d'aboutir à nos objectifs, nous devrons, en premier temps, adapter le code de calcul existant à la modélisation des matériaux composites stratifiés à l'échelle mésoscopique. Ce modèle nous permettra de mieux tenir compte l'interaction entre les courants de Foucault avec les défauts à cette échelle. Le domaine du matériau sera maillé. Les défauts à l'échelle mésoscopique devront être facilement introduits dans le modèle. Ce dernier devra être robuste, capable de prendre en compte tous les types de défaut envisagés. Les outils de simulation seront présentés dans le chapitre 2.

Face aux problématiques des régions minces, nous mènerons une étude de sensibilité à la déformation du maillage des codes de calcul développés. Cette étude nous conduira à une solution adaptée à la modélisation des CFRP à l'échelle mésoscopique. La modélisation devra permettre des temps de calcul raisonnables et des précisions acceptables de la solution numérique en tenant compte des défauts dont l'épaisseur peut être inférieure à celle d'un pli composite. Nous détaillerons cette étude dans le chapitre 3.

Les simulations étant validées, le modèle développé permet d'évaluer les performances de la technique thermographie inductive et de concevoir des dispositifs. Une étude préliminaire présentée dans le chapitre 4 démontra une exploitation potentielle du modèle.

Chapitre 2

Outils de simulation

Les outils de simulation doivent permettre de résoudre un problème couplant les courants de Foucault et la diffusion thermique. Le couplage se fait par l'introduction de la densité volumique de la puissance induite comme source de chaleur du problème thermique.

Problème électromagnétique : Afin de résoudre ce problème, des outils numérique et analytique seront développés. Basé sur la méthode des éléments finis, l'outil numérique est capable de travailler avec les problèmes complexes (matériaux multiplis d'orientation différentes, présence de défaut, ...). Cependant, la qualité des solutions numériques n'est pas toujours garantie. Elle dépend essentiellement de la discrétisation spatiale du domaine d'étude. En effet, dans ce cas des composites stratifiés, de part le facteur d'échelle important entre l'épaisseur d'un pli et les autres dimensions, assurer une bonne discrétisation est une tâche difficile, voire impossible quand les ressources informatiques sont limitées. Par conséquence, il est nécessaire de valider les solutions numériques obtenues. Ayant recours aux hypothèses simplificatrices, l'outil analytique se limite aux matériaux composites unidirectionnels de géométrie simple. Toute fois, cet outil nous permet d'obtenir une solution exacte du problème. Ce modèle analytique servira à valider le modèle numérique.

Problème thermique : La solution du problème thermique sera obtenue numériquement.

En raison de la différence importante entre la constante de temps thermique (dans l'ordre de quelques s) et la période électrique de la source électromagnétique (de quelques μs à quelques ms), on peut négliger dans les calculs le régime transitoire du problème électromagnétique. Ce dernier sera alors établi dans le domaine fréquentiel en utilisant la notation complexe. L'analyse des profils temporels de la température est nécessaire dans le CND thermo-inductif. On établira le problème thermique dans le domaine du temps.

Les formulations du problème des courants de Foucault et de la diffusion thermique seront tout d'abord introduites. Ensuite, nous présenterons les méthodes de solution numérique et analytique qui ont été implantées dans notre logiciel de simulation afin de simuler la technique thermo-inductive dans les CFRP.

2.1 Équations de Maxwell

Description du domaine d'étude

Le domaine à étudier D dans la FIGURE 2.1 se compose d'une région de l'inducteur (région de source) où on impose l'excitation (densité de courant J^s), d'une région d'air, d'une région conductrice D_c représentant la pièce à contrôler. On note Γ et Γ_c respectivement les frontières qui l'enveloppent D et

D_c.

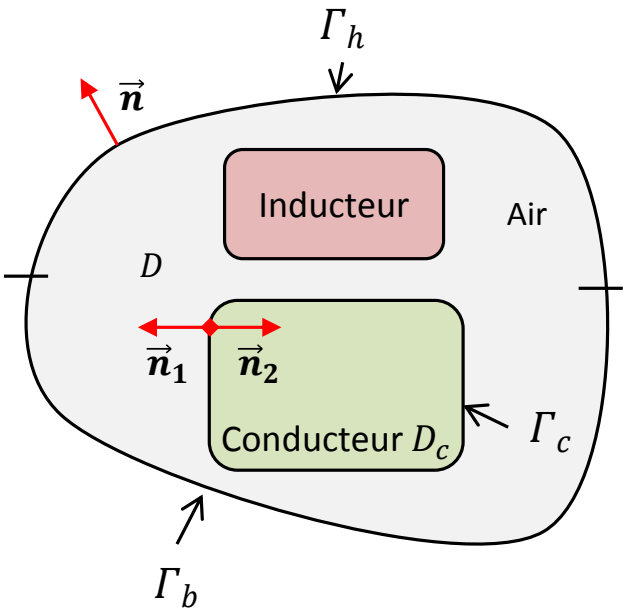


FIGURE 2.1 – Constitution du domaine d'étude

Les phénomènes magnétique et électrique sont régis par le système d'équation aux dérivées partielles de Maxwell. Ce dernier gouverne les répartitions spatiale et temporelle des champs électromagnétiques. En régime quasi-stationnaire, on néglige le courant de déplacement (introduit par le terme $\frac{\partial D}{\partial t}$), en utilisant la notation complexe, ces équations s'écrivent :

$$\text{Le théorème d'Ampère :} \quad \boldsymbol{rotH} = \boldsymbol{J}^i + \boldsymbol{J}^s \tag{2.1}$$

$$\text{La loi de Faraday :} \quad \boldsymbol{rotE} = -j\omega\boldsymbol{B} \tag{2.2}$$

$$\text{Loi de conservation de flux magnétique :} \quad div\boldsymbol{B} = 0 \tag{2.3}$$

$$\text{Loi de conservation de la densité de courant :} \quad div\boldsymbol{J}^i = 0 \tag{2.4}$$

$$div\boldsymbol{J}^s = 0 \tag{2.5}$$

Avec les champs d'intensité :
$\boldsymbol{H}$: le champ magnétique (A/m)
$\boldsymbol{E}$: le champ électrique (V/m)
et les champs de densité de flux :
$\boldsymbol{J}^i$: l'intensité de courant induit (A/m^2)
$\boldsymbol{J}^s$: l'intensité de courant d'excitation (A/m^2)
$\boldsymbol{B}$: l'induction magnétique $(Wb/m^2$ ou $T)$

2.1.1 Lois de comportement

Pour pouvoir prendre en compte les comportements électrique et magnétique des différents milieux dans le domaine d'étude, les relations constitutives de chaque milieu sont introduites.

Pour les matériaux linéaires et anisotropes :

$$\boldsymbol{B} = [\mu]\boldsymbol{H} \tag{2.6}$$

$$\text{Loi d'Ohm locale :} \quad \boldsymbol{J} = [\sigma]\boldsymbol{E} \tag{2.7}$$

Le symbole $[x]$ indique un tenseur. En 3D, ces tenseurs sont représentés par une matrice de taille 3×3. Pour les matériaux isotropes, ils se réduisent à un scalaire.
Dans le cas d'un stratifié CFRP, le tenseur de conductivité électrique $[\sigma]^i$ du pli i d'orientation θ^i (par rapport au référentiel commun Oxy) prend la forme :

$$\begin{bmatrix} \sigma^i_{xx} & \sigma^i_{xy} & 0 \\ \sigma^i_{yx} & \sigma^i_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_\parallel cos^2\theta^i + \sigma_\perp sin^2\theta^i & (\sigma_\parallel - \sigma_\perp)cos\theta^i sin\theta^i & 0 \\ (\sigma_\parallel - \sigma_\perp)cos\theta^i sin\theta^i & \sigma_\parallel sin^2\theta^i + \sigma_\perp cos^2\theta^i & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

2.1.2 Conditions aux limites

On impose les conditions aux limites sur les champs pour assurer l'unicité de la solution du système composé des équations de Maxwell et des lois de comportement.
Ainsi, la frontière Γ du domaine D peut être décomposée en deux parties, notées Γ^b et Γ^h, qui vérifient :

$$\Gamma^b \cap \Gamma^h = \emptyset$$
$$\Gamma^b \cup \Gamma^h = \Gamma$$

Sur Γ^h, on a la condition à la limites sur les champs magnétiques :

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}|_{\Gamma^h} = 0 \tag{2.9}$$

Sur Γ^b, la condition à la limite de l'induction magnétique est :

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{B}|_{\Gamma^b} = 0 \tag{2.10}$$

Sur Γ^c, on a :

$$\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{J}^i|_{\Gamma^c} = 0 \tag{2.11}$$

$$\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{n}_2 \cdot \boldsymbol{B}_2|_{\Gamma^c} = 0 \tag{2.12}$$

$$\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{n}_2 \times \boldsymbol{H}_2|_{\Gamma^c} = 0 \tag{2.13}$$

2.2 Formulations en potentiels

Il est tout à fait possible de résoudre des équations de Maxwell en prenant les champs comme inconnus. Cependant, les potentiels scalaire et vectoriel sont largement utilisés car ils offrent des formulations plus simples à résoudre qu'en champs électrique ou magnétique. Les formulations $\boldsymbol{A}-\phi$, $\boldsymbol{T}-\Omega$ et $\boldsymbol{\Gamma}-\boldsymbol{\Pi}$ seront présentées dans les paragraphes suivants.

2.2.1 Formulation $A-\phi$

Dans tous les domaines considérés, $\boldsymbol{B}$ est à divergence nulle, elle dérive donc d'une fonction vectorielle $\boldsymbol{A}$ telle que :

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{rot}\boldsymbol{A} \tag{2.14}$$

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{n}|_{\Gamma^b} = 0 \tag{2.15}$$

Dans le domaine conducteur D_c : D'après (2.2), le champ électrique $\boldsymbol{E}$ peut s'exprimer en fonction du potentiel vecteur défini à un gradient près :

$$\boldsymbol{E} = -j\omega(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{grad}\phi) \tag{2.16}$$

$$\text{avec, } \phi|_{\Gamma^b} = 0 \tag{2.17}$$

Le potentiel scalaire électrique ϕ [1] se définit uniquement dans le domaine conducteur.

Les équations (2.1) et (2.4) se réécrivent en fonction de $\boldsymbol{A}$ et ϕ comme suit :

$$\boldsymbol{rot}\frac{1}{[\mu]}\boldsymbol{rot}\boldsymbol{A} + j\omega[\sigma](\boldsymbol{A} + \boldsymbol{grad}\phi) = \boldsymbol{J}^s \tag{2.18}$$

$$div(j\omega[\sigma](\boldsymbol{A} + \boldsymbol{grad}\phi)) = 0 \tag{2.19}$$

L'équation (2.18) est déduite de la forme locale du théorème d'Ampère (2.1) et vérifiée dans tout le domaine d'étude D. Seul le courant source $\boldsymbol{J}^s$ présente dans (2.18) car le courant induit est déjà exprimé par le terme $j\omega[\sigma](\boldsymbol{A} + \boldsymbol{grad}\phi)$. L'équation (2.19) est obtenue de la loi de conservation de la densité de courant (2.4), elle est vérifiée seulement dans le domaine conducteur D_c.

Les équations (2.18) et (2.19) constituent la formulation $\boldsymbol{A} - \phi$ qui sont à résoudre par les méthodes numériques.

2.2.2 Formulation $\boldsymbol{T} - \Omega$

A partir de (2.1), le champ magnétique $\boldsymbol{H}$ peut être décomposé par la somme d'un champ source, noté $\boldsymbol{H}^s$, et d'un champ de réaction, noté $\boldsymbol{H}^i$, ie. $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}^s + \boldsymbol{H}^i$. Le champ source est dû au courant source, ie.

$$\boldsymbol{rot}\boldsymbol{H}^s = \boldsymbol{J}^s \tag{2.20}$$

Le champ de réaction est dû au courant induit et exprimé par $\boldsymbol{H}^i = \boldsymbol{rot}\boldsymbol{J}^i$. Ces champs sont définis dans tout le domaine.
Car $\boldsymbol{J}^i$ est à divergence nulle (équation (2.4)), il peut être exprimé par un rotationnel d'un potentiel vecteur électrique $\boldsymbol{T}$ tel que :

$$\boldsymbol{rot}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{J}^i \tag{2.21}$$

$$\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{n}|_{\Gamma^c} = 0 \tag{2.22}$$

Il faut noter que $\boldsymbol{T}$ est défini seulement dans Ω_c. Car $\boldsymbol{H}^i = \boldsymbol{rot}\boldsymbol{J}^i$ dans tout le domaine d'étude, pour exprimer $\boldsymbol{H}^i$ par $\boldsymbol{T}$, on introduit le potentiel scalaire magnétique Ω. Supposons maintenant que le domaine non conducteur Ω_{nc} est contractile, Ω peut être défini tel que :

$$\boldsymbol{H}^i = \boldsymbol{T} - \boldsymbol{grad}\Omega \tag{2.23}$$

$$\Omega|_{\Gamma^h} = 0 \tag{2.24}$$

Utilisant ces définitions, les équations (2.2) et (2.3) peuvent être reformulées comme suit :

$$\boldsymbol{rot}\frac{1}{[\sigma]}\boldsymbol{rot}\boldsymbol{T} + j\omega[\mu](\boldsymbol{T} - \boldsymbol{grad}\Omega) = \boldsymbol{rot}\frac{1}{[\sigma]}\boldsymbol{rot}\boldsymbol{H}^s + j\omega[\mu]\boldsymbol{H}^s \tag{2.25}$$

$$div[\mu](\boldsymbol{T} - \boldsymbol{grad}\Omega) = div[\mu]\boldsymbol{H}^s \tag{2.26}$$

Jauge : Tous les potentiels ainsi définis $(\boldsymbol{A}, \phi, \boldsymbol{T}, \Omega)$ ne sont pas uniques. Afin d'assurer l'unicité de la solution, une condition de jauge doit être imposée.

1. Plus précisément, la primitive du potentiel scalaire électrique

2.2.3 Formulation $\mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Pi}$

Dans la suite du travail, nous utiliserons une méthode analytique développée par Burke [Burke, 1990] qui utilise la formulation $\mathbf{\Gamma} - \mathbf{\Pi}$. Nous allons présenter dans la suite de ce paragraphe le principe de sa mise en œuvre.

À des fréquences inférieures à $10MHz$, le phénomène d'induction électromagnétique peut être décrit en régime quasi-stationnaire. Les équations aux dérivées partielles régissant le problème peuvent être écrites en termes des potentiels vecteur magnétique et électrique de Hertz, $\mathbf{\Gamma}$ et $\mathbf{\Pi}$ respectivement. Ces derniers peuvent être définis en termes de potentiel vecteur magnétique $\boldsymbol{A}$ et de la dérivée du potentiel scalaire électrique ϕ par [Weaver, 1971][Burke, 1990] :

$$div\mathbf{\Pi} = \frac{\phi}{\omega^2} \tag{2.27}$$

$$\boldsymbol{rot}\mathbf{\Gamma} + \mu_0[\sigma]\mathbf{\Pi} = \boldsymbol{A} \tag{2.28}$$

Hypothèses : Les équations qui suivent sont basées sur les hypothèses suivantes :

- Le domaine des courants induits est une plaque infinie d'épaisseur finie.
- La conductivité électrique est anisotrope uni-axiale dont l'axe de l'anisotropie est parallèle à l'abscisse $\boldsymbol{Ox}$ (FIGURE 2.2).

Le domaine étudié se compose d'un inducteur parcouru par un courant sinusoïdal $Ie^{i\omega t}$ situé au-dessus d'une plaque conductrice infinie de l'épaisseur h comme montré dans la FIGURE 2.2. Avec le système de coordonnées choisi, on définit trois régions distinctes : la région 1 ($0 < z < z_b$) est celle de l'air au-dessus de la plaque et au-dessous de l'inducteur ($z = z_b$), la région 2 ($-h < z < 0$) contient tout le domaine conducteur, la région 3 ($z < -h$) est celle à air située au-dessous de la plaque.

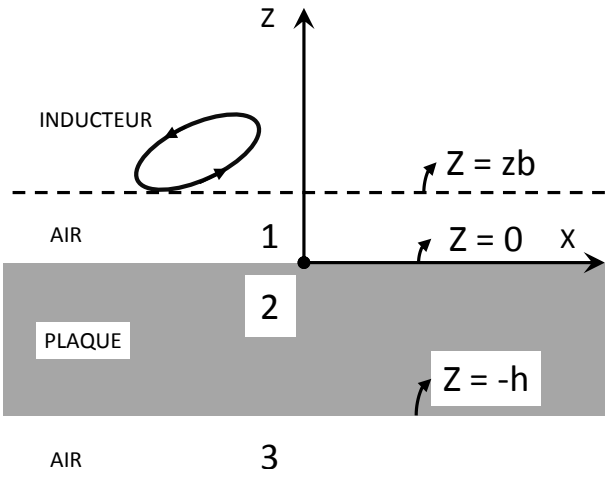


FIGURE 2.2 – Constitution du domaine

Dans les deux régions d'air (région 1 et 3), ces potentiels ont uniquement une seule composant suivante $\boldsymbol{z}$, $\mathbf{\Gamma_{1,3}} = \boldsymbol{z}\Gamma_{1,3}$ et $\mathbf{\Pi_{1,3}} = \boldsymbol{z}\Pi_{1,3}$. Les potentiels $\Gamma_{1,3}$ et $\Pi_{1,3}$ satisfont l'équation de Laplace :

$$\nabla^2\Gamma_{1,3} = 0 \tag{2.29}$$

$$\nabla^2\Pi_{1,3} = 0 \tag{2.30}$$

Dans ce cas, le tenseur de conductivité peut s'écrire sous la forme :

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_y \end{pmatrix}$$

On remarque que **les conductivités suivant y et z sont identiques** ($\sigma_z = \sigma_y$). Dans le cas d'un pli composite CFRP, σ_x peut être identifié avec la conductivité suivant le sens de fibres et σ_y peut être attribué aux deux conductivités perpendiculaires à la direction de fibres. La perméabilité de la plaque est isotrope et égale à celle de l'air ($\mu = \mu_0$). Dans ces conditions, les potentiels Hertziens dans le domaine conducteur (région 2) sont parallèles à **l'axe de l'anisotropie** ($\boldsymbol{Ox}$), $\boldsymbol{\Gamma_2} = \boldsymbol{x}\Gamma_2$ et $\boldsymbol{\Pi_2} = \boldsymbol{x}\Pi_2$, avec Γ_2 et Π_2 obéissant aux équations suivantes :

$$\nabla^2\Gamma_2 = k_y^2\Gamma_2 \tag{2.31}$$

$$\nabla^2\Pi_2 = k_x^2\Pi_2 + \frac{(\sigma_y - \sigma_x)}{\sigma_y}\frac{\partial^2\Pi_2}{\partial x^2} \tag{2.32}$$

où $k_x = j\omega\sigma_x\mu_0 = 2j/\delta_x^2$, $k_y = j\omega\sigma_y\mu_0 = 2j/\delta_y^2$ avec δ_x, δ_y sont respectivement les épaisseurs de peau correspondantes aux conductivités σ_x et σ_y. Les ÉQUATIONS (2.29), (2.30), (2.31), (2.32) sont celles à résoudre afin de déterminer les autres grandeurs comme le champ électrique et les courants induits dans la plaque.

2.3 Équations de la diffusion thermique

2.3.1 Source de chaleur

La source de chaleur du phénomène thermique considérée est seulement constituée par les pertes Joules des courants de Foucault dont la densité volumique, exprimée en W/m^3 peut être déterminée par :

$$P = \widehat{\boldsymbol{J}^i}.\boldsymbol{E}^i \tag{2.33}$$

2.3.2 Formulation thermique

La conduction est le mode de transfert de chaleur dans un milieu solide. Le phénomène de la conduction apparaît lorsqu'il existe un gradient de température. La conduction thermique est décrite par la loi de Fourier [Taler et Duda, 2006] :

$$\boldsymbol{\Phi} = -[\lambda]\boldsymbol{grad}T \tag{2.34}$$

avec $\boldsymbol{\Phi}$ la densité de flux de chaleur (W/m^2), $[\lambda]$ le tenseur de la conductivité thermique du matériau ($W/(m.K)$), T la température ($°K$). $[\lambda]$ est déterminé, pour chaque pli CFRP, de même manière que le tenseur de la conductivité électrique (2.8). Le premier principe de la thermodynamique nous permet de d'écrire une équation différentielle qui régit l'évolution de la température à l'intérieur du matériau [Taler et Duda, 2006] :

$$\rho C_p\frac{\partial T}{\partial t} - div([\lambda]\boldsymbol{grad}T) = P \tag{2.35}$$

où ρ est la masse volumique du matériau (kg/m^3), C_p la chaleur spécifique ($J/(kg.°K)$) et P la densité volumique de la puissance induite.

2.3.3 Condition aux limites

Convection

A la surface du composite, la convection est l'échange de chaleur avec l'air par intermédiaire des mouvements des particules d'air. La convection naturelle est définie lorsque la chaleur est seule responsable de ces mouvements. En se déplaçant des zones chaudes vers les zones froides, la quantité

de chaleur transmise est proportionnelle à la différence de température entre la surface et l'air [Taler et Duda, 2006] :

$$\mathbf{\Phi} \cdot \boldsymbol{n}|_{\Gamma_c} = h_c\,(T - T_\infty) \tag{2.36}$$

avec h_c le coefficient de convection ($W/(m^2.°K)$) et T_∞ peut être considérée comme la température d'ambiant moyenne.

Rayonnement

Le rayonnement est un échange d'énergie par ondes électromagnétiques. La longueur d'onde de ce rayonnement se situe dans les spectres des infrarouges. La quantité de chaleur rayonnée est déterminée par [Taler et Duda, 2006] :

$$\mathbf{\Phi} \cdot \boldsymbol{n}|_{\Gamma_c} = \epsilon\sigma\left(T^4 - T_\infty^4\right) \tag{2.37}$$

où ϵ l'émissivité de la surface du matériau, σ la constante de Stefan-Boltzmann qui est égale à 5.67 $W/(m^{2\circ}K^4)$.

Afin de garantir une précision accrue du modèle thermique, nous allons imposer une condition aux limites combinant la convection naturelle et le rayonnement. Dans (2.37), on peut écrire $(T^4 - T_\infty^4) = (T^3 + T^2T_\infty + TT_\infty^2 + T_\infty^3)(T - T_\infty) = A(T - T_\infty)$ et poser $h_r = \epsilon\sigma A$. On détermine dans cette écriture, h_r le "coefficient de rayonnement" dont l'unité est la même que h_c (ie, $W/(m^2.°K)$). La convection naturelle et le rayonnement peuvent alors se combiner dans un même coefficient [Taler et Duda, 2006], noté $h = h_c + h_r$. A l'aide de cette définition, à la surface du matériau, on a une seule et unique condition à la limite de type Neumann, qui s'écrit :

$$\mathbf{\Phi} \cdot \boldsymbol{n}|_{\Gamma_c} = -[\lambda]\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_c} = h\,(T - T_\infty) \tag{2.38}$$

2.4 Modèle numérique

La méthode des éléments finis que nous allons utiliser est basée sur la méthode de Galerkin [Oudin, 2008]. La méthode consiste à établir un système matriciel linéaire de dimension finie de l'équation différentielle :

$$L(f)|_\Omega = S \tag{2.39}$$

avec Ω le domaine de définition, $\partial\Omega$ son bord, L un opérateur différentiel. Une approximation de f, notée F, peut prendre la forme :

$$F = \sum_{i=1}^{N} \kappa_i F_i \tag{2.40}$$

dans l'espace des éléments finis où κ_i sont des fonctions d'interpolation. Ainsi, l'erreur dûe à l'approximation peut être définie par :

$$R = L(F) - S|_\Omega \tag{2.41}$$

Dans le but de minimiser les erreurs pondérées, on cherche les F_i en résolvant les formulations intégrales suivantes :

$$\forall \chi_{i=\overline{1,N}}, \int_\Omega \chi_i(L(F) - S)d\Omega = 0 \tag{2.42}$$

où χ_i sont aussi des fonctions d'interpolation définies dans l'espace des éléments finis. On obtient ainsi les N équations pour construire un système matricielle. Souvent, afin de baisser l'ordre de L, on utilise des identités de Green qui s'écrivent :

$$\int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{grad} v d\Omega = -\int_\Omega v \cdot div \boldsymbol{u} d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}) v d\Gamma \tag{2.43}$$

$$\int_\Omega \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{rot} \boldsymbol{v} d\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{rot} \boldsymbol{u} d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{n}) \boldsymbol{v} d\Gamma \tag{2.44}$$

Les formulations obtenues sont d'ordre plus faible. Les fonction f peuvent être scalaires ou vectorielles. L'approximation de ces fonctions se fait à l'aide des éléments de Whitney qui seront présentés dans les paragraphes suivants.

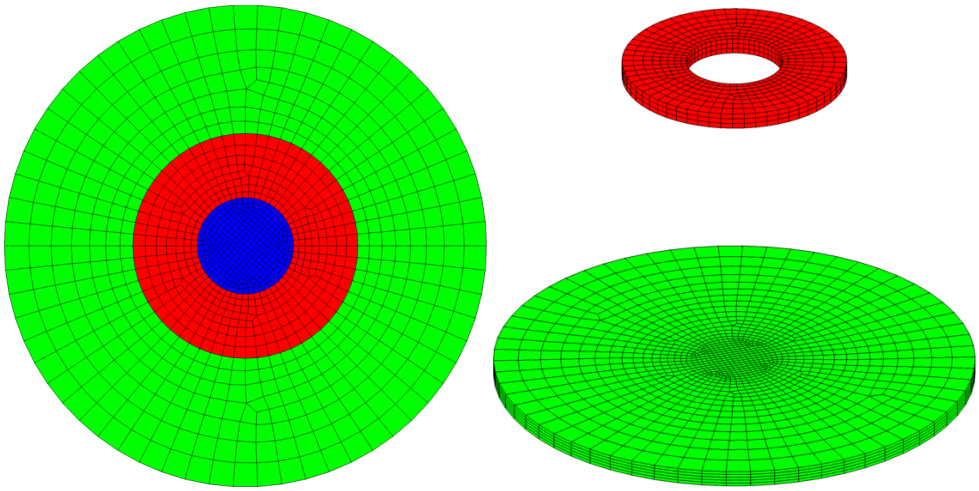
2.4.1 Maillage

Un maillage est une discrétisation spatiale du domaine d'étude. Les fonctions d'interpolation κ_i et les coefficients F_i sont associés aux entités géométriques du maillage. Ces derniers sont des nœuds, des arêtes, des facettes et des volumes que l'on note par N, A, F, V leur cardinalité dans le maillage. Chaque entité appartient à une région physique distincte ou à l'interface entre des régions.

Mailler la région du CFRP est assez délicat car elle contient des couches très minces. Pour rappel, l'épaisseur d'un pli composite est de l'ordre de $150\mu m$. Un matériau réel peut avoir une vingtaine de plis et peut se mesurer plusieurs mètres de largeur et de longueur. Pour répondre à nos besoins, nous avons développé un maillage par tranche. Ce dernier est basé sur le principe suivant :

- Créer un maillage 2D de la vue de dessus du domaine (FIGURE 2.3 (a)).
- Élever ce maillage pour remplir le domaine 3D (FIGURE 2.3 (b)).
- Connecter des entités de la géométrie dans les matrices de connexion appropriées.

Le domaine peut être décomposé par les éléments tétraédriques, prismatiques ou hexaédriques.



(a) Maillage 2D de base (b) Maillage 3D

FIGURE 2.3 – Création d'un maillage 3D à partir de celui en 2D.

2.4.2 Éléments de Whitney

Nous allons voir dans les paragraphes suivants que les fonctions d'interpolation et les coefficients associés sont spécifiques. On les appelle des éléments nodaux, d'arête, de facette et de volume.

Éléments nodaux : ces éléments sont construits pour interpoler une fonction scalaire, notée S. Pour chaque nœud n_i du maillage, on associe une fonction w_n^i définie telle que :

$$w_n^i(n_j) = \begin{cases} 1, j = i \\ 0, \forall j \neq i \end{cases} \tag{2.45}$$

Les coefficients associés sont les valeurs de la fonction S évaluées sur chaque nœud, noté $S_n^{i=\overline{1,N}}$. L'approximation de S est de la forme : $S = \sum_{i=1}^{N} w_n^i S_n^i$. Dans notre cas, on les utilise pour l'approximation des potentiels ϕ, Ω et de la température T.

Éléments d'arête : sont utilisés pour interpoler des fonctions vectorielles qui sont associées à la circulation, ie. à l'intégrale de contour. Une fonction vecteur $\mathbf{w}_a^i$ est associée à une arête a_i du maillage et satisfait :

$$\int_{a_j} \mathbf{w}_a^i d\boldsymbol{l} = \begin{cases} 1, j = i \\ 0, \forall j \neq i \end{cases} \tag{2.46}$$

Les coefficients sont les circulations de la fonction $\boldsymbol{C}$ le long des arêtes. On les note par $\boldsymbol{C}_a^{i=\overline{1,A}}$. $\boldsymbol{C}$ est donc approximée par $\boldsymbol{C} = \sum_{i=1}^{A} \mathbf{w}_a^i \boldsymbol{C}_a^i$. Ces éléments se prêtent pour interpoler les potentiels vecteurs $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{T}$.

Éléments de facette : Comme les éléments d'arête, les éléments de facette servent à approximer les fonctions vectorielles associées à un flux. A chaque facette f_i du maillage définit une fonction vecteur $\mathbf{w}_f^i$ telle que :

$$\int_{f_j} \mathbf{w}_f^i d\boldsymbol{S} = \begin{cases} 1, j = i \\ 0, \forall j \neq i \end{cases} \tag{2.47}$$

A chaque fonction ainsi déterminée, on associe un coefficient qui est égal au flux de la fonction $\boldsymbol{F}$ à travers sa facette, $\boldsymbol{F}_f^{i=\overline{1,F}}$. L'approximation de $\boldsymbol{F}$ prend alors la forme : $\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{F} \mathbf{w}_f^i \boldsymbol{F}_f^i$. Le champ associé à un flux dans les formulations présentées dans la partie précédente est les courants source $\boldsymbol{J}_s$.

Forme locale

Les formes locales des éléments de Whitney sont déterminées sur les éléments de référence construits dans le système de coordonnées locales. Nous allons présenter ici les éléments en premier ordre qui sont déjà complètement intégrés dans notre code de calcul. On note par M l'élément de référence qui peut être un tétraèdre, un prisme ou un hexaèdre et par N^M, A^M et F^M l'ensemble de ses nœuds, arêtes et facettes. Nous écrivons par la suite les formes locales génériques des éléments de Whitney [Dular *et al.*, 1995].
Éléments nodaux : $\forall n \in N^M$, $w_n = \lambda_n$, avec λ_n sont les fonctions d'interpolation linéaire de type Lagrange sur l'élément de référence [Dhattt et Touzot, 1981].
Éléments d'arête : $\forall a \in A^M$,

$$\boldsymbol{w}_a = \lambda_j \boldsymbol{grad} \sum_{\forall k \in N^F(j,\bar{i})} \lambda_k - \lambda_i \boldsymbol{grad} \sum_{\forall l \in N^F(i,\bar{j})} \lambda_l$$

où $a = \{i, j\}$, $N^F(i, \bar{j})$ tous les nœuds de la facette unique F qui contient i mais pas j.
Éléments de facette : $\forall f \in F^M$,

$$\boldsymbol{w}_f = (5 - dimN^f) \sum_{\forall l \in N^f} \lambda_l \left(\boldsymbol{grad} \sum_{\forall k \in N^F(l,\overline{l+1})} \lambda_k \right) \times \left(\boldsymbol{grad} \sum_{\forall k \in N^F(l,\overline{l-1})} \lambda_k \right)$$

où $f = \{i + n\}$, $n = \overline{0, dimN^f - 1}$, N^f l'ensemble des nœuds de la facette f, $l \pm 1$ le nœud juste après$^+$ ou avant$^-$ l dans la liste circulaire f, eg. $i + dimN^f = i$.

Nous présenterons par la suite l'utilisation des éléments de Whitney pour discrétiser des formulations électromagnétique et thermique permettant d'établir des systèmes d'équation matriciels.

2.4.3 Formulation $A - \phi$

a) Les termes à gauche

En utilisant les identités de Green (2.43) et (2.44), et remarquant que $(\boldsymbol{A}' \times \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{rotA} = \boldsymbol{A}' \cdot (\boldsymbol{rotA} \times \boldsymbol{n})$, l'application de la méthode de Galerkin aux termes à gauche des équations (2.18) et (2.19) nous amène aux intégrales suivantes [Meunier, 2008] :

$$\begin{cases} \int_D \boldsymbol{A}' \cdot \left(\boldsymbol{rot} \frac{1}{[\mu]} \boldsymbol{rotA} + j\omega[\sigma](\boldsymbol{A} + \boldsymbol{grad}\phi) \right) dD = \\ \int_D \frac{1}{[\mu]} \boldsymbol{rotA}' \boldsymbol{rotA} dD + \int_{\Gamma^h} \frac{1}{[\mu]} \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{rotA}) d\Gamma + \\ + \int_{\Gamma^b} \frac{1}{[\mu]} \boldsymbol{A}'(\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{rotA}) d\Gamma + j\omega \int_D \left([\sigma]\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} + [\sigma]\boldsymbol{A}'\boldsymbol{grad}\phi \right) dD \\ \int_{D_c} \phi' div\,(j\omega[\sigma](\boldsymbol{A} + \boldsymbol{grad}\phi))\, dD = \\ -j\omega \int_{D_c} [\sigma]\boldsymbol{grad}\phi' \boldsymbol{A} dD - j\omega \int_{D_c} [\sigma]\boldsymbol{grad}\phi' \boldsymbol{grad}\phi dD + \\ + j\omega \int_{\Gamma^c} [\sigma]\phi'((\boldsymbol{A} + \boldsymbol{grad}\phi) \cdot \boldsymbol{n}) d\Gamma \end{cases} \tag{2.48}$$

avec $\boldsymbol{A}'$ et ϕ' les fonctions test. Afin de prendre en compte les conditions aux limites (2.9) et (2.10), on élimine les termes intégrales sur Γ^h et Γ^b dans (2.48). La condition sur Γ^c du courant induit (2.11) est prise en compte en éliminant l'intégrale sur Γ^c dans (2.48). La continuité de la composant normale de $\boldsymbol{B}$ au passage de Γ^c (2.12) est automatiquement satisfaite si on exprime [Meunier, 2008] :

$$\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{A} \mathbf{w}_a^i \boldsymbol{A}_a^i \tag{2.49}$$

$$\phi = \sum_{i=1}^{N} w_n^i \phi_n^i \tag{2.50}$$

Choisissant $\boldsymbol{A}' = \mathbf{w}_a^j, j = \overline{1,A}$ et $\phi' = w_n^k, k = \overline{1,N}$, on obtient finalement la forme matricielle des termes à gauche de la formulation $\boldsymbol{A} - \phi$ [Henneron, 2004] :

$$\begin{cases} (\mathbf{R}^t \mathbf{M}_{ff}^{1/[\mu]} \mathbf{R} + j\omega \mathbf{M}_{aa}^{[\sigma]}) \boldsymbol{A}_a + j\omega \mathbf{M}_{aa}^{[\sigma]} \mathbf{G} \phi_n \\ j\omega \mathbf{G}^t \mathbf{M}_{aa}^{[\sigma]} \boldsymbol{A}_a + \mathbf{G}^t \mathbf{M}_{aa}^{[\sigma]} \mathbf{G} \phi_n \end{cases} \tag{2.51}$$

Les matrices d'incidence $\mathbf{R}$, $\mathbf{G}$ ainsi que les matrices de masse $\mathbf{M}_{ff}^{1/[\mu]}$ et $\mathbf{M}_{aa}^{[\sigma]}$ sont données dans ANNEXE A.

b) Les termes à droite - Source

La source dans le modèle est le courant d'excitation. La démarche générale de la méthode de Galerkin nous donne, pour le terme à droite de (2.18), $\int_D \boldsymbol{A}'\boldsymbol{J}^s dD$. Pourtant, si l'inducteur est bobiné et qu'on suppose connaître la distribution du courant dans chaque fil, il est mieux d'utiliser le champ source $\boldsymbol{H}^s$ défini dans (2.20), et remplacer $\int_D \boldsymbol{A}'\boldsymbol{J}^s dD$ par $\int_D \boldsymbol{rot}\boldsymbol{A}'\boldsymbol{H}^s dD$ dont la forme matricielle est $\mathbf{RM}_{aa}\boldsymbol{H}^s_a$ (voir l'ANNEXE A pour l'expression de $\mathbf{M}_{aa}$) [Ren, 1996]. Les circulations de $\boldsymbol{H}^s$ sur les arêtes du maillage, ie. $\boldsymbol{H}^s_a$, peuvent être facilement calculées par la méthode de Biot-Savart. Ainsi, on obtient le système matriciel final à résoudre dans le cas d'inducteur filaire :

$$\begin{cases} (\mathbf{R}^t\mathbf{M}_{ff}^{1/[\mu]}\mathbf{R} + j\omega\mathbf{M}_{aa}^{[\sigma]})\boldsymbol{A}_a + j\omega\mathbf{M}_{aa}^{[\sigma]}\mathbf{G}\phi_n = \mathbf{RM}_{aa}\boldsymbol{H}^s_a \\ j\omega\mathbf{G}^t\mathbf{M}_{aa}^{[\sigma]}\boldsymbol{A}_a + \mathbf{G}^t\mathbf{M}_{aa}^{[\sigma]}\mathbf{G}\phi_n = 0 \end{cases} \tag{2.52}$$

$$\tag{2.53}$$

Dans le cas d'un inducteur massique, la distribution des courants sources dans son corps n'est pas connu à priori. Les difficultés des méthodes analytiques ne sont pas seulement dans la description mathématique de l'effet de peau dans une géométrie complexe de l'inducteur mais aussi de la réaction d'induit.

Dans le but d'améliorer le caractère prédictif de notre code de calcul, nous allons étudier l'influence de la prise en compte de la circulation des courants dans un inducteur massif. Afin de prendre en compte ces phénomènes dans le modèle numérique, nous utilisons une formulation dite globale. De plus, cette formulation n'est pas implantée dans le code de calcul du laboratoire.

Dans cette formulation, il nous faut disposer soit de l'intensité du courant source, noté par I, soit de la tension V entre les deux extrémités de l'inducteur. En pratique, l'une de ces deux grandeurs correspond à la consigne du générateur imposée par l'utilisateur. Cela permet d'intégrer dans le code de calcul un paramètre opératoire comme un paramètre d'entrée.

Cas de V imposée : Considérons que sur les surfaces Γ^s_1, Γ^s_2 ($\Gamma^s = \Gamma^s_1 \cup \Gamma^s_2$) des deux extrémités de l'inducteur, le potentiel scalaire électrique est constant dans tout point, on note par ϕ^1 et ϕ^2 leur valeurs respectivement. De plus, car il s'agit des potentiels, on peut tout à fait fixer $\phi^2 = 0$. Cela nous permet d'exprimer V comme la différence de potentiel, ie. $V = j\omega(\phi^1 - \phi^2) = j\omega\phi^1$. Réarrangeons (2.50), on a [Dular *et al.*, 1998] :

$$\phi \quad = \quad \sum_{i=1}^{N(\overline{\Gamma^s})} w^i_n \phi^i_n + \phi^1 \sum_{i=1}^{N(\Gamma^s_1)} w^i_n = \sum_{i=1}^{N(\overline{\Gamma^s})} w^i_n \phi^i_n + \frac{V}{j\omega}\alpha \tag{2.54}$$

où $\alpha = \sum_{i=1}^{N(\Gamma^s_1)} w^i_n$. Prenant la même démarche comme précédemment décrite, nous pouvons maintenant en déduire la forme matricielle de (2.18) et (2.19) [Henneron, 2004] :

$$\begin{cases} (\mathbf{R}^t\mathbf{M}_{ff}^{1/[\mu]}\mathbf{R} + j\omega\mathbf{M}_{aa}^{[\sigma]})\boldsymbol{A}_a + j\omega\mathbf{M}_{aa}^{[\sigma]}\mathbf{G}\phi_n = -\mathbf{M}_{aa}^{[\sigma]}\mathbf{G}\dfrac{V}{j\omega}\alpha_n \\ j\omega\mathbf{G}^t\mathbf{M}_{aa}^{[\sigma]}\boldsymbol{A}_a + \mathbf{G}^t\mathbf{M}_{aa}^{[\sigma]}\mathbf{G}\phi_n = -\mathbf{G}^t\mathbf{M}_{aa}^{[\sigma]}\mathbf{G}\dfrac{V}{j\omega}\alpha_n \end{cases} \tag{2.55}$$

où $\alpha^i_n = 1$ seulement si $n_i \in \Gamma^s_1$, alors que $\phi^i_n = 0$, $\forall n_i \in \Gamma^s$. Dans ces équations, le potentiel vecteur $\boldsymbol{A}$ est défini dans tout le domaine d'étude tandis que ϕ est défini dans les domaines de l'inducteur et de la charge.
L'intensité de courant, quant à elle, est le flux de $\boldsymbol{J}_s$ traversant Γ^s_1, on peut la calculer numériquement par :

$$I = j\omega\left(\mathbf{M}_{aa}^{[\sigma]}\left(\boldsymbol{A}_a + \mathbf{G}(\phi_n + \frac{V}{j\omega}\alpha_n)\right)\right)^t \mathbf{G}\alpha_n \tag{2.56}$$

Cas de I imposé : la tension V devient une inconnue, l'équation (2.56) devient une contrainte à rajouter dans le système (2.55), on a donc à résoudre [Henneron, 2004] :

$$\begin{cases} (\mathbf{R}^t\mathbf{M}_{ff}^{1/[\mu]}\mathbf{R} + j\omega\mathbf{M}_{aa}^{[\sigma]})\boldsymbol{A}_a + j\omega\mathbf{M}_{aa}^{[\sigma]}\mathbf{G}\phi_n + \mathbf{M}_{aa}^{[\sigma]}\mathbf{G}\dfrac{V}{j\omega}\alpha_n = 0 \\ j\omega\mathbf{G}^t\mathbf{M}_{aa}^{[\sigma]}\boldsymbol{A}_a + \mathbf{G}^t\mathbf{M}_{aa}^{[\sigma]}\mathbf{G}\phi_n + \mathbf{G}^t\mathbf{M}_{aa}^{[\sigma]}\mathbf{G}\dfrac{V}{j\omega}\alpha_n = 0 \\ j\omega\alpha^t\mathbf{G}^t\mathbf{M}_{aa}^{[\sigma]}\boldsymbol{A}_a + j\omega\alpha^t\mathbf{G}^t\mathbf{M}_{aa}^{[\sigma]}\mathbf{G}\phi_n + j\omega^t\mathbf{G}^t\mathbf{M}_{aa}^{[\sigma]}\mathbf{G}\dfrac{V}{j\omega}\alpha_n = I \end{cases} \tag{2.57}$$

Jauge

Le système matriciel obtenu est résolu par une méthode itérative. Même si les potentiels ne convergent pas vers une solution unique, les champs convergent. On dit que le système ainsi résolu est auto-jaugé [Ren, 1996] [Kettunen *et al.*, 1999].

2.4.4 Formulation $\boldsymbol{T}-\Omega$

Les termes à gauche de la formulation $\boldsymbol{T}-\Omega$ (équations 2.25 et 2.26) sont similaires à ceux de la formulation $\boldsymbol{A}-\phi$. De même, avec les fonctions test $\boldsymbol{T}'$ et Ω', on a :

$$\begin{cases} \int_{D_c} \boldsymbol{T}' \cdot \left(\boldsymbol{rot}\frac{1}{[\sigma]}\boldsymbol{rot}\boldsymbol{T} + j\omega[\mu](\boldsymbol{T} - \boldsymbol{grad}\Omega)\right) dD = \\ \int_{D_c} \frac{1}{[\sigma]}\boldsymbol{rot}\boldsymbol{T}'\boldsymbol{rot}\boldsymbol{T} dD + \int_{\Gamma^c} \frac{1}{[\sigma]}\boldsymbol{T}'(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{rot}\boldsymbol{T}) d\Gamma + \\ +j\omega\int_{D_c}\left([\mu]\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T} - [\mu]\boldsymbol{T}'\boldsymbol{grad}\Omega\right) dD \\ \int_D \Omega' div\,(j\omega[\mu](\boldsymbol{T} - \boldsymbol{grad}\Omega))\, dD = \\ -j\omega\int_D [\mu]\boldsymbol{grad}\Omega'\boldsymbol{T} dD + j\omega\int_D [\mu]\boldsymbol{grad}\Omega'\boldsymbol{grad}\Omega dD + \\ +j\omega\int_{\Gamma^h}[\mu]\Omega'((\boldsymbol{T} - \boldsymbol{grad}\Omega)\cdot\boldsymbol{n}) d\Gamma + j\omega\int_{\Gamma^b}[\mu]\Omega'((\boldsymbol{T} - \boldsymbol{grad}\Omega)\cdot\boldsymbol{n}) d\Gamma \end{cases} \tag{2.58}$$

Tout comme la formulation $\boldsymbol{A}-\phi$, la condition (2.11) est assurée par annulation de l'intégrale sur Γ^c dans (2.58) et les conditions aux limites (2.9) et (2.10) sont respectivement prises en compte en éliminant les intégrales sur les surfaces Γ^h et Γ^b dans (2.58). La continuité de la composante tangentielle de $\boldsymbol{H}$ au passage de Γ^c (2.13) est automatiquement satisfaite si on utilise les éléments d'arête pour interpoler le potentiel $\boldsymbol{T}$ [Meunier, 2008]. Dans ce cas, on a :

$$\boldsymbol{T} = \sum_{i=1}^{A} \mathbf{w}_a^i \boldsymbol{T}_a^i \tag{2.59}$$

$$\Omega = \sum_{i=1}^{N} w_n^i \Omega_n^i \tag{2.60}$$

Avec les fonctions test choisies, ie. $\boldsymbol{T}' = \mathbf{w}_a^j, j = \overline{1,A}$ et $\Omega' = w_n^k, k = \overline{1,N}$, la forme matricielle des termes à gauche de la formulation $\boldsymbol{T}-\Omega$ s'écrit [Henneron, 2004] :

$$\begin{cases} (\mathbf{R}^t\mathbf{M}_{ff}^{1/[\sigma]}\mathbf{R} - j\omega\mathbf{M}_{aa}^{[\mu]})\boldsymbol{T}_a + j\omega\mathbf{M}_{aa}^{[\mu]}\mathbf{G}\Omega_n \\ \mathbf{G}^t\mathbf{M}_{aa}^{[\mu]}\boldsymbol{T}_a - \mathbf{G}^t\mathbf{M}_{aa}^{[\mu]}\mathbf{G}\Omega_n \end{cases} \tag{2.61}$$

Nous donnons l'expression des matrices $\mathbf{M}_{ff}^{1/[\sigma]}$, $\mathbf{M}_{aa}^{[\mu]}$ dans l'ANNEXE A.

Les termes à droite : On a vu que dans le cas d'inducteur bobiné, on peut aisément calculer les circulations de $\boldsymbol{H}^s$ sur les arêtes du maillage ($\boldsymbol{H}_a^s$) par la formule de Biot-Savart. Le champ $\boldsymbol{H}^s$ peut alors être écrit : $\boldsymbol{H}^s = \sum_{i=1}^{A} \mathbf{w}_a^i \boldsymbol{H}_a^{s,i}$. Avec $\boldsymbol{T}'$ et Ω' précédemment choisies, le terme à gauche de (2.25),

après l'application de la méthode de Galerkin, devient : $(\mathbf{R}^t\mathbf{M}_{ff}^{1/[\sigma]}\mathbf{R}+j\omega\mathbf{M}_{aa}^{[\mu]})\boldsymbol{H}_a^s$. Le terme à gauche de (2.26) devient : $\mathbf{G}^t\mathbf{M}_{aa}^{[\mu]}\boldsymbol{H}_a^s$. On obtient finalement le système matriciel issu de la formulation $\boldsymbol{T}-\Omega$:

$$\begin{cases}(\mathbf{R}^t\mathbf{M}_{ff}^{1/[\sigma]}\mathbf{R}-j\omega\mathbf{M}_{aa}^{[\mu]})\boldsymbol{T}_a+j\omega\mathbf{M}_{aa}^{[\mu]}\mathbf{G}\Omega_n=(\mathbf{R}^t\mathbf{M}_{ff}^{1/[\sigma]}\mathbf{R}+j\omega\mathbf{M}_{aa}^{[\mu]})\boldsymbol{H}_a^s\\ \mathbf{G}^t\mathbf{M}_{aa}^{[\mu]}\boldsymbol{T}_a-\mathbf{G}^t\mathbf{M}_{aa}^{[\mu]}\mathbf{G}\Omega_n=-\mathbf{G}^t\mathbf{M}_{aa}^{[\mu]}\boldsymbol{H}_a^s\end{cases} \tag{2.62}$$

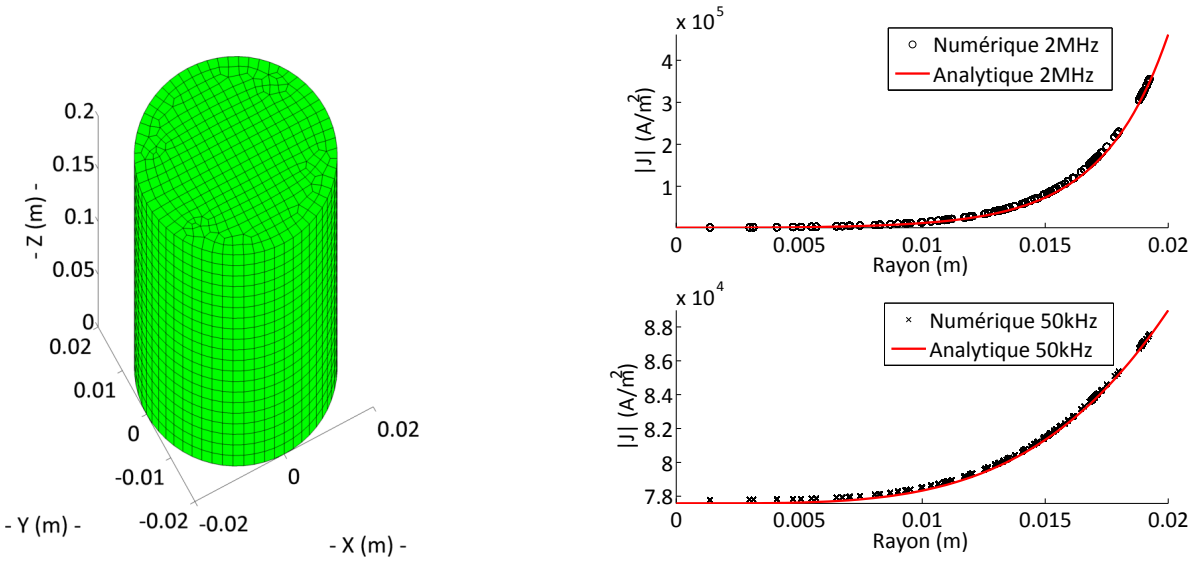
Le système est résolu par une méthode itérative. La condition de jauge est prise en compte implicitement.

Remarque : Les CFRP sont considérés comme des matériaux non magnétiques. Le tenseur de la perméabilité du matériau se réduit à un scalaire dont la valeur est celle du vide. En outre, généralement, les circuits magnétiques ne sont pas nécessaires dans les configurations de la technique thermo-inductive. Pour ces raisons, le modèle non-linéaire magnétique n'est pas développé.

Un exemple

La formulation à grandeur globale imposée est une nouvelle fonctionnalité qui est intégrée dans le logiciel de calcul du laboratoire. Nous décidons de valider cet outil sur un cas simple. L'ensemble du code sera validé par la suite.

Dans cet exemple, nous considérons le cas d'un cylindre conducteur non magnétique parcouru par un courant alternatif d'amplitude de $100A$. Nous imposons l'intensité de courant à travers la section du cylindre et utilisons la formulation $\boldsymbol{A}-\phi$ à I imposé (2.57). Nous calculons la distribution de la densité du courant électrique suivant le rayon du cylindre et comparons ensuite à la solution analytique donnée par [Ramo *et al.*, 1994].



(a) Maillage (b) Module de $\boldsymbol{J}$

FIGURE 2.4 – Cas d'un cylindre conducteur. Le cylindre de rayon $2cm$ ayant une longueur de $20cm$. Sa conductivité isotrope est de $2\times10^4 S/m$.

Les résultats présentés dans la FIGURE 2.4 montrent une très bonne concordance entre les solutions numérique et analytique.

2.4.5 Formulation thermique

Le problème thermique est résolu dans le domaine du composite (D_c) avec l'application des conditions aux limites sur la frontière Γ^c de D_c. En régime transitoire, la dérivée temporelle de la température $\partial T/\partial t$ peut être approximée pour chaque pas de temps i par $(T_{i+1}-T_i)/\Delta t$, avec Δt suffisamment petit. L'équation (2.35) se réécrit :

$$\rho C_p \frac{T_{i+1}}{\Delta t} - div\left([\lambda]\boldsymbol{grad}T_{i+1}\right) = P + \rho C_p \frac{T_i}{\Delta t} \tag{2.63}$$

Choisissant w_n^k, $k=\overline{1,N}$ comme les fonctions test, nous devrons satisfaire :

$$\begin{aligned}\int_{D_c} w_n^k \rho C_p \frac{T_{i+1}}{\Delta t} - \int_{D_c} w_n^k div\left([\lambda]\boldsymbol{grad}T_{i+1}\right) = \\ \int_{D_c} w_n^k P + \int_{D_c} w_n^k \rho C_p \frac{T_i}{\Delta t}, \quad \forall k=\overline{1,N}\end{aligned} \tag{2.64}$$

Utilisant (2.43) et la condition à la limite (2.38), on peut écrire :

$$\begin{aligned}-\int_{D_c} w_n^k div\left([\lambda]\boldsymbol{grad}T_{i+1}\right) &= \int_{D_c} \boldsymbol{grad}T_{i+1}[\lambda]\boldsymbol{grad}w_n^k - \int_{\Gamma^c} w_n^k[\lambda]\frac{\partial T_{i+1}}{\partial \boldsymbol{n}} \\ &= \int_{D_c} \boldsymbol{grad}T_{i+1}[\lambda]\boldsymbol{grad}w_n^k + \int_{\Gamma^c} w_n^k h\left(T_{i+1}-T_\infty\right)\end{aligned}$$

Si on considère que la température initiale dans tous les points du composite est égale à celle ambiante moyenne, ie. $T_{i=0}=T_\infty$, l'équation (2.64) devient maintenant :

$$\begin{aligned}\int_{D_c} w_n^k \rho C_p \frac{\Delta T_{i+1}}{\Delta t} + \int_{D_c} \boldsymbol{grad}\Delta T_{i+1}[\lambda]\boldsymbol{grad}w_n^k + \int_{\Gamma^c} w_n^k h \Delta T_{i+1} = \\ \int_{D_c} w_n^k P + \int_{D_c} w_n^k \rho C_p \frac{\Delta T_i}{\Delta t}, \quad \forall k=\overline{1,N}\end{aligned} \tag{2.65}$$

avec ΔT_i l'accroissement de la température en pas de temps i par rapport à la température initiale. Remplaçant ΔT par son approximation $\Delta T = \sum_{j=1}^{N} w_n^j \Delta T_n^j$, on obtient la forme matricielle de (2.65) :

$$\left(\mathbf{M}_{nn}^{[\rho C]} + \boldsymbol{G}^t \mathbf{M}_{aa}^{[\lambda]} \boldsymbol{G} + \mathbf{M}_{nn}^{[h]}\right)\Delta T_{n,i+1} = \mathbf{M}_n^{[P]} + \mathbf{M}_{nn}^{[\rho C]}\Delta T_{n,i} \tag{2.66}$$

L'expression des matrices $\mathbf{M}_{nn}^{[\rho C]}$, $\mathbf{M}_{aa}^{[\lambda]}$, $\mathbf{M}_{nn}^{[h]}$ et $\mathbf{M}_n^{[P]}$ est donnée dans l'ANNEXE A.

Remarque : La conductivité électrique et les propriétés thermiques des CFRP dépendent de la température. Le problème thermique est donc non linéaire. Il peut être résolu par une méthode itérative. Dans notre cas où la plage de variation de la température est faible ($\Delta T < 50°C$), des valeurs moyennes des propriétés électromagnétique et thermique déterminés dans cet intervalle de température peuvent être utilisées dans un modèle linéaire afin de réduire le temps de calcul.

2.5 Modèle analytique

Le modèle analytique consiste à résoudre la formulation **Γ-Π** dans un milieu conducteur uni-axial anisotrope établi par Burke [Burke, 1990]. Les travaux de Burke s'adressent particulièrement au calcul de la variation d'impédance de la bobine d'excitation de forme circulaire pour l'application au CND par courants de Foucault. Pourtant, en suivant son approche, la distribution des champs électromagnétiques et les courants induits dans tout point du matériau peut être déterminée et cela pour des formes arbitraires d'inducteur. Cette dernière est nécessaire pour une validation des modèles numériques. Dans cette partie, nous donnons plus de détails sur ce calcul.

2.5.1 Méthode de résolution

Afin de résoudre les ÉQUATIONS (2.29), (2.30), (2.31), (2.32) précédemment mentionnées, Burke a cherché la solution pour les transformés de Fourier des potentiels hertziens en forme de doubles intégrales. Ces potentiels sont ensuite obtenus par la transformation inverse. A titre d'exemple, le potentiel électrique Π_2 peut être représenté par son transformé $\widehat{\Pi}_2$ par l'intégrale :

$$\Pi_2(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} dv\, e^{jux+jvy}\, \widehat{\Pi}_2(u,v,z) \tag{2.67}$$

où $\widehat{\Pi}_2(u,v,z)$ est une fonction de u, v et z (u, v sont les coordonnées dans le domaine de Fourier). Les potentiels dans les différentes régions peuvent être également écrits en cette forme.

a) Solution de $\widehat{\Pi}_2$

Afin de trouver $\widehat{\Pi}_2$, on remplace (2.67) à (2.32). Après quelques développements, on obtient enfin l'équation suivante pour $\widehat{\Pi}_2$:

$$\frac{\partial^2 \widehat{\Pi}_2}{\partial z^2} = \gamma^2\, \widehat{\Pi}_2 \tag{2.68}$$

avec $\gamma = \sqrt{u^2\sigma_x/\sigma_y + v^2 + j\omega\mu_0\sigma_x}$. L'ÉQUATION 2.68 a la solution analytique dans la région 2 ($-h < z < 0$) :

$$\widehat{\Pi}_2 = C_2^+(u,v)\, e^{\gamma z} + C_2^-(u,v)\, e^{-\gamma z} \tag{2.69}$$

où les fonctions $C_2^+(u,v)$ et $C_2^-(u,v)$ sont à déterminer en appliquant les conditions aux limites et la partie réelle de γ est déterminée positive.

b) Solution de $\widehat{\Gamma}_2$

De même manière, la solution de $\widehat{\Gamma}_2$ peut être facilement obtenue par remplacement de la forme (2.67) écrite pour Γ_2 à l'ÉQUATION 2.31. On peut remarquer aussi que si $\sigma_x = \sigma_y$, alors l'ÉQUATION 2.32 devient l'ÉQUATION 2.31. En conséquence, la solution pour $\widehat{\Gamma}_2$ peut être obtenue par l'ÉQUATION 2.69 en y remplaçant $\sigma_x = \sigma_y$. Finalement, on a :

$$\widehat{\Gamma}_2 = D_2^+(u,v)\, e^{\beta z} + D_2^-(u,v)\, e^{-\beta z} \tag{2.70}$$

avec $\beta = \sqrt{u^2 + v^2 + j\omega\mu_0\sigma_y}$, sa partie réelle est déterminée positive. Les fonctions $D_2^+(u,v)$ et $D_2^-(u,v)$ seront déterminées par les conditions aux limites.

c) Solutions de $\widehat{\Pi}_1$, $\widehat{\Pi}_3$, $\widehat{\Gamma}_1$, $\widehat{\Gamma}_3$

Dans les domaines d'air, les potentiels Hertziens obéissent à l'équation de Laplace (2.29), (2.30) et peuvent être obtenus en posant $\sigma_x = 0$ et $\sigma_y = 0$ dans les solutions (2.69), (2.70). En effet, (2.31), (2.32) deviennent, dans ce cas, (2.29), (2.30). Il en résulte :

$$\widehat{\Pi}_1 = C_1(u,v)\, e^{-\alpha z} + \widehat{\Pi}^s(u,v,z=0)\, e^{\alpha z} \tag{2.71}$$
$$\widehat{\Pi}_3 = C_3(u,v)\, e^{\alpha z} \tag{2.72}$$
$$\widehat{\Gamma}_1 = D_1(u,v)\, e^{-\alpha z} + \widehat{\Gamma}^s(u,v,z=0)\, e^{\alpha z} \tag{2.73}$$
$$\widehat{\Gamma}_3 = D_3(u,v)\, e^{\alpha z} \tag{2.74}$$

avec $\alpha = \sqrt{u^2+v^2}$, $\widehat{\Pi}^s(u,v,z=0)$ et $\widehat{\Gamma}^s(u,v,z=0)$ sont les transformés des potentiels Hertziens créés par la source d'excitation sur le plan $z = 0$ dans le cas en absence de la plaque. Les fonctions $C_1(u,v)$,

$C_3(u,v)$, $D_1(u,v)$ et $D_3(u,v)$ peuvent être déterminées par les conditions aux limites appliquées à toutes les frontières du domaine. Ces conditions aux limites sont détaillées dans l'ANNEXE B. Dans le tableau ci-après, nous réécrivons les résultats donnés par Burke.

TABLEAU 2.1 – Les fonctions de coefficient

$$\begin{aligned}
P &= \alpha\gamma(k_y^2+u^2) \\
Q_\pm &= k_y^2 v^2 \pm \beta\gamma u^2 \\
\Delta &= (P^2+Q_+^2)\{cosh[(\beta+\gamma)h]-1\}-(P^2+Q_-^2)\{cosh[(\beta-\gamma)h]-1\} \\
&\quad +2PQ_-sinh[(\beta-\gamma)h]+2PQ_+sinh[(\beta+\gamma)h] \\
D_2^\pm &= \mp 2ju\alpha^2\gamma\,\{(P\pm\beta\gamma u^2)\,e^{\pm\beta h}sinh(\gamma h)+k_y^2v^2(e^{\pm\beta h}cosh(\gamma h)-1)\} \\
&\quad \times\widehat{\Gamma}^s/\Delta \\
C_2^\pm &= 2jv\alpha^2\,\{\beta\gamma u^2(e^{\pm\gamma h}cosh(\beta h)-1)+(P\pm k_y^2v^2)e^{\pm\gamma h}sinh(\beta h)\} \\
&\quad \times\widehat{\Gamma}^s/\Delta
\end{aligned}$$

2.5.2 Détermination du champ source

A présent, pour calculer les champs induits dans **le domaine conducteur** $(\boldsymbol{B},\boldsymbol{H},\boldsymbol{E},\boldsymbol{J})$ il nous reste à déterminer le transformé du potentiel vecteur magnétique de Hertz $(\widehat{\Gamma}^s)$ déterminé sur le plan $z=0$ (la surface supérieure de la plaque) créé par un inducteur seul dans l'air en absence de la plaque. Soit $\widehat{B}_z^s(u,v)$ le transformé de la composant normale de l'induction magnétique source $\boldsymbol{B}^s$ (B_z^s), $\widehat{\Gamma}^s$ peut être déterminé par :

$$\widehat{\Gamma}^s(u,v,z=0)=\frac{\widehat{B}_z^s(u,v,z=0)}{\alpha^2} \tag{2.75}$$

avec $\alpha=\sqrt{u^2+v^2}$.
Pour un inducteur de forme arbitraire, $\widehat{B}_z^s(u,v)$ peut être obtenue par la transformation directe :

$$\widehat{B}_z^s(u,v,z=0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}dy\,e^{-jux-jvy}B_z^s(x,y,z=0) \tag{2.76}$$

Un point attrayant de l'approche de Burke est que la composante normale de l'induction magnétique à la surface du matériau est calculée dans le cas d'inducteur seul dans l'air. Pour un inducteur de type filaire, ce calcul peut être effectué à l'aide de la formule de Biot-Savart. Pour un inducteur massif, $B_z^s(x,y,z=0)$ peut être obtenue par l'outil numérique.

2.5.3 Détermination des courants induits

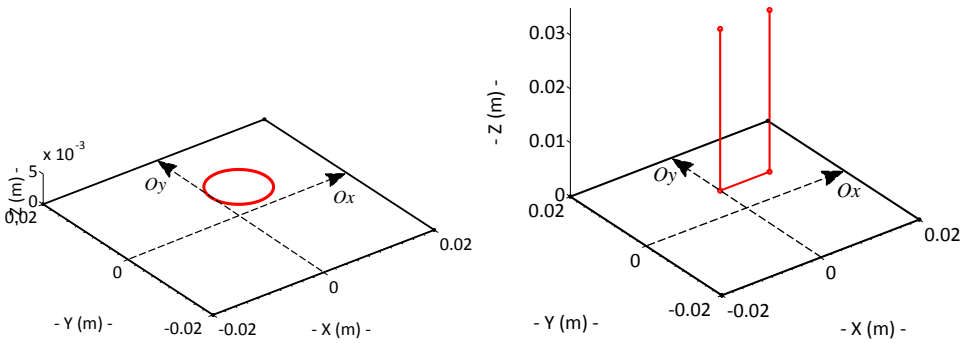
Après avoir obtenu les transformés des potentiels de Hertz, les courants ainsi que les champs électriques induits dans le matériau peuvent être déterminés par :

$$\begin{cases}
\widehat{J}_x^i=\sigma_x\widehat{E}_x^i=-jw\sigma_x\left(k_x^2\widehat{\Pi}_2+u^2\widehat{\Pi}_2\right) \\
\widehat{J}_y^i=\sigma_y\widehat{E}_y^i=-jw\sigma_y\left(\beta D_2^+e^{+\beta z}-\beta D_2^-e^{-\beta z}+uv\widehat{\Pi}_2\right) \\
\widehat{J}_z^i=\sigma_z\widehat{E}_z^i=-jw\sigma_z\left(jv\widehat{\Pi}_2+ju\left(\gamma C_2^+e^{+\gamma z}-\gamma C_2^-e^{-\gamma z}\right)\right)
\end{cases} \tag{2.77}$$

La distribution des courants de Foucault et du champ électrique induit se détermine ensuite par la transformation inverse de forme (2.67).

Un exemple

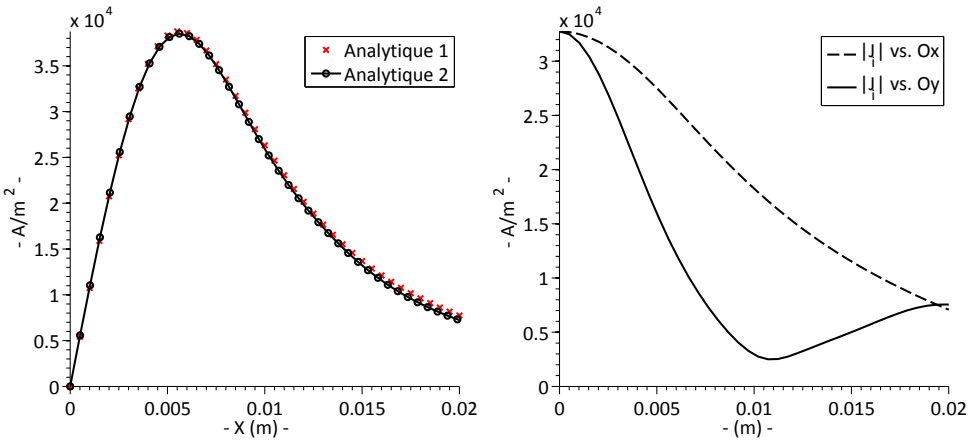
Dans cet exemple, nous calculerons la densité des courants induits dans la plaque pour les cas d'un inducteur circulaire et de forme U. Premièrement, un matériau isotrope est considéré en prenant ($\sigma_x = \sigma_y$) dans le modèle analytique. Nous comparerons la variation du module de $\boldsymbol{J}^i$ obtenu par le modèle analytique développé dans le cas de l'inducteur circulaire avec une autre solution donnée par Dodd et Deeds [Dodd et Deeds, 1968]. Cette comparaison est montrée sur la FIGURE 2.6 (a). Ensuite, les résultats pour une plaque anisotrope seront présentés. La FIGURE 2.5 montre les configurations des cas tests. Dans les deux cas, l'épaisseur de la plaque est égale à $136\mu m$, l'entrefer entre l'inducteur et la plaque est de $5mm$, les inducteurs ont une seule spire parcourue par un courant d'intensité de $1A$ de fréquence de $2MHz$. L'inducteur circulaire a un rayon de $5mm$. La face de l'inducteur U (la partie parallèle à la plaque) a une longueur de $10mm$. Les deux bras de l'inducteur U ont une longueur de $30mm$.



(a) Inducteur circulaire (b) Inducteur U

FIGURE 2.5 – Deux exemples de calcul

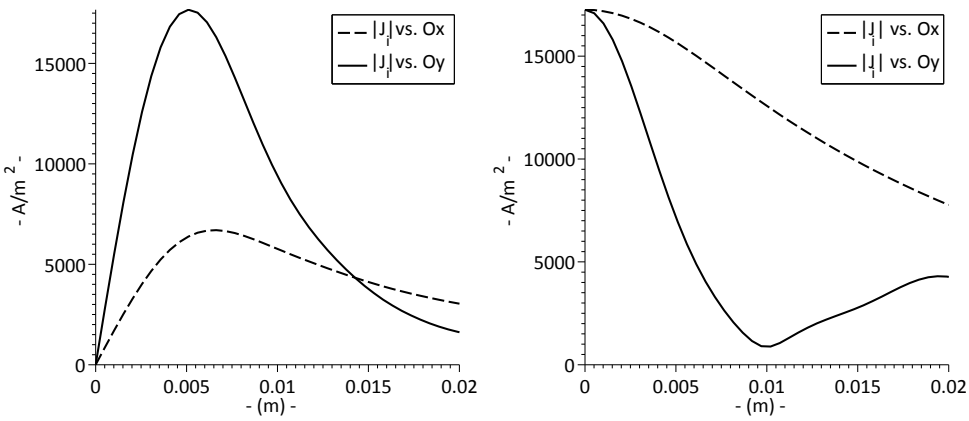
Cas d'un matériau isotrope : Dans ce cas, la conductivité électrique du matériau est de $4\times10^4(S/m)$.



(a) Inducteur circulaire (b) Inducteur U

FIGURE 2.6 – Variation du module de $\boldsymbol{J}$ à la surface de la plaque, suivant Ox et Oy. "*Analytique 1*" est la solution donnée par Dodd et Deeds [Dodd et Deeds, 1968]. "*Analytique 2*" est obtenu avec notre modèle dans le cas isotrope.

Cas d'un matériau anisotrope : La conductivité suivant l'axe Ox du matériau est égale à $4\times10^4(S/m)$. Pour les deux autres, elles sont égales à $4\times10^3(S/m)$. Ces résultats sont obtenus avec notre modèle analytique développé.



(a) Inducteur circulaire (b) Inducteur U

FIGURE 2.7 – Variation du module de $\boldsymbol{J}$ à la surface de la plaque, suivant Ox et Oy.

2.6 Conclusion

L'approche analytique est très intéressante dans notre cas. L'anisotropie uni-axiale de la conductivité électrique est exactement la propriété d'un pli composite dans notre modèle. Malgré l'hypothèse d'une plaque conductrice de dimension infinie, elle accepte l'épaisseur finie du conducteur et donne la solution exacte du problème de courants de Foucault. Cependant, l'application aux matériaux composites stratifiés nécessite le développement d'un modèle multiplis prenant en compte l'inducteur de forme arbitraire. Nous avons tenu compte d'un inducteur de forme arbitraire dans le modèle analytique et nous réservons l'extension aux modèles multicouhes à de futures recherches. Pour l'instant, le modèle analytique est utilisé pour valider les modèles numériques.

La formulation $\boldsymbol{T}-\Omega$ se trouve économe par rapport à la formulation $\boldsymbol{A}-\phi$. En effet, dans la formulation $\boldsymbol{T}-\Omega$, le champ vecteur $\boldsymbol{T}$ est discrétisé sur les arêtes des éléments seulement dans le domaine conducteur alors que la formulation $\boldsymbol{A}-\phi$ prend le potentiel vecteur magnétique comme inconnu dans tout le domaine d'étude. Cependant, l'utilisation de la formulation $\boldsymbol{T}-\Omega$ dans le cas des domaines non simplement connexes, par exemple le domaine comprenant des défauts, est assez délicate. A ce point, la formulation $\boldsymbol{A}-\phi$ s'avère simple et robuste. Elle permet de modéliser les défauts sans un traitement particulier. Les formulations à grandeur globale imposée peuvent être assez aisément mises en œuvre. Dans la suite de ce document, la formulation $\boldsymbol{A}-\phi$ sera exclusivement utilisée.

Chapitre 3

Validation du modèle numérique

La modélisation numérique des composites par les éléments finis implique l'utilisation d'éléments fortement déformés pour satisfaire les contraintes de capacité mémoire et de temps de calcul. Il a été montré que l'utilisation des éléments trop plats dans la méthode des éléments finis peut influencer fortement la convergence et la qualité de la solution numérique. De plus, la forte anisotropie peut également dégrader la convergence et la qualité des résultats. Il est donc nécessaire d'avoir un modèle économe fruit d'un compromis entre la précision et le temps de calcul face aux particularités liées à la modélisation des matériaux composites.

Notre modèle multiphysique couple un modèle électromagnétique à un modèle thermique. Il est intéressant, voire nécessaire, de valider séparément les deux modèles car le nombre de paramètres du problème réel est important.

Le première partie de ce chapitre a donc pour objectif de valider le modèle électromagnétique par les comparaisons avec une solution analytique. La deuxième partie est consacrée à la validation expérimentale du modèle couplé par des mesures effectuées sur un matériau composite réel.

3.1 Comparaison avec le modèle analytique

3.1.1 Objectif

L'objectif de cette partie est de comparer la performance des deux types d'élément utilisés pour la discrétisation spatiale 3D du domaine d'étude. Il s'agit des éléments tétraédriques et hexaédriques. Dans le cas des régions minces anisotropes, nous souhaitons obtenir un choix optimal du point de vue de la qualité de la solution numérique et du temps de calcul. Nous testerons leur stabilité devant la déformation du maillage. Le résultat de cette comparaison nous permettra également de valider le modèle électromagnétique.

Remarque : Nous ne cherchons pas un maillage adaptatif pour les éléments tétraédriques et hexaédriques. La procédure d'adaptation du maillage nécessite un estimateur d'erreur local [Tang *et al.*, 2013] qui n'est pas encore intégré dans notre logiciel. Dans notre cas, nous cherchons une solution stable selon l'épaisseur des éléments et réduite en temps de calcul. Cette solution est importante pour les études paramétriques. La stabilité nous permet de modéliser les défauts très minces à l'échelle mésoscopique sans un traitement particulier sur le maillage.

3.1.2 Description des simulations

La configuration des cas test est donnée dans la FIGURE 3.1. Dans cette étude, nous utilisons un inducteur circulaire bobiné. Le terme source peut donc être calculé par Biot-Savart. Les modèles numériques utilisés sont (2.52).

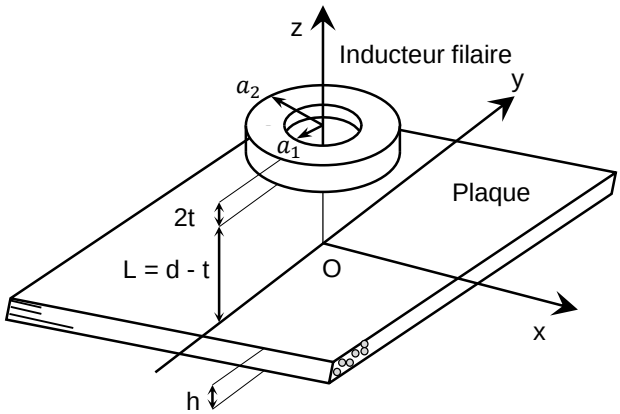
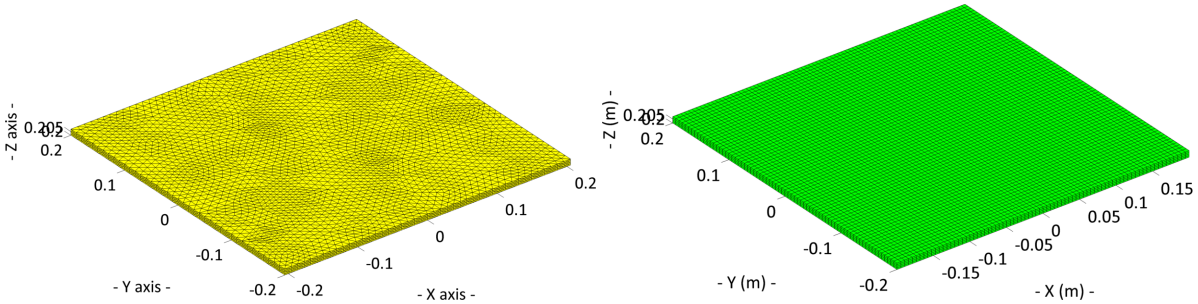


FIGURE 3.1 – Géométrie de la plaque et de la bobine dans l'étude. L = 5mm, 2t = 10mm, a1 = 20mm, a2 = 40mm. h est varié. La plaque est suffisamment grande (400mm × 400mm) pour qu'on puisse négliger l'effet de bord. La fréquence de la source est égale à 10kHz.

Les maillages 3D tétraédrique, hexaédrique sont obtenus par le mailleur tranche dont le maillage 2D initial est respectivement triangulaire et quadratique. Ces derniers sont identiques dans toutes les simulations. L'information sur les maillages est donnée dans le TABLEAU 3.1. Nous choisissons les nombres d'inconnues comparables dans tout le domaine d'étude et dans la région de la plaque entre les maillages tétraédriques et hexaédriques. Ce critère est choisi au regard de la capacité des ressources informatiques.



(a) Maillage tétraédrique (b) Maillage hexaédrique

FIGURE 3.2 – Maillage tétraédrique et hexaédrique dans la région conductrice

	TET	HEX
Nb. total d'éléments	286 848	106 704
Nb. d'éléments dans la plaque	63 744	22 464
Nb. total d'inconnues	344 863	343 284
Nb. d'inconnues dans la plaque	97 137	97 431

TABLEAU 3.1 – Information des maillages

Les simulations sont effectuées avec des plaques de différentes épaisseurs. Nous utilisons 4 couches identiques pour discrétiser l'épaisseur h de la plaque (FIGURE 3.2). Par conséquence, en faisant varier h, l'épaisseur de tous les éléments dans le domaine du conducteur varie de la même façon. Cela nous permet de faire varier progressivement le facteur de forme moyen du maillage.

Pour avoir une idée de la déformation des maillages, la FIGURE 3.3 montre l'évolution des valeurs moyennes des mesures de qualité du maillage en fonction de l'épaisseur d'une couche. Ces mesures indiquent la déformation du maillage. Elles sont calculées seulement pour le domaine conducteur. Le maillage des régions d'air reste identique dans tous les cas. Dans cette figure, pour chaque hexaèdre, $Q_h = h^2/S$ où h et S sont respectivement la hauteur et l'aire de sa base, Q_h^* est calculé pour un cube. Pour chaque tétraèdre, $Q_i = 6\sqrt{2}V/l_{rms}^3$ où V est son volume, l_{rms} est la moyenne carrée des longueurs des six arêtes, Q_i^* est calculé pour un tétraèdre régulier. La qualité moyenne des maillages diminue avec l'épaisseur de la plaque et devient très mauvais à $0.2mm$ (de l'ordre de l'épaisseur d'un pli composite réel).

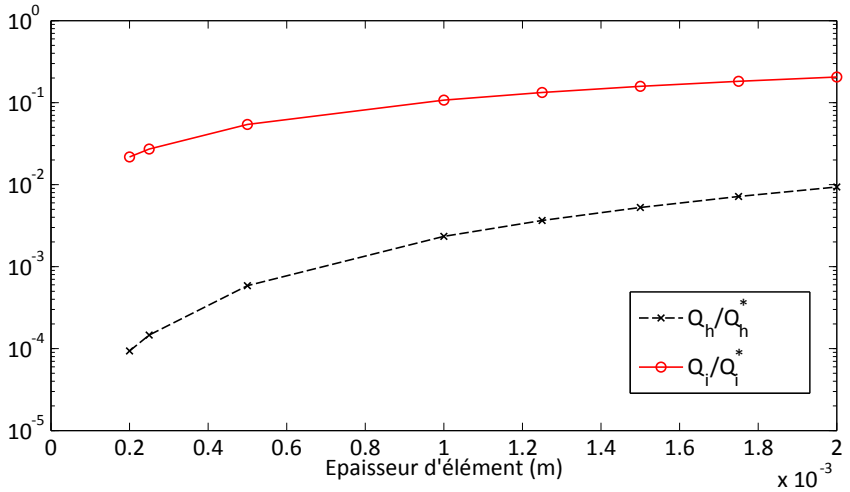


FIGURE 3.3 – L'évolution de la valeur moyenne normalisée de quelques indicateur de qualité de maillage pour les maillages hexahédriques (Q_h) et tétraédrique (Q_i).

Ces mesures de qualité du maillage peuvent être appliquées au problème isotrope afin de qualifier la qualité des solutions numériques. Cependant, dans le cas des matériaux anisotropes, ces mesures ne sont pas suffisantes. En effet, les indicateurs de qualité sont écrits dans le cas d'une variation identique du champ dans les trois directions. Pour cette raison, l'outil analytique a été utilisé, dans cette étude, pour estimer l'erreur commise par les modèles numériques. Ce dernier est la différence en pourcentage de la puissance induite totale dans la plaque calculée avec l'outil numérique, noté

par P_{num} et avec l'outil analytique, noté par P_{ana}. Il peut s'exprimer par :

$$Erreur = \frac{|P_{num} - P_{ana}|}{P_{ana}} 100\% \tag{3.1}$$

3.1.3 Résultat de comparaison

L'effet de la déformation du maillage et du ratio d'anisotropie des lois de comportement

Nous traçons, dans la FIGURE 3.4, l'évolution de l'erreur numérique en fonction de l'épaisseur des éléments pour différents ratios d'anisotropie [Wasselynck *et al.*, 2013]. On peut voir que, premièrement, l'erreur des éléments tétraédriques et hexaédriques sont tous les deux influencés par le ratio d'anisotropie. Lorsque ce dernier augmente, la distribution des courants induits a une forme elliptique et devient plus étroite dans l'axe de faible conductivité (Oy). Par conséquent, avec les maillages ayant le même nombre et la même répartition d'éléments, on perd la précision dans les régions où les champs induits varient beaucoup.

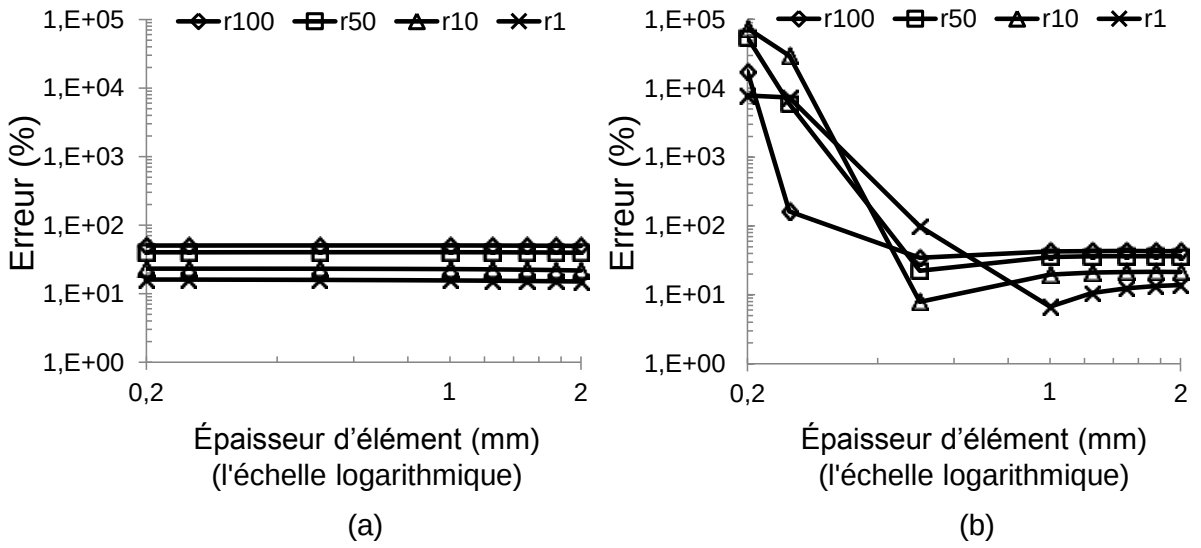


FIGURE 3.4 – Variation des erreurs numériques par rapport à l'épaisseur des éléments pour différents ratio d'anisotropie avec les éléments (a) hexaédriques et (b) tétraédriques. 'rN' signifie que le ratio d'anisotropie est égal à N.

Deuxièmement, on peut remarquer que les hexaèdres sont plus stable que les tétraèdres. En effet, l'erreur commise en utilisant le maillage hexaédrique reste constante dans tous les cas test jusqu'à 0.2mm tandis que les éléments tétraédriques commencent à perdre leur précision initiale à des épaisseurs inférieures à 0.5mm. En outre, l'effet du ratio d'anisotropie est similaire pour les maillages hexaédriques. Lorsque le ratio augmente, l'erreur augmente de la même façon. Cet effet est aussi similaire avec les maillages tétraédriques dont l'épaisseur des éléments est supérieure à 1mm. Par contre, dans le cas de maillages très déformés (l'épaisseur inférieure à 1 mm) l'erreur évolue de manière erratique quel que soit le ratio d'anisotropie.

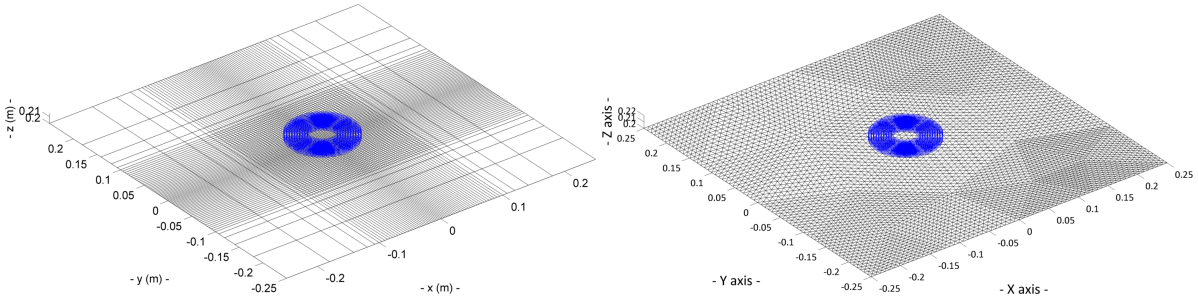
La stabilité des éléments hexaédriques devant la déformation du maillage est très utile dans la modélisation des matériaux composites stratifiés. Il est alors possible d'adapter la déformation du maillage aux ressources de calcul disponible.

3.1.4 Cas d'un pli composite réel

Nous souhaitons développer un modèle dans lequel les défauts à l'échelle d'un pli peuvent être modélisés. L'épaisseur de ces défauts est encore plus faible que celle d'un pli. C'est pour cette raison que dans ces simulations un pli composite d'épaisseur $136\mu m$ est divisé en 10 couches pour le maillage hexaédrique et 7 couches pour le maillage tétraédrique (FIGURE 3.5). L'épaisseur d'une couche est respectivement de $13.6\mu m$ et de $19.4\mu m$ pour le maillage hexaédrique et tétraédrique.

Le ratio d'anisotropie d'un CFRP réel vaut 5000 [Wasselynck, 2012]. La thermographie inductive peut utiliser des fréquences électromagnétiques élevées à quelques MHz. Afin de montrer la robustesse du modèle, la fréquence du courant source dans ces simulations est choisie de 2MHz.

Assurer en même temps une plaque suffisamment grande et un maillage raffiné dans le cas de forte anisotropie est impossible avec nos ressources informatiques. Une plaque de dimension $500mm \times 500mm$ est étudiée. L'information des maillages est donnée dans le TABLEAU 3.2. La qualité moyenne du maillage hexaédrique de la plaque est de $7.12E-07$ tandis que celle du maillage tétraédrique est de $2.2E-03$.



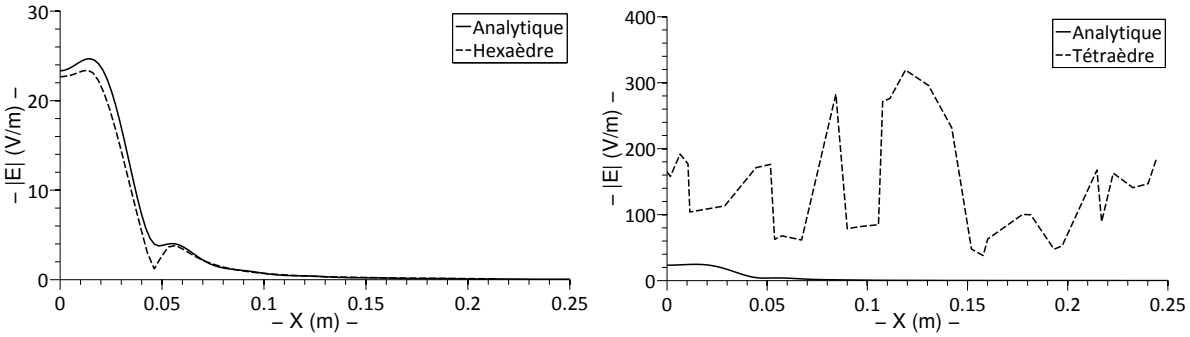
(a) Hexaédrique (b) Tétraédrique

FIGURE 3.5 – Maillages du pli CFRP.

	TET	HEX
Nb. total d'éléments	775 836	155 952
Nb. d'éléments dans la plaque	193 536	49 000
Nb. total d'inconnues	928 915	519 838
Nb. d'inconnues dans la plaque	280 335	205 261

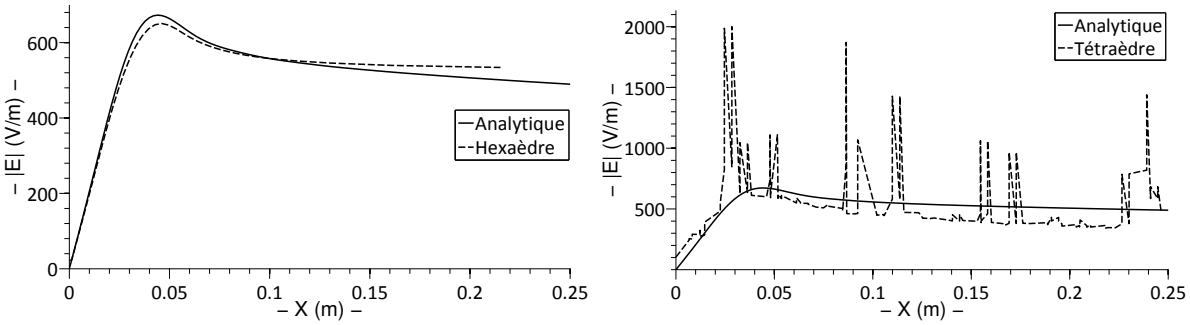
TABLEAU 3.2 – Information des maillages

Nous calculons la variation du champ électrique à la surface du pli suivant les axes Ox et Oy (FIGURE 3.1) et la comparons avec la solution analytique. Les FIGURES 3.6 et 3.7 montrent le résultat de cette comparaison.



(a) Hexaédrique (b) Tétraédrique

FIGURE 3.6 – Variation du champ électrique $\boldsymbol{E}$ à la surface de la plaque suivant l'axe Ox comparée avec la solution analytique



(a) Hexaédrique (b) Tétraédrique

FIGURE 3.7 – Variation du champ électrique $\boldsymbol{E}$ à la surface de la plaque suivant l'axe Oy comparée avec la solution analytique

On peut voir que les hexaèdres montrent une bonne concordance avec la solution analytique tandis que les tétraèdres donnent une solution perturbée. L'erreur importante commise dans le cas du maillage tétraédrique correspond au résultat obtenu dans la FIGURE 3.4 (b) lorsque l'épaisseur des éléments devient très faible.

De plus, si on compare la convergence de la résolution, le système numérique obtenu avec le maillage hexaédrique converge mieux comme le montre la FIGURE 3.8. Cela nous permet d'avoir un temps de calcul réduit par rapport au maillage tétraédrique.

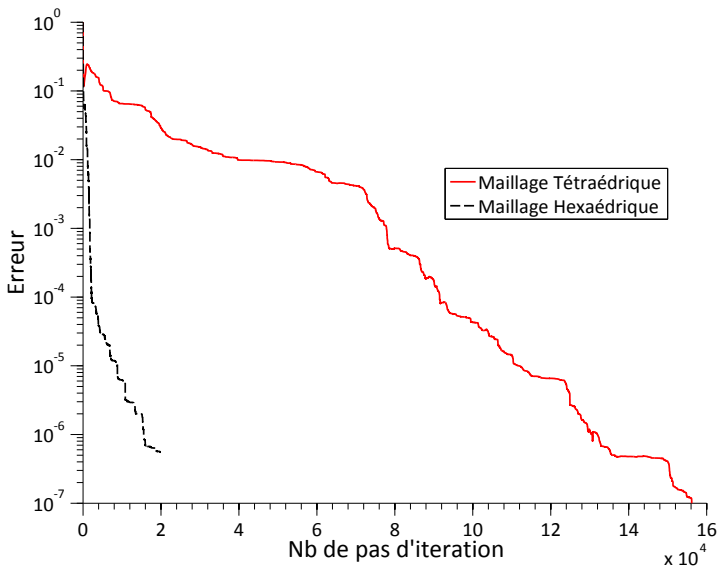


FIGURE 3.8 – Convergence des modèles. Dans ce cas, l'erreur de la résolution numérique du système $Ax = b$ pour chaque pas d'itération i est déterminé par $\|Ax^i - b\|/\|b\|$, $\|.\|$ désigne la norme euclidienne.

Les éléments hexaédriques montrent des performances bien meilleures que les éléments tétraédriques en temps de calcul et en précision de la solution numérique. En plus, face aux problèmes de la déformation du maillage, les éléments hexaédriques montrent une bonne stabilité face à l'épaisseur des éléments. Cette caractéristique est très utile dans notre cas. Sur ce point, nous admettons pour l'instant les éléments hexaédriques comme une solution optimale.

Cependant, une validation du code de calcul dans le cas des matériaux anisotropes uni-axiales n'est pas suffisante. En effet, les matériaux CFRP se composent des plis d'orientations différentes. Il en résulte un domaine hétérogène très complexe. Dans ce cas, il est nécessaire de valider le code de calcul sur des stratifiés multiplis réels. Dans ce cas où une solution analytique n'est pas disponible, nous avons décidé de valider le modèle par des comparaisons avec les essais expérimentaux.

3.2 Comparaison avec des mesures expérimentales

3.2.1 Objectif

Il nous est impossible de valider le modèle électromagnétique avec plusieurs plis. Nous sommes alors obligés de valider expérimentalement le modèle couplé electro-thermique. Les comparaisons qui seront présentées nous permettront de montrer l'intérêt du modèle à l'échelle mésoscopique et la nécessité de prendre en compte une alimentation en tension de l'inducteur.

3.2.2 Description des essais expérimentaux

a) Le montage

Le schéma de principe du fonctionnement de notre système de chauffage par induction est illustré dans la FIGURE 3.9. Le générateur est alimenté par le réseau EDF. Le coffret d'adaptation d'impédance permet d'optimiser la puissance active fournie à l'inducteur. Dans le cas idéal, l'impédance totale du système vue par le générateur est totalement résistive. On obtient un courant sinusoïdal à la

fréquence de résonance qui circule dans l'inducteur.

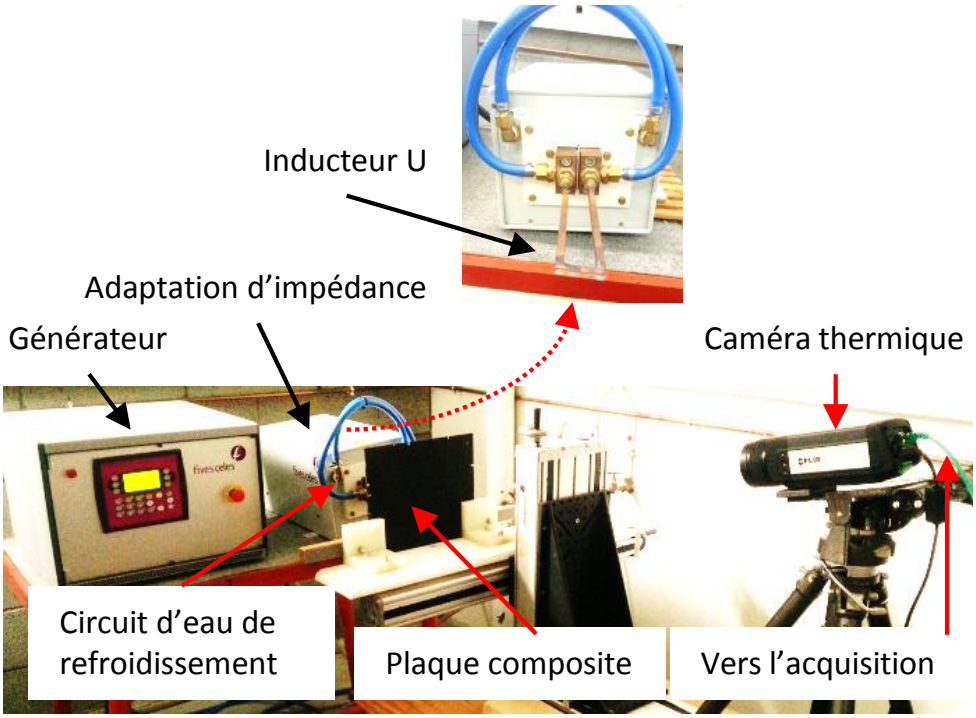


FIGURE 3.9 – Banc d'essai de thermographie inductive présent au laboratoire.

Un groupe froid est nécessaire pour refroidir les équipements soumis à des densités de courant importantes. La caméra infrarouge enregistre, avec une fréquence d'échantillonnage de $50Hz$, l'évolution de la température sur la surface de la plaque opposée à l'inducteur.

b) L'échantillon

L'échantillon utilisé dans ces essais est une plaque composite stratifié de 37 plis sans défaut. Cette plaque possède un plan de drapage avec plus de plis à 0° que les autres orientations. Elle est choisie afin de mieux observer l'effet sur la réponse thermique à la surface du matériau avec les différentes orientations de l'inducteur.

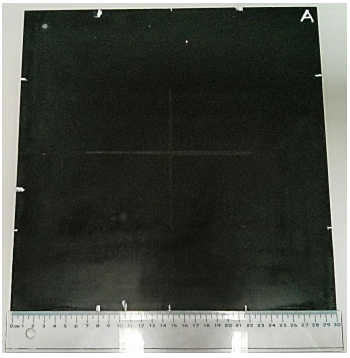


FIGURE 3.10 – Échantillon.

Nous avons réalisé les essais à deux fréquences de fonctionnement différentes. L'intérêt est de valider

la robustesse du modèle en travaillant avec deux points de fonctionnement différents. Nous mesurons le courant dans l'inducteur et choisissons le temps de chauffe. Ces données correspondant à chaque fréquence sont récapitulées dans le TABLEAU 3.3.

Fréquence	Intensité du courant d'inducteur	Temps de chauffe
240 kHz	144 A	20s
1663 kHz	116 A	5s

TABLEAU 3.3 – L'intensité de courant et le temps de chauffe dans les deux essais à fréquences différentes.

A haute fréquence, le temps de chauffe choisi est relativement court pour éviter un échauffement trop important de la plaque et donc une variation trop importante des propriétés physiques selon la température.

Afin de mettre en évidence l'influence du plan de drapage, l'inducteur est placé selon deux directions (0° et 90°) par rapport à la plaque. Le plan de drapage "vu" par l'inducteur dans les deux cas est différent et décalé de 90° l'un par rapport à l'autre. Cependant, nous travaillons toujours avec le même matériau, le jeu de paramètres est donc identique.

La FIGURE 3.11 montre la configuration des essais. Les dimensions de la plaque sont données dans le TABLEAU 3.4. Les dimensions des inducteurs utilisés dans les essais sont données dans le TABLEAU 3.5. Le TABLEAU 3.6 donne les valeurs numériques des propriétés électromagnétiques et thermiques utilisées dans les simulations. Ces valeurs sont identiques dans tous les simulations.

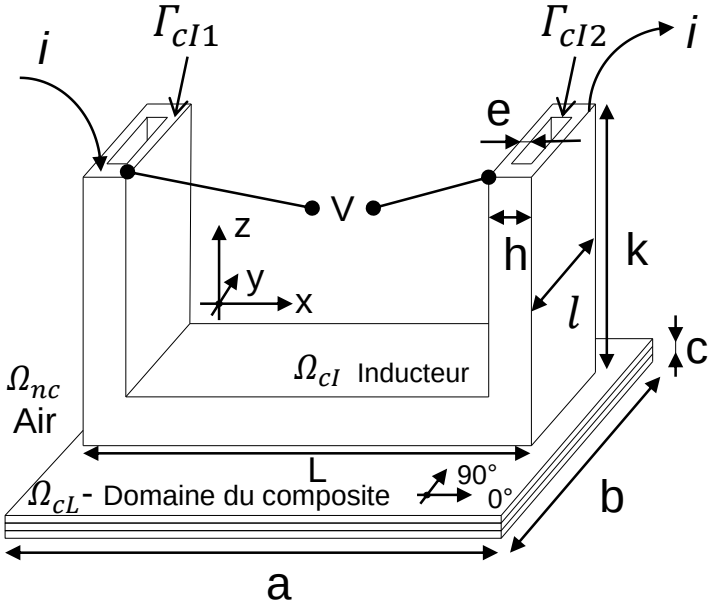


FIGURE 3.11 – Géométrie et dimension des essais.

Plaque	
a – b – c	300 – 300 – 5.18 (mm)
Nb. de plis	37
Plan de drapage	$X/0°/X_s$

X_s est la séquence symétrique de X par rapport au pli 0° au milieu des deux.
X = [0°/0°/135°/0°/45°/0°/45°/90°/135°/0°/135°/90°/45°/0°/45°/0°/135°/0°]

TABLEAU 3.4 – Données numériques des dimensions de la plaque.

	L mm	l mm	h mm	k mm	e mm
240 kHz	100	20	8	80	1
1663 kHz	40	7	7	150	1

TABLEAU 3.5 – Dimensions des inducteurs pour les essais à $240kHz$ et à $1663kHz$.

Problème électromagnétique		
μ_{air}	$4\pi \times 10^{-7}$	H/m
$\mu_{composite}$	$4\pi \times 10^{-7}$	H/m
$\sigma_{\parallel}$	3.9×10^4	S/m
$\sigma_{\perp}$	7.7	S/m
σ_z	7.7	S/m
Problème thermique		
ρ	1598	kg/m^3
C_p	1100	$J/(kg°K)$
$\lambda_{\parallel}$	4.5	$W/(m°K)$
$\lambda_{\perp}$	1.04	$W/(m°K)$
λ_z	1.04	$W/(m°K)$
h	15	$W/(m^2°K)$

TABLEAU 3.6 – Données numériques des propriétés électromagnétique et thermique prises dans les simulations.

Les profils de la température exposée à la surface opposée à l'inducteur de la plaque sont mesurés,

par la caméra infrarouge, et comparés avec la simulation numérique.

3.2.3 Résultat de comparaison

a) A 240kHz

Afin de réduire le temps de calul, l'inducteur massique peut être modélisé par un inducteur bobiné. L'intérêt de ce modèle est que le terme source dans (2.18) peut être calculé par la formule de Biot-Savart. Il n'est alors plus nécessaire de mailler l'inducteur ce qui entraîne une complexité numérique moindre. Afin de calculer analytiquement les courants dans les spires, on considère que (a) les courants circulent uniquement dans la périphérie extérieure de l'inducteur, (b) l'intensité de courant dans chaque spire est identique. Cependant, en utilisant ce modèle, on néglige la distribution réelle des courants dans l'inducteur et la réaction d'induit des courants de Foucault dans le composite sur l'inducteur.

Le TABLEAU 3.7 donne la comparaison de la puissance induite totale calculée dans toute la plaque CFRP entre le modèle d'inducteur bobiné et le modèle à grandeur globale imposée. Le modèle bobiné surestime la puissance transmise au matériau d'environ 15% par rapport au modèle utilisant les formulations globale. Cela conduit à la surestimation de la température à la surface du matériau.

Puissance induite totale transferte à la plaque (W)			
Inducteur 0°		Inducteur 90°	
Modèle filaire	GF	Modèle filaire	GF
101.0	87.5	122.7	104.4

'GF' signifie le modèle des grandeurs globales imposées

TABLEAU 3.7 – Comparaison des modèles d'inducteur

L'évolution de la température simulée et mesurée au centre de la surface observée est donnée dans la FIGURE 3.13. Un écart de 18% sur la température maximale à 20s peut être observé.

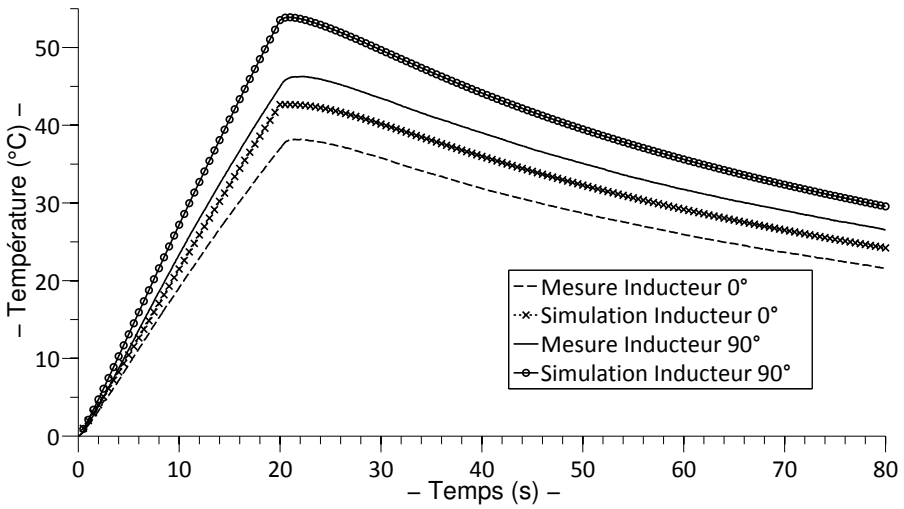


FIGURE 3.12 – Évolution temporelle de la température au centre de la plaque simulée et mesurée. Cas du modèle d'inducteur filaire. $fr = 240kHz$.

Sur la FIGURE 3.13, nous donnons les résultats des mêmes essais mais avec cette fois-ci la prise en compte de l'alimentation en tension de l'inducteur massique. En prenant en compte la distribution des courants dans l'inducteur, et de la réaction d'induit de la charge sur l'inducteur, les résultats montrent une très bonne concordance entre la simulation et l'expérimentation. Ils montrent bien la robustesse du modèle en considérant l'effet du plan de drapage et de l'orientation relative de l'inducteur. Cependant, dans notre configuration, le temps de calcul du modèle avec l'inducteur maillé est de 70h alors que celui du modèle avec l'inducteur filaire est de 2h. Dans les paragraphes suivantes, seuls les résultats avec l'inducteur maillé sont présentés.

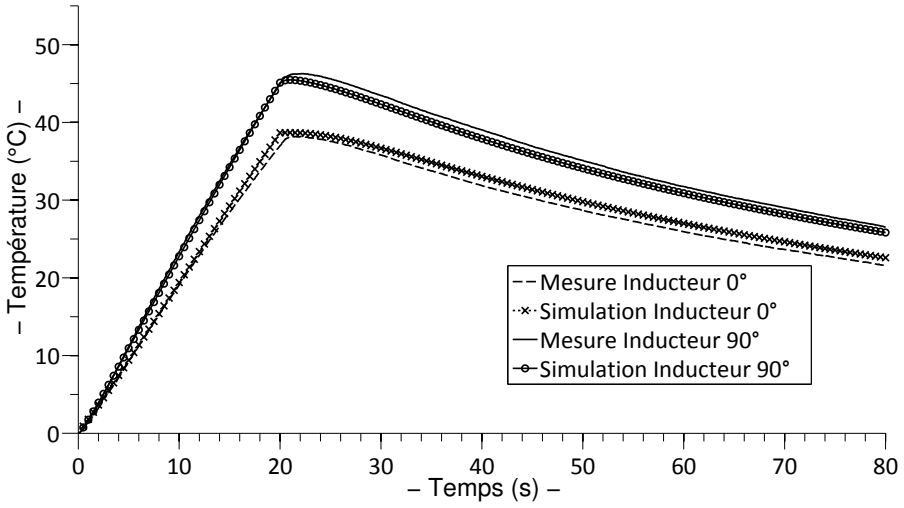
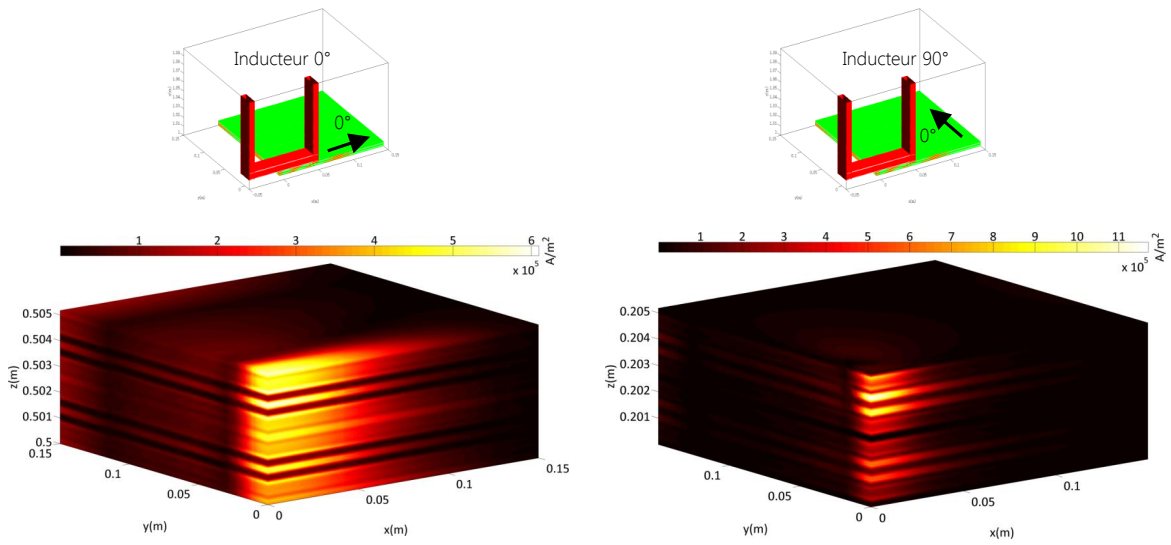


FIGURE 3.13 – Évolution temporelle de la température au centre de la plaque simulée et mesurée. Cas du modèle d'inducteur massif. $fr = 240kHz$.

On peut observer que les orientations différentes de l'inducteur conduisent à une différence entre les réponses thermiques des deux configurations. Elle résulte de différentes distributions des courants induits et donc différentes densités de puissance dans la plaque. La FIGURE 3.14 montre la distribution de la densité des courants induits dans la plaque composite (un quart du domaine est affiché pour voir à l'intérieur) avec l'inducteur de 0° et 90° respectivement. On peut bien voir les distributions

différentes des courant de Foucault dans les deux cas.



(a) Inducteur 0°. Un quart de la plaque est tracé. (b) Inducteur 90°. Un quart de la plaque est tracé.

FIGURE 3.14 – Distribution des courants induits dans les cas d'inducteur 0° et 90°. $fr = 240kHz$.

Il en résulte que la puissance induite injectée dans chaque pli du composite dépend de l'orientation relative de l'inducteur par rapport à la plaque. La FIGURE 3.15 donne la puissance induite totale calculée dans chacun des plis du matériau.

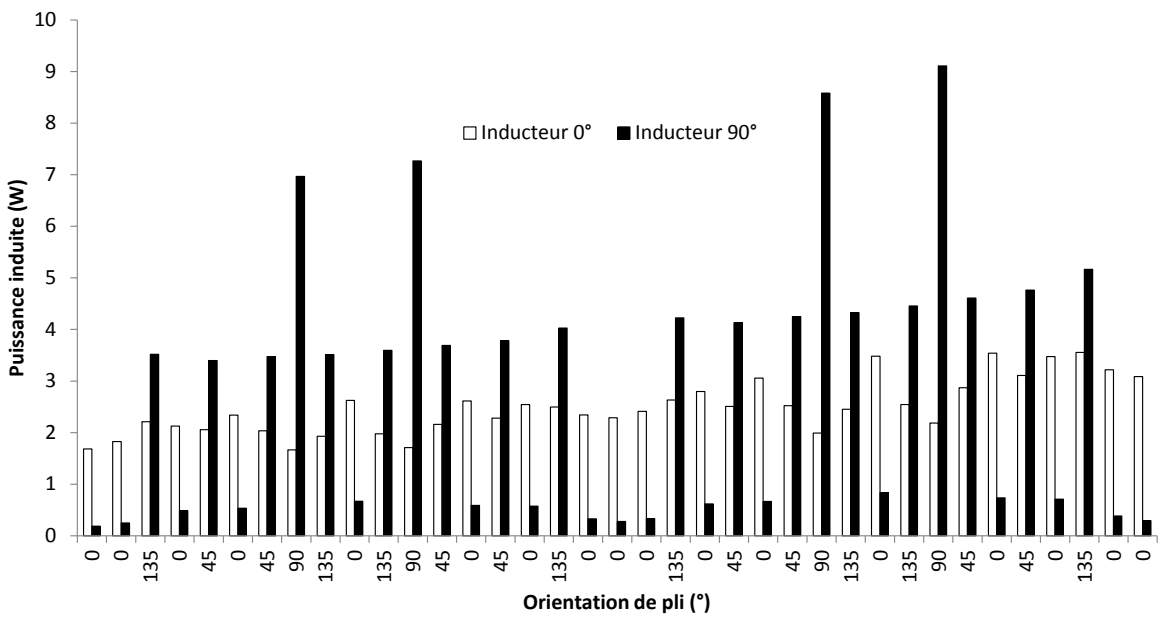


FIGURE 3.15 – P_i totale de chaque pli pour les deux orientations de l'inducteur. $fr = 240kHz$.

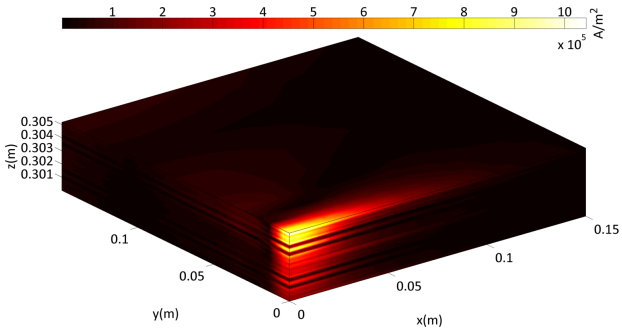
L'inducteur U favorise et intensifie les circulations des courants induits dans la direction suivant l'inducteur. Par conséquent, la puissance injectée est toujours plus importante dans les plis orientés

dans la même direction que l'inducteur. De plus, on peut remarquer que la distribution de la puissance induite est quasi-uniforme pour la configuration à 0°. Par contre, avec l'inducteur à 90°, les puissances induites dans les plis 0° sont très faibles par rapport aux plis d'autres orientations. On peut conclure que la puissance transférée et les courants induits dans un pli dépendent non seulement de son orientation de fibres mais aussi de celles des autre plis. Il faut noter que la détectabilité de défaut dépend fortement de la perturbation du défaut à la circulation des courants induits. Dans ce cas, pour avoir un modèle précis, le plan de drapage doit être pris en compte.

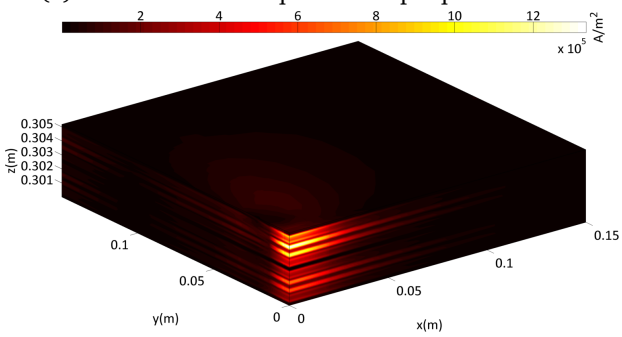
La distribution de la puissance induite est directement corrélée à la réponse thermique du matériau. Il semble alors possible de contrôler le plan de drapage des composites avec la technique thermographie inductive.

b) A 1663kHz

La FIGURE 3.16 donne la distribution de la densité des courants de Foucault dans la plaque à 1663kHz. Dans ce cas, on retrouve la même allure de la distribution dans la FIGURE 3.14. Pourtant, on peut voir plus clairement l'effet de peau quand les courants induits sont distribués essentiellement dans les plis supérieurs (proche de l'inducteur).



(a) Inducteur 0°. Un quart de la plaque est tracé.



(b) Inducteur 90°. Un quart de la plaque est tracé.

FIGURE 3.16 – Distribution des courants induits dans les cas d'inducteur 0° et 90°. $fr = 1663kHz$

En effet, la puissance induite est essentiellement transférée aux plis supérieurs de la plaque (FIGURE 3.17) à comparer avec la FIGURE 3.15.

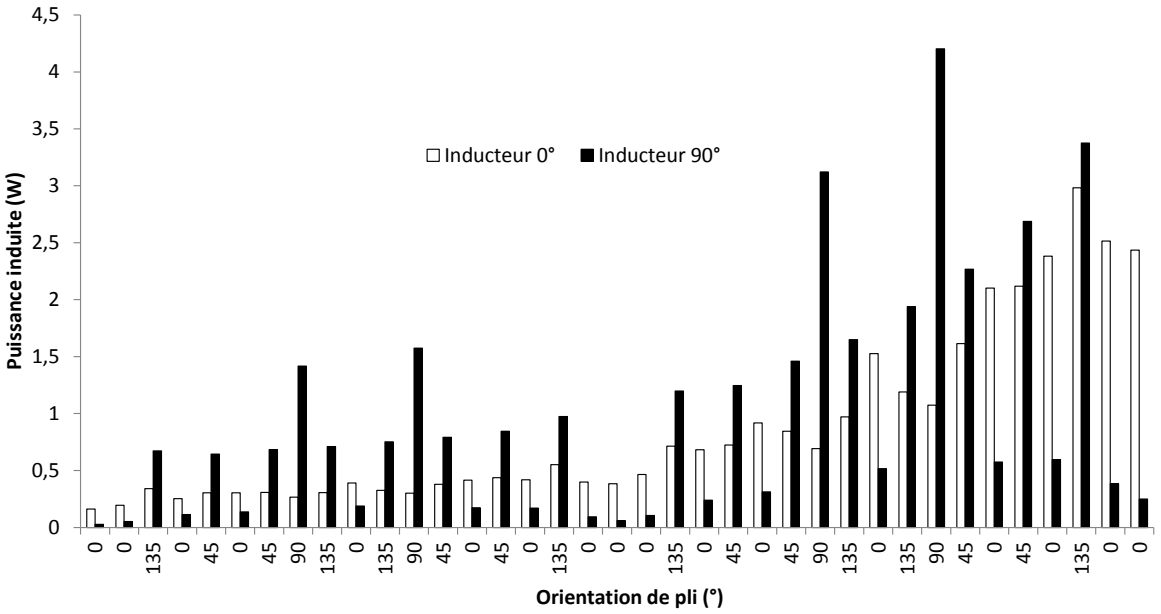


FIGURE 3.17 – P_i totale de chaque pli pour les deux orientations de l'inducteur. $fr = 1663kHz$.

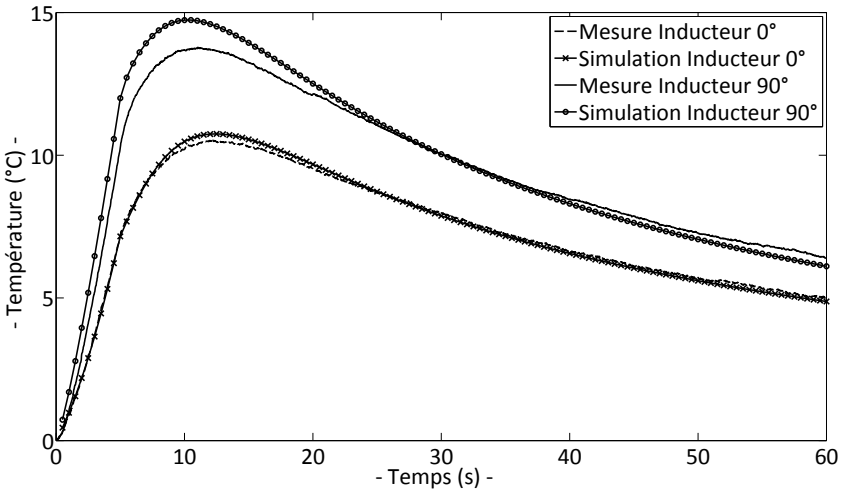


FIGURE 3.18 – Évolution temporelle de la température au centre de la plaque simulée et mesurée. $fr = 1663kHz$

La FIGURE 3.18 donne la comparaison de l'évolution temporelle de la température au centre de la plaque entre la mesure et la simulation. Ce résultat montre la validité du modèle à haute fréquence.

3.3 Conclusion

Afin de modéliser précisément le comportement du matériau réel, un modèle mésoscopique a été mis en œuvre. La modélisation de tels matériaux nécessite de modéliser des régions minces multicouches,

fortement anisotropes, avec des orientations d'anisotropie différentes. Ces contraintes influencent fortement la convergence et la précision des modèles numériques. Il est alors nécessaire de valider et d'assurer la fiabilité des outils développés.

Dans le cas d'un matériau homogène anisotrope, une étude de sensibilité des éléments finis devant la déformation du maillage a été menée pour deux types d'éléments : des éléments hexaédriques et tétraédriques. Une comparaison des résultats avec les éléments finis et un modèle analytique a montré une grande stabilité des éléments hexaédriques. Le logiciel du laboratoire est alors adapté à ce type d'élément afin de modéliser plus précisément des composites et des défauts à l'échelle mésoscopique.

Les validations expérimentales sur un composite multidirectionnel montre un grand intérêt du modèle mésoscopique. En effet, en tenant compte du plan de drapage, ils permettent de mettre en évidence les circulations des courants de Foucault et la distribution de la puissance induite dans chaque pli du matériau. Les interactions entre les courants induits et la diffusion de la chaleur avec des défauts peuvent être alors précisément simulées.

De plus, le modèle avec alimentation en tension permet d'améliorer encore plus la finesse de l'outil numérique en prenant en compte la distribution réelle des courants dans l'inducteur et la réaction d'induit des courants de Foucault dans le matériau. Ce modèle prend le courant ou la tension du générateur comme un paramètre d'entrée de l'outil numérique qui sont des paramètres opératoires.

Les comparaisons à haute fréquence montrent la capacité du logiciel de calcul à simuler des procédures thermo-inductives dans une large bande de fréquence de courant inducteur.

Pour finir, le modèle nous permettra d'étudier des performances de la thermographie inductive pour des défauts de natures différentes. Il fournit un outil fiable pour l'optimisation de la technique appliquée au matériau composite en déterminant des procédures optimales comme la fréquence d'excitation, le traitement du signal thermique et la conception de l'inducteur. Quelques-unes sont présentées dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Évaluation de la performance de la technique thermographie inductive

Dans ce chapitre, à l'aide du modèle numérique précédemment validé, nous allons réaliser une étude préliminaire sur l'évaluation de la capacité de détection et de caractérisation des défauts dans les composites CFRP par le CND thermo-inductif. Deux défauts difficiles à détecter avec les autres méthodes de CND à l'échelle mésoscopique sont investigués. Il s'agit des ruptures de fibres et des délaminages. Les ruptures de fibres sont quasi invisibles par la méthode thermographie et les délaminages ne sont pas détectés par la méthode des courants de Foucault. Il est alors intéressant d'évaluer la performance de la thermographie inductive pour ces cas particuliers.

Dans cette étude, nous nous intéressons particulièrement à la détectabilité de la technique thermographie inductive. Cette dernière dépend de la procédure mise en œuvre. Une procédure de thermographie inductive est définie par ses conditions d'excitation (eg. la géométrie et la position de l'inducteur, la fréquence de la source de courant, l'entrefer entre l'inducteur et la surface du matériau, l'orientation de l'inducteur, ...), ses conditions d'acquisition (eg. la précision de la caméra thermique, le pas d'échantillonnage, ...) et les contrastes de température utilisés.

L'optimisation globale de la technique n'est pas considérée dans ce chapitre. Les choix des paramètres sont basés sur nos études précédentes ou sur ceux des matériels disponibles au laboratoire. Par exemple, nous choisissons un inducteur de forme U pour les contrôles. Ce type d'inducteur est basique et reste à optimiser. Par contre, nous établirons une démarche générale qui permettra de qualifier l'efficacité des différentes procédures du CND thermo-inductif.

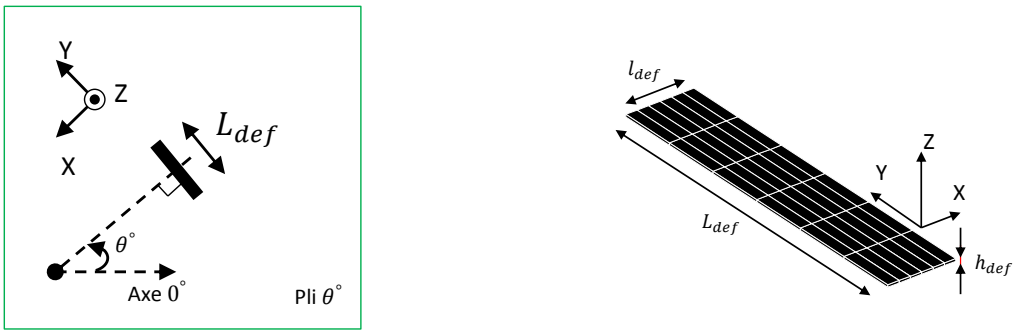
Afin de considérer l'influence de la nature, de la taille et de la position de défauts, un cas synthétique sera présenté dans lequel les procédures de CND thermo-inductif seront effectuées sur une plaque composite avec plusieurs défauts. Tout d'abord, les modèles des défauts seront établis en se basant sur l'étude bibliographique.

4.1 Modèle du défaut

Nous nous intéressons dans cette étude aux défauts de rupture de fibres et aux délaminages présents à l'échelle d'un pli (l'échelle mésoscopique). A cette échelle, le modèle mésoscopique nous permet d'avoir une précision acceptable pour les simulations.

Rupture de fibres : Bien que les fibres ne soient pas toujours rompues dans un même endroit, nous admettrons un modèle simple dans lequel une rupture de fibres est modélisée comme une région d'air droite et connexe qui s'introduit dans un pli. L'étude bibliographique nous permet de considérer

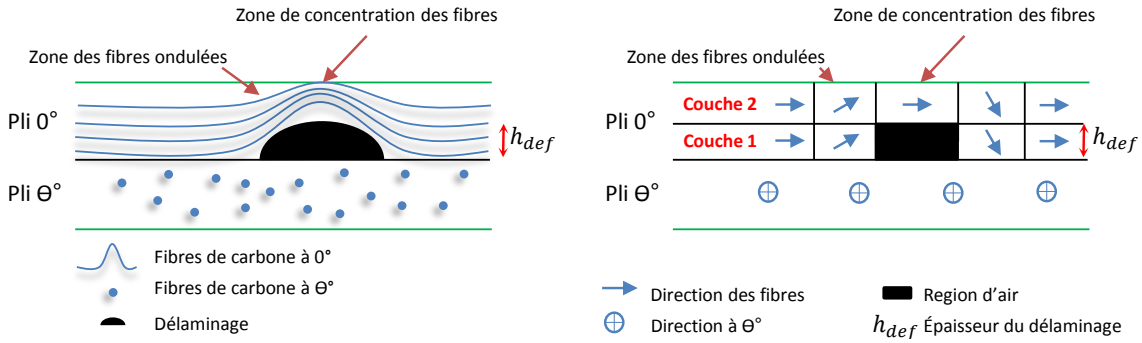
que le sens d'une rupture de fibres est orthogonal à l'orientation du pli défectueux (FIGURE 4.1 (a)). Dans la FIGURE 4.1 (b), la géométrie du défaut est définie. La longueur, la largeur et l'épaisseur sont respectivement notées par L_{def}, l_{def} et h_{def}.



(a) Rupture de fibres (en noir) au centre d'un pli. (b) Définition de la géométrie d'une rupture de fibres.

FIGURE 4.1 – Modèle de la rupture de fibre.

Délaminage : Comme dans le cas des ruptures de fibres, les délaminages étudiés dans ce chapitre sont des petits défauts à l'échelle mésoscopique. Il se trouvent à l'interface entre deux plis voisins. Ce défaut est difficile à détecter par la méthode des courants de Foucault car la circulation des courants induits de part et d'autre du défaut est garantie. En effet, dans la zone du délaminage, les fibres ne sont pas coupées mais ondulées. Il est donc nécessaire d'assurer cette continuité des courants induits traversant le délaminage. Dans notre modèle de ce type de défaut, nous modifions les conductivités électrique et thermique pour les éléments du maillage dans les zones où les fibres sont ondulées et dans les zones de concentration des fibres. Elles sont calculées par rapport à l'orientation des fibres dans ces zones. Sur la FIGURE 4.2, nous montrons un exemple d'un délaminage entre deux plis 0° et θ°. Dans ce cas, seul le pli 0° est défectueux.



(a) Description géométrique d'un délaminage réel entre deux plis 0° et θ°. (b) Modèle simplifié.

FIGURE 4.2 – Modèle du délaminage.

Afin d'introduire le défaut dans le maillage, le pli défectueux est divisé en 2 couches. La couche 1 contient la région d'air alors que la couche 2 contient la zone de concentration des fibres. Un exemple d'un maillage de la zone de délaminage est montré dans la FIGURE 4.3. Dans les simulations, les propriétés physiques attribuées aux zones intactes sont les mêmes que celles du pli défectueux, ceux du délaminage sont de l'air. Les conductivités électrique et thermique de la zone de concentration des fibres sont proportionnelles à celles des zones intactes avec un coefficient qui est égal au rapport entre l'épaisseur d'un pli (h_{pli}) et l'épaisseur de cette zone ($h_{pli} - h_{def}$). Par exemple, si un délaminage d'épaisseur $h_{def} = h_{pli}/2$ est considéré, les conductivités de la zone de concentration des fibres sont

doublées par rapport à celles des zones intactes du pli. Les tenseurs des conductivités thermique et électrique dans les zones d'ondulation des fibres sont calculés selon l'orientation des fibres dans ces zones.

Par rapport au modèle des ruptures de fibres, cette adaptation de tenseur permet un passage naturel des courants de Foucault lorsqu'ils rencontrent les délaminages. Cela nous permet de mieux simuler les interactions entre les courants induits et des défauts de natures différentes.

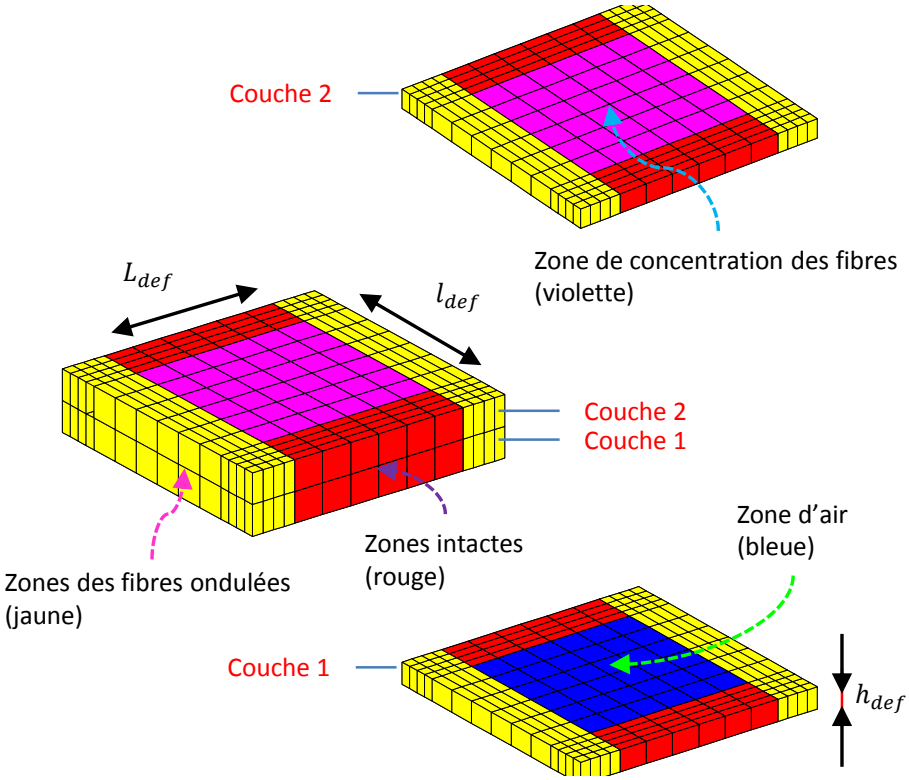


FIGURE 4.3 – Maillage d'un délaminage. Le pli défectueux est divisé en 2 couches.

De ce fait, on utilise forcement des anisotropies d'orientation très différentes dans le modèle du défaut. Dans ce cas, le modèle utilisant des éléments hexahédriques permet de garantir la fiabilité des solutions numériques obtenues.

4.2 Détectabilité

Dans cette partie, en se reposant sur les simulations des procédures de CND thermo-inductif, une étude de la capacité de détection de défaut est effectuée. Concisément, nous simulons l'évolution temporelle de la température dans tous les points de la surface d'un matériau. Cette dernière modélise les données fournies par la caméra thermique lors d'un contrôle réel. Un matériau sans défaut est tout d'abord simulé. Les données obtenues sont appelées T_{sans} et vont nous servir de référence. Afin de modéliser le matériau défectueux, nous introduisons ensuite les défauts dans les modèles présentés dans la partie précédente. Les simulations nous donnent les T_{avec}. Les contrastes de température peuvent être calculés à partir de T_{sans} et T_{avec}, par exemple, le contraste absolu C^a est tout simplement égal à la différence $T_{avec} - T_{sans}$. Les contrastes non nuls vont nous permettre de détecter la présence des défauts.

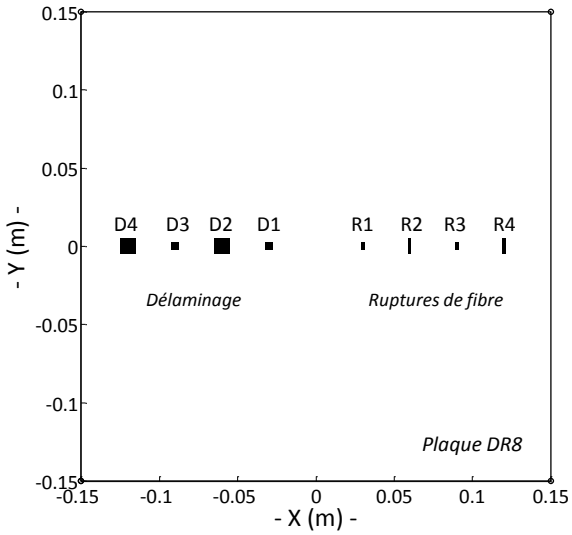
La pièce à contrôler est une plaque CFRP de 16 plis de dimension 300 × 300 mm^2. L'épaisseur de chaque pli est de 136 μm. Le plan de drapage est $[[0°/45°/90°/135°/]_2]_s$. Ce plan de drapage, dit

quasi-isotrope, est fréquemment utilisé en aéronautique.

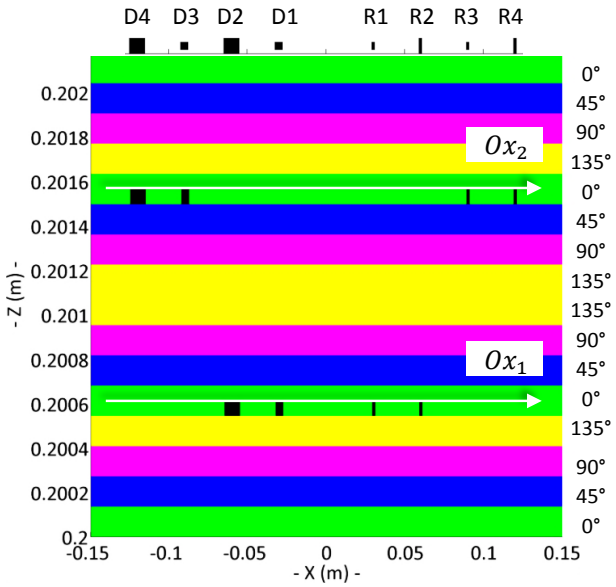
4.2.1 Description des cas test

a) Plaque avec défaut

Huit défauts sont introduits dans les pli 0° de la plaque CFRP (essai DR8) dont quatre défauts de délaminage se trouvent dans sa moitié gauche et quatre défauts de rupture de fibre sont situés dans sa moitié droite (FIGURE 4.4 (a)). La FIGURE 4.4 (b) montre la vue de côté de la plaque précisant la profondeur des défauts. Le TABLEAU 4.1 donne les détails de leur géométrie.



(a) Vue de dessus



(b) Vue de côté

FIGURE 4.4 – Plaque DR8 avec défauts.

	D4	D3	D2	D1	R1	R2	R3	R4
Dimension	A	B	A	B	C	D	C	D
Profondeur (*pr*)	Pli 12	Pli 12	Pli 5	Pli 5	Pli 5	Pli 5	Pli 12	Pli 12

A = $10 \times 10\ mm^2$, B = $5 \times 5\ mm^2$
C = $2 \times 5\ mm^2$, D = $2 \times 10\ mm^2$

TABLEAU 4.1 – Dimension et profondeur des défauts.

Les défauts ont tous la même épaisseur noté h_{def}. Deux cas où $h_{def} = h_{pli}/2$ et $h_{def} = h_{pli}/4$ (avec $h_{pli} = 136\mu m$ l'épaisseur d'un pli CFRP) seront considérés afin d'évaluer les limites de détection.

b) Inducteur

Nous utilisons un inducteur de forme U dans cette étude. Il est choisi suffisamment grand pour couvrir toutes les zones des défauts. Il est placé au dessus de la plaque. Sa position est précisée sur la FIGURE 4.5. Le TABLEAU 4.2 donne la valeur de ses dimensions.

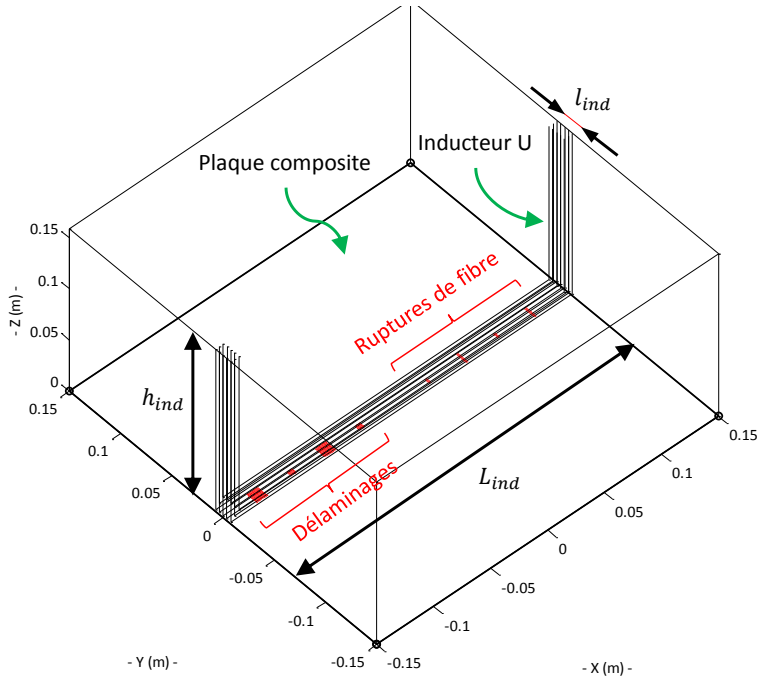


FIGURE 4.5 – Position de l'inducteur U utilisé.

Longueur de la face	L_{ind}	300 mm
Longueur des bras	h_{ind}	15 mm
Largeur	l_{ind}	7 mm

TABLEAU 4.2 – Dimensions de l'inducteur.

Sauf mention contraire, la configuration de ce contrôle est identique à celle donnée dans le TABLEAU 4.3. Nos études précédentes montrent l'intérêt des courants à haute fréquence dans le CND thermo-inductif. Dans cette étude, une fréquence de $2MHz$ est choisie. Il s'agit de la fréquence maximale que les matériels du laboratoire peuvent fournir. Pour un contrôle rapide, des temps de chauffe courts sont préférés. Nous choisissons tout d'abord un $t_{chauffe}$ de $2s$. Le pas d'échantillonnage du signal thermique dépend de la fréquence d'échantillonnage de la caméra infrarouge. La caméra du laboratoire possède une fréquence d'échantillonnage de $50Hz$.

Entrefer	$2\ mm$
Fréquence source	$2\ MHz$
Intensité du courant d'inducteur (I)	$100\ A$
Temps de chauffe ($t_{chauffe}$)	$2\ s$
Pas d'échantillonnage du signal thermique	$0.02\ s$
Temps d'acquisition du signal thermique	$20\ s$

TABLEAU 4.3 – Les paramètres du contrôle.

L'évolution de la température sur la surface opposée à l'inducteur est analysée pour en déduire les caractéristiques des défauts.

4.2.2 Courants induits dans la zone du défaut

La perturbation des courants induits dans la zone des défauts entraîne des modifications de la distribution de la puissance induite et par conséquent la réponse en température. Pour cette raison, nous considérons d'abord l'interaction entre les défauts et les courants induits. La variation du module des courants induits sur les lignes Ox_1 et Ox_2 (FIGURE 4.4) traversant le centre des défauts est tracée dans les FIGURES 4.6 et 4.7.

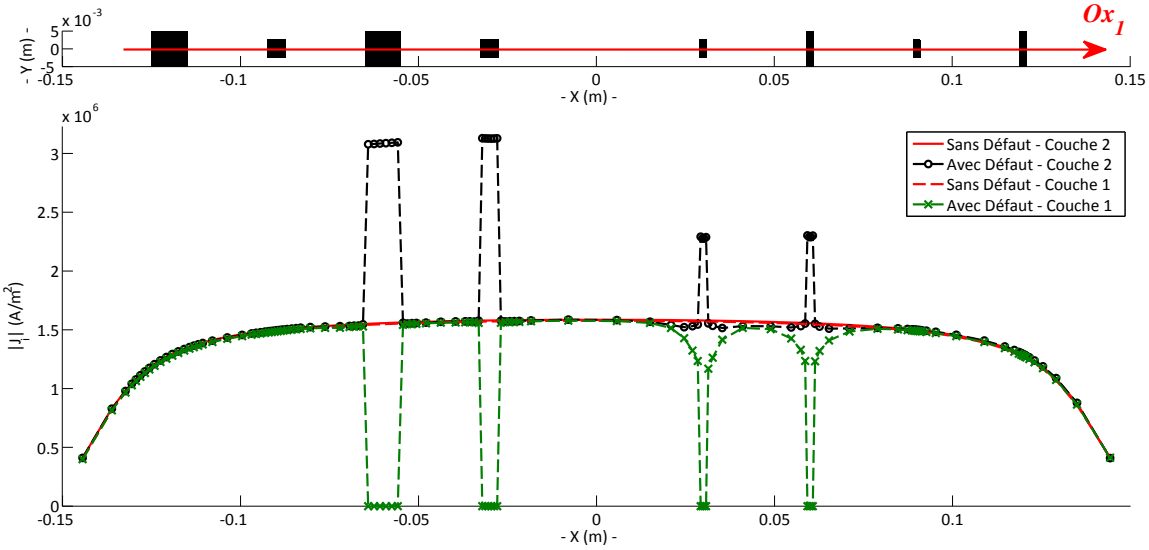


FIGURE 4.6 – Interaction des courants induits avec les délaminages D1, D2 et les défauts de rupture de fibre R1, R2. Cas de $h_{def} = h_{pli}/2$

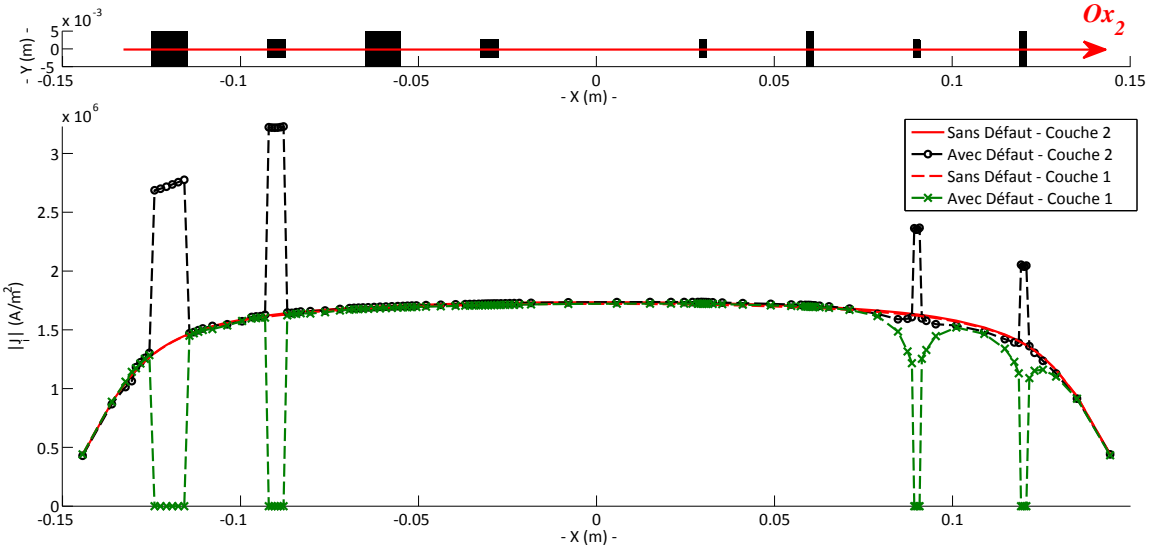


FIGURE 4.7 – Interaction des courants induits avec les délaminages D3, D4 et les défauts de rupture de fibre R3, R4. Cas de $h_{def} = h_{pli}/2$

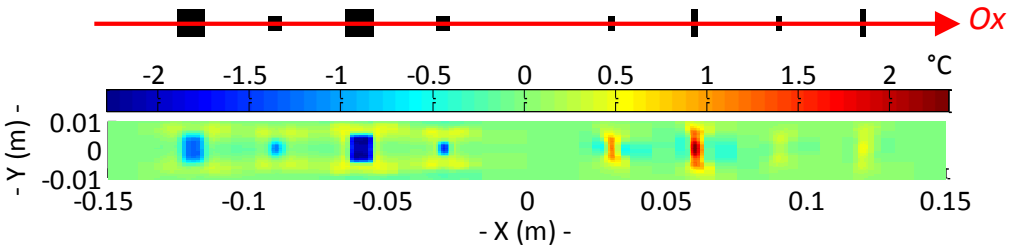
On peut constater que :

- Les courants induits sont perturbés dans la zone du défaut.
- Avec l'adaptation du tenseur de la conductivité électrique, dans les zones de délaminage, les densités de courants sont doublées dans les zones de concentration de fibres et annulées dans les zones d'air. Pour autant, la densité moyenne de courant dans le pli est égale à celle dans un pli sain. Notre modèle permet bien aux courant induits de circuler dans le cas d'un délaminage. Au contraire, dans le cas des ruptures de fibres, la circulation des courants induits

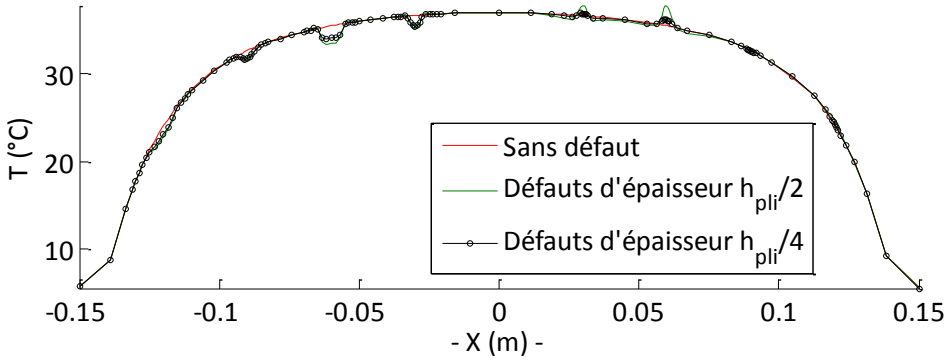
est interrompue. Cela entraîne une zone de perturbation plus large que la dimension des ruptures.

4.2.3 Zone de détection

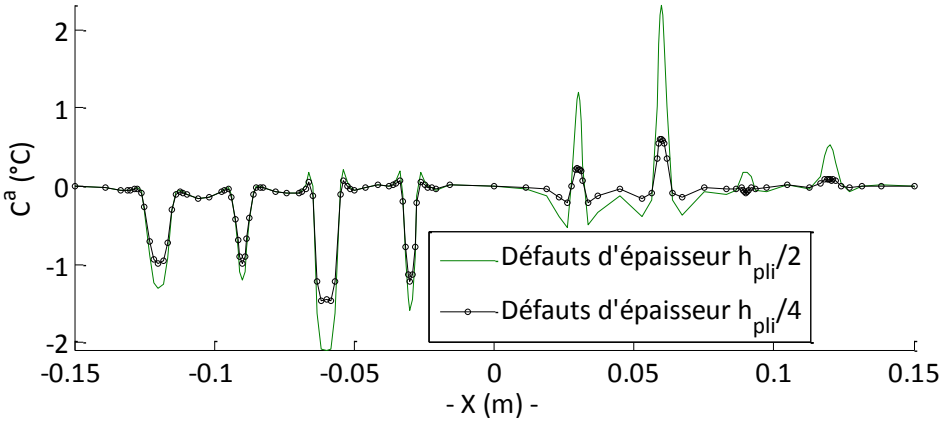
La FIGURE 4.8 (a) nous montre la cartographie du contraste absolu des températures sur la plaque. Il est à noter que bien que notre modèle autorise la circulation des courants dans une zone de délaminage, nous sommes capables de détecter ce type de défaut car la zone d'air perturbe la propagation du flux de chaleur dans le matériau. La FIGURE 4.8 (b) donne la variation de la température suivant la ligne Ox obtenue avec la plaque sans défaut et celle avec défaut. Ces courbes sont tracées à l'instant t_{arrt} où on arrête le générateur de puissance. La soustraction de ces données nous donne la variation du C^a sur la FIGURE 4.8 (c).



(a) Cartographie du contraste absolu



(b) Variation de la température suivant la ligne Ox



(c) Variation du contraste absolu suivant la ligne Ox

FIGURE 4.8 – Évaluation de la zone de détection.

Généralement, on peut observer que :

- Les zones sans défaut donnent un C^a nul.

- Tous les défauts dans la zone sous l'inducteur sont détectés. La zone de détection peut alors être déterminée par la dimension de l'inducteur. La thermographie inductive peut permettre une large zone de détection en augmentant les dimensions de l'inducteur.
- Les délaminages donnent un C^a négatif alors que les ruptures de fibres donnent un C^a positif. Il est alors possible de classifier les deux types de défaut par le C^a.
- Pour les deux types de défaut, ceux à épaisseur plus faible donnent un contraste absolu plus faible, ceux de même taille donnent un contraste absolu plus important lorsqu'ils se trouvent plus proches de la surface d'observation.

Actuellement, les bruits thermiques ne sont pas encore pris en compte, le contraste absolu peut donner des signatures significatives de la présence des défauts. En réalité, le niveau du bruit peut être supérieur aux signatures du défaut, surtout pour des défauts de petites tailles. Dans ce cas, le défaut est détectable seulement s'il donnent un signal plus important que les bruits. On considérera ce cas dans les paragraphes suivant.

4.2.4 Détectabilité avec prise en compte du bruit

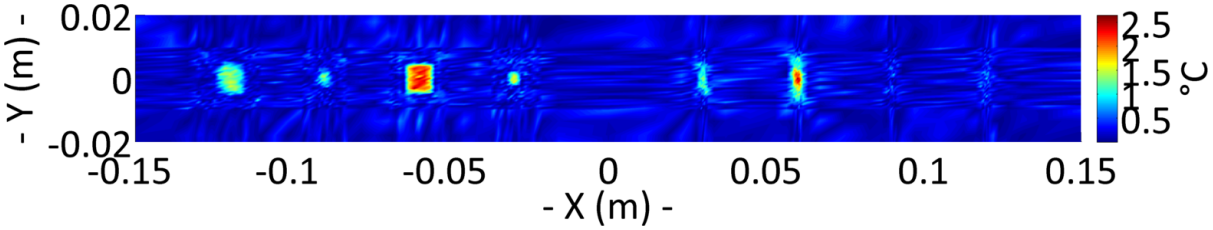
Dans les simulations, les bruits peuvent être modélisés par une distribution Gaussienne à valeur moyenne nulle et d'écart type ϵ. On les connait sous le nom de bruit blanc. Comme dans la thermographie infrarouge, les bruits thermiques peuvent provenir de la caméra infrarouge ou de la non-uniformité de l'émissivité thermique de la surface du matériau.

Pour une caméra infrarouge, les bruits peuvent provenir de la quantification lors de l'étape de numérisation ou du rayonnement électromagnétique des composants électroniques. Ces bruits quantifient la précision de la caméra. Ils sont caractérisés par la différence de température équivalente au bruit (appelée NETD pour Noise Equivalent Temperature Difference). Par exemple, la caméra infrarouge utilisée pour les mesures dans le chapitre 3 possède une NETD de $0.05°C$.

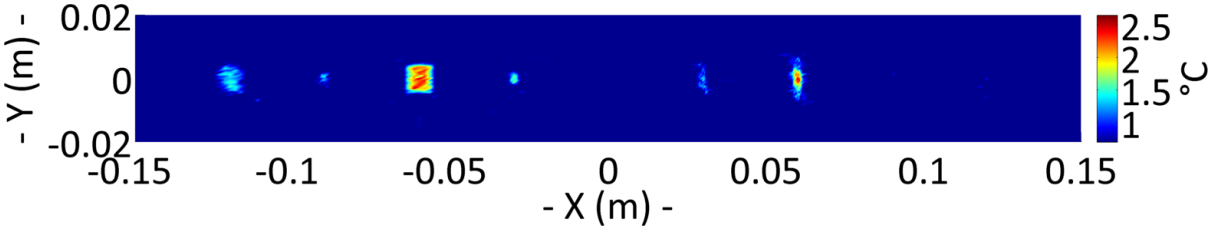
Cependant, la NETD n'est pas suffisante pour représenter les bruits réels, nous avons décidé d'estimer le niveau du bruit à partir des mesures expérimentales. Nous avons utilisé les données des essais effectués dans le chapitre 3. Dans une zone où la température est uniforme, les évolutions temporelles de la température sur les 5 pixels voisins sont comparées l'une avec l'autre. Si on suppose que l'évolution théorique de la température sur les 5 pixels est identique alors la différence de chaque 2 pixels nous donne les échantillons du bruit pour tous les pas d'échantillonnage. Nous avons estimé, à partir de ces échantillons, l'écart type ϵ du bruit en considérant que la valeur moyenne soit nulle (c'est effectivement le cas puisque $T^i_{pixel} - T^j_{pixel} = -(T^j_{pixel} - T^i_{pixel})$). Nous avons obtenu un $\epsilon = 0.089°C$. Cette valeur est bien supérieure à la NETD de la caméra à cause des autres sources de bruit qui peuvent intervenir dans les mesures.

Afin d'évaluer l'influence du bruit sur la détectabilité de la technique, deux bruits d'écart type de $0.15°C$ et de $0.20°C$ seront utilisés dans les simulations qui suivent. La valeur choisie de ϵ est plus grande que celle estimée pour évaluer la robustesse de la technique.

Un exemple de la cartographie de la valeur absolue de C^a bruité est présenté dans la FIGURE 4.9 (a). Pour les images bruitées, le seuillage par la valeur maximale des bruits permet d'éliminer les bruits de la signature des défauts. On obtient l'image donnée dans la FIGURE 4.9 (b). Visuellement, sur cette image, seuls les défauts D1, D2, D3, D4, R1 et R2 sont détectés.



(a) Cartographie du $|C^a|$ prise en compte du bruit.



(b) Cartographie du $|C^a|$ seuillée. La valeur de seuil est égale à $0.7°C$, soit la valeur maximale calculée pour 100 générations d'un bruit d'écart type de $0.15°C$.

FIGURE 4.9 – Contraste absolue de la plaque DR8 avec les signaux bruités. Cas de $h_{def} = h_{pli}/2$.

Qualitativement, en présence de bruit, la détectabilité de défaut diminue. Afin d'évaluer quantitativement la capacité de détection d'une procédure thermographie inductive, nous introduisons la notion probabilité de détection.

Probabilité de détection

Les contrastes thermiques exposent leur valeur maximale au centre des défauts. Pour cette raison, afin de représenter chaque défaut, seul le contraste au centre du défaut est considéré. L'évolution temporelle des bruits thermiques sont générée et additionnée à celle de la température simulée pour produire les signaux bruités. Les contrastes maximaux au centre des défauts calculés avec le signal bruité (noté par C^x_{max}, la lettre x précise le contraste utilisé) et avec le bruit seul (noté par B^x_{max}) sont comparés. Si $C^x_{max} > B^x_{max}$, le défaut est dit détecté, dans le cas contraire quand $C^x_{max} \leq B^x_{max}$, le défaut est considéré non détecté.

Cette procédure est reproduite 100 fois avec 100 générations aléatoires de bruit. La probabilité de détection de défaut (PDD) est définie par le rapport entre le nombre de cas où un défaut est détecté sur le nombre total de générations de bruit.

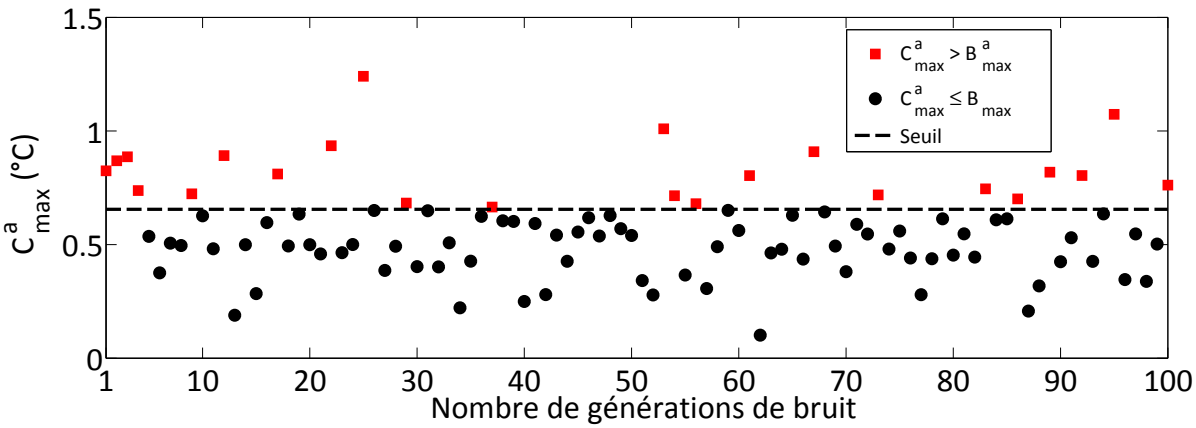


FIGURE 4.10 – Comparaison entre le contraste absolu maximal C^a_{max} du défaut R4 et le seuil déterminé par valeur maximale du bruit ayant un $\epsilon = 0.15°C$.

Sur la FIGURE 4.10 nous donnons un exemple de calcul de la probabilité de détection du défaut R4. La PDD est égale à 23% dans ce cas. Le TABLEAU suivant donne les PDD de tous les défauts de la plaque DR8 en utilisant le contraste absolu.

PDD %, C^a

h_{def}	ϵ	D4	D3	D2	D1	R1	R2	R3	R4
$h_{pli}/2$	0.15°C	100	100	100	100	100	100	7	23
	0.20°C	100	94	100	100	88	100	1	17
$h_{pli}/4$	0.15°C	100	94	100	99	1	46	2	6
	0.20°C	79	54	95	83	1	8	0	0

TABLEAU 4.4 – Probabilité de détection avec le contraste absolu.

Dans ces simulations, on peut voir que :

- Les PDD dans le cas où $h_{def} = h_{pli}/2$ et $\epsilon = 0.15°C$ correspondent bien au résultat obtenu dans la FIGURE 4.9 pour une génération de bruit. En effet, en présence de bruit, les défauts situés en profondeur (par rapport à la surface d'observation de la caméra infrarouge), eg, les défauts R3, R4, peuvent être considérés comme non détectables.
- Quand le niveau de bruit augmente, la PDD diminue dans tous les cas.
- La détectabilité diminue avec la taille du défaut (l'épaisseur et les autres dimensions).

On peut conclure que la détectabilité de défaut dépend du niveau de bruit. Ce dernier dépend non seulement de la précision de la caméra infrarouge mais aussi des conditions de mesure. En pratique, il peut être diminué par l'utilisation d'une caméra de haute précision ou par l'application de peinture noire d'émissivité homogène sur la surface du matériau.

En plus, pour augmenter la PDD, on peut améliorer la signature du défaut par rapport au bruit. Cette amélioration peut être obtenue par un traitement du signal thermique, par exemple, l'utilisation des nouveaux contrastes, ou par l'optimisation du procédé thermographie inductive, par exemple, choisir la fréquence optimale de courant d'inducteur, un dimensionnement adapté de l'inducteur ou l'utilisation d'un temps de chauffe adéquat. On constate à ce stade la nécessité d'avoir un outil de simulation performant. On considérera quelques techniques d'amélioration de la PDD dans les paragraphes suivants.

4.2.5 Augmentation de la probabilité de détection

Nous allons considérer par la suite les deux contrastes de température fréquemment utilisés dans le CND par thermographie. Tous les deux permettent un filtrage des bruits du signal et peuvent améliorer la PDD. L'augmentation du temps de chauffe peut être le moyen le plus simple pour augmenter la signature de défaut. L'efficacité de cette technique sera évaluée à l'aide de l'outil de simulation.

a) Contraste logarithmique

L'équation suivante nous donne l'évolution de la température d'un point (x, y) à la surface d'un corps semi-infini après l'application d'une impulsion de chaleur d'amplitude $Q_{(x,y)}$ [1] :

$$T_{(x,y,t)} = \frac{Q_{(x,y)}}{e_{(x,y)}\sqrt{\pi t}} \tag{4.1}$$

où e est l'effusivité thermique du matériau. Cette solution peut être écrite sous la forme logarithmique [2] :

$$lnT_{(x,y,t)} = ln\frac{Q_{(x,y)}}{e_{(x,y)}} - \frac{1}{2}ln(\pi t) \tag{4.2}$$

Dans cette expression, le premier terme à droite est lié à l'énergie absorbée et aux caractéristiques du matériau, le second terme est une droite de pente $-1/2$. Cette remarque nous permet de penser à approximer le profil logarithmique de $T_{(n_x,n_y,n_t)}$ bruité par un polynôme logarithmique de n^{ieme} ordre [Maldague *et al.*, 2002] :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i ln^i(n_t \Delta t) \approx lnT_{(n_x,n_y,n_t)} \tag{4.3}$$

On cherche d'abord les $(n+1)$ coefficients $(a_{0,..,n})$ qui vérifient (4.3) pour les deux cas avec et sans défaut. Généralement, $n = 5$ est suffisant pour assurer une bonne approximation. Ensuite, la différence entre l'évolution temporelle des températures reconstruites par $\sum_{i=1}^{n} a_i ln^i(t)$ dans le cas avec défaut et sans défaut nous donne le contraste logarithmique :

$$C^{Log} = \sum_{i=1}^{n} a_i^{avec} ln^i(t) - \sum_{i=1}^{n} a_i^{sans} ln^i(t) \tag{4.4}$$

La FIGURE 4.11 montre un exemple d'une cartographie du C^{Log}. Les défauts R3, R4 ne sont pas détectés dans ce cas.

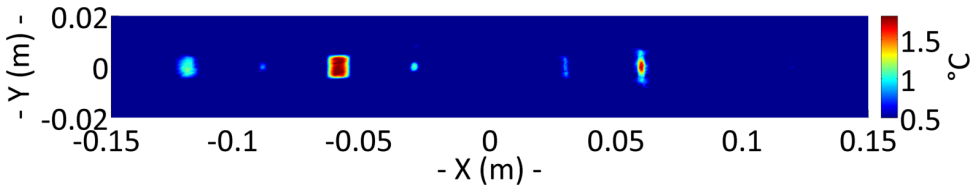


FIGURE 4.11 – Cartographie du contraste logarithmique. Cas avec $h_{def} = h_{pli}/2$, $\epsilon = 0.20°C$.

1. La solution est obtenue par la solution analytique en 1D de l'équation de la diffusion thermique (équation de Fourier) tenant compte des conditions aux limites adiabatiques de convection et de rayonnement. L'impulsion de chaleur est celle de Dirac. $\Delta t = t - t_0 = t$, avec $t_0 = 0s$.
2. $ln(.) = log_e(.)$

									PDD %, C^{Log}
h_{def}	ϵ	D4	D3	D2	D1	R1	R2	R3	R4
$h_{pli}/2$	0.15°C	100	100	100	100	100	100	44	99
	0.20°C	100	97	100	99	98	100	4	17
$h_{pli}/4$	0.15°C	100	100	100	100	9	82	0	8
	0.20°C	100	89	100	98	5	47	0	9

TABLEAU 4.5 – Probabilité de détection avec le contraste logarithmique.

Le TABLEAU 4.5 donne les valeurs de la probabilité de détection obtenues avec le contraste logarithmique. Par rapport au contraste absolu, le C^{Log} permet des PDD plus élevées. Ce contraste est notamment efficace pour les délaminages. Pourtant, dans ce cas, il semble que la technique n'est pas suffisamment robuste pour les ruptures de fibres.

b) Contraste d'amplitude

L'évolution temporelle de la température peut être analysée en domaine fréquentiel. Le passage au domaine fréquentiel s'effectue à l'aide de la transformation de Fourier discrète appliquée sur chacun des pixels de l'image thermique [Maldague *et al.*, 2002] :

$$F_n = \Delta t \sum_{i=0}^{n-1} T(x,y,i) e^{\frac{-j2\pi ni}{N_t}} = Re_n + jIm_n \tag{4.5}$$

où j est le nombre imaginaire ($j^2 = -1$), n l'incrément de fréquence (n =(1,N_t)), Re_n, Im_n sont respectivement la partie réelle et imaginaire de la transformée correspondant à la n^{ieme} fréquence. Ensuite, l'amplitude à chaque fréquence peut être obtenue par :

$$A_n = \sqrt{Re_n^2 + Im_n^2} \tag{4.6}$$

On obtient alors un spectre d'amplitude. La décomposition est effectuée séparément pour les T_{sans} et T_{avec} bruitées et donne respectivement les spectres A_{sans} et A_{avec}. La différence entre ces spectres nous donne le contraste d'amplitude :

$$C^{Amp} = A_{avec} - A_{sans} \tag{4.7}$$

La cartographie présentée dans la FIGURE 4.12 montre une performance remarquable du contraste d'amplitude. Dans ce cas, tous les défauts sont détectés.

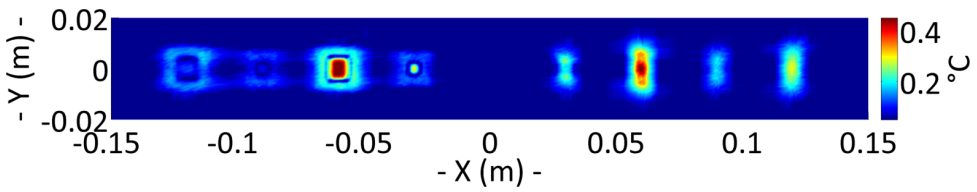


FIGURE 4.12 – Cartographie du contraste d'amplitude. Cas avec $h_{def} = h_{pli}/2$, $\epsilon = 0.20°C$.

PDD %, C^{Amp}

h_{def}	ϵ	D4	D3	D2	D1	R1	R2	R3	R4
$h_{pli}/2$	0.15°C	100	100	100	100	100	100	100	100
	0.20°C	100	100	100	100	100	100	100	100
$h_{pli}/4$	0.15°C	100	100	100	100	94	100	100	100
	0.20°C	100	100	100	100	53	100	100	100

TABLEAU 4.6 – Probabilité de détection avec le contraste d'amplitude.

Utilisant le contraste d'amplitude, la probabilité de détection est nettement améliorée comme le montre dans le TABLEAU 4.6. Seulement, dans le cas de la rupture R1 d'épaisseur $h_{pli}/4$, la probabilité reste encore faible si le niveau de bruit atteint $0.20°C$.

c) Augmentation du temps de chauffe

En augmentant le temps de chauffe, l'effet thermique des perturbations de la puissance induite dans le zone de défaut peut devenir plus marquée. Dans ce cas test, nous choisissons un temps de chauffe de $5s$ ($t_{chauffe} = 2s$, pour les cas précédents) pour le contrôle de la plaque avec l'épaisseur des défauts de $h_{pli}/4$ en présence des bruits d'écart type de $0.20°C$.

PDD %, $t_{chauffe} = 5s$

	D4	D3	D2	D1	R1	R2	R3	R4
C^a	99	95	100	99	2	41	2	8
C^{Log}	100	100	100	100	0	66	5	0
C^{Amp}	100	100	100	100	100	100	100	100

TABLEAU 4.7 – Probabilité de détection des contrastes avec $t_{chauffe} = 5s$. Cas avec $h_{def} = h_{pli}/4$, $\epsilon = 0.20°C$.

L'augmentation du temps de chauffe permet améliorer la PDD des défauts. Cependant, il est encore difficile de détecter les ruptures de fibre avec les contrastes absolu et logarithmique. Par contre, le contraste d'amplitude donne une très bonne détectabilité avec le temps de chauffe plus long.

Des autres paramètres qu'on peut optimiser pour améliorer le signal du défaut sont l'intensité du courant d'inducteur, la fréquence d'excitation, les dimensions et la forme de l'inducteur. Afin de ne pas alourdir ce manuscrit, quelques exemples supplémentaires sont donnés dans l'ANNEXE C.

4.2.6 Influence de l'orientation relative de l'inducteur

Nous avons vu dans le chapitre précédent que l'orientation relative de l'inducteur influence fortement la distribution des courants induits dans le stratifié CFRP. En conséquence, pour un défaut donné, son interaction avec les courants de Foucault dépend de l'orientation de l'inducteur. La détectabilité peut être influencé par cette dernière.

Dans ce cas test, nous considérons la plaque dans la FIGURE 4.4 avec un seul défaut introduit dans le pli 5 (0°). Un inducteur U est posé au-dessus du défaut avec les différentes orientations. Ces dernières sont déterminées par l'angle entre la longueur de l'inducteur et la direction des fibres dans le pli 0°. Les FIGURES 4.13 et 4.14 donnent la cartographie du contraste absolu du défaut obtenu avec différentes orientations de l'inducteur pour les défauts de délaminage et de rupture de fibres respectivement. On peut voir clairement que le contraste absolu dépend fortement de l'orientation de l'inducteur. Par exemple, pour un délaminage dans un pli 0° le contraste absolu est quasiment nul avec l'inducteur à 90° et 135°. Dans le cas d'une rupture de fibre, les contrastes absolus obtenus avec l'inducteur à 45° et à 90° sont très faibles par rapport à l'inducteur à 0° et à 135°.

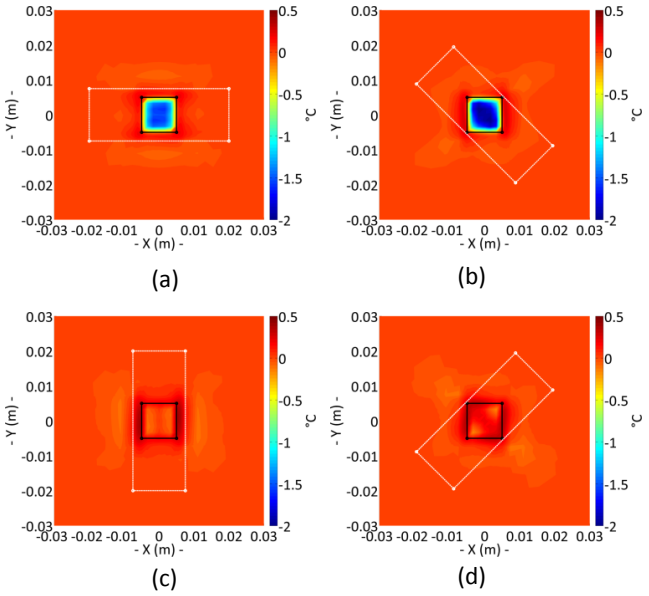


FIGURE 4.13 – Cartographie du contraste absolu avec différentes orientation de l'inducteur θ. (a) 0°, (b) 45°, (c) 90°, (d) 135°. Cas du délaminage. Les traces blanches indiquent la face de l'inducteur vue au dessus.

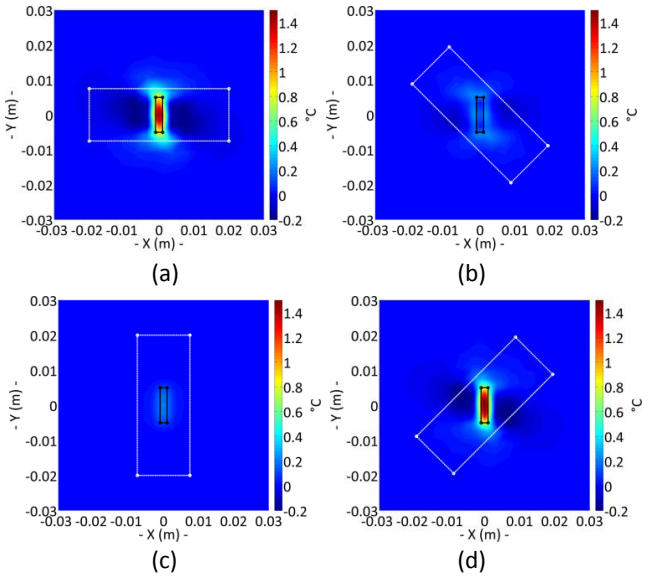


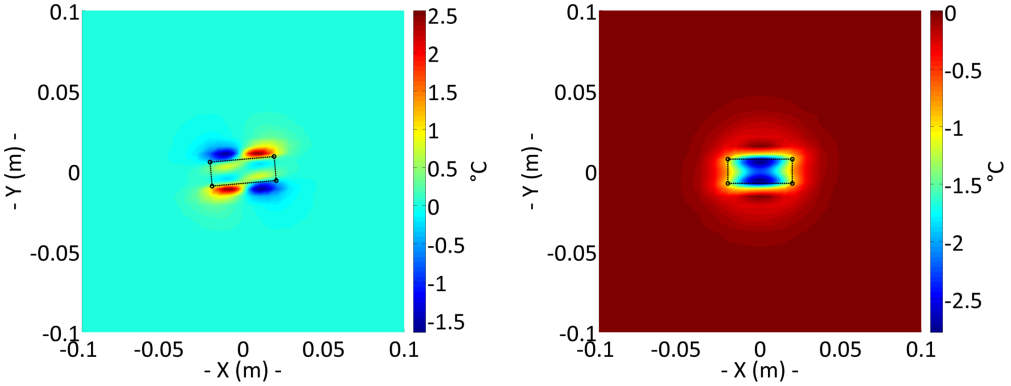
FIGURE 4.14 – Cartographie du contraste absolu avec différentes orientation de l'inducteur θ. (a) 0°, (b) 45°, (c) 90°, (d) 135°. Cas de la rupture de fibre.

On peut retirer pour ces simulations que :

- Il est probablement nécessaire d'effectuer les contrôles avec différentes orientations de l'inducteur de forme U pour une zone de contrôle donnée afin de détecter tous les défauts éventuels.
- Il y a une possibilité de déterminer l'orientation du pli défectueux.

4.2.7 A propos de l'incertitude de détection

En pratique, les données de la température de référence (T_{sans}) peuvent être obtenues par les mesures sur une plaque saine ou dans la zone sans défaut de la même plaque sous contrôle. Dans ce cas, un problème se pose : il s'agit d'assurer les même conditions pour les mesures. Par exemple, le même entrefer et l'orientation de l'inducteur dans les mesures sur la plaque saine et celle à contrôler doivent être respectés. Dans le cas contraire, quand les conditions de contrôle sont modifiées, on risque obtenir de fausses signatures de défaut. Nous traçons dans la FIGURE 4.15 deux exemples.



(a) Cartographie du C^a obtenue avec deux plaques sans défaut avec les orientations de l'inducteur différentes (0° et 5°). La face de l'inducteur à 5° est tracée.

(b) Cartographie du C^a obtenue avec deux plaques sans défaut avec les entrefers différents (3mm et 4mm).

FIGURE 4.15 – Fausses signatures de défaut. Cas de fréquence de $2MHz$, $I = 100A$, $t_{chauffe} = 2s$.

On peut voir dans la FIGURE 4.15 (a) le contraste absolu non nul dans les zones sans défaut lors de changement de l'orientation de l'inducteur entre les mesures. la FIGURE 4.15 (b) donne le résultat quand l'entrefer n'est pas assuré.

Les simulations montrent la pertinence de la technique de thermographie inductive pour détecter les défauts de type délaminage et rupture de fibres à l'échelle d'un pli. De plus, il est possible de caractériser les défauts par cette technique. Nous donnons dans l'ANNEXE C quelques exemples qui montrent la sensibilité des contrastes de température avec la taille et la position de défauts.

A l'aide de l'outil numérique développé, l'approche menée dans cette étude permet d'évaluer l'efficacité de détection de défaut des procédure du CND thermo-inductif. Cette approche peut être utilisée pour une phase d'optimisation et une étude de sensibilité paramétrique fine.

L'optimisation globale de la technique peut demander de nombreuses simulations. Une simulation de la plaque DR8 montrée précédemment demande 7h de calcul en utilisant un PC Intel Xeon E5620 avec 2 processeurs de 2.40GHz. Le maillage contient 188500 d'éléments avec 667108 inconnues au total.

Dans ce cas, les méthodes de réduction du temps de calcul sont souhaitables. Nous présenterons par la suite une perspective de nos travaux dans une tentative de réduire le temps de calcul des simulations des composites stratifiés.

4.3 Éléments de Whitney dégénérés multicouche

Pour les éléments finis, il est souhaitable de ne pas mailler la région mince. Dans ce cas, certaines méthodes permettent de ne mailler que sa surface moyenne qui la remplacera. Afin de prendre en compte la variation des champs à travers son épaisseur, quelques approches utilisent des hypothèses déterminées à priori. Par exemple, dans [Bensaid, 2006], la conductivité électrique suivant l'épaisseur du matériau ($\sigma_z = 0$) est négligée, dans [Guérin, 1994] [Geuzaine *et al.*, 2000] le comportement des champs dans la région mince est prédéterminé et imposées aux surfaces de la région par une condition aux limites. Ces approches négligent toujours la circulation des courants induits suivant l'épaisseur du matériau et donc ne peuvent pas être appliqué aux matériaux composites surtout dans le cas d'un défaut.

Utilisant des éléments de Whitney, Ren a proposé une famille d'éléments dégénérés qui permet de discrétiser les champs dans des régions minces [Ren, 1998] [Ren, 1999]. Les intégrales calculées sur le volume de la région dans la formulation faible obtenue par la méthode de Galerkin sont remplacées par des intégrales surfaciques calculées sur la surface moyenne de cette région. Pour les applications au CND par courants de Foucault, les éléments de Whitney permet de bien prendre en compte l'interaction des courants induits avec des défauts de fissure.

L'approche proposée par Ren permet d'éviter les hypothèses sur les comportements des champs dans le matériau. Cette méthode s'en trouve alors intéressante pour notre cas. Cependant, elle se limite à des régions monocouches isotropes.

Afin de modéliser les composites stratifiés, nous allons présenter par la suite une démarche de généralisation des éléments de Whitney dégénérés aux régions multicouches anisotropes hétérogènes. Les éléments de Whitney dégénérés des éléments hexaédriques seront présentés. Les formulations en potentiel vecteur seront réécrites en utilisant ces éléments. La démarche peut être également appliquée pour les éléments prismatiques dégénérés.

4.3.1 Éléments nodaux

Les fonctions de forme des éléments nodaux de Whitney déterminées pour un hexaèdre régulier sont :

$$w_n^{1-} = \lambda_1\beta^-, w_n^{2-} = \lambda_2\beta^-, w_n^{3-} = \lambda_3\beta^-, w_n^{4-} = \lambda_4\beta^- \tag{4.8}$$
$$w_n^{1+} = \lambda_1\beta^+, w_n^{2+} = \lambda_2\beta^+, w_n^{3+} = \lambda_3\beta^+, w_n^{4+} = \lambda_4\beta^+ \tag{4.9}$$

On retrouve dans ces formules des fonctions de forme déterminées sur un élément quadrilatéral (en 2D) :

$$\lambda_1 = (1-u)(1-v)/4, \lambda_2 = (1+u)(1-v)/4 \tag{4.10}$$
$$\lambda_3 = (1+u)(1+v)/4, \lambda_4 = (1-u)(1+v)/4 \tag{4.11}$$

$\beta^- = (1-w)/2$ et $\beta^+ = (1+w)/2$ sont les fonctions d'interpolation suivant l'axe w correspondant respectivement aux nœuds appartenant aux surfaces inférieure et supérieure de l'élément (FIGURE 4.16).

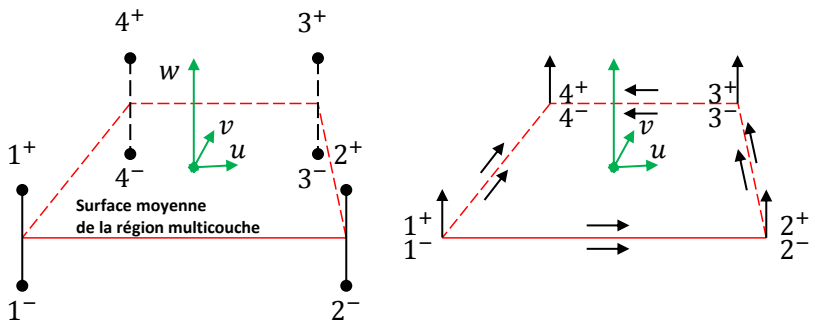


FIGURE 4.16 – Élément dégénéré d'un hexaèdre régulier.

Si on note W_n^{2D} l'ensemble des éléments nodaux définis sur un maillage quadrilatéral sur les surfaces supérieure et inférieure de la région mince, à partir de (4.8) et (4.9), les éléments nodaux dégénérés des hexaèdres réguliers peuvent être déterminés par :

$$W_{nS}^{-,+} = (W_n^{2D}\beta^-, W_n^{2D}\beta^+) \tag{4.12}$$

Un champ scalaire S défini dans la région mince peut être approximé par les éléments dégénérés par :

$$S = \sum_{n \in N} w_n^{2D} < S_n > \tag{4.13}$$

où N est l'ensemble des nœuds du maillage quadrilatéral, $< S_n >= S_{n^-}\beta^- + S_{n^+}\beta^+$ est la moyenne pondérée des valeurs nodaux de S.

4.3.2 Éléments d'arête

Les éléments d'arête de Whitney dans un élément hexaédrique de premier ordre peuvent être déterminés par :

$$\boldsymbol{W}_a^{i-j-} = w_n^{i-}\boldsymbol{\nabla}(w_n^{l-}) - w_n^{j-}\boldsymbol{\nabla}(w_n^{k-}) \tag{4.14}$$
$$\boldsymbol{W}_a^{i+j+} = w_n^{i+}\boldsymbol{\nabla}(w_n^{l+}) - w_n^{j+}\boldsymbol{\nabla}(w_n^{k+}) \tag{4.15}$$
$$\boldsymbol{W}_a^{i-i+} = w_n^{i-}\boldsymbol{\nabla}\beta^- - w_n^{i+}\boldsymbol{\nabla}\beta^+ \tag{4.16}$$

Dans ces formules, les nœuds $l\pm$ sont directement liés avec les nœuds $i\pm$ par une arête et ne sont pas liés aux nœuds $j\pm$, les nœuds $k\pm$ sont liés avec les nœuds $j\pm$ par une arête commune et ne sont pas liés aux nœuds $i\pm$. Les éléments d'arête dégénérés de ces éléments sont écrits comme suit :

$$\boldsymbol{W}_{aS}^{-,+,\pm} = (\boldsymbol{W}_a^{2D}\beta^-, \boldsymbol{W}_a^{2D}\beta^+, W_n^{2D}\boldsymbol{\nabla}\beta^+) \tag{4.17}$$

$\boldsymbol{W}_a^{2D}$ est l'ensemble des éléments d'arête définis sur un quadrilatère dont les fonctions de forme peuvent être déterminées comme suit :

$$\boldsymbol{W}_{ij}^{2D} = \lambda_i\boldsymbol{\nabla}(\lambda_i + \lambda_l) - \lambda_j\boldsymbol{\nabla}(\lambda_j + \lambda_k) \tag{4.18}$$

où la définition des nœuds l et k est mentionnée précédemment.

Un champ vectoriel $\boldsymbol{V}$ défini dans la région mince peut être interpolé par les éléments dégénérés par :

$$\boldsymbol{V} = \sum_{a \in A} \boldsymbol{W}_a^{2D} < V_a > + \sum_{n \in N} w_n^{2D} V_n \boldsymbol{n} \tag{4.19}$$

On note A l'ensemble des arêtes du maillage quadrilatéral dégénéré de celui hexaédrique, $< V_a >= V_{a^-}\beta^- + V_{a^+}\beta^+$ est la moyenne pondérée des circulations sur les arêtes $a^\pm$ de $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{n}$ est la normale à la surface de la région mince, V_n est la composante normale de $\boldsymbol{V}$ au nœud n.

4.3.3 Formulation $A - \phi$ en région mince

En utilisant des éléments dégénérés, les champs scalaire et vectoriel peuvent déjà être discrétisés sur les nœuds et les arêtes d'un maillage quadrilatéral bicouche. Ce maillage quadrilatéral peut être obtenu par le dédoublement des nœuds et des arêtes de la surface moyenne de la région mince remplacée. L'intégrale sur le volume de la région mince (ÉQUATION (2.48)) peut être transformée en l'intégrale surfacique effectuée sur toute sa surface :

$$\begin{gathered}\int_{\Omega_c} \frac{1}{[\mu]} \boldsymbol{rot}\boldsymbol{W}_a \boldsymbol{rot}\boldsymbol{A} d\Omega = \\ \int_\Gamma \frac{1}{\varepsilon[\mu]} [\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{W}_a^{2D}][\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{A}] d\Gamma + \\ \int_\Gamma \varepsilon \frac{1}{[\mu]} \left(\int_{-1}^{+1} \boldsymbol{rot} < \boldsymbol{W}_a^{2D} > \boldsymbol{rot} < \boldsymbol{A} > dw \right) d\Gamma\end{gathered} \tag{4.20}$$

$$\int_{\Omega_c} [\sigma](\boldsymbol{W}_a + \boldsymbol{grad} W_n)(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{grad}\phi)\, d\Omega =$$
$$\int_{\Gamma} \frac{[\sigma]}{\varepsilon}\left(\varepsilon W_{an} + [W_n^{2D}]\right)(\varepsilon A_n + [\phi])\, d\Gamma +$$
$$\int_{\Gamma} \varepsilon[\sigma]\left(\int_{-1}^{+1} < \boldsymbol{W}_a^{2D} + \boldsymbol{grad} W_n^{2D} >< \boldsymbol{A} + \boldsymbol{grad}\phi > dw\right) d\Gamma \tag{4.21}$$

On note par ε l'épaisseur de la région mince, $[X] = X_{i+} - X_{i-}$ le saut de X à travers Ω_c, $< X >$ la moyenne pondérée de X.

Régions multicouches

Dans le cas d'une région multicouche, il faut d'abord créer des maillages quadrilatéraux bicouches qui représentent chaque couche volumique de la région (FIGURE 4.17). Les intégrales effectuées sur le volume de chaque couche volumique sont transformées en intégrales surfaciques calculées sur les deux surfaces du maillage quadrilatéral bicouche correspondant.

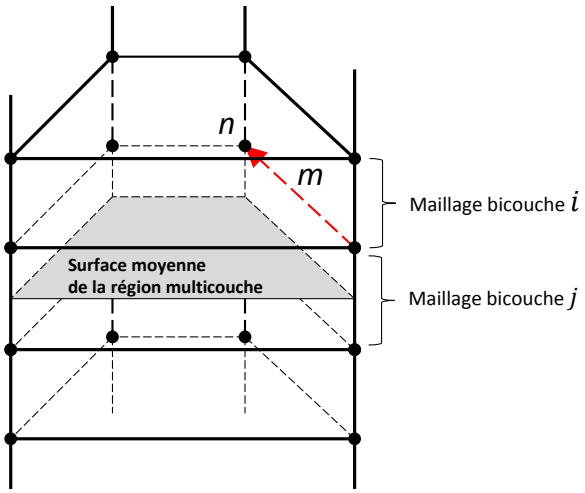


FIGURE 4.17 – Les maillages bicouches d'une région multicouche volumique.

Finalement, les coefficients associées aux arêtes et aux nœuds communs entre deux maillages quadrilatéraux bicouches (par exemple, l'arrête m et le nœud n sont communs du maillage i et j) est la somme de ceux calculés dans chaque maillage. On a alors :

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1,k}\int_{\Omega_c^i}\frac{1}{[\mu]_i}\boldsymbol{rot}\boldsymbol{W}_a\boldsymbol{rot}\boldsymbol{A}d\Omega = \\
\int_\Gamma \frac{1}{\varepsilon_1[\mu]_1}[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{W}_a^{2D}][\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}]d\Gamma + \\
\int_\Gamma \frac{1}{\varepsilon_2[\mu]_2}[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{W}_a^{2D}][\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}]d\Gamma + \\
\ldots + \int_\Gamma \frac{1}{\varepsilon_k[\mu]_k}[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{W}_a^{2D}][\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A}]d\Gamma + \\
\int_\Gamma \varepsilon_1\frac{1}{[\mu]_1}\left(\int_{-1}^{+1}\boldsymbol{rot}<\boldsymbol{W}_a^{2D}>\boldsymbol{rot}<\boldsymbol{A}>dw\right)d\Gamma \\
\int_\Gamma \varepsilon_2\frac{1}{[\mu]_2}\left(\int_{-1}^{+1}\boldsymbol{rot}<\boldsymbol{W}_a^{2D}>\boldsymbol{rot}<\boldsymbol{A}>dw\right)d\Gamma \\
\ldots + \int_\Gamma \varepsilon_k\frac{1}{[\mu]_k}\left(\int_{-1}^{+1}\boldsymbol{rot}<\boldsymbol{W}_a^{2D}>\boldsymbol{rot}<\boldsymbol{A}>dw\right)d\Gamma
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1,k}\int_{\Omega_c^i}[\sigma]_i(\boldsymbol{W}_a+\boldsymbol{grad}W_n)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{grad}\phi)d\Omega = \\
\int_\Gamma \frac{[\sigma]_1}{\varepsilon_1}\left(\varepsilon_1 W_{an}+[W_n^{2D}]\right)(\varepsilon_1 A_n+[\phi])d\Gamma + \\
\int_\Gamma \frac{[\sigma]_2}{\varepsilon_2}\left(\varepsilon_2 W_{an}+[W_n^{2D}]\right)(\varepsilon_2 A_n+[\phi])d\Gamma + \\
\ldots + \int_\Gamma \frac{[\sigma]_k}{\varepsilon_k}\left(\varepsilon_k W_{an}+[W_n^{2D}]\right)(\varepsilon_k A_n+[\phi])d\Gamma + \\
\int_\Gamma \varepsilon_1[\sigma]_1\left(\int_{-1}^{+1}<\boldsymbol{W}_a^{2D}+\boldsymbol{grad}W_n^{2D}><\boldsymbol{A}+\boldsymbol{grad}\phi>dw\right)d\Gamma \\
\int_\Gamma \varepsilon_2[\sigma]_2\left(\int_{-1}^{+1}<\boldsymbol{W}_a^{2D}+\boldsymbol{grad}W_n^{2D}><\boldsymbol{A}+\boldsymbol{grad}\phi>dw\right)d\Gamma \\
\ldots + \int_\Gamma \varepsilon_k[\sigma]_k\left(\int_{-1}^{+1}<\boldsymbol{W}_a^{2D}+\boldsymbol{grad}W_n^{2D}><\boldsymbol{A}+\boldsymbol{grad}\phi>dw\right)d\Gamma
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

4.3.4 Comparaisons

Trois cas de matériaux sans et avec défaut seront considérés. Dans le premier cas, nous calculons les courants induits dans un composite unidirectionnel et comparons les résultats avec la solution analytique. Dans le deuxième cas, une plaque multiplis sans défaut est considérée. Dans le troisième cas, afin de montrer l'exploitabilité de la méthode des éléments de Whitney dégénérés multicouches à la modélisation des procédures du CND thermo-inductif des CFRP, nous considérerons le cas d'un défaut de fissure au centre d'un matériau multiplis. Les courants de Foucault obtenus par la méthode des Eléments de Whitney Dégénérés Multicouches (**EWDM**) seront comparés avec les solutions obtenues avec la méthode des éléments Hexaédriques Volumiques (**HV**).

a) Cas d'un matériau unidirectionnel sans défaut

Un inducteur U de type filaire est posé au-dessus et centré sur une plaque plane d'épaisseur $136\mu m$. Il a un seul fil parcouru par un courant d'amplitude de 1A. Sa direction est parallèle à l'axe Ox comme montré sur la FIGURE 4.18. Sur la même figure, les dimensions du cas test sont précisées. L'entrefer est égale à 5mm. La plaque est conductrice anisotrope uni-axiale dont l'axe de l'anisotropie est suivant Ox. Le ratio d'anisotropie est égal à 100 avec $\sigma_x = 4 \times 10^4 S/m$ et $\sigma_y = \sigma_z = 4 \times 10^2 S/m$. La fréquence du courant inducteur est de $1MHz$. Dans le modèle des EWDM, nous avons utilisé une couche pour discrétiser l'épaisseur du matériau.

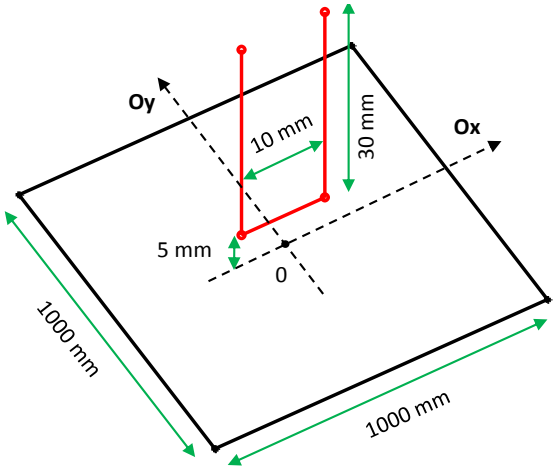


FIGURE 4.18 – L'inducteur U et le domaine conducteur.

La variation de la densité des courants induits suivant les axes Ox et Oy (FIGURE 4.18) à la surface supérieure de la plaque est tracée sur la FIGURE 4.19.

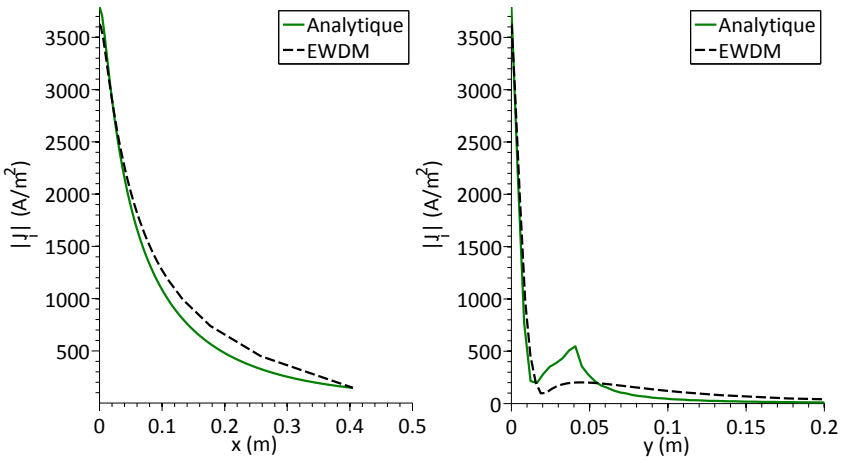


FIGURE 4.19 – Comparaison de la variation de la densité des courants induits.

On peut voir une assez bonne concordance comparée avec la solution analytique. Cependant, la précision des EWDM peut dépendre de plusieurs facteurs, notamment, le nombre de couches utilisées, le rapport entre l'épaisseur de peau et l'épaisseur d'une couche, le ratio d'anisotropie et aussi la déformation des éléments. Dans cette partie, l'influence de ces facteurs n'est pas étudiée. Par contre, nous montrons dans les paragraphes suivants une application des EWDM à la modélisation des stratifiés composites multiplis.

b) Cas d'un CFRP multiplis sans défaut

Avant de passer à une étude détaillée, nous observons tout d'abord le comportement global de la solution donnée par les EWDM dans le cas d'une région multiplis sans défaut. Les résultats de simulation de l'essai à 1663 kHz présenté dans le chapitre 3 avec les EWDM et les HV sont comparés. Nous donnons ci-après dans les FIGURES 4.20 et 4.21, la puissante induite totale calculée dans chaque pli pour les cas d'inducteur à 0° et 90°.

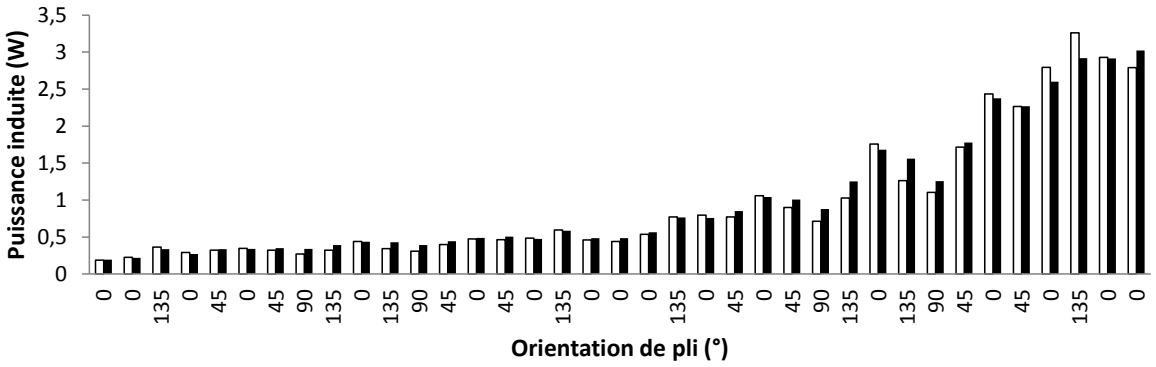


FIGURE 4.20 – Comparaison de la puissance totale dans chaque pli. Inducteur à 0°

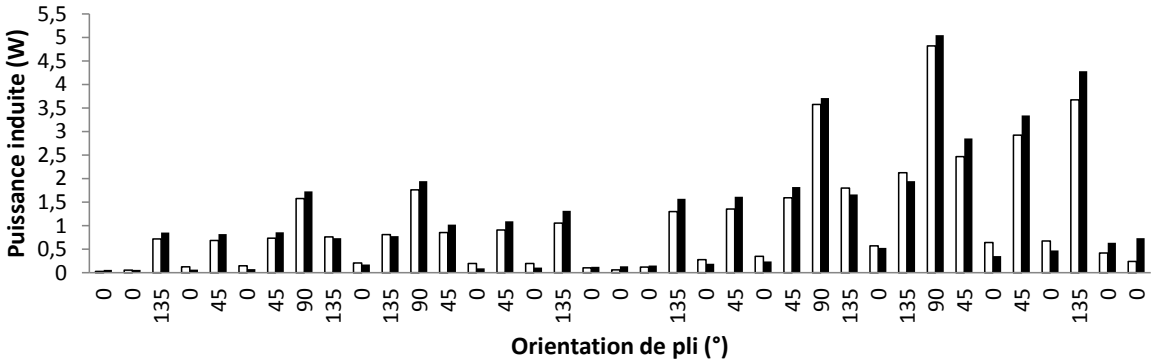


FIGURE 4.21 – Comparaison de la puissance totale dans chaque pli. Inducteur à 90°

Les comparaisons montrent une distribution similaire de la puissance induite obtenue avec les deux méthodes. Le plan de drapage est très bien pris en compte par la méthode des éléments de Whitney dégénérés multicouches généralisée. Ces résultats motivent les comparaisons suivantes où un défaut est considéré.

c) Cas d'un CFRP multiplis avec défaut

La plaque de 3 plis étudiée a un plan de drapage [0°/45°/90°]. Chaque pli a une $\sigma_{\parallel} = 4 \times 10^4 S/m$, $\sigma_{\perp} = 8S/m$ et $\sigma_z = 8S/m$. Un trou de forme rectangulaire est introduit au centre du matériau. Il traverse de part et d'autre de la plaque. La géométrie et les dimensions du cas test sont données sur la FIGURE 4.22.

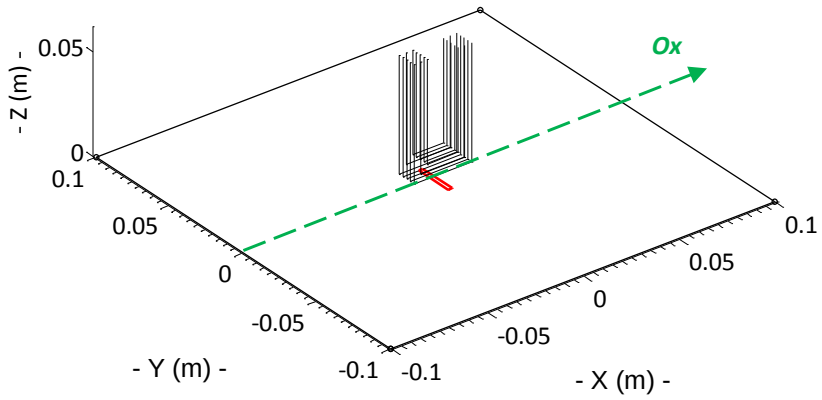
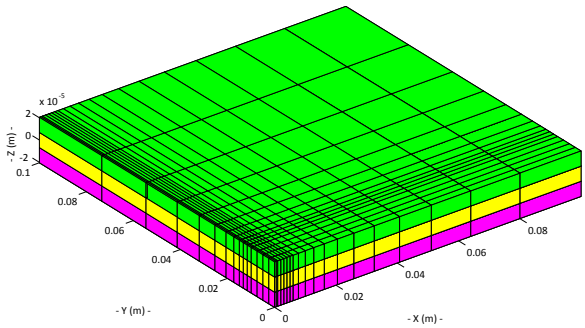
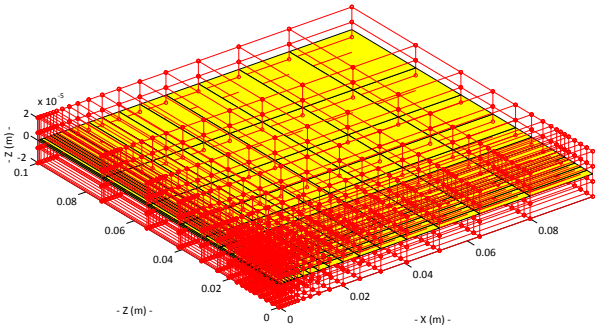


FIGURE 4.22 – L'inducteur U filaire et le domaine conducteur avec une fissure au centre.

Dans la FIGURE 4.23, les maillages du domaine conducteur utilisés par les méthodes des HV et des EWDM sont présentés. Pour le cas des EWDM, le maillage est reconstruit à partir du maillage 2D de la surface du matériau.



(a) Maillage hexaédrique volumique.



(b) "Maillage" dégénéré.

FIGURE 4.23 – Les maillages. Un quart du domaine conducteur est tracé.

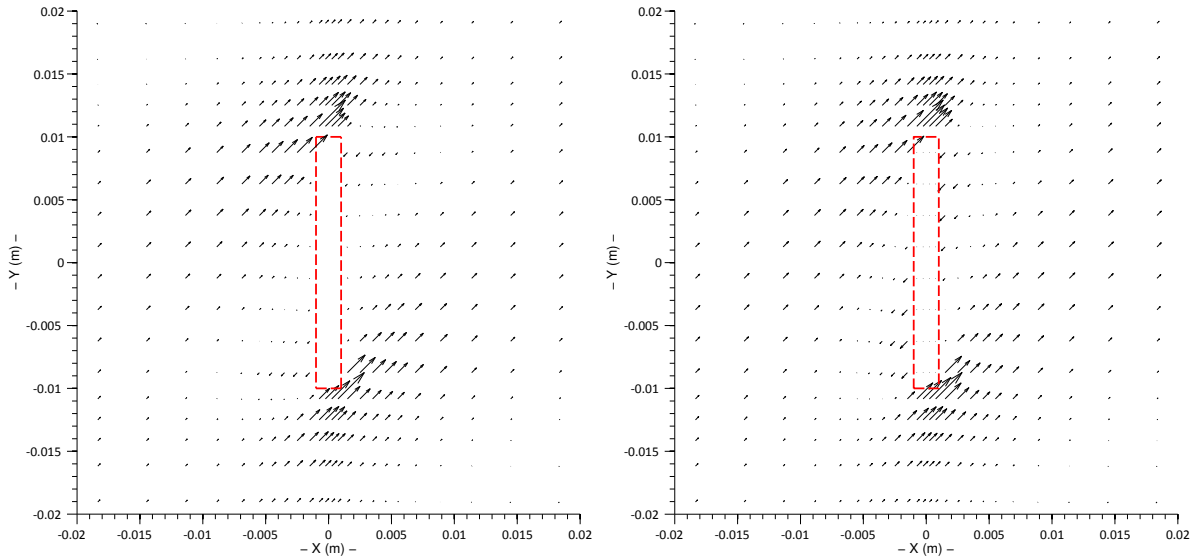
Les trois plis ont la même épaisseur notée h. Afin d'évaluer l'effet du rapport entre l'épaisseur de peau et l'épaisseur d'une couche et l'effet de la déformation du maillage sur la précision et la convergence de la méthode des EWDM, nous considérons les cas où $h = 136\mu m$ et $h = 13.6\mu m$. Dans ces cas, une épaisseur de peau indicative est définie par :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma_{\|}}} \tag{4.24}$$

La même fréquence de $1MHz$ est utilisée dans toutes les simulations ce qui donne des rapports $h/\delta = 0.054$ et $h/\delta = 0.0054$ pour $h = 136\mu m$ et $h = 13.6\mu m$ respectivement.

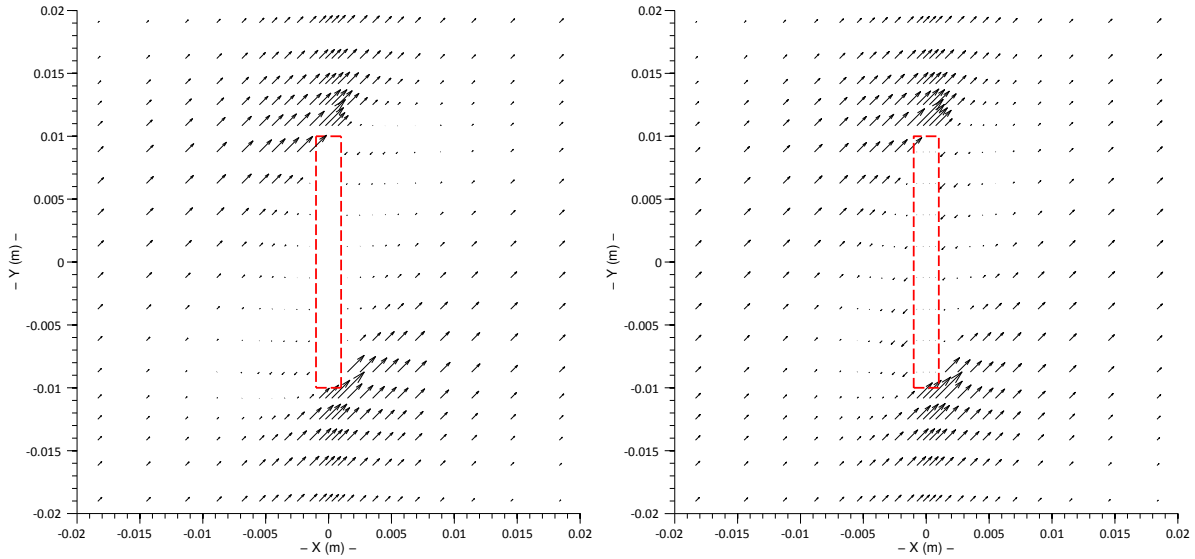
• Circulation des courants induits

Comme montré sur les FIGURES 4.24 et 4.25, l'utilisation des EWDM permet de respecter les circulations des courants induits dans des plaques multiplis. L'interaction des courants induits avec le défaut est aussi bien simulée lorsqu'on compare avec la méthode des HV. Pour ce type de défaut, les courants ne peuvent pas le traverser et s'intensifient sur ses extrémités.



(a) HV (b) EWDM

FIGURE 4.24 – Partie imaginaire de $\boldsymbol{J}$, couche 2 (45°)



(a) HV (b) EWDM

FIGURE 4.25 – Partie réelle de $\boldsymbol{J}$, couche 2 (45°)

• Densité des courants induits

Les FIGURES 4.26 et 4.27 donnent les variations des courants de Foucault suivant l'axe Ox à la surface supérieure de la plaque (FIGURE 4.22). En comparant avec le modèle HV, on peut voir que l'écart entre les deux modèles est corrélé au rapport h/δ. L'écart diminue lorsque ce rapport diminue.

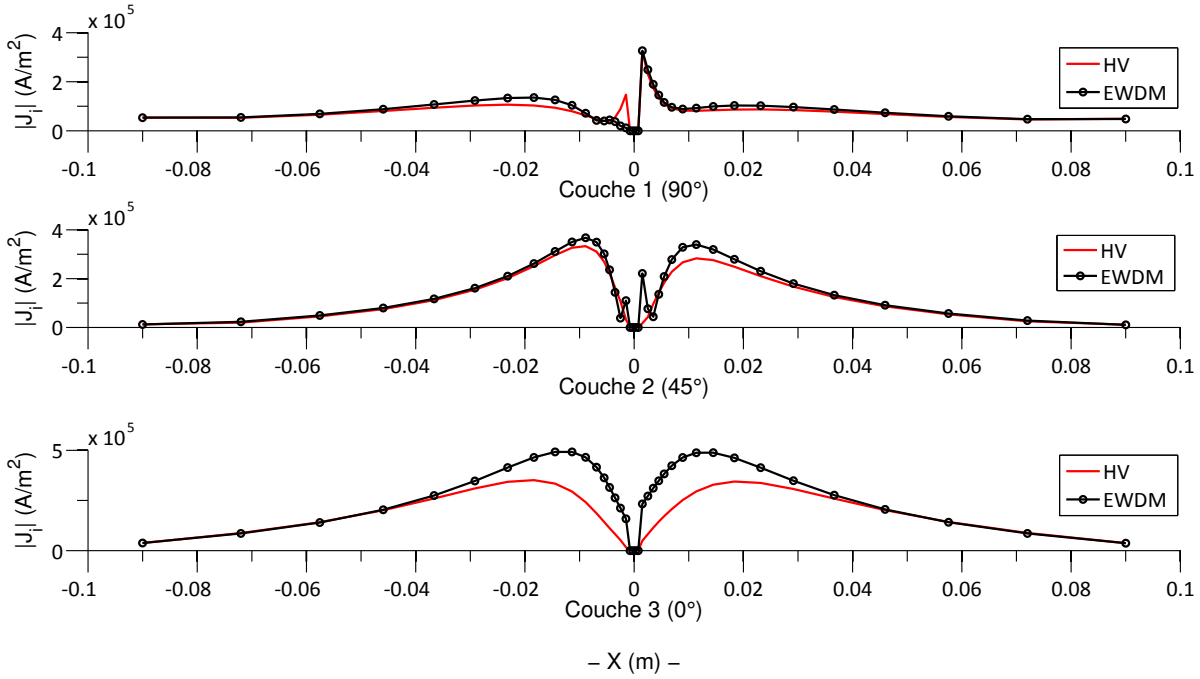


FIGURE 4.26 – Comparaison de l'évolution de la densité des courants induits suivant Ox. $h = 136\mu m$ et $h/\delta = 0.054$.

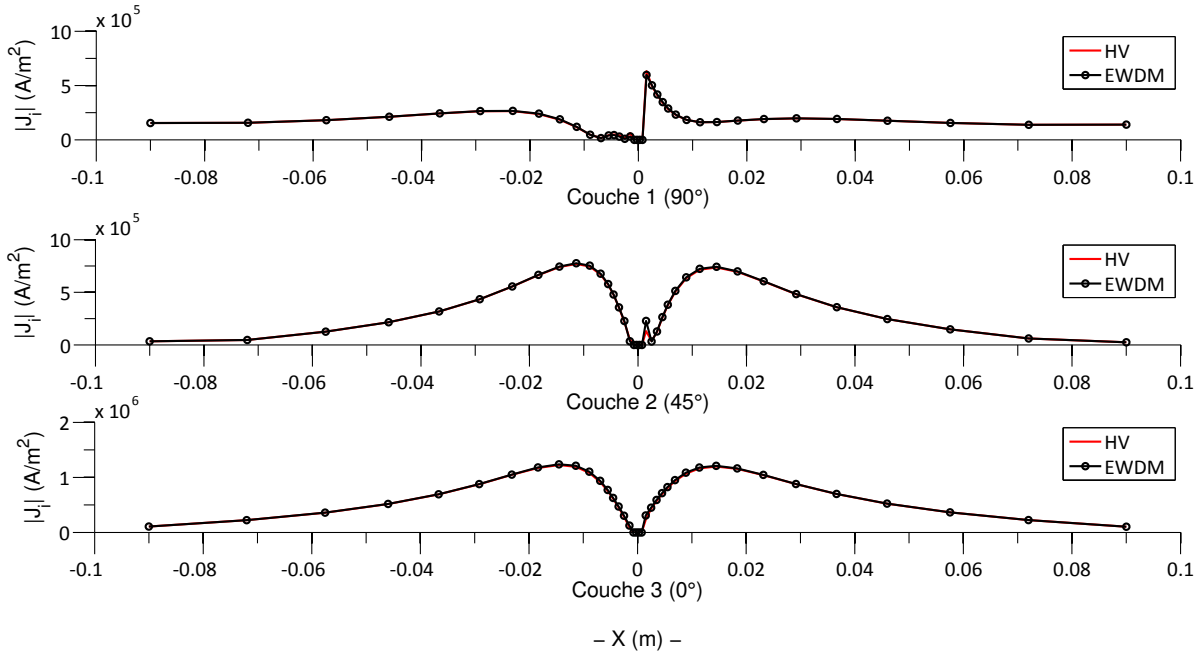
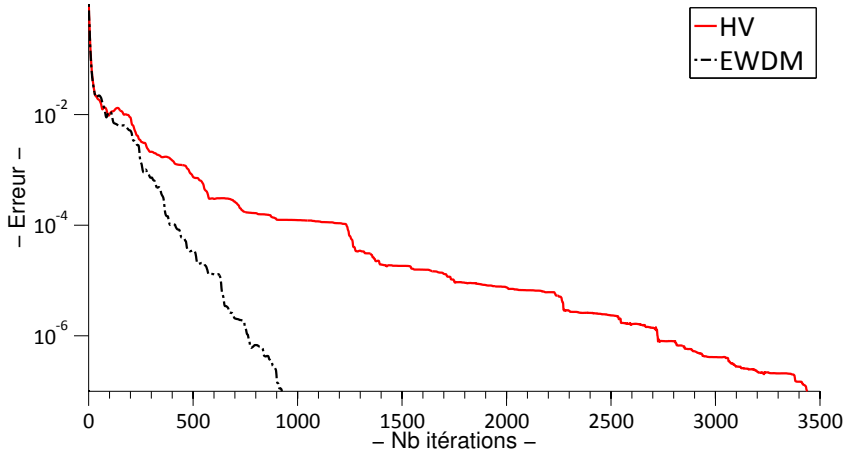
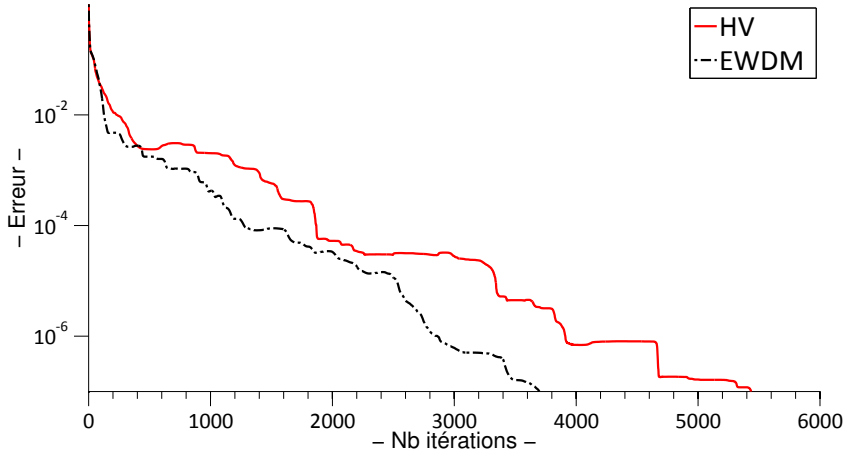


FIGURE 4.27 – Comparaison de l'évolution de la densité des courants induits suivant Ox. $h = 13.6\mu m$ et $h/\delta = 0.0054$.



(a) Cas 1. $h = 136\mu m$ et $h/\delta = 0.054$



(b) Cas 2. $h = 13.6\mu m$ et $h/\delta = 0.0054$

FIGURE 4.28 – Comparaisons de la convergence.

Sur la FIGURE 4.25, nous montrons des comparaisons entre la convergence des HV et EWDM. Pour ces cas tests, les EWDM convergent plus rapidement que les HV. Un facteur de 3.5 peut être observé dans le cas 1 alors que pour le cas 2 nous obtenons un facteur de 1.5. Il faut préciser que les EWDM utilisent moins d'inconnues par rapport aux HV. Cette caractéristique permet d'améliorer en plus le temps de calcul du modèle. Le temps de calcul du modèle hexaédrique volumique pour le Cas 1 (FIGURE 4.28) est de 25 minutes alors que le temps de calcul du modèle des éléments dégénérés multi-couches est de 7 minutes.

4.4 Conclusion

Le modèle développé nous a permis de modéliser précisément les interactions des courants induits avec des défauts de natures différentes. Les délaminages ne perturbent pas les circulations des courants induits. Cependant, ils peuvent être détectés par leurs perturbations de la diffusion de chaleur dans le matériau. Cet effet entraîne une chute locale de température sur la surface de la plaque sous contrôle. L'interaction des ruptures de fibres avec la propagation de la chaleur n'est pas significative ce qui explique pourquoi ce type de défaut est difficile à détecter par la thermographie infrarouge. Mais ces défauts perturbent fortement les circulations des courants de Foucault ce qui peut générer des zones de concentration de la puissance induite dans les régions de défaut. Cet effet entraîne une augmentation locale de la température sur la surface du matériau. Il est alors possible

de détecter ces défauts par un contraste absolu positif.

Les simulations ont montré la pertinence de la technique thermographie inductive pour le CND des composites CFRP. En effet, la technique permet de relever des défauts de délaminages et de ruptures de fibres qui s'avèrent être des défauts difficiles à détecter par d'autres techniques de CND. La technique peut permettre un test global et par conséquence réduire le temps de contrôle. Pour les deux types de défaut présents à l'échelle d'un pli, les signatures de défaut dépendent de l'orientation relative entre l'inducteur droit et l'orientation du pli défectueux, il est probablement possible de déterminer l'orientation du pli de défaut.

Les performances de la technique dépendent de plusieurs paramètres opératoires et de conception. Nous avons montré une utilisation du modèle à l'évaluation de l'efficacité de détection d'une procédure thermo-inductive. Par rapport aux autres méthodes, le traitement du signal thermique par le contraste d'amplitude s'avère efficace (robuste) pour la détection de défaut. Quand le niveau de bruit est important, il est nécessaire d'augmenter la température du matériau par une augmentation du temps de chauffe ou du courant d'excitation. Certains facteurs qui nuisent à la détectabilité de la méthode peuvent être également prévus par les simulations.

La méthode des éléments de Whitney dégénérés donne des très bons résultats comparés avec les éléments hexaédriques volumiques. Les deux méthodes donnent des comportements des courants induits similaires pour tous les cas tests. La méthode des éléments de Whitney dégénérés multicouches s'en trouve très intéressante en permettant d'améliorer la convergence, et par conséquence le temps de calcul, de la résolution numérique.

La méthode pourrait être plus attrayante en intégrant avec un mailleur 3D. Ce dernier permet de résoudre le problème de discrétisation spatiale des géométries complexe du maillage tranche développé au laboratoire.

Conclusion générale

Le développement à grande échelle des composites passe par une amélioration des outils d'estimation de la santé matière. La méthode de thermographie inductive développée depuis plusieurs années par l'IREENA répond de façon positive aux limitations des autres techniques d'investigation des CFRP. Cette méthode possède l'avantage de combiner les capacités de détection des méthodes CND par courant de Foucault et par thermographie infrarouge.

Les paramètres influents (physiques, opératoires,...) sur les performances de cette méthode CND sont nombreux. L'optimisation de la méthode nécessite alors la réalisation d'un outil de modélisation multiphysique performant. Ce modèle doit être précis tout en conservant une complexité numérique et un temps de calcul relativement faible.

Les travaux précédents ont démontré l'influence du plan de drapage sur la circulation des courants de Foucault. De plus, les défauts rencontrés sont généralement à l'échelle du pli. Il est alors nécessaire de modéliser le composite couche par couche. Cette contrainte de modélisation pousse à déformer le maillage de façon très importante et ainsi dégrader la précision des résultats.

Dans un premier temps, l'influence de la déformation du maillage a été étudiée sur des éléments hexaédriques et tétraédriques. Dans notre cas, la grande stabilité des éléments hexaédriques face aux déformations nous a poussé à privilégier ce type d'élément. Cette étude nous également permis d'implémenter dans le logiciel du laboratoire un code de calcul analytique permettant d'évaluer la circulation des courants induits dans une plaque anisotrope monocouche avec une forme d'inducteur arbitraire.

L'utilisation des éléments hexaédriques a été intégrée dans un modèle numérique électrothermique à l'échelle mésoscopique (celle d'un pli) d'un composite stratifié réel soumis à un champ magnétique variable. De plus, l'influence de la prise en compte du terme source fourni par la circulation du courant inducteur a été étudiée. Le calcul de ce terme source par Biot-Savart permet de ne pas mailler l'inducteur et ainsi réduire la complexité numérique. Pour autant, cela se traduit par une surestimation de la puissance induite dans l'inducteur. En effet, la réaction d'induit de la plaque sur l'inducteur est négligée. Mailler l'inducteur et utiliser le modèle des grandeurs globales imposées (imposer la tension ou le courant inducteur) a permis d'améliorer de manière significative la précision des résultats obtenus malgré une augmentation du temps de calcul. Ces résultats ont été validés par des expérimentations.

Le code de calcul developpé a ensuite été utilisé pour évaluer la pertinence de la technique thermo-inductive. Une étude de cas sur des défauts complexes a été menée et sur laquelle de nouveaux contrastes de défaut ont été proposés en tenant compte du bruit lié à l'expérimentation.

Enfin, de façon à amorcer une réflexion sur une amélioration du temps de calcul, une généralisation des éléments de Whitney dégénérés au cas multicouche anisotrope a été proposée avec prise en compte de défauts. Un défaut de rupture de fibre a été modélisé. Bien que la distribution des densités

de courant induit donne une bonne concordance entre les résultats avec maillage volumique et éléments dégénérés, cette étude préliminaire a montré une grande sensibilité des amplitudes des densités de courant au rapport entre l'épaisseur de la plaque et l'épaisseur de peau.

Quoiqu'il en soit, les différents modules développés offrent à l'utilisateur une grande flexibilité de modélisation pour obtenir le compromis précision/temps de calcul souhaité. L'étude préliminaire de la performance de la technique thermographie inductive montre sa pertinence dans l'application au CND des composites stratifiés pour les défauts à l'échelle mésoscopique. L'outil de simulation permet d'évaluer l'influence des différents paramètres opératoires afin d'optimiser la technique.

L'enrichissement du logiciel est encore possible et pourrait porter sur :

- L'extension du modèle analytique aux stratifiés multiplis ;
- La mise en œuvre la formulation $\boldsymbol{T} - \Omega$ pour les domaines multiplement connexes ;
- Le développement d'un mailleur adaptatif aux régions minces anisotropes ;
- Fabrication en concertation avec des industriels de matériaux avec défaut de façon à améliorer les codes de calcul.

Pour finir, le travail prospectif sur les éléments de Whitney dégénérés multicouches est encourageant et mériterait d'être poursuivi.

Bibliographie

[Air, 2009] (2009). http ://www.airbus.com/.

[Barrau et Guedra Degeorges, 2004] BARRAU, J. et GUEDRA DEGEORGES, D. (2004). Structures en matériaux composites. *Technique de l'ingénieur*.

[Bensaid, 2006] BENSAID, S. (2006). *Contribution a la caractérisation et a la modélisation électromagnétique et thermique des matériaux composites anisotropes*. Thèse de doctorat, Université de Nantes.

[Berreur *et al.*, 2002] BERREUR, L., de MAILLARD, B. et STANISLAS, N. (2002). L'industrie française des matériaux composites. Rapport technique, Direction Générale de l'Industrie, des Technologies de l'Information et des Postes (DiGITIP) du Ministère de l'Economie, des Finances et de l'Industrie.

[Burke, 1990] BURKE, S. K. (1990). Eddy-current induction in a uniaxially anisotropic plate. *Journal of Applied Physics*, 68(7):3080.

[Cacciola *et al.*, 2009] CACCIOLA, M., CALCAGNO, S., MEGALI, G., PELLICANO, D., VERSACI, M. et MORABITO, F. C. (2009). Eddy Current Modeling in Composite Materials. *PIERS*, 5(6):591–595.

[Castaings, 2008] CASTAINGS, M. (2008). Simulation du contrôle non destructif par ultrasons. *In Confédération Française pour les Essais non Destructifs (Cofrend)*, Toulouse, France. Université Bordeaux 1 – Laboratoire de Mécanique Physique.

[Cawley et Adams, 1989] CAWLEY, P. et ADAMS, R. D. (1989). Defect types and non-destructive testing techniques for composites and bonded joints. *Materials Science and Technology*, 5:413–425.

[Cinquin, 2002] CINQUIN, J. (2002). Les composites en aérospatiale. *Techniques de l'Ingénieur, traité Plastiques et Composites*.

[Corcolle *et al.*, 2014] CORCOLLE, R., PRÉAULT, V., DANIEL, L. et PICHON, L. (2014). Homogenization Model for Shielding Effectiveness of High Concentration Fiber Composites. *In Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC)*, volume 3.

[Dhattt et Touzot, 1981] DHATTT, G. et TOUZOT, G. (1981). *Une présentation de la méthode des éléments finis*, volume 10. Maloine S.A. Editeur Paris et Les Presses de l'Université Laval Québec.

[Dodd et Deeds, 1968] DODD, C. V. et DEEDS, W. E. (1968). Analytical Solutions to Eddy-Current Probe-Coil Problems. *Journal of Applied Physics*, 39(6):2829–2838.

[Dular *et al.*, 1998] DULAR, P., LEGROS, W. et NICOLET, A. (1998). Coupling of Local and Global Quantities in Various Finite Element Formulations and its Application to Electrostatics, Magnetostatics and Magnetodymanics. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34(5):3078–3081.

[Dular *et al.*, 1995] DULAR, P., NICOLET, A., GENON, A. et LEGROS, W. (1995). A Discrete Sequence Associated with Mixed Finite Elements and its Gauge Condition for Vector Potentials. *IEEE Transactions on Magnetics*, 31(3):1356–1359.

[Feld, 2011] FELD, N. (2011). *Vers un pont micro-méso de la rupture en compression des composites stratifiés*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan.

[Gamstedt et Sjogren, 1999] GAMSTEDT, E. K. et SJOGREN, B. A. (1999). Micromechanisms in tension-compression fatigue of composite laminates containing transverse plies. *Composites Science and Technology*, 59:167–178.

[García-Martín *et al.*, 2011] GARCÍA-MARTÍN, J., GÓMEZ-GIL, J. et VÁZQUEZ-SÁNCHEZ, E. (2011). Non-destructive techniques based on eddy current testing. *Sensors (Basel, Switzerland)*, 11(3): 2525–65.

[Gaston, 2010] GASTON, S. (2010). Les composites dans tous leurs états. *Technologie No165*, pages 8–14.

[Gendre, 2011] GENDRE, L. (2011). Matériaux composites et structures composites. *Science de l'ingénieur*.

[Geuzaine *et al.*, 2000] GEUZAINE, C., DULAR, P. et LEGROS, W. (2000). Dual Formulations for the Modeling of Thin Electromagnetic Shells Using Edge Elements. *IEEE Transactions on Magnetics*, 36(4):799–803.

[Gornet, 2011] GORNET, L. (2011). *Généralités sur les Matériaux Composites*. École Centrale de Nantes.

[Guérin, 1994] GUÉRIN, C. (1994). *Détermination des pertes par courants de Foucault dans les cuves de transformateurs. Modélisation de régions minces et prise en compte de la saturation des matériaux magnétiques en régime harmonique*. Thèse de doctorat, Institut national Polytechnique de Grenoble.

[Henneron, 2004] HENNERON, T. (2004). *Contribution à la prise en compte des Grandeurs Globales dans les Problèmes d'Electromagnétisme résolus avec la Méthode des Eléments Finis*. Thèse de doctorat, Université de Lille 1.

[Holloway *et al.*, 2005] HOLLOWAY, C. L., MEMBER, S., SARTO, M. S. et JOHANSSON, M. (2005). Analyzing Carbon-Fiber Composite Materials With Equivalent-Layer Models. *IEEE transactions on electromagnetic compatibility*, 47(4):833–844.

[Ibarra-Castanedo, 2005] IBARRA-CASTANEDO, C. (2005). *Quantitative subsurface defect evaluation by pulsed phase thermography : depth retrieval with the phase*. Thèse de doctorat, Université Laval Québec.

[Kapadia, 2011] KAPADIA, A. (2011). *Non-Destructive Testing of Composite Materials*. National Composites Network, TWI Ltd, Cambridge, United Kingdom.

[Karbhari, 2013] KARBHARI, V. M., éditeur (2013). *Non-destructive evaluation (NDE) of polymer matrix composites. Techniques and applications.* Woodhead Publishing Limited.

[Kastner *et al.*, 2010] KASTNER, J., PLANK, B., SALABERGER, D. et SEKELJA, J. (2010). Defect and Porosity Determination of Fibre Reinforced Polymers by X-ray Computed Tomography. *International Symposium on NDT in Aerospace*, We.1.A.2.

[Kettunen *et al.*, 1999] KETTUNEN, L., FORSMAN, K. et BOSSAVIT, A. (1999). Gauging in Whitney spaces. *IEEE Transactions on magnetics*, 35(3):1466–1469.

[Ledru, 2009] LEDRU, Y. (2009). *Étude de la porosité dans les matériaux composites stratifies aéronautiques*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse.

[Lepiller et Framezelle, 2011] LEPILLER, F. et FRAMEZELLE, G. (2011). Les matériaux composites carbonés. *STC*, 65(3/4).

[Lucas et Zanella, 2007] LUCAS, P. et ZANELLA, G. (2007). Mise en œuvre des composites TP Compounds à fibres courtes et longues. *Techniques de l'Ingénieur*, pages 1–8.

[Maldague *et al.*, 2002] MALDAGUE, X., GALMICHE, F. et ZIADI, A. (2002). Advances in pulsed phase thermography. *Infrared Physics Technology*, 43(3-5):175–181.

[Meunier, 2008] MEUNIER, G., éditeur (2008). *The Finite Element Method for Electromagnetic Modeling*. ISTE Ltd and John Wiley & Sons, Inc.

[Oudin, 2008] OUDIN, H. (2008). *Méthode des éléments finis*. École Centrale de Nantes.

[Pr *et al.*, 2013] PR, V., CORCOLLE, R., DANIEL, L. et PICHON, L. (2013). Effective Permittivity of Shielding Composite Materials for Microwave Frequencies. *IEEE transactions on electromagnetic compatibility*, 55(6):1178–1186.

[Ramdane, 2009] RAMDANE, B. (2009). *Contribution à la modélisation tridimensionnelle de la technique thermo- inductive de contrôle non destructif : Développement d'un outil de conception, d'analyse et d'aide à la décision*. Thèse de doctorat, Université de Nantes.

[Ramo *et al.*, 1994] RAMO, S., WHINNERY, J. R. et DUZER, T. V. (1994). *Fields and waves in communication electronics*. JOHN WILEY & SONS, INC, 3 édition.

[Ren, 1996] REN, Z. (1996). Influence of the R.H.S. on the Convergence Behaviour of the Curl-Curl Equation. *IEEE Transactions on magnetics*, 32(3).

[Ren, 1998] REN, Z. (1998). Degenerated Whitney Prism Elements - General Nodal and Edge Shell Elements For Field Computation in Thin Structures. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34(5):2547–2550.

[Ren, 1999] REN, Z. (1999). Solving 3-D eddy current problem containing thin cracks using dual formulations and shell elements. *IEE Proceedings - Science, Measurement and Technology*, 146(1):9.

[S Sridharan, 2008] S SRIDHARAN, éditeur (2008). *Delamination Behaviour of Composites*. Woodhead Publishing.

[Sakagami et Ogura, 1994] SAKAGAMI, T. et OGURA, K. (1994). New flaw inspection technique based on infrared thermal images under joule effect heating. *JSME international journal. Series A, mechanics and material engineering*, 37(4):380–388.

[Schnars et Henrich, 2006] SCHNARS, U. et HENRICH, R. (2006). Applications of NDT Methods on Composite Structures in Aerospace Industry. *In Conference on Damage in Composite Materials*, Stuttgart, Germany. Airbus, Bremen, Germany.

[Susa, 2009] SUSA, M. (2009). *Numerical modeling of pulse thermography experiments for defect characterization purposes*. Thèse de doctorat, Université Laval Québec.

[Talbot, 2009] TALBOT, D. (2009). Boeing's 787 Delayed for Reinforcement. *Technology review published by MIT*.

[Taler et Duda, 2006] TALER, J. et DUDA, P. (2006). *Solving Direct and Inverse Heat Conduction Problems*. Springer.

[Tang *et al.*, 2013] TANG, Z., LE MENACH, Y., CREUSE, E., NICAISE, S., PIRIOU, F. et NEMITZ, N. (2013). A posteriori error estimator for harmonic A-Phi formulation. *COMPEL - The international journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, 32(4):1219–1229.

[Trichet, 2000] TRICHET, D. (2000). *Contribution à la modélisation, à la conception et au développement du chauffage par induction des matériaux composites conducteurs*. Thèse de doctorat, Université de Nantes.

[Trovalet, 2010] TROVALET, M. (2010). *Sur un modèle micro pour le calcul des structures en composites stratifiés*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan.

[Wasselynck, 2012] WASSELYNCK, G. (2012). *Etude des interactions entre les ondes électromagnétiques de fréquences moyennes et les matériaux composites : application à l'assemblage par induction de ces matériaux*. Thèse de doctorat, Université de Nantes.

[Wasselynck *et al.*, 2013] WASSELYNCK, G., TRICHET, D. et FOULADGAR, J. (2013). Determination of the Electrical Conductivity Tensor of a CFRP Composite Using a 3-D Percolation Model. *IEEE Transactions on Magnetics*, 49(5):1825–1828.

[Weaver, 1971] WEAVER, J. T. (1971). The General Theory of Electromagnetic Induction in a Conducting Half-Space. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 22(1):83–100.

[Wong *et al.*, 1999] WONG, B. S., FONG, C., RON, M. et GUAN, T. C. (1999). Non-destructive testing of fibre reinforced composites and honeycomb structures. *In Proceedings of Defense Materials and Mechanics Seminar*.

[Yerramalli et Waas, 2003] YERRAMALLI, C. S. et WAAS, A. M. (2003). A failure criterion for fiber reinforced polymer composites under combined compression–torsion loading. *International Journal of Solids and Structures*, 40(5):1139–1164.

[Zöcke, 2010] ZÖCKE, C. M. (2010). *Quantitative analysis of defects in composite material by means of optical lockin thermography*. Thèse de doctorat, Université de la Sarre et université Paul Verlaine Metz.

Annexes

Annexe A

Opérateurs différentiels discrets et matrices de masse

On trouvera dans cette annexe la version discrète des opérateurs différentiels et les matrices de masse définis dans le chapitre 2.

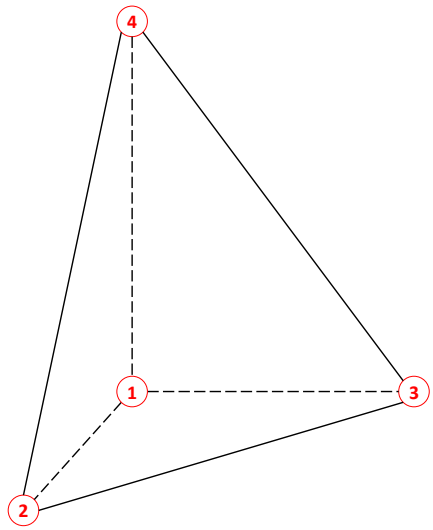


FIGURE A.1 – Tétraèdre de référence.

Arête (a)	Nœud (n)	
1	**1**	**2**
2	**1**	**3**
3	**1**	**4**
4	**2**	**3**
5	**2**	**4**
6	**3**	**4**

Facette (f)	Nœud (n)		
1	**1**	**2**	**4**
2	**1**	**3**	**2**
3	**1**	**4**	**3**
4	**2**	**3**	**4**

FIGURE A.2 – Définition des arêtes et des facettes du tétraèdre.

D

	Facette (f)			
Élément (é)	1	2	3	4
1	1	1	1	1

R

	Arête (a)					
Facette (f)	1	2	3	4	5	6
1	1	0	-1	0	1	0
2	-1	1	0	-1	0	0
3	0	-1	1	0	0	-1
4	0	0	0	1	-1	1

G

	Nœud (n)			
Arête (a)	**1**	**2**	**3**	**4**
1	-1	1	0	0
2	-1	0	1	0
3	-1	0	0	1
4	0	-1	1	0
5	0	-1	0	1
6	0	0	-1	1

FIGURE A.3 – Détermination des opérateurs différentiels discrets sur le tétraèdre de référence.

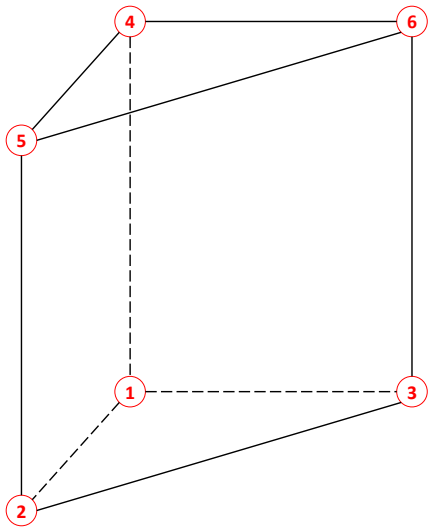


FIGURE A.4 – Prisme de référence.

Arête (a)	Nœud (n)	
1	1	2
2	1	3
3	1	4
4	2	3
5	2	5
6	3	6
7	4	5
8	4	6
9	5	6

Facette (f)	Nœud (n)			
1	1	2	3	-
2	4	5	6	-
3	1	2	5	4
4	2	3	6	5
5	1	3	6	4

FIGURE A.5 – Définition des arêtes et des facettes du prisme.

D

Facette (f)

Élément (é)	1	2	3	4	5
1	-1	1	1	1	-1

R

Arête (a)

Facette (f)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	-1	0	1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	1	-1	1
3	1	0	-1	0	1	0	-1	0	0
4	0	0	0	1	-1	1	0	0	-1
5	0	1	-1	0	0	1	0	-1	0

G

Nœud (n)

Arête (a)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	-1	1	0	0	0	0
2	-1	0	1	0	0	0
3	-1	0	0	1	0	0
4	0	-1	1	0	0	0
5	0	-1	0	0	1	0
6	0	0	-1	0	0	1
7	0	0	0	-1	1	0
8	0	0	0	-1	0	1
9	0	0	0	0	-1	1

FIGURE A.6 – Détermination des opérateurs différentiels discrets sur le prisme de référence.

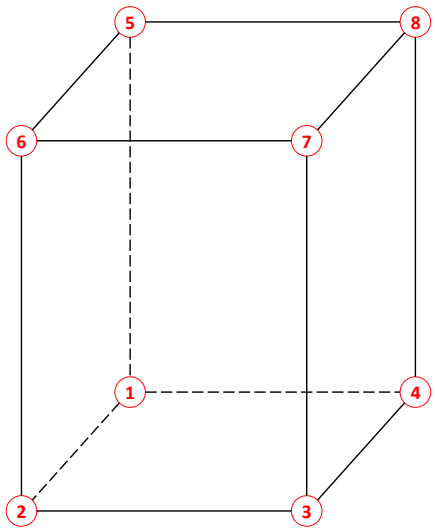


FIGURE A.7 – Hexaèdre de référence.

Arête (a)	Nœud (n)	
1	1	2
2	1	4
3	1	5
4	2	3
5	2	6
6	4	3
7	3	7
8	4	8
9	5	6
10	5	8
11	6	7
12	8	7

Facette (f)	Nœud (n)			
1	1	2	3	4
2	5	6	7	8
3	1	2	6	5
4	2	3	7	6
5	4	3	7	8
6	1	4	8	5

FIGURE A.8 – Définition des arêtes et des facettes du hexaèdre.

D

f

é	1	2	3	4	5	6
1	-1	1	1	1	-1	-1

R

a

f	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	-1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	1	1
3	1	0	-1	0	1	0	0	0	-1	0	0	0
4	0	0	0	1	-1	0	1	0	0	0	-1	0
5	0	0	0	0	0	1	1	-1	0	0	0	1
6	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	-1	0	0

G

n

a	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-1	1	0	0	0	0	0	0
2	-1	0	0	1	0	0	0	0
3	-1	0	0	0	1	0	0	0
4	0	-1	1	0	0	0	0	0
5	0	-1	0	0	0	1	0	0
6	0	0	1	-1	0	0	0	0
7	0	0	-1	0	0	0	1	0
8	0	0	0	-1	0	0	0	1
9	0	0	0	0	-1	1	0	0
10	0	0	0	0	-1	0	0	1
11	0	0	0	0	0	-1	1	0
12	0	0	0	0	0	0	-1	1

FIGURE A.9 – Détermination des opérateurs différentiels discrets sur l'hexaèdre de référence.

Les matrices de masse

Formulation $A-\phi$

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{ff}^{1/[\mu]}(i,j) & = \int_D \frac{1}{[\mu]} \mathbf{w}_f^i \mathbf{w}_f^j dD, \quad i=\overline{1,F}, \quad j=\overline{1,F} \\ \mathbf{M}_{aa}^{[\sigma]}(i,j) & = \int_D [\sigma] \mathbf{w}_a^i \mathbf{w}_a^j dD, \quad i=\overline{1,A}, \quad j=\overline{1,A} \\ \mathbf{M}_{aa}(i,j) & = \int_D \mathbf{w}_a^i \mathbf{w}_a^j dD, \quad i=\overline{1,A}, \quad j=\overline{1,A} \end{cases}$$

Formulation $T-\Omega$

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{ff}^{1/[\sigma]}(i,j) & = \int_D \frac{1}{[\sigma]} \mathbf{w}_f^i \mathbf{w}_f^j dD, \quad i=\overline{1,F}, \quad j=\overline{1,F} \\ \mathbf{M}_{aa}^{[\mu]}(i,j) & = \int_D [\mu] \mathbf{w}_a^i \mathbf{w}_a^j dD, \quad i=\overline{1,A}, \quad j=\overline{1,A} \end{cases}$$

Formulation T

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{nn}^{[\rho C]}(i,j) & = \int_{D_c} \frac{\rho C_p}{\Delta t} w_n^i w_n^j dD, \quad i=\overline{1,N}, \quad j=\overline{1,N} \\ \mathbf{M}_{aa}^{[\lambda]}(i,j) & = \int_{D_c} [\lambda] \mathbf{w}_a^i \mathbf{w}_a^j dD, \quad i=\overline{1,A}, \quad j=\overline{1,A} \\ \mathbf{M}_{nn}^{[h]}(i,j) & = \int_{D_c} h w_n^i w_n^j dD, \quad i=\overline{1,N}, \quad j=\overline{1,N} \\ \mathbf{M}_{n}^{[P]}(i) & = \int_{D_c} w_n^i P dD, \quad i=\overline{1,N} \end{cases}$$

Annexe B

Solution analytique. Application des conditions aux limites

B.1 Les conditions aux limites

Le champ électrique $\boldsymbol{E}$ et l'induction magnétique $\boldsymbol{B}$ peuvent être déterminés par :

$$\boldsymbol{E_{1,3}} = -j\omega\left(\boldsymbol{rot}(\boldsymbol{z}\Gamma_{1,3}) - \boldsymbol{grad}\frac{\partial \Pi_{1,3}}{\partial z}\right) \tag{B.1}$$

$$\boldsymbol{B_{1,3}} = \boldsymbol{grad}\frac{\partial \Gamma_{1,3}}{\partial z} \tag{B.2}$$

$$\boldsymbol{E_2} = -j\omega\left(\boldsymbol{rot}(\boldsymbol{x}\Gamma_2) - \boldsymbol{grad}\frac{\partial \Pi_2}{\partial x} + \boldsymbol{x}k_y^2\Pi_2\right) \tag{B.3}$$

$$\boldsymbol{B_2} = \boldsymbol{grad}\frac{\partial \Gamma_2}{\partial x} + k_y^2\left(\boldsymbol{rot}(\boldsymbol{x}\Pi_2) - \boldsymbol{x}\Gamma_2\right) \tag{B.4}$$

Les ÉQUATIONS (B.1), (B.2), (B.3), (B.4) vont nous permettre d'écrire les conditions aux limites des champs en termes des potentiels de Hertz.

A travers toutes les frontières (entre la plaque et le domaine à air au-dessus et entre la plaque et l'air située au-dessous), la composante normale de $\boldsymbol{B}$ (B_z) est continue. Écrivons B_z en terme de potentiel hertzien à l'aide des relations (B.2), (B.4), on a :

$$\text{Sur } z = 0 \quad : \quad \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial z^2} = -k_y^2\frac{\partial \Pi_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial x \partial z} \tag{B.5}$$

$$\text{Sur } z = -h \quad : \quad \frac{\partial^2 \Gamma_3}{\partial z^2} = -k_y^2\frac{\partial \Pi_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial x \partial z} \tag{B.6}$$

Les composantes tangentielles de $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}/\mu_0$ (ie. H_x et H_y) sont continues au passage des frontières. A partir de (B.2) et (B.4), la continuité de H_x implique :

$$\text{Sur } z = 0 \quad : \quad \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial x \partial z} = -k_y^2\Gamma_2 + \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial x^2} \tag{B.7}$$

$$\text{Sur } z = -h \quad : \quad \frac{\partial^2 \Gamma_3}{\partial x \partial z} = -k_y^2\Gamma_2 + \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial x^2} \tag{B.8}$$

La continuité de H_y implique :

$$\text{Sur } z = 0 \quad : \quad \frac{\partial^2 \Gamma_1}{\partial y \partial z} = k_y^2\frac{\partial \Pi_2}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial x \partial y} \tag{B.9}$$

$$\text{Sur } z = -h \quad : \quad \frac{\partial^2 \Gamma_3}{\partial y \partial z} = k_y^2\frac{\partial \Pi_2}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Gamma_2}{\partial x \partial y} \tag{B.10}$$

Les composantes tangentielles de $\boldsymbol{E}$ (ie. E_x et E_y) sont conservées à travers des interfaces. En écrivant ces conditions en termes des potentiels grâce aux relations (B.1), (B.3), la continuité de E_x implique :

$$\text{Sur } z = 0 \quad : \quad \frac{\partial \Gamma_1}{\partial y} - \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial x \partial z} = k_y^2 \Pi_2 - \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial x^2} \tag{B.11}$$

$$\text{Sur } z = -h \quad : \quad \frac{\partial \Gamma_3}{\partial y} - \frac{\partial^2 \Pi_3}{\partial x \partial z} = k_y^2 \Pi_2 - \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial x^2} \tag{B.12}$$

et la continuité de E_y implique :

$$\text{Sur } z = 0 \quad : \quad -\frac{\partial \Gamma_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial y \partial z} = \frac{\partial \Gamma_2}{\partial z} - \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial x \partial y} \tag{B.13}$$

$$\text{Sur } z = -h \quad : \quad -\frac{\partial \Gamma_3}{\partial x} - \frac{\partial^2 \Pi_3}{\partial y \partial z} = \frac{\partial \Gamma_2}{\partial z} - \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial x \partial y} \tag{B.14}$$

La composante normale de la densité du courant induit ($J_z = \sigma_y E_z$) est nulle à la surface de la plaque, on a donc :

$$\text{Sur } z = 0 \text{ et } z = -h : \frac{\partial \Gamma_2}{\partial y} - \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial x \partial z} = 0 \tag{B.15}$$

Ces conditions ne sont pas indépendantes. En effet, il suffit de résoudre les ÉQUATIONS B.5, B.6, B.11, B.12. Remplaçant les potentiels par la forme (2.27) et prenant en compte des solutions pour leurs transformés, on obtient un système d'équations des fonctions de coefficients à déterminer. Afin d'obtenir les formules analytiques de ces coefficients, on peut utiliser un programme de manipulation symbolique (par exemple, Symbolic Math ToolBox™de Matlab ®) pour résoudre ce système d'équation.

B.2 Détermination du champ source

Pour un inducteur circulaire de type filaire à N tours dont la position et les dimensions sont données dans la FIGURE B.1, $\widehat{B}_z^s(u,v)$ est déterminé par la formule suivante :

$$\widehat{B}_z^s(u,v,z=0) = \mu_0 I \, \frac{ne^{-\alpha d}}{\alpha^3} sinh(\alpha t) J(\alpha a_1, \alpha a_2) \tag{B.16}$$

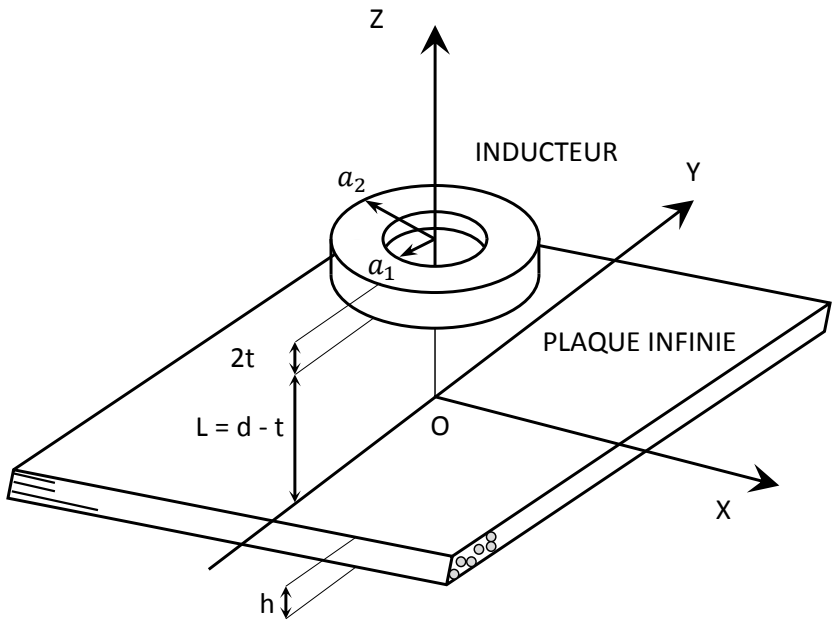


FIGURE B.1 – Géométrie de l'inducteur, où a_1, a_2 et $2t$ sont respectivement le rayon intérieur, le rayon extérieur et l'épaisseur de l'inducteur, d est la distance entre le centre de l'inducteur et la surface supérieure de la plaque.

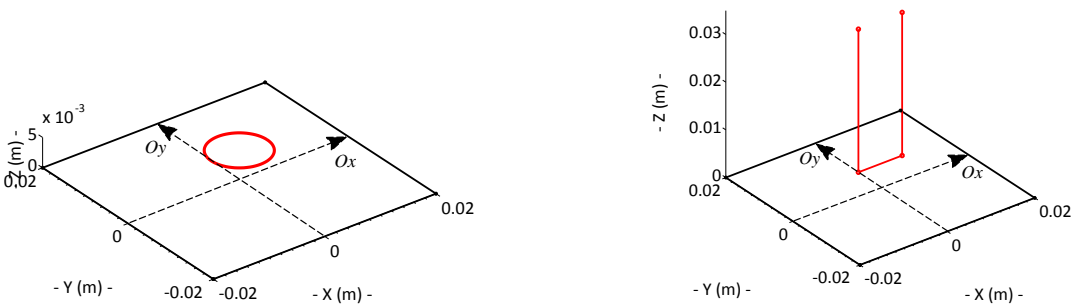
avec I l'amplitude du courant parcourant l'inducteur, $n = \frac{N}{2t(a_2-a_1)}$ la densité de tours de l'inducteur et $J(\alpha a_1, \alpha a_2)$ est déterminée par :

$$J(\alpha a_1, \alpha a_2) = \int_{\alpha a_1}^{\alpha a_2} x J_1(x) dx \tag{B.17}$$

où $J_1(x)$ est la fonction de Bessel de première espèce de premier ordre.

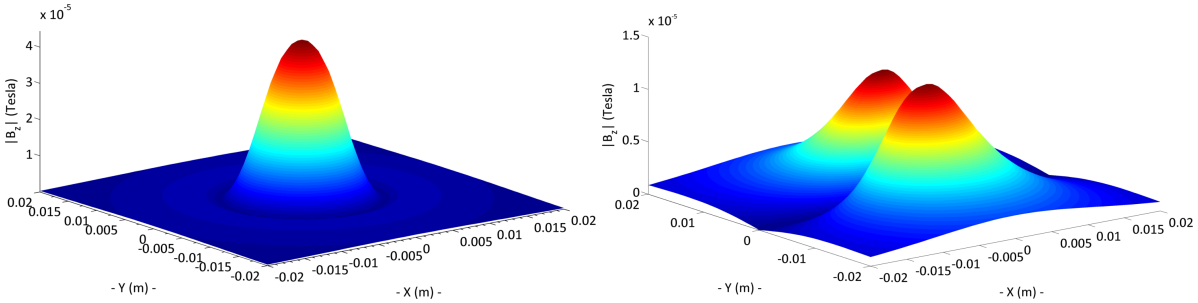
B.3 Quelques exemples

Ces exemples de calcul sont déjà présentés dans le chapitre 2. Nous donnons ci-après plus de résultats sur les courants induits.



(a) Inducteur circulaire (b) Inducteur U

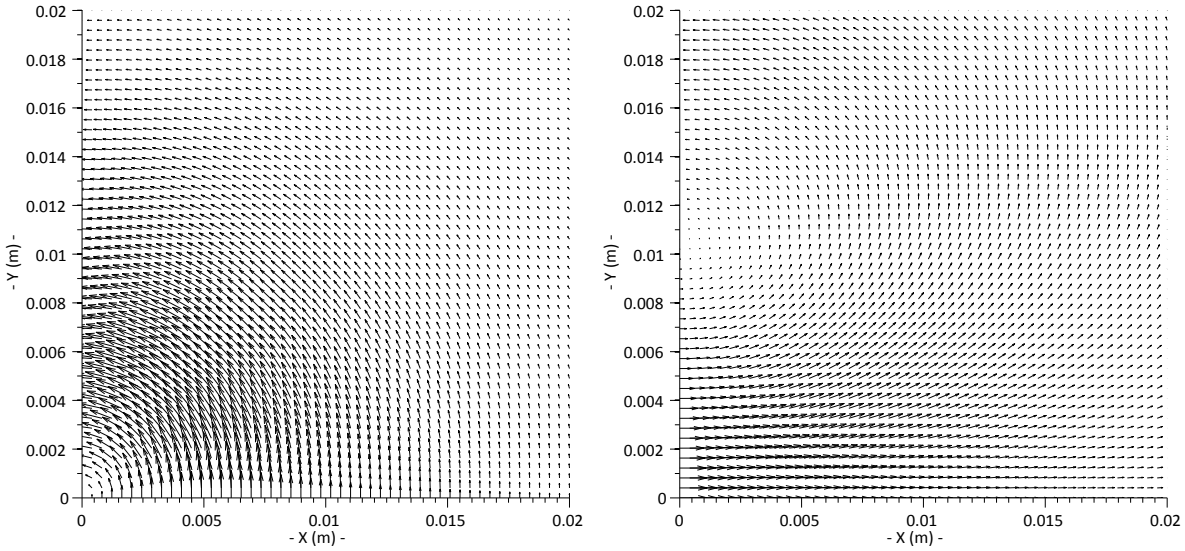
FIGURE B.2 – Deux exemples de calcul



(a) Inducteur circulaire (b) Inducteur U

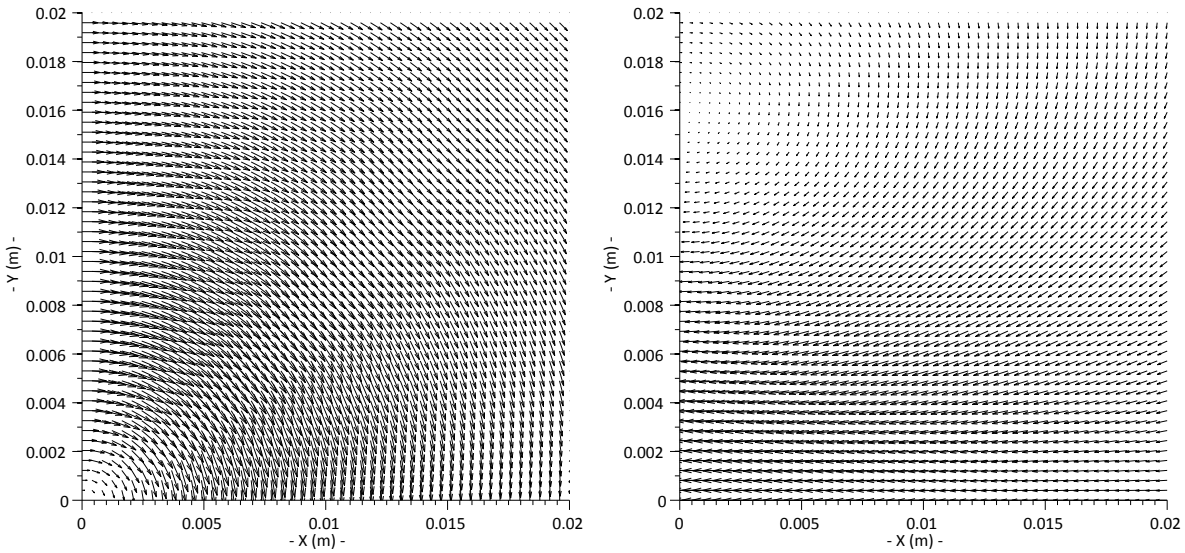
FIGURE B.3 – Distribution de la composante normale à la surface du domaine conducteur de l'induction magnétique B_z.

Cas du matériau isotrope



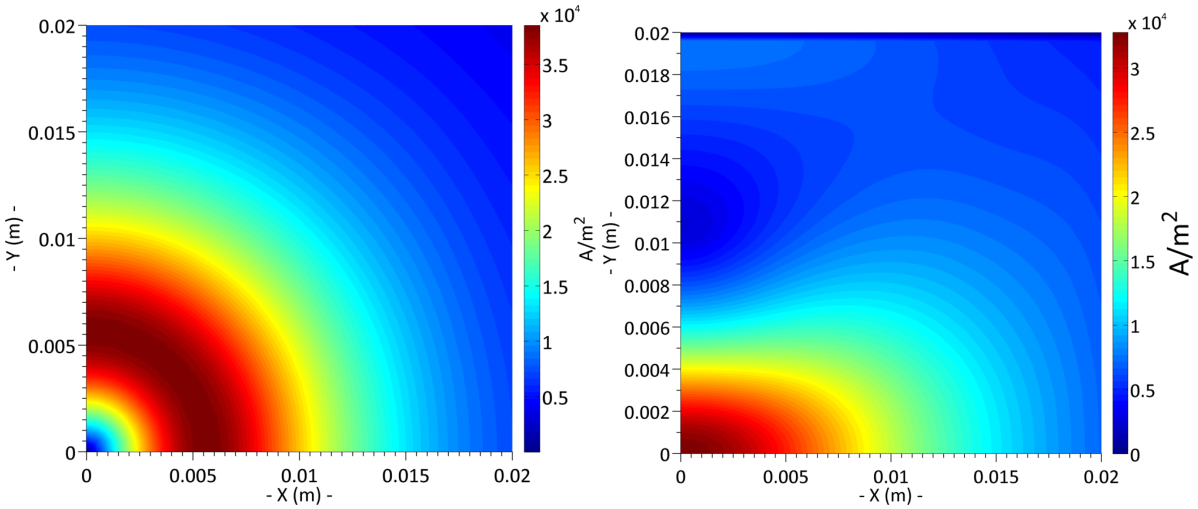
(a) Inducteur circulaire (b) Inducteur U

FIGURE B.4 – Partie imaginaire de $\boldsymbol{J}$.



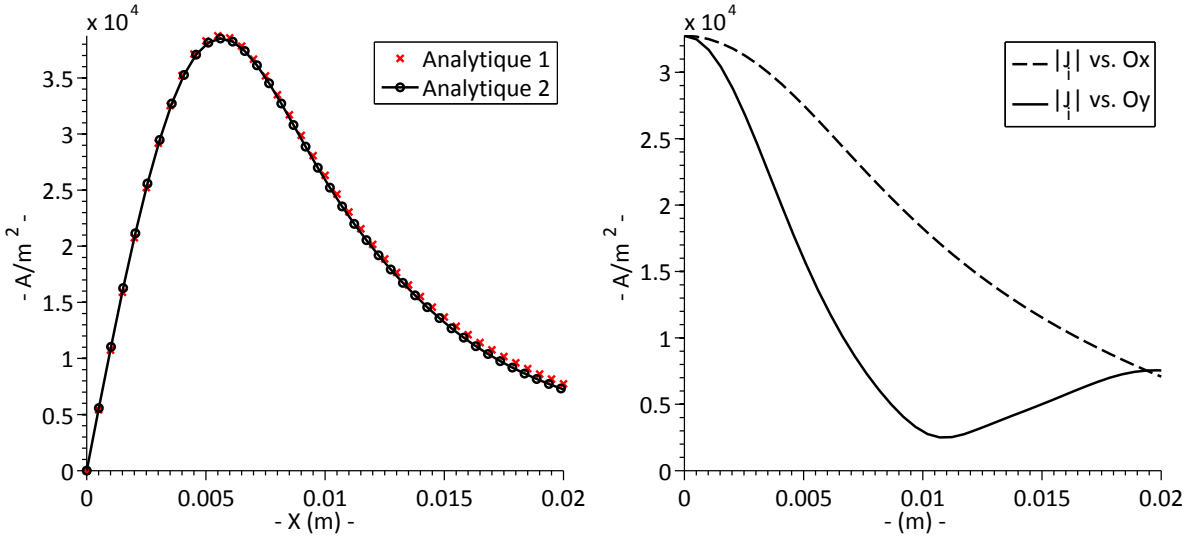
(a) Inducteur circulaire (b) Inducteur U

FIGURE B.5 – Partie réelle de $\boldsymbol{J}$.



(a) Inducteur circulaire (b) Inducteur U

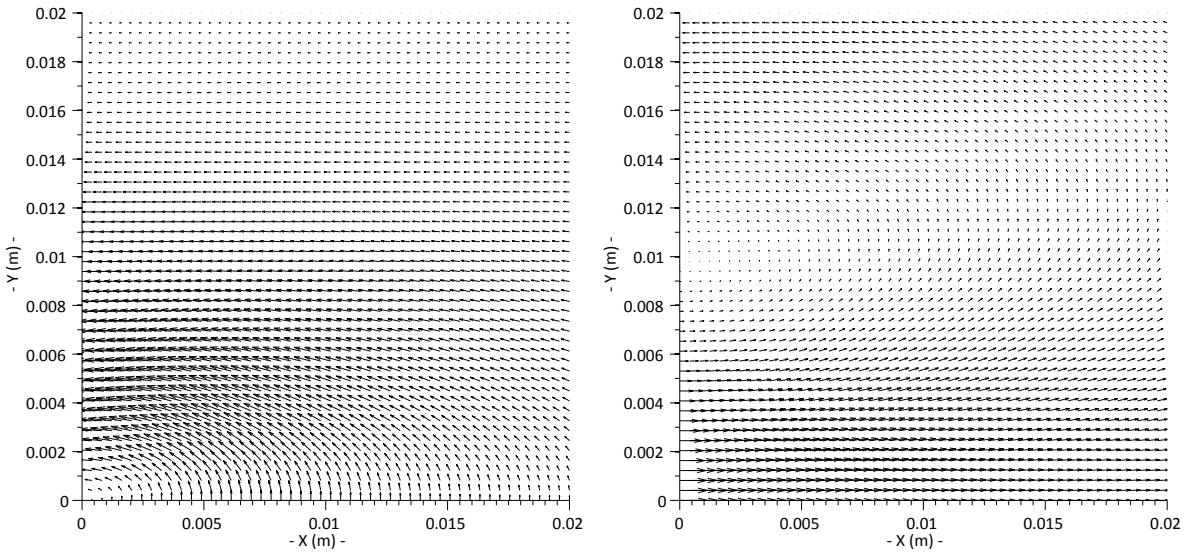
FIGURE B.6 – Distribution de $\boldsymbol{J}$ à la surface de la plaque.



(a) Inducteur circulaire (b) Inducteur U

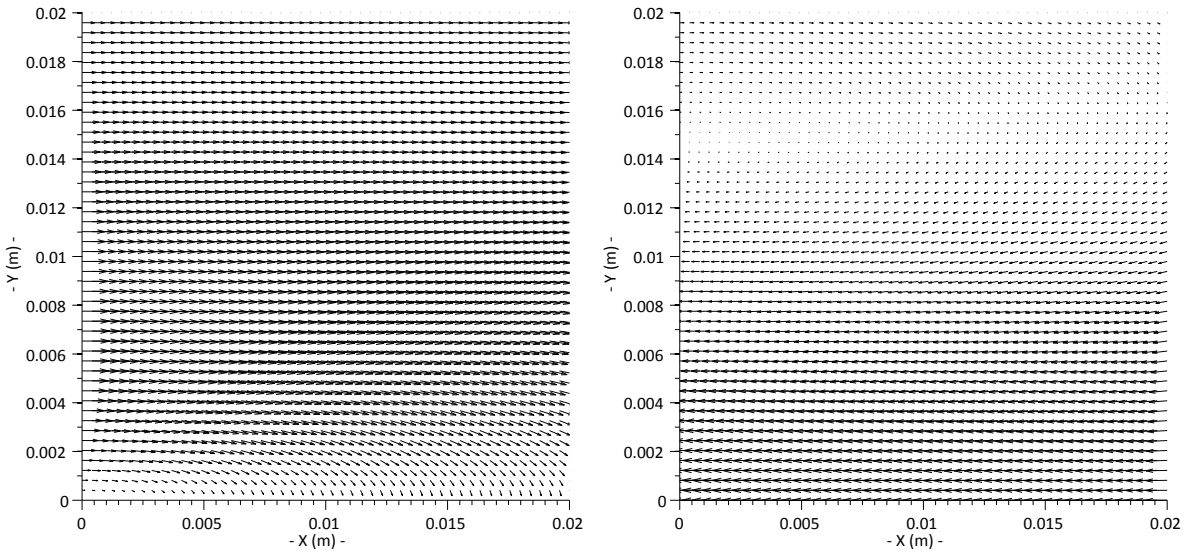
FIGURE B.7 – Variation du module de $\boldsymbol{J}$ à la surface de la plaque, suivant Ox et Oy. "*Analytique 1*" est la solution donnée par Dodd et Deed [Dodd et Deeds, 1968].

Cas du matériau anisotrope



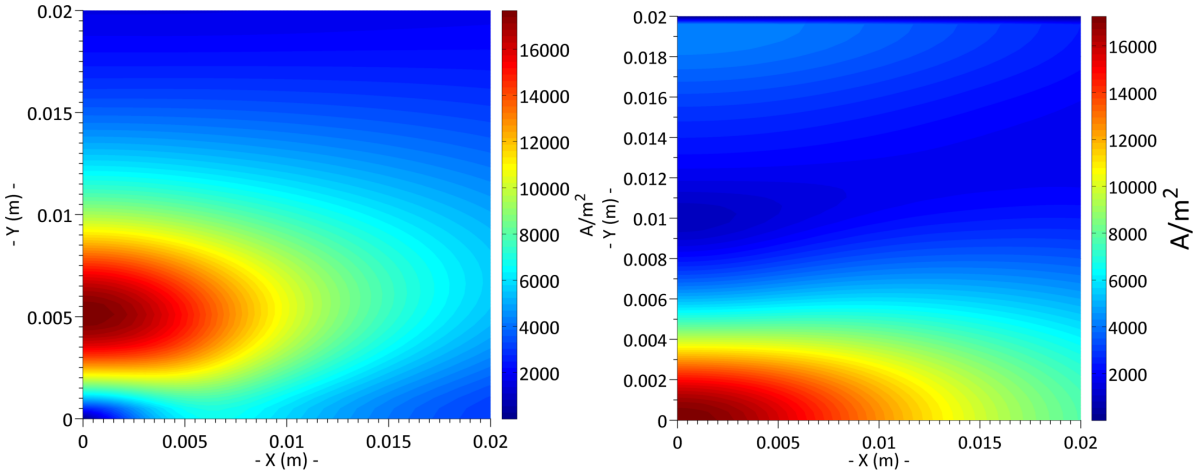
(a) Inducteur circulaire (b) Inducteur U

FIGURE B.8 – Partie imaginaire de $\boldsymbol{J}$.



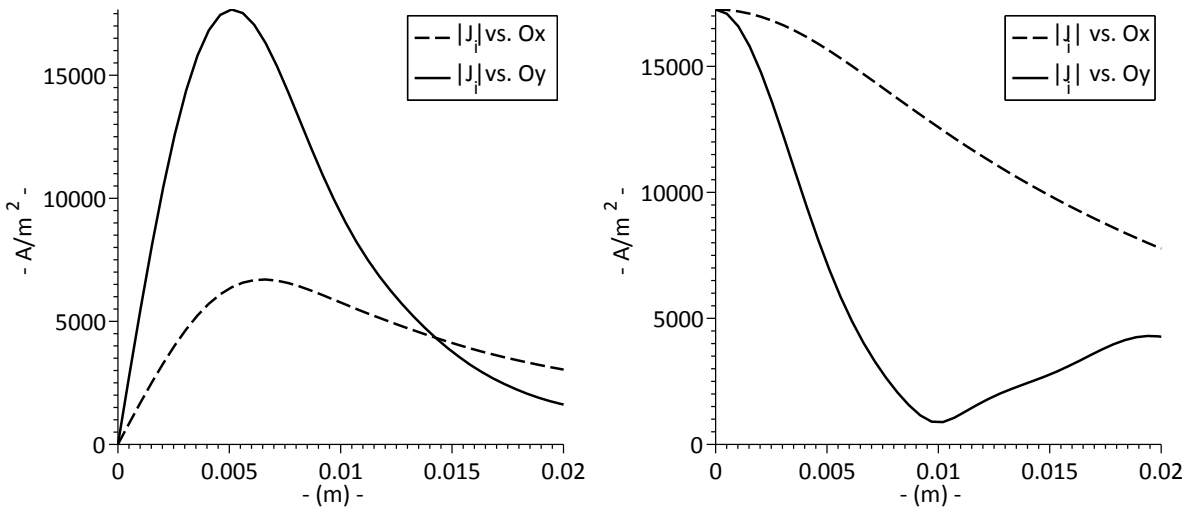
(a) Inducteur circulaire (b) Inducteur U

FIGURE B.9 – Partie réelle de $\boldsymbol{J}$.



(a) Inducteur circulaire (b) Inducteur U

FIGURE B.10 – Distribution de $\boldsymbol{J}$ à la surface de la plaque.



(a) Inducteur circulaire (b) Inducteur U

FIGURE B.11 – Variation du module de $\boldsymbol{J}$ à la surface de la plaque, suivant Ox et Oy.

Annexe C

Autres résultats de simulation du CND par thermographie inductive

Afin de ne pas alourdir ce manuscrit, nous présenterons brièvement dans cette annexe quelques résultats d'une étude de sensibilité paramétrique. Afin de considérer séparément la sensibilité aux paramètres opératoires. Nous choisissons une configuration de référence. La FIGURE C.1 et le TABLEAU C.1 précisent cette configuration. Dans les figures, seul le paramètre indiqué est différent. La fréquence d'échantillonnage thermique est de $50Hz$.

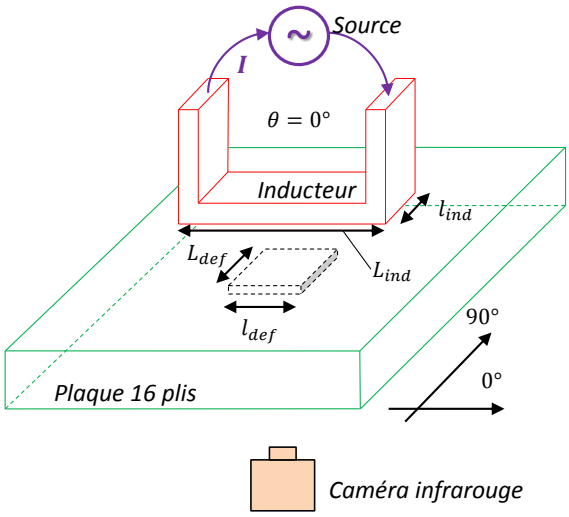


FIGURE C.1 – Géométrie du cas test.

Source		
Courant	I	100 A
Fréquence	fr	2 MHz
Temps de chauffe	t_{chauf}	2 s
Entrefer	e	2 mm
Inducteur U		
Longueur	L_{ind}	40 cm
Largeur	l_{ind}	15 cm
Section	-	7 mm x 7 mm
Position	-	Centre
Orientation	θ	0°

TABLEAU C.1 – Configuration de référence.

La plaque sous contrôle a un plan de drapage $[[0°/45°/90°/135°/]_2]_s$. Un défaut de type délaminage ou de rupture de fibres est introduit dans un pli 0° de la plaque. Les dimensions et la position du défaut de référence sont données dans le TABLEAU C.2. Seul le paramètre précisé dans les figures est différent de celui-ci.

Délaminage		
Largueur	L_{def}	10 mm
Longueur	l_{def}	10 mm
Épaisseur	$ép$	$h_{pli}/2$
Profondeur	pr	Pli 5 (0°)
Position	-	Centre
Rupture de fibre		
Largueur	l_{def}	2 mm
Longueur	L_{def}	10 mm
Épaisseur	h_{def}	$h_{pli}/2$
Profondeur	pr	Pli 5 (0°)
Position	-	Centre

TABLEAU C.2 – Caractéristiques du défaut de référence.

Dans un premier temps, nous considérons l'influence de l'entrefer et de la position relative de l'inducteur par rapport au défaut sur la détectabilité. Ensuite, l'influence de certains paramètres opératoires sont montrée. Enfin, nous donnons les résultats qui montrent la sensibilité du contraste d'amplitude aux caractéristiques des défauts. Les bruits ne sont pas pris en compte.

C.1 Détectabilité

Délaminage

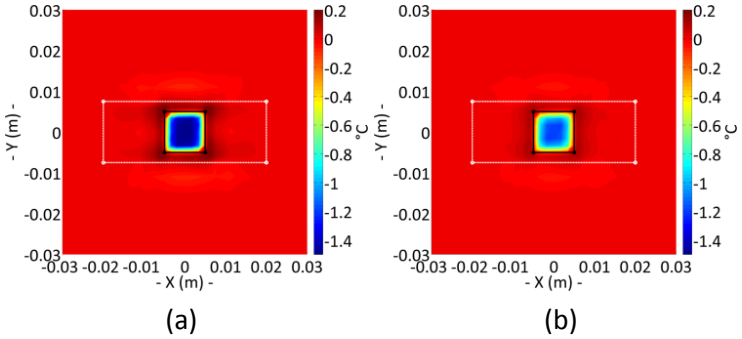


FIGURE C.2 – Cartographie du contraste absolu avec différents entrefers. (a) 2mm, (b) 4mm.

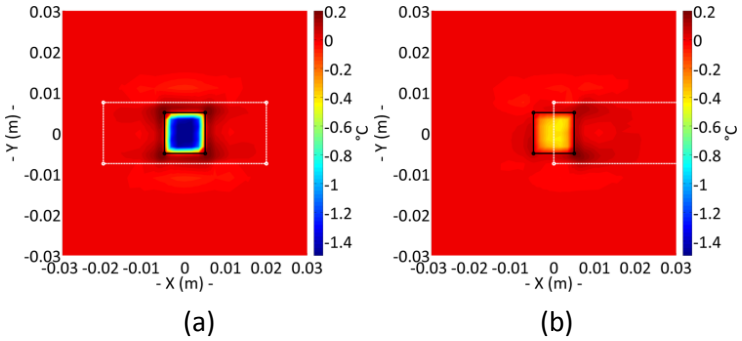


FIGURE C.3 – Cartographie du contraste absolu en déplacement de l'inducteur suivant la largeur du défaut. (a) 0mm (centre), (c) 20mm.

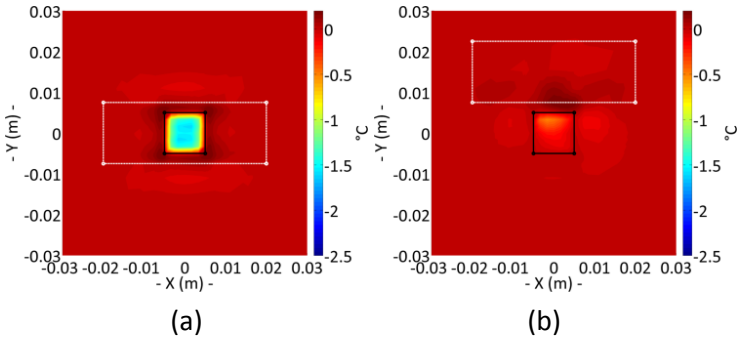


FIGURE C.4 – Cartographie du contraste absolu en déplacement de l'inducteur suivant la longueur du défaut. (a) 0mm, (b) 7.5mm, (c) 15mm, (d) 22.5mm.

Rupture de fibre

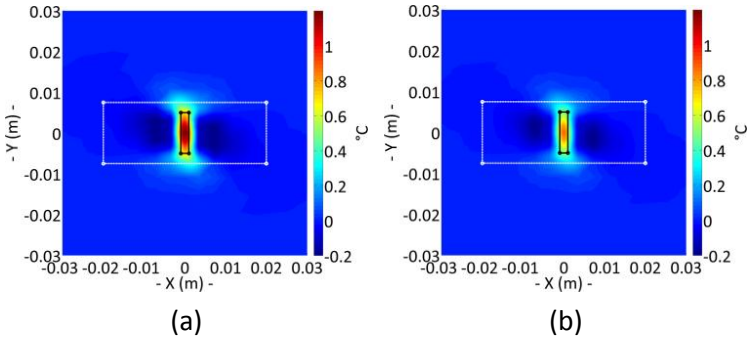


FIGURE C.5 – Cartographie du contraste absolu avec différents entrefers. (a) 3mm, (b) 5mm.

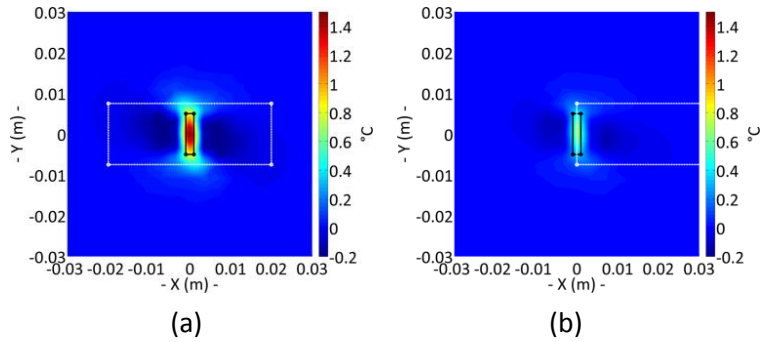


FIGURE C.6 – Cartographie du contraste absolu en déplacement de l'inducteur suivant la largeur du défaut. (a) 0mm, (b) 20mm.

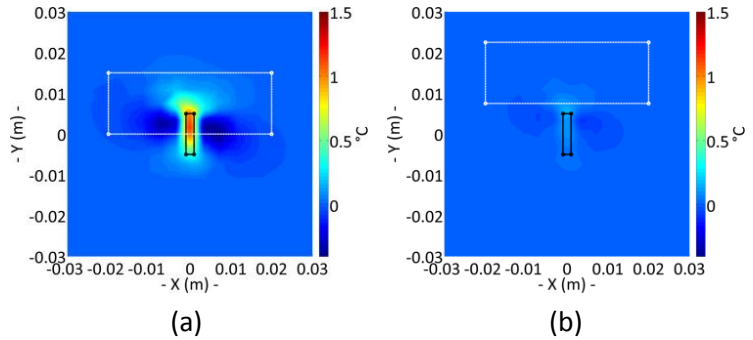
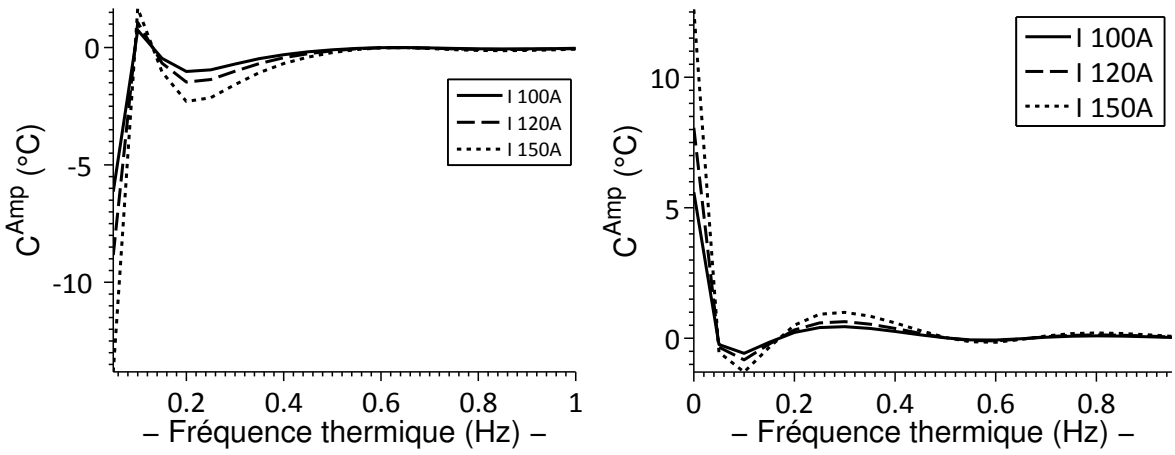


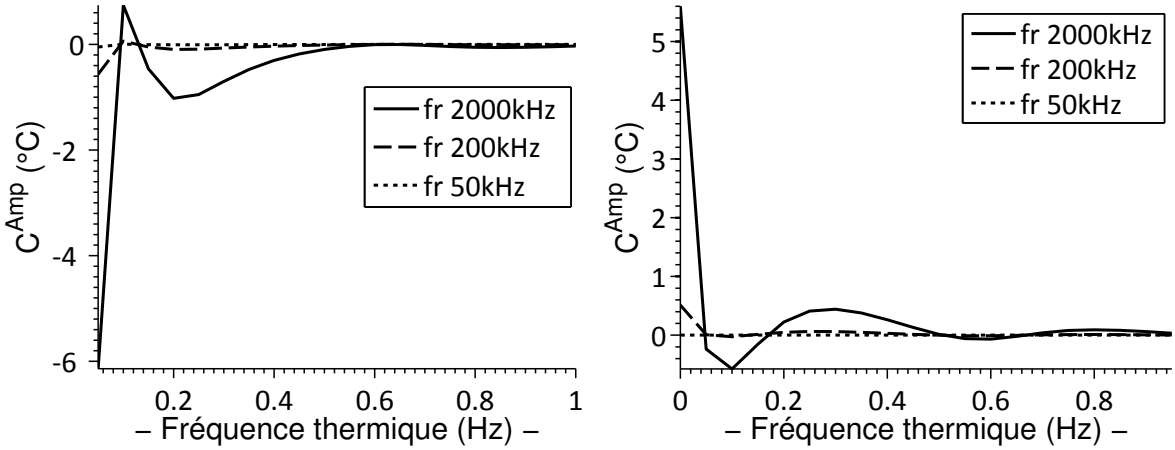
FIGURE C.7 – Cartographie du contraste absolu en déplacement de l'inducteur suivant la longueur du défaut. (a) 7.5mm, (b) 15mm.

C.2 Possibilité d'optimisation de la technique



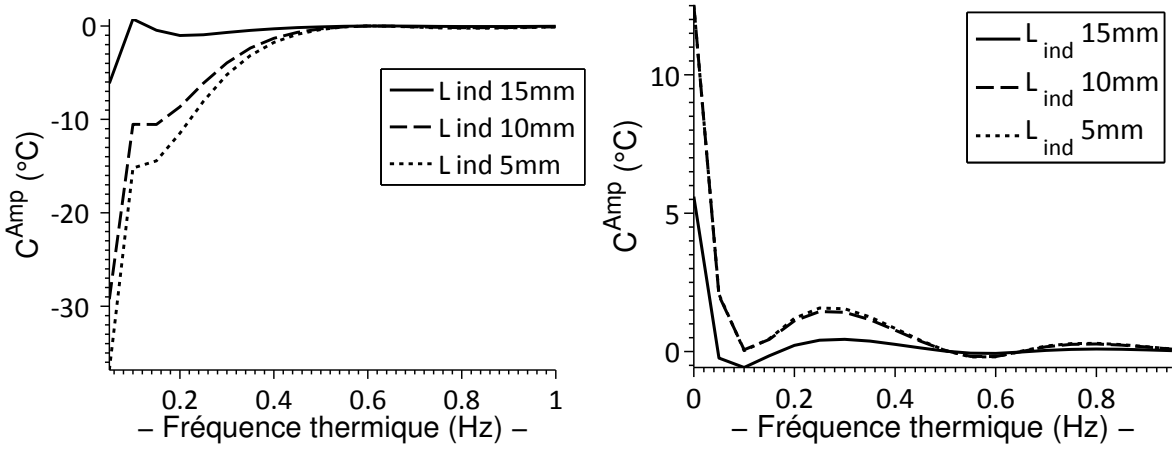
(a) Délaminage (b) Rupture de fibre

FIGURE C.8 – Contraste d'amplitude au centre du défaut pour différents courants.



(a) Délaminage (b) Rupture de fibre

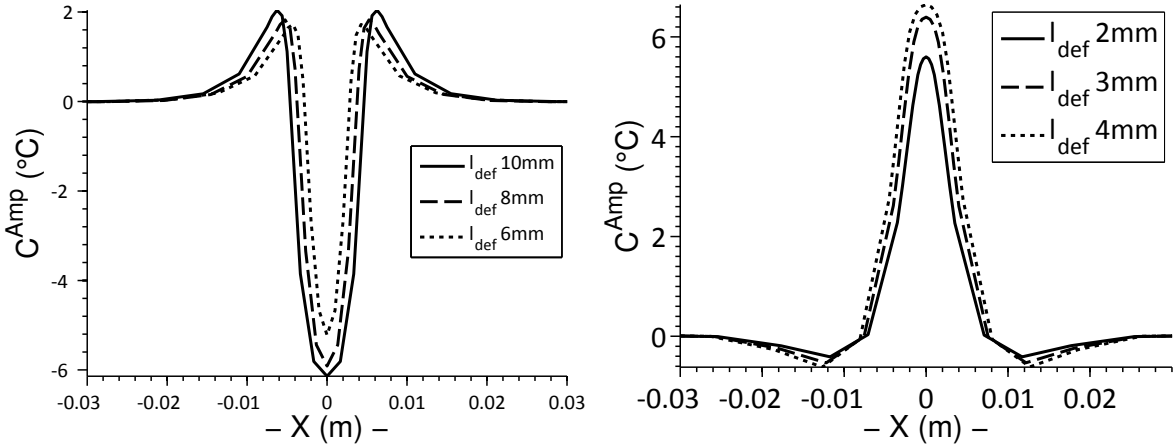
FIGURE C.9 – Contraste d'amplitude au centre du défaut pour différentes fréquences.



(a) Délaminage (b) Rupture de fibre

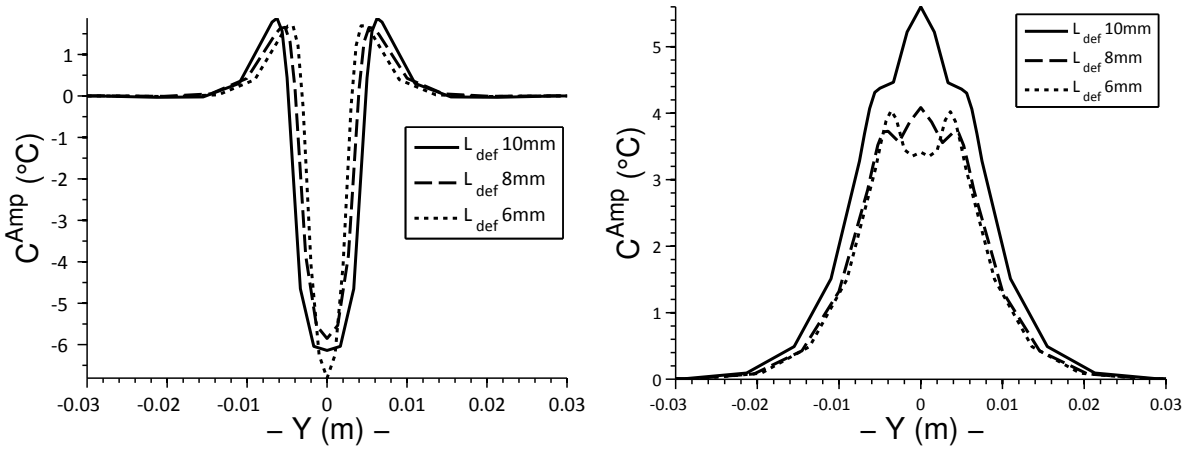
FIGURE C.10 – Contraste d'amplitude au centre du défaut pour différentes largeurs de l'inducteur.

C.3 Possibilité de caractérisation des défauts



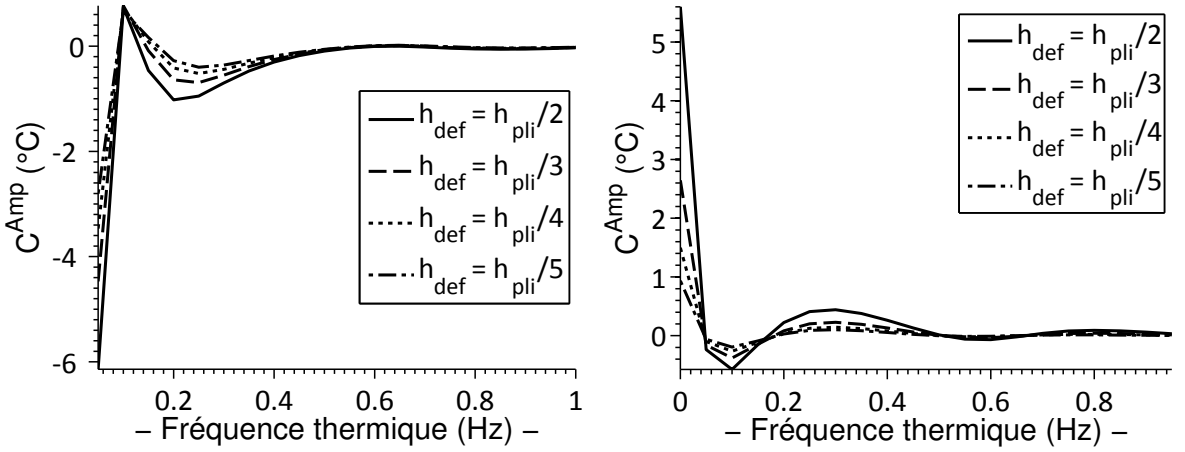
(a) Délaminage (b) Rupture de fibre

FIGURE C.11 – Contraste d'amplitude suivant la largeur du défaut.



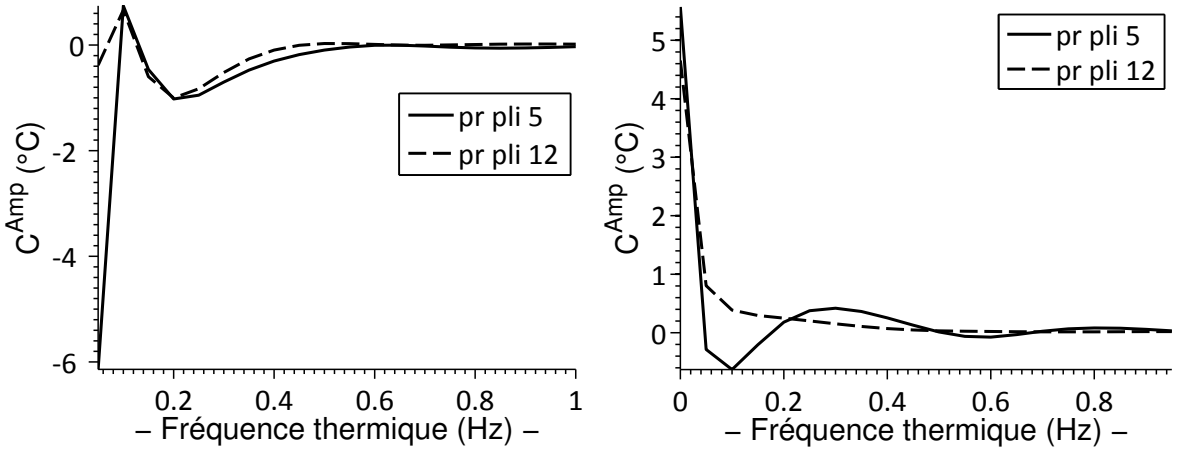
(a) Délaminage (b) Rupture de fibre

FIGURE C.12 – Contraste d'amplitude suivant la longueur du défaut.



(a) Délaminage (b) Rupture de fibre

FIGURE C.13 – Contraste d'amplitude des défauts de différentes épaisseurs h_{def}.



(a) Délaminage (b) Rupture de fibre

FIGURE C.14 – Contraste d'amplitude des défauts de différentes profondeurs pr.

l'université nantes angers le mans
COMMUNAUTÉ D'UNIVERSITÉS ET ÉTABLISSEMENTS

UNIVERSITÉ DE NANTES

Thèse de Doctorat

Huu Kien BUI

Contribution à la modélisation multiphysique des matériaux composites stratifiés

Application au CND thermo-inductif

Contribution to multiphysics modeling of carbon fiber composites

Application to induction thermography NDT

Résumé

Grâce à leurs excellentes performances mécaniques, l'intérêt des composites à fibres de carbone n'a pas cessé de croître ces dernières décennies. Cependant, le développement à grande échelle de ces matériaux passe par une amélioration des procédés utilisés pendant les différentes étapes du cycle de vie (élaboration, formage, assemblage, contrôle, recyclage). À différents stades du cycle de vie du matériau, les méthodes de Contrôle Non Destructif (CND) permettent de caractériser l'état d'intégrité du matériau. Elles jouent un rôle indispensable dans le contrôle de la qualité et dans la gestion des risques. Le CND par thermographie inductive, basé sur les mesures de l'effet thermique des courants de Foucault dans le matériau, est une technique prometteuse pour ce type de matériau. Le développement de cette méthode et la conception de dispositifs nécessitent un outil de simulation multiphysique électromagnétique et thermique. Le développement d'un tel modèle se heurte aux problématiques de l'évaluation des courants induits dans des régions minces et fortement anisotropes. Les outils de simulation développés durant cette thèse permettent d'avoir des temps de calcul raisonnables tout en conservant des précisions acceptables sur les solutions numériques. Ces outils ont été validés par des comparaisons avec des essais expérimentaux et permettent ainsi d'évaluer précisément les performances de cette technique de CND.

Mots clés
Composite stratifié CFRP, CND, Thermographie inductive, Modélisation multiphysique, Régions minces, Anisotropie, Éléments finis

Abstract

Thanks to their excellent mechanical performance, the use of carbon fiber composites has been growing in recent decades. However, the large-scale development of these materials depends on the improvements of the processes during the various stages of their whole life cycle (eg. producing, forming, assembly, inspection, recycling). At various stages of the life cycle of the material, nondestructive testing (NDT) methods can be used to characterize the health state of the material. They play a vital role in the quality control and risk management. Induction thermography NDT based on the measurement of thermal effect of the eddy currents in the material is a promising technique for this type of material. The development of this method requires multiphysics electromagnetic – thermal modeling. The model must deal with some numerical issues of thin regions of strong anisotropy. The implemented simulation tools allow reasonable computational time while retaining the desirable accuracy of numerical solutions. They are validated by comparisons with experimental measures. These tools allow accurate assessment of the performance of induction thermography technique.

Key Words
Carbon fiber reinforced polymer, NDT, Induction thermography, Multiphysics modeling, Thin regions, Anisotropy, Finite element method