

# Thèse de Doctorat

## Hassoun ISHAK

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du  
grade de Docteur de l'Université de Nantes  
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire*

**École doctorale :** *Sciences pour l'ingénieur (SPI)*

**Discipline :** *Mécanique des solides, des matériaux, des structures et des surfaces*

**Spécialité :** *Sciences pour l'ingénieur*

**Unité de recherche :** *Institut de recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM - UMR CNRS 6183)*

**Soutenu le** 19/12/2017

**Thèse N° :**

## Étude stochastique de l'impact des défauts de porosités et de plissements dans les matériaux composites

### JURY

<b>Président du jury</b>	<b>Frédéric LEBON</b> , Professeur des Universités, Aix-Marseille Université
<b>Rapporteurs :</b>	<b>Abdelkhalak EL HAMI</b> , Professeur des Universités, INSA de Rouen <b>Laurent GUILLAUMAT</b> , Professeur des Universités, Arts et Métiers Paristech
<b>Examineurs :</b>	<b>Alexandre CLEMENT</b> , Maître de conférences, Université de Nantes <b>Marion GIRARD</b> , Maître de conférences, Université de Nantes <b>Frédéric JACQUEMIN</b> , Professeur des Universités, Université de Nantes
<b>Invité(s) :</b>	<b>Tanguy MORO</b> , Responsable d'équipe R&T, Institut de Recherche Technologique Jules Verne
<b>Directeur de Thèse :</b>	<b>Frédéric JACQUEMIN</b> , Professeur des Universités, Université de Nantes



# Sommaire

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Défauts de porosités et de plissement dans les matériaux composites</b>	<b>5</b>
1.1 Présentation générale des matériaux composites . . . . .	6
1.2 Défauts et procédés de mise en forme des matériaux composites . . . . .	7
1.3 Le défaut de porosités . . . . .	8
1.3.1 Origine des porosités et effets sur les propriétés mécaniques des composites . . . . .	8
1.3.2 Caractérisation et quantification du défaut de porosités . . . . .	12
1.3.2.1 Analyse par ultrasons . . . . .	12
1.3.2.2 Micro-tomographie . . . . .	13
1.3.2.3 Analyse d'images . . . . .	13
1.3.3 Modélisation et simulation du défaut de porosités . . . . .	14
1.4 Le défaut de plissement . . . . .	17
1.4.1 Origine du plissement et effets sur les propriétés mécaniques des composites . . . . .	17
1.4.2 Caractérisation et quantification du défaut de plissement . . . . .	20
1.4.3 Modélisation et simulation du défaut de plissement . . . . .	21
1.5 Variabilité des défauts de porosités et de plissement . . . . .	25
1.6 Conclusion intermédiaire . . . . .	29
<b>2 Modélisation et simulation déterministe des défauts de porosités et de plissement</b>	<b>31</b>
2.1 Introduction du chapitre . . . . .	32
2.2 Problème mécanique . . . . .	32
2.2.1 Présentation du cadre mécanique de l'étude . . . . .	32
2.2.2 Transition d'échelles basée sur l'homogénéisation numérique . . . . .	33
2.2.2.1 Principes et objectif de l'homogénéisation . . . . .	33
2.2.2.2 Représentation et localisation . . . . .	35
2.2.2.3 Homogénéisation et conditions aux limites . . . . .	35
2.2.3 Généralité sur la rupture en mécanique des composites . . . . .	37
2.3 Étude déterministe du défaut de porosités . . . . .	41
2.3.1 Modélisation à l'échelle microscopique . . . . .	41

2.3.2	Application : étude d'un composite UD [90°] avec porosités . . . . .	43
2.3.3	Calculs des propriétés effectives avec porosités . . . . .	46
2.3.4	Étude des macroporosités à l'échelle d'un pli UD 90° . . . . .	50
2.4	Étude déterministe du défaut de plissement . . . . .	55
2.4.1	Spécificité du défaut de plissement . . . . .	55
2.4.2	Application : étude d'un composites UD [0°] avec plissement . . . . .	57
2.5	Conclusion intermédiaire . . . . .	64
<b>3</b>	<b>Modélisation stochastique des incertitudes</b>	<b>67</b>
3.1	Introduction du chapitre . . . . .	68
3.2	Généralités sur la modélisation stochastique . . . . .	68
3.3	Méthodes de calcul probabiliste . . . . .	71
3.3.1	Méthodes fiabilistes . . . . .	72
3.3.2	Méthodes d'intégration directe . . . . .	75
3.3.3	Développement en série . . . . .	77
3.3.4	La représentation sur des bases de fonctions . . . . .	79
3.3.4.1	Méthode de Galerkin au niveau stochastique . . . . .	79
3.3.4.2	Méthode de projection . . . . .	81
3.3.4.3	Méthode de régression . . . . .	81
3.4	Représentation fonctionnelle des variables aléatoires sur le chaos polynomial	82
3.5	Aspects techniques . . . . .	84
3.6	Exemple pour un matériau composite avec un chargement aléatoire . . . . .	86
3.6.1	Présentation du problème . . . . .	86
3.6.2	Résultats numériques et discussion . . . . .	87
3.7	Conclusion intermédiaire . . . . .	90
<b>4</b>	<b>Études numériques des défauts de porosités et de plissement dans un cadre incertain</b>	<b>91</b>
4.1	Introduction du chapitre . . . . .	92
4.2	Études du défaut de porosités . . . . .	92
4.2.1	Application 1 : étude d'un composite UD [90°] avec taux de porosités aléatoire . . . . .	92
4.2.1.1	Présentation du problème stochastique . . . . .	92
4.2.1.2	Analyse du comportement mécanique à l'échelle microscopique . . . . .	93
4.2.1.3	Calculs des propriétés apparentes par homogénéisation numérique . . . . .	98
4.2.1.4	Comparaison des approches hétérogène et homogène équivalente . . . . .	100
4.2.2	Application 2 : étude des macroporosités aléatoire à l'échelle d'un pli UD [90°] . . . . .	101
4.2.2.1	Présentation du problème stochastique . . . . .	101
4.2.2.2	Résultats de l'étude macroscopique . . . . .	102

---

4.3	Études du défaut de plissement . . . . .	107
4.3.1	Études d'un composite stratifié avec géométries de plissement aléatoires . . . . .	107
4.3.1.1	Présentation du problème stochastique . . . . .	107
4.3.1.2	Application 1 : étude du comportement d'un composite avec un plissement à géométrie aléatoire . . . . .	107
4.3.1.3	Application 2 : étude du comportement d'un composite avec plusieurs plissements à géométries aléatoires . . . . .	114
4.3.2	Bilan des études réalisées . . . . .	120
4.4	Conclusion intermédiaire . . . . .	121
	<b>Conclusion générale</b>	<b>123</b>
4.5	Conclusions . . . . .	123
4.6	Perspectives . . . . .	125
	<b>Bibliographie</b>	<b>127</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>141</b>
	<b>Liste des tableaux</b>	<b>147</b>



# Introduction générale

L'utilisation des matériaux composites dans les structures industrielles se généralise depuis un certain nombre d'années dans divers domaines tels que les transports, l'aérospatiale ou les énergies marines renouvelables en raison de leurs excellentes propriétés spécifiques. Les matériaux composites présentent en effet des propriétés mécaniques élevées, qui par la définition même de ces matériaux, peuvent être adaptées et localisées à la demande et à chaque type de sollicitation.

Cependant, les procédés de fabrication des structures composites sont des procédés complexes pouvant conduire à l'apparition et au développement de défauts, en particulier les défauts de plissement et de porosité, dont l'analyse se révèle très importante.

Aujourd'hui, le comportement des matériaux composites est relativement bien maîtrisé pour les sollicitations les plus classiques et les modèles numériques déterministes développés permettent d'apporter une première réponse aux bureaux d'études dans leur mission de dimensionnement des structures. En revanche, la caractérisation de structures en matériaux composites, en présence de défauts liés aux procédés, l'est nettement moins. La modélisation pertinente et réaliste de défauts générés par un procédé donné est complexe. Or, pour garantir l'intégrité et ainsi, la sécurité de leurs produits, les industriels doivent être capables d'analyser la nocivité de ces défauts en exploitation.

Aujourd'hui, ces industriels doivent qualifier leurs pièces au moyen de campagnes d'essais importantes et onéreuses ou par calcul en imposant des coefficients d'abattement. Les pièces sont donc systématiquement soumises à des contrôles non destructifs longs et coûteux. En cas de résultats négatifs par rapport à des critères conservatifs, les pièces en matériaux composites, comme les pales d'éoliennes, peuvent être jugées non-conformes et rejetées, avec des conséquences économiques non négligeables. En effet, on observe une diminution des propriétés mécaniques de ces pièces (perte de rigidité par exemple) due à la présence des défauts. Elles sont délicates à estimer car les défauts qui conduisent à ces pertes sont soumis à des incertitudes importantes (taux de porosité ou forme du plissement par exemple).

Le projet SIMSCEF porté par l'IRT Jules Verne a pour objectif de proposer une méthodologie de dimensionnement mécano-probabiliste des structures composites en tenant compte des effets du procédé de mise en œuvre sur la « santé matière » du composite. Les enjeux de ce projet sont de mieux cerner la variabilité de ces défauts et d'améliorer la prédiction du comportement des structures pour des cas d'applications aéronautiques et énergies marines renouvelables (EMR). L'objectif de cette étude est donc de quanti-

fier l'impact de ces incertitudes sur le comportement de la pièce/structure composite. On cherchera à développer des modèles numériques de comportement multi-échelles intégrant la présence d'un défaut (issu du procédé) et de sa propagation. Ceci permettra de mieux garantir la bonne tenue des matériaux composites utilisés dans des éléments structurels d'avion tels que les parties de fuselage et les ailes, mais également dans des systèmes de production d'électricité tels que les éoliennes (les pales principalement). Le projet SIM-SCEF contribue ainsi à lever les différents verrous scientifiques liés à la caractérisation et la simulation stochastique des matériaux composites, intégrant les défauts et la variabilité des procédés. Le but est de maîtriser au mieux les risques technologiques et d'assurer le développement des filières aéronautiques et EMR dont font partie les deux exemples présentés sur la figure 1.

Ce projet implique donc un industriel du secteur aéronautique, DAHER-AEROSPACE, avec une très forte expertise dans la mise en œuvre des matériaux composites, et un industriel du secteur énergies marines renouvelables, Adwen, leader sur les éoliennes marines et spécialiste de la conception et de la fabrication des pales de grandes dimensions en composite. Deux laboratoires de recherche académique sont également impliqués dans ce projet : le Laboratoire Arts et Métiers ParisTech d'Angers (LAMPA) au sein duquel s'est déroulée la première thèse de ce projet et qui concerne toute la partie expérimentale, et l'Institut de Recherche en Génie Civil et Mécanique(GeM) à Saint-Nazaire au sein duquel s'est déroulée la thèse présentée dans ce mémoire et qui concerne toute la partie numérique.



FIGURE 1 – (a) Illustration d'un parc d'éoliennes *offshore* (b) photo d'un avion développé par DAHER-AEROSPACE (TBM850)

En outre, ce projet apportera à ces deux filières industrielles de pointe de nouvelles approches permettant, via une meilleure maîtrise de la nocivité des défauts par la simulation et la caractérisation stochastiques, d'élargir les critères d'acceptation de ces défauts et d'optimiser les taux de non-conformités en production.

Ce mémoire s'articule autour de quatre chapitres organisés de la manière suivante. *Le premier chapitre* est une étude bibliographique nécessaire à la bonne compréhension du présent travail. Dans un premier temps, nous rappelons quelques bases sur les matériaux

composites en se focalisant sur les matériaux du projet et leurs procédés de fabrication. Ensuite, nous présenterons une liste non-exhaustive des causes et des conséquences des défauts de plissement et de porosité issus de ces procédés. Nous nous intéresserons également à la modélisation et la simulation de ces défauts afin de mieux comprendre le comportement mécanique de pièces composites en présence de ces défauts. Enfin, la dernière partie de ce chapitre sera consacrée à la variabilité et aux incertitudes couramment observées sur ces défauts.

*Le second chapitre* est dédié aux études mécaniques déterministes. Nous commencerons par introduire les modèles mécaniques utilisés pour l'étude de l'impact des défauts de porosités et de plissement sur les composites à différentes échelles : microscopique et macroscopique pour les porosités et mésoscopique ou macroscopique pour les plissements. Par la suite, les différents outils numériques mécaniques développés dans le cadre de ces travaux seront présentés, notamment un outil d'homogénéisation numérique. Entre autres, nous nous intéresserons aux critères de rupture classiquement utilisés pour les matériaux composites et plus spécifiquement au critère de Puck permettant de distinguer la rupture au sein des fibres et dans la matrice. Pour conclure ce chapitre, l'ensemble des modèles et méthodes proposés seront illustrés avec plusieurs exemples numériques relatifs aux défauts de porosités ou de plissement.

*Le troisième chapitre* présente un état de l'art non exhaustif des approches probabilistes en mécanique. Le cadre général d'une étude probabiliste sera tout d'abord introduit. Ensuite, nous nous intéresserons aux méthodes de calculs les plus couramment utilisées dans ce type de modélisation. Nous présenterons le cas particulier des approches spectrales stochastiques basées sur une décomposition sur le chaos polynomial. Pour clore ce chapitre, nous présenterons une application de la méthode de calcul probabiliste retenue à travers un exemple s'appuyant sur un modèle mécanique simple et qui nous permettra d'illustrer l'intérêt des approches probabilistes.

*Le quatrième et dernier chapitre* est consacré à la simulation stochastique de matériaux composites avec défauts de porosités et de plissement. La première partie de ce chapitre est dédiée au défaut de porosités. Les paramètres aléatoires d'entrée permettent dans ce cas de caractériser la géométrie des cavités modélisant les porosités. On cherchera alors à déterminer l'impact de l'aléa de ces paramètres sur la tenue mécanique de la structure à différentes échelles. Par la suite, on s'intéressera au défaut de plissement. Nous utiliserons une représentation paramétrique de la géométrie du plissement en considérant sa hauteur et sa largeur comme des variables aléatoires indépendantes. Nous proposerons donc une analyse de l'influence de ces paramètres sur le comportement du composite à travers deux exemples numériques.

*Des conclusions et perspectives* en lien avec l'ensemble des parties de ce manuscrit concluront ce mémoire et permettront une ouverture et une prolongation des présents travaux.



# Chapitre 1

## Défauts de porosités et de plissement dans les matériaux composites

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Présentation générale des matériaux composites . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>1.2</b>	<b>Défauts et procédés de mise en forme des matériaux composites</b>	<b>7</b>
<b>1.3</b>	<b>Le défaut de porosités . . . . .</b>	<b>8</b>
1.3.1	Origine des porosités et effets sur les propriétés mécaniques des composites . . . . .	8
1.3.2	Caractérisation et quantification du défaut de porosités . . . . .	12
1.3.2.1	Analyse par ultrasons . . . . .	12
1.3.2.2	Micro-tomographie . . . . .	13
1.3.2.3	Analyse d'images . . . . .	13
1.3.3	Modélisation et simulation du défaut de porosités . . . . .	14
<b>1.4</b>	<b>Le défaut de plissement . . . . .</b>	<b>17</b>
1.4.1	Origine du plissement et effets sur les propriétés mécaniques des composites . . . . .	17
1.4.2	Caractérisation et quantification du défaut de plissement . . . . .	20
1.4.3	Modélisation et simulation du défaut de plissement . . . . .	21
<b>1.5</b>	<b>Variabilité des défauts de porosités et de plissement . . . . .</b>	<b>25</b>
<b>1.6</b>	<b>Conclusion intermédiaire . . . . .</b>	<b>29</b>

---

## 1.1 Présentation générale des matériaux composites

Un matériau composite est un assemblage d'au moins deux composants qui ne sont pas miscibles. Les propriétés respectives des constituants associés se complètent pour former un matériau hétérogène avec des performances mécaniques, thermiques, électriques et/ou physico-chimiques améliorées. De plus, les matériaux composites sont caractérisés par leur adaptabilité qui fait qu'on peut désormais développer des matériaux composites ayant une ou plusieurs propriétés particulières pour répondre à un besoin spécifique grâce à un contrôle étroit sur ses propriétés. Ces matériaux présentent des caractéristiques intéressantes qui leurs ont permis de devenir des concurrents sérieux à leurs homologues métalliques.

Historiquement développés et utilisés dans le secteur aéronautique, ils sont dorénavant employés dans de nombreuses applications industrielles dans les domaines maritime, automobile ou ferroviaire. Les matériaux composites sont constitués d'une part d'un renfort qui assure la tenue mécanique en contribuant aux propriétés mécaniques de la pièce ainsi que d'une matrice qui joue le rôle d'un liant assurant la cohésion de la structure et la transmission des efforts vers le renfort. La matrice est généralement une matière plastique, on parle alors de résine thermoplastique ou thermodurcissable. On distingue ainsi trois grandes catégories : les composites à matrices organiques (CMO), céramique (CMC) et métallique (CMM). Il est également possible de caractériser les composites grâce aux différents renforts utilisés pour les fabriquer qui sont sous forme de fibres courtes, longues, ou bien encore de particules généralement sphériques. Dans le cadre de nos travaux, on s'intéresse aux matériaux composites constitués par une matrice époxy avec un renfort en fibres longues de verre ou de carbone.

En se basant sur des références bibliographiques [Berthelot, 1999, Hoa et Tsai, 2003], nous pouvons dresser le tableau 1.1 qui renseigne sur certaines caractéristiques mécaniques (module d'élasticité et coefficient de Poisson longitudinaux) et géométrique (diamètre des fibres supposées circulaires) pour des fibres de carbone HR (à haute résistance) et des fibres de verre de type E :

Paramètre	Carbone HR	Verre E
$E_L [GPa]$	200 à 240	69 à 75
$\rho [kg/m^3]$	1700 à 2000	2400 à 2600
$\nu_L$	$\approx 0.20$	$\approx 0.22$
$d_f [\mu m]$	5 - 12	10 - 20

Tableau 1.1 – Propriétés géométriques et mécaniques des fibres de carbone HR et de verre E [Berthelot, 1999, Hoa et Tsai, 2003].

En ce qui concerne les résines époxy, elles représentent environ 5% du marché composite. En effet, la complexité de leur fabrication fait que leur coût est relativement élevé. En revanche, ce type de résine possède de très bonnes propriétés mécaniques ce qui rend leur usage généralement réservé à des applications où on privilégie la performance sur le coût. Parmi les avantages des résines époxy, nous retiendrons la très bonne qualité des propriétés mécaniques (en flexion, traction et compression). En contrepartie, elles sont

## 1.2. Défauts et procédés de mise en forme des matériaux composites

---

sensibles à la fissuration. Des ordres de grandeur des propriétés mécaniques des résines époxy sont présentés dans le tableau 1.2.

Paramètre	Epoxy
$E[GPa]$	2 à 6
$\rho[kg/m^3]$	1100 à 1400
$\nu$	$\approx 0.33$

Tableau 1.2 – Propriétés mécaniques des résines époxy.

Afin d'élaborer les matériaux composites, plusieurs procédés de fabrication très sophistiqués peuvent être utilisés en fonction des pièces que l'on veut obtenir. Cependant, malgré tous les efforts et les améliorations technologiques qui ne cessent d'être apportés à ces procédés pour garantir la qualité des pièces, il est toujours délicat de fabriquer des pièces parfaites et certains problèmes persistent notamment la présence de défauts de fabrication.

## 1.2 Défauts et procédés de mise en forme des matériaux composites

Les procédés de fabrication des matériaux composites sont complexes et peuvent conduire à l'apparition ou au développement de défauts pouvant affecter les propriétés mécaniques de la structure. La mise en forme nécessite trois étapes : l'imprégnation du renfort par le système résineux, la mise en forme de la géométrie de la pièce et le durcissement du système par réticulation. La pièce obtenue après la rigidification doit théoriquement posséder des propriétés spécifiques définies au préalable. Les fibres et la résine peuvent être séparées avant la fabrication ou elles peuvent déjà être combinées sous forme de matériau pré-imprégné (pré-preg). Il est à noter que la polymérisation demande l'application d'une pression de vide et d'une sollicitation thermique.

Il existe plusieurs moyens de mise en forme [Gay, 2005, Strong, 2008], qu'il s'agisse de procédés artisanaux ou spécifiques, et suivant les séries visées (petites ou grandes). L'ensemble de ces techniques de mise en œuvre est très largement détaillé dans la littérature [Gay, 2005] et [Campbell, 2004]. Le choix repose donc sur plusieurs critères tels que la qualité de finition, la complexité de la forme, la cadence de production, les propriétés mécaniques souhaitées. Par exemple, une très grande pièce, telle qu'une pale d'éolienne, sera généralement fabriquée à l'aide de techniques de pose à la main (drapage manuel) dans lesquelles la résine est appliquée par pinceau sur des feuilles de fibres, souvent sous forme de tissu, et l'excès de résine pressé avec un rouleau. La résine subira ensuite une cuisson à température ambiante. Il est extrêmement difficile d'obtenir des stratifiés de très haute qualité par cette méthode et elle ne sera donc utilisée que lorsque des propriétés mécaniques non optimales peuvent être tolérées et autorisées dans la conception. Des pièces présentant une finition de haute qualité peuvent être réalisées par le moulage par injection. Des matériaux de haute qualité sont habituellement requis pour les composants

aérospatiaux, il est donc nécessaire dans ce cas d'utiliser des techniques très complexes telles que le pressage à chaud ou la cuisson par autoclave. Pour ces deux dernières méthodes, la qualité du matériau dépend fortement de la pression de compactage appliquée pendant le cycle de chauffage. On peut donc avoir une variation locale de la fraction volumique de fibres due à une résine en excès ou en défaut [Chekanov *et al.*, 1995]. De plus, au cours de la fabrication, les différents matériaux peuvent être assemblés par collage et il est possible que des défauts de collage se produisent dans la zone de liaison pouvant entraîner des problèmes de délaminage et de décollement [Veyret *et al.*, 1997]. Parmi les procédés dont l'utilisation est réservée pour la production de très petites séries, il y a le moulage au contact ou la projection simultanée dans des moules rigides. Dans le cas de petites séries, les procédés 'Liquid Composite Moulding' (LCM), qui sont des techniques semi automatisées, sont employés. On parle dans ce cas de procédés d'injection dérivés du 'Resin Transfert Moulding' (RTM) tels que le 'resin film infusion' (RFI), le 'resin liquid infusion' (RLI), le 'vaccum assisted RTM' (VARTM) dont les étapes sont résumées sur la figure 1.1.

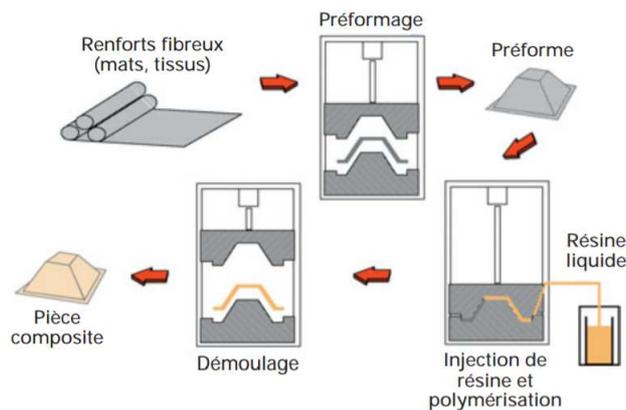


FIGURE 1.1 – Les trois étapes principales du procédé RTM [Binétruy, 2004].

Il existe également d'autres procédés tels que le moulage sous vide ou moulage à l'autoclave [Varna *et al.*, 1995, Binétruy, 2004]. Ces différents procédés sont très complexes et très techniques. Ils demandent beaucoup de rigueur et d'application et le moindre incident est susceptible de générer des défauts tels que les défauts de plissement et de porosité. La suite de nos travaux sera entièrement dédiée à ces derniers défauts.

## 1.3 Le défaut de porosités

### 1.3.1 Origine des porosités et effets sur les propriétés mécaniques des composites

Le défaut de porosités, défini comme étant une petite cavité ou bulle de gaz non évacuée, fait partie des défauts de mise en œuvre les plus répandus dans les composites [Strong, 2008]. Plusieurs facteurs peuvent contribuer à la formation de pores en fonction de la

technique d'élaboration. De nombreuses études ont donc été menées afin de les mettre en évidence. Stabler et al. [Stabler *et al.*, 1992, Patel et Lee, 1995] se sont intéressés aux procédés 'LCM' évoqués dans la section précédente et ont conclu que la principale source de ce défaut consiste à un emprisonnement d'air durant la phase d'injection de la résine pour des composites carbone/époxy et verre/époxy. Il a été démontré aussi que la vitesse, la pression et la température d'injection mais aussi de chauffage jouent un rôle important dans ce mécanisme [Payvar, 1987, Divinis *et al.*, 2004, Binétruy, 2004]. En effet, lorsque l'imprégnation se fait à une température élevée du moule, l'écart entre cette température et celle du durcissement se réduit, ce qui augmente le degré de polymérisation du matériau entraînant la formation de porosités sous forme de poches d'air localisées dans les plis ou entre deux plis successifs [Breard *et al.*, 2003, Njionhou *et al.*, 2013]. L'effet de la pression d'injection a été examiné pour un composite carbone/époxy par [Leclerc et Ruiz, 2008, Chen *et al.*, 2015] qui ont conclu que plus la pression d'injection est faible plus le risque d'avoir des taux de porosités élevés est grand. De même, l'implication de la vitesse et du flux de résine injectée dans la formation de porosités a été montrée dans [Lim *et al.*, 2000, Kang *et al.*, 2000, Fu *et al.*, 2011]. Le procédé de fabrication par autoclave peut également générer des défauts de porosités comme le prouvent plusieurs études. En effet, la formation de porosités est très sensible à la pression appliquée au cours du cycle de polymérisation et ceci a été montré dans [Olivier *et al.*, 1995, WU et Dianfu, 2005, Liu *et al.*, 2006a] où les auteurs ont fait varier cette pression, pour des composites carbone/époxy et verre époxy, et ont constaté une diminution du taux de porosités lorsque cette dernière augmente (*cf.* figure 1.2).

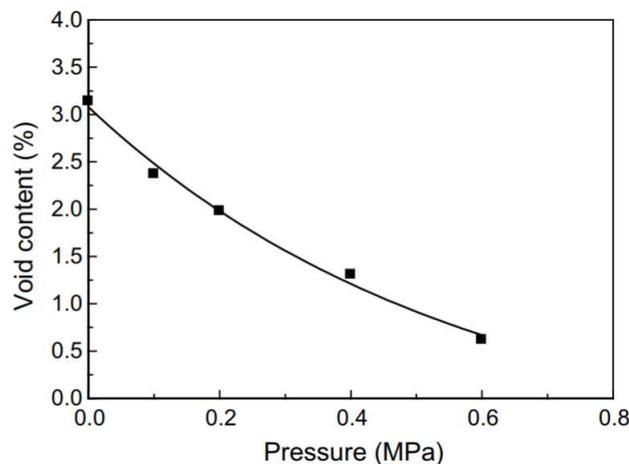


FIGURE 1.2 – Evolution du taux de porosités en fonction de la pression de polymérisation [Liu *et al.*, 2006a].

La température de polymérisation joue également un rôle dans ce mécanisme [Ruiz et Trochu, 2005, Ruiz et Trochu, 2006]. L'étape de drapage peut également engendrer l'apparition de porosités car cette étape se fait de plus en plus par placement automatisé des plis ou des fibres. La configuration du rouleau, la vitesse de dépose du pli ou encore la pression d'application et la température imposée par la machine de dépose doivent être

## Chapitre 1. Défauts de porosités et de plissement dans les matériaux composites

bien contrôlées afin de minimiser la présence de porosités dans la pièce finale [Ranganathan *et al.*, 1995, Pitchumani *et al.*, 1996]. La figure 1.3 résume les différents paramètres procédés cités ci-dessus ainsi que d'autres qui peuvent provoquer la formation de porosités.

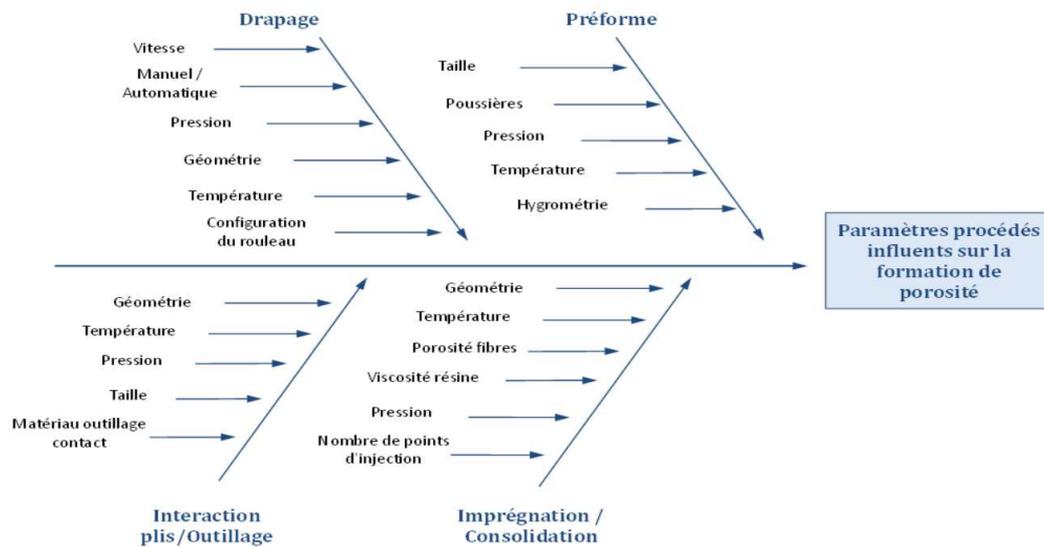


FIGURE 1.3 – Paramètres procédés à l’origine de la formation des porosités.

La présence de ce type de défaut dans les structures composites est donc courante, et il est donc nécessaire d’étudier l’impact de ce défaut sur les propriétés mécaniques du matériau et plus généralement sur son comportement. Diverses études ont donc été conduites afin d’éclairer ce point. Le constat paraît clair : la présence de porosités est très nocive car en fonction du taux de porosités dans la structure, non seulement elle engendre la dégradation des propriétés mécaniques, mais elle peut même, dans certaines conditions, conduire à la rupture [Olivier *et al.*, 1995, Costa *et al.*, 2001, Madsen et Lilholt, 2003, Huang et Talreja, 2005, WU et Dianfu, 2005, Liu *et al.*, 2006a, Zhang *et al.*, 2016]. Ces auteurs affirment qu’en dessous d’un certain taux volumique de porosités, compris entre 0.5% et 1% selon le matériau étudié, les porosités n’ont pas d’influence sur le comportement de la pièce. Cependant, au delà de cette valeur les propriétés mécaniques sont significativement affectées. Ceci peut être expliqué par le fait que pendant la mise en œuvre des pièces composites, les paramètres du procédé de fabrication affectent simultanément la distribution, l’emplacement, la forme et la taille des porosités. Chacun de ces paramètres entraîne un effet différent sur les propriétés mécaniques. Par exemple, la distribution spatiale des porosités est un facteur important : une seule porosité dans un emplacement critique pourrait être plus nocive que plusieurs réparties dans la structure. Il a été également constaté que les porosités avec des formes aléatoires peuvent avoir dans certains cas des effets importants sur les performances mécaniques d’une structure et peuvent provoquer une initiation prématurée des fissures [Kardos *et al.*, 1986, Huang et Talreja, 2005, Hagstrand *et al.*, 2005, McMillan, 2012]. Parmi les propriétés mécaniques qui peuvent être affectées, on trouve notamment la résistance à la compression et la résistance en flexion. Suarez et al. ont démontré dans [Suarez *et al.*, 1993] qu’une fraction volumique de porosi-

tés de 4% dans un composite carbone/époxy engendre une réduction d'environ 40% de la résistance en compression alors que dans [Cinquin *et al.*, 2007, Xueshu et Fei, 2016], pour le même type de composite, cette réduction n'est que de l'ordre de 14% pour un taux de porosités de 11%. En ce qui concerne la résistance en flexion, des études ont montré une baisse de 20 à 28% pour un taux de porosités de 14% pour un composite carbone/époxy [De Almeida et Neto, 1994, Olivier *et al.*, 1995]. Par ailleurs, [Judd et Wright, 1978, Hagstrand *et al.*, 2005] ont constaté, pour un composite verre/époxy une diminution d'environ 1,5% pour chaque incrément de 1% de taux de porosités jusqu'à une valeur seuil de 14%. Une autre caractéristique mécanique affectée par la présence de porosités est la résistance au cisaillement inter-laminaire (ILSS). Olivier *et al.* ont testé deux types de composite carbone/époxy : le "T2H 132 300 EH 25" (Hexcel G6nin, France) et le "R922 1C 12K" (Ciba, USA). Ils ont pu observer une baisse de 15% de cette propriété lorsque le taux de porosités dans le matériau passe de 0.3 à 6.8% pour le premier, et une baisse de 35% lorsque le taux de porosités dans le matériau passe de 1.4 à 6.8% pour le deuxième [Olivier *et al.*, 1995]. Une autre étude menée par Wisnom *et al.* montre que l'ILSS subit une diminution de 8 à 31% pour des tailles de pores comprises entre 0.28 et 3 mm [Wisnom *et al.*, 1996]. D'autres auteurs ont fait le même constat pour des stratifiés carbone/époxy d'architectures différentes [Yoshida *et al.*, 1986, Bowles et Frimpong, 1992, Costa *et al.*, 2001, Liu *et al.*, 2006a, Ledru, 2009, Zhu *et al.*, 2011, Hernández *et al.*, 2011]. La figure 1.4 synthétise les différents résultats obtenus par ces auteurs.

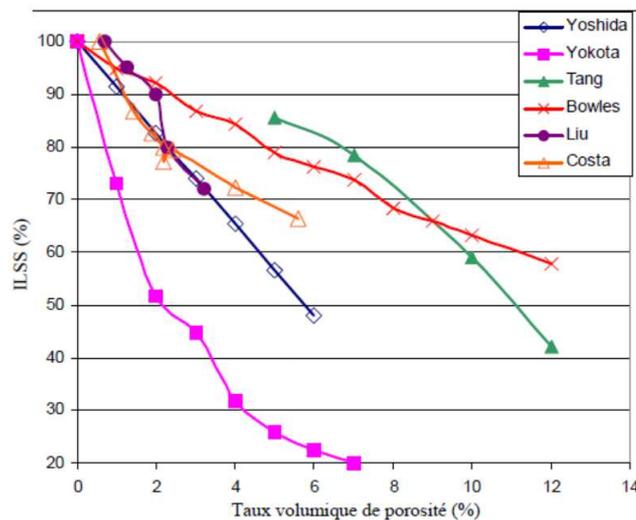


FIGURE 1.4 – Variation relative de l'ILSS en fonction du taux de porosités pour des composites carbone/époxy [Ledru, 2009].

Outre ces propriétés, d'autres études ont trouvé des effets néfastes sur la rupture, la résistance au délaminage, les contraintes à la rupture et le mode de rupture. Les études menées par [Wisnom et Atkinson, 1996] sur des composites carbone/époxy ont montré que la surface de contact fibres/matrice diminue à cause de la présence de porosités, ce qui favorise la rupture de la pièce en cisaillement. Il a été également démontré dans [Suarez *et al.*, 1993] qu'un taux de porosités de 4% pouvait engendrer une réduction allant jusqu'à

40% de la résistance en compression pour le même type de composite, ce qui favorise la rupture de la pièce en compression. Une réduction pouvant atteindre les 25% de la résistance en flexion a été rapportée par [De Almeida et Neto, 1994, Chambers *et al.*, 2006] pour un composite carbone/époxy. Le constat est le même dans [Olivier *et al.*, 1995] où une réduction entre 20 et 28% a été observée pour un taux de porosités de 14% dans un composite carbone/époxy. Les propriétés élastiques du composite peuvent être affectées par la présence de ce défaut. En effet, Selmi a testé des composites carbone/époxy avec porosités [Selmi, 2014], et a constaté qu'un taux de porosités de 2% peut engendrer une baisse allant jusqu'à 20% du module de Young transversal normalisé et du module de cisaillement longitudinal normalisé comparés à un composite sans porosités. D'autres études sur des composites de types carbone/époxy et verre/époxy ont montré une réduction entre 20 et 40% du module de traction et de flexion pour des taux de porosités entre 1 et 5% [Asp et Brandt, 1997, Chambers *et al.*, 2006, Liebig *et al.*, 2013]. La présence de porosités est donc un élément primordial pour les performances mécaniques des matériaux composites.

### 1.3.2 Caractérisation et quantification du défaut de porosités

Afin de pouvoir étudier la porosité et son influence sur le comportement du composite, une étape de caractérisation et de quantification est nécessaire. Les moyens disponibles pour la caractérisation se divisent en deux familles : les moyens destructifs et les moyens non-destructifs. Dans les secteurs de l'aéronautique et des EMR, les industriels favorisent les techniques non-destructives pour examiner les pièces ayant des défauts de porosités. Cependant, ils existent des méthodes de caractérisation destructives qui peuvent être utilisées dans des cas spécifiques, comme la dégradation chimique qui donne des bons résultats sur le taux de porosités mais qui ne donne pas d'informations sur la répartition des porosités ou leur morphologie. De nombreux articles et études présentent les différentes techniques CND à destination des composites [Garnier *et al.*, 2011, Péronnet *et al.*, 2011, Karbhari, 2013]. Dans la suite, nous allons donc mettre l'accent sur ces moyens.

#### 1.3.2.1 Analyse par ultrasons

La technique d'analyse par ultrasons est une technique de caractérisation non destructive très utilisée dans le milieu industriel. En effet, elle permet d'analyser la totalité d'une pièce et d'évaluer la quantité de défaut de porosités en un temps assez court. Cette technique se base sur le fait que la présence de porosités dans un matériau va en général perturber la propagation des ondes ultrasonores [Costa *et al.*, 2001]. Ainsi, en comparant l'amplitude du signal d'entrée et du signal de sortie, on peut estimer la quantité de porosités au sein de l'échantillon [Liu *et al.*, 2006b]. La figure 1.5 représente plusieurs séries successives de C-Scan, avec F, D et B les réponses respectives données par la réflexion de l'onde sur la surface, l'intérieur et le fond de la pièce.

Le principe de cette analyse repose sur la comparaison de l'atténuation du signal ultrasonore mesurée sur l'échantillon par rapport à celle mesurée sur des éprouvettes étalons. On

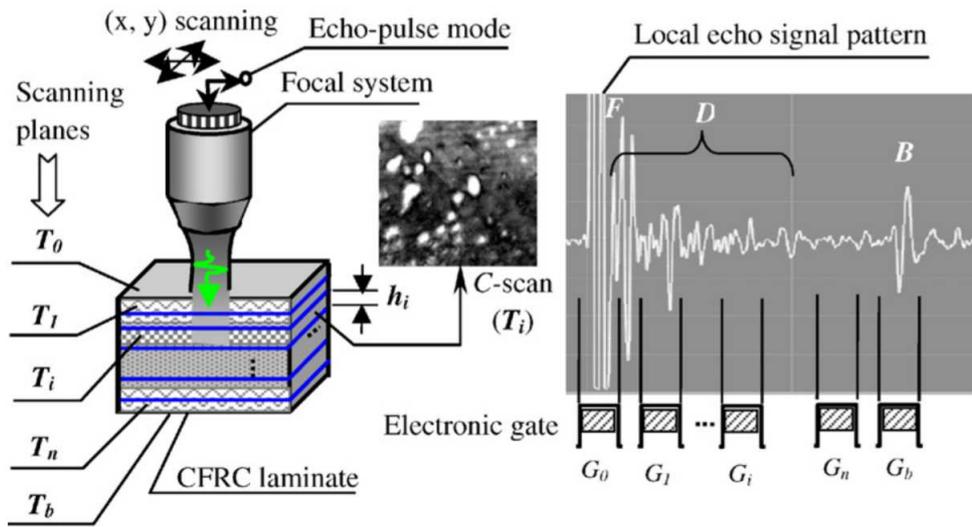


FIGURE 1.5 – Principe de mesure par ultrasons pour un stratifié [Liu *et al.*, 2006b].

peut alors estimer le taux volumique de porosités et leur répartition au sein de la pièce. En revanche, cela reste une estimation et non une mesure précise du taux de porosités due au caractère volumique et aux orientations diverses de ce type de défauts. Il est possible d'avoir des mesures plus précises mais ceci nécessite de disposer les récepteurs utilisés sur une ou plusieurs faces de la pièce selon sa forme.

### 1.3.2.2 Micro-tomographie

Parmi les techniques d'analyse les plus récentes, il y a la micro-tomographie 3D. Elle fournit une image volumique de la répartition du coefficient  $\mu$  d'absorption linéaire des rayons X. Pour le cas d'un matériau composite stratifié, les différents matériaux constitutifs absorbent différemment les rayons X et il est alors possible d'extraire par segmentation une image 3D de la microstructure du composite.

Les travaux de Schell *et al.* [Schell *et al.*, 2006] aboutissent à une cartographie 3D, représentée sur la figure 1.6, du réseau fibreux et des défauts de porosités au sein d'un composite stratifié verre/époxy. Ces travaux, ainsi que ceux de Saint-Martin [Saint-Martin, 2003], décrivent le protocole pour obtenir une cartographie 3D des porosités dans les composites. Le taux volumique de porosités est alors calculé avec précision et des analyses de la répartition des porosités et de leurs morphologies peuvent être tirées à partir de ces résultats.

Cependant, cette technique reste très onéreuse et elle est surtout applicable à de très petits échantillons qui ne sont pas forcément représentatifs d'une structure.

### 1.3.2.3 Analyse d'images

L'analyse d'images est la technique la plus utilisée dans l'étude des matériaux afin de caractériser morphologiquement et quantitativement les défauts de porosités. Il existe tout

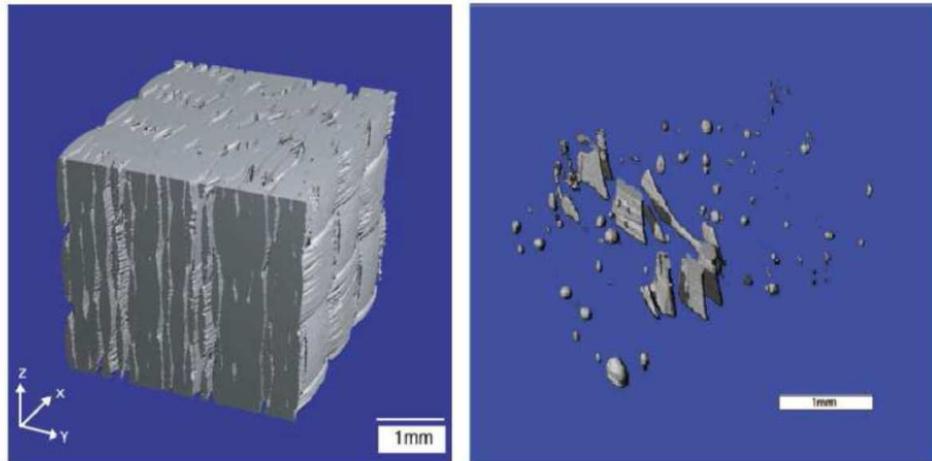


FIGURE 1.6 – Représentation 3D par micro-tomographie d'un composite stratifié verre/époxy, avec à gauche le réseau de fibre et à droite les porosités [Schell *et al.*, 2006].

un protocole expérimental à suivre pour caractériser la microstructure d'un matériaux [Cloetens *et al.*, 1997]. Il faut tout d'abord bien préparer l'échantillonnage qui est un paramètre capital pour valider et généraliser les résultats obtenus à l'intégralité de la pièce analysée. La surface à analyser est ensuite préparée par attaque chimique et/ou polissage. On peut alors lancer l'analyse d'images qui se fera avec la technique la mieux adaptée, en fonction du matériau analysé et de l'échelle du travail. On utilise généralement la microscopie optique, ou la Microscopie Électronique à Balayage (MEB). La micrographie est acquise sous format numérique à l'aide généralement d'une caméra CCD (Charge-Coupled Device) et d'un logiciel, et elle est traitée afin d'extraire les informations intéressantes comme le taux surfacique de porosités. On pourra ensuite généraliser ces résultats à l'ensemble de la pièce.

### 1.3.3 Modélisation et simulation du défaut de porosités

La simulation des matériaux composites est aujourd'hui largement utilisée dans l'analyse du comportement de systèmes mécaniques, dans tous les secteurs industriels. Elle permet d'appréhender le fonctionnement de structures composites complexes dans leurs environnements et de prédire les champs locaux de solutions tels que les déplacements, les contraintes, les déformations ou tout critère d'endommagement et de rupture spécifique au problème donné. Ceci permet donc de limiter les études expérimentales qui sont souvent très coûteuses. Afin d'étudier de plus près le défaut de porosité, plusieurs auteurs ont basé leurs travaux sur des études numériques. En parcourant la littérature, nous avons pu constater que, pour les études menées à l'échelle microscopique, les auteurs ont tendance à représenter la porosité par un vide circulaire en 2D et sphérique ou cylindrique en 3D en partant des observations expérimentales [Isida et Igawa, 1991, Day *et al.*, 1992, Breard *et al.*, 2003, Park *et al.*, 2011, McMillan, 2012, Vajari *et al.*, 2014, Kern *et al.*, 2016, Lim *et al.*, 2016, Kern *et al.*, 2016]. En effet, à cette échelle, les détails des matériaux (renforts, matrice et défauts) sont géométriquement représentés permettant de

définir la microstructure du matériau considérée comme le montre la figure 1.7.

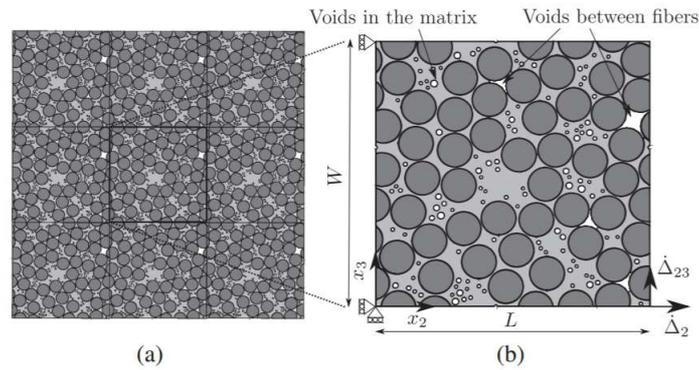


FIGURE 1.7 – (a) Observation de la distribution des fibres et des porosités en coupe transverse d’un composite verre/époxy (b) Représentation de la microstructure du composite à partir de l’observation [Vajari *et al.*, 2014].

Avec cette étude numérique, Vajari *et al.* [Vajari *et al.*, 2014] ont constaté que la porosité (dans la gamme de 1 à 5%) a entraîné une forte réduction de la résistance transversale (de l’ordre de 35%) pour un composite verre/époxy.

Selmi est allé encore plus loin dans [Selmi, 2014] en proposant une modélisation en deux étapes qui consiste à représenter la résine poreuse, suivi d’une étape d’homogénéisation, puis une représentation de la microstructure constituée des fibres de carbone et de la matrice homogène équivalente comme illustré figure 1.8.

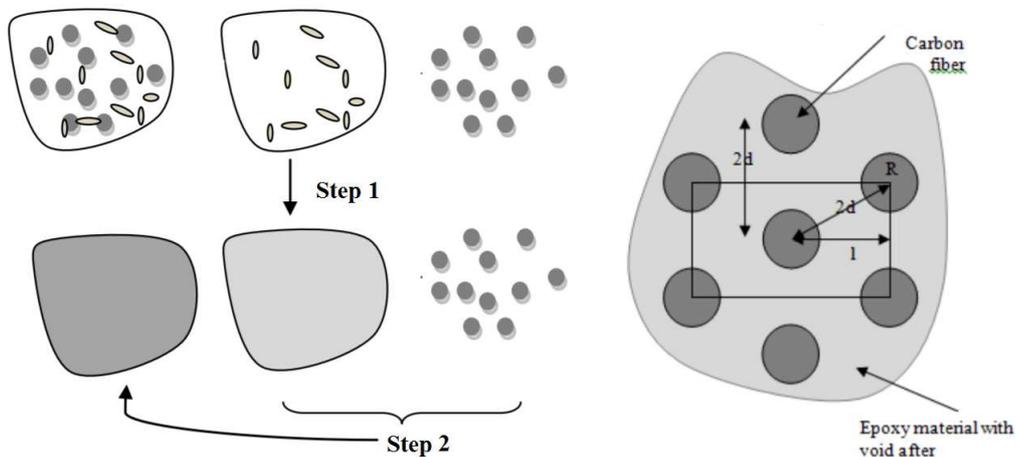


FIGURE 1.8 – Modélisation en deux étapes de la microstructure d’un composite verre/époxy avec défaut de porosités [Selmi, 2014].

Cette étude a montré une diminution du module de Young transversal normalisé et du module de cisaillement longitudinal normalisé pouvant atteindre les 20% pour un taux de porosités de 2% pour un composite carbone/époxy. Une autre stratégie pour la représentation du défaut de porosité, pour un matériau poreux quelconque, a été adoptée dans [Li *et al.*, 2010] où la porosité est représentée en forme de carré comme on peut le voir figure 1.9. Une double répartition aléatoire de la taille et la position de vide est introduite

dans un modèle éléments finis (EF) pour calculer les propriétés élastiques des matériaux poreux.

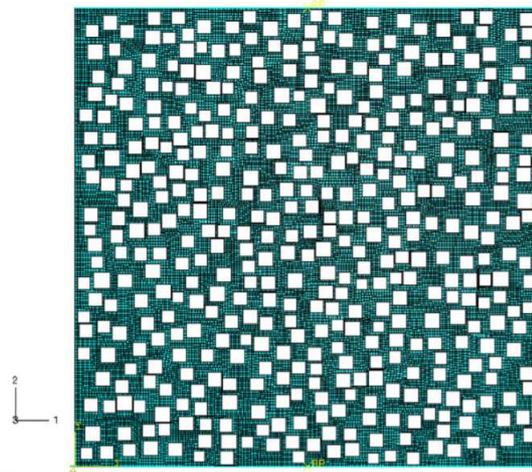


FIGURE 1.9 – Microstructure avec distribution aléatoire de porosités sous forme carrée [Lim *et al.*, 2016].

Ainsi, il a pu simuler le comportement d'un composite verre/époxy avec 15% de porosités et pour des tailles de pores différentes. Une baisse allant jusqu'à 30% sur le module de Young effectif a alors été constaté.

Ces travaux ont inspiré Lim et al. dans [Lim *et al.*, 2016] où la porosité est aussi représentée sous forme de cube. Cette étude se fait à l'échelle microscopique, et elle porte sur un composite UD à base de fibres de carbone T650-35 et d'une résine PMR-15. La modélisation par éléments finis de la microstructure en 3D figure 1.10 comporte donc les fibres sous forme de cylindre, la résine et des cubes vides qui représentent les porosités.

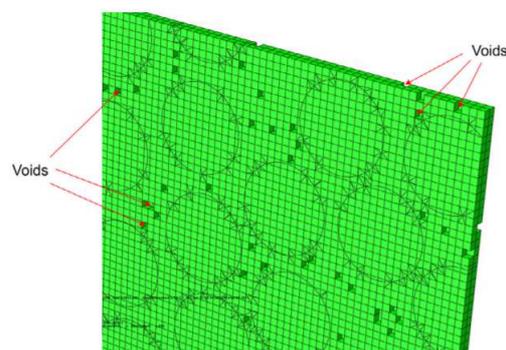


FIGURE 1.10 – Microstructure d'un composite UD T650-35/PMR-15 avec distribution aléatoire de porosités. [Lim *et al.*, 2016].

Grâce à cette modélisation, Lim et al. ont pu constater que lorsque le taux de porosités augmente jusqu'à 5%, les composantes du tenseur d'élasticité du composite diminuent de 20% en moyenne. Ces résultats révèlent que la présence de porosités dans des matériaux composites ne peut être négligée.

La modélisation de la microstructure du composite avec porosités peut aussi se faire grâce aux techniques d'analyse d'images telle que la micro-tomographie. Ainsi, Schell [Schell *et al.*, 2006], obtient grâce à cette méthode une cartographie 3D du réseau fibreux d'un composite verre/époxy avec porosités : ils ont ainsi mis en évidence l'effet de la pression sur la formation et le développement des porosités. Ces mêmes travaux, ainsi que ceux de Saint-Martin [Saint-Martin, 2003] décrivent comment obtenir une cartographie 3D des porosités présentes dans le matériau permettant la reconstitution de sa microstructure. Enfin, d'autres auteurs se sont intéressés non seulement à la modélisation de la porosité, mais ont aussi proposé des modèles de croissance de ce défaut [Kardos *et al.*, 1986, Grunenfelder et Nutt, 2010, Ledru *et al.*, 2010, De Parscau du Plessix *et al.*, 2016]. Ces modèles ont été développés dans le but d'optimiser les paramètres des procédés de mise en œuvre et réduire ainsi la présence et le développement de porosités au sein des pièces.

## 1.4 Le défaut de plissement

### 1.4.1 Origine du plissement et effets sur les propriétés mécaniques des composites

Le défaut de plissement est également un défaut issu des procédés de fabrication. Il est défini dans [Adams et Hyer, 1993] comme étant des ondulations hors plan, ou dans le plan, d'un ou plusieurs plis du composite. Cette ondulation est caractérisée essentiellement par des paramètres géométriques qui sont l'amplitude  $A$ , la largeur  $L$  et l'angle de désalignement maximum  $\theta$  (*cf.* figure 1.11).

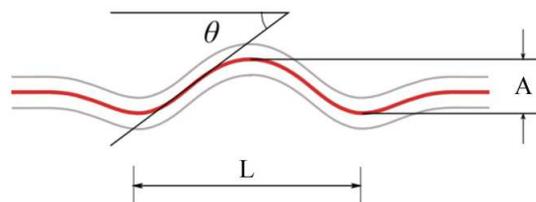


FIGURE 1.11 – Paramètres géométriques caractéristiques du plissement [Mukhopadhyay *et al.*, 2013].

Lé défaut de plissement est également qualifié par Mukhopadhyay dans [Mukhopadhyay *et al.*, 2013] de désalignement des fibres dans un pli par rapport à leur orientation initiale. Ce type de défaut est devenu assez commun dans les procédés utilisant des techniques d'infusion qui permettent de fabriquer des grandes pièces telles que les pales d'éoliennes. Il existe 3 types de plissements comme le précise Hallander et al. [Hallander *et al.*, 2013] représentés sur la figure 1.12 : le « wrinkle », le « waviness » et le « in-plane waviness ». Le plissement dit « wrinkle » est un plissement hors-plan des plis qui touche plusieurs plis dont un des plis extérieurs et il affecte donc le stratifié dans l'épaisseur mais aussi

en surface. Le plissement dit « waviness » est aussi un plissement hors-plan des plis qui touche un ou plusieurs plis mais seulement confinés dans l'épaisseur du stratifié (les deux plis extérieurs ne sont donc pas affectés). Le dernier type de plissement est le plissement « in-plane waviness » qui correspond à un plissement « waviness » mais dans le plan des plis.

Cependant, il est à noter que le type de plissement le plus commun dans la fabrication est le plissement hors-plan « wrinkle » [Hayman *et al.*, 2007, Leong *et al.*, 2012, Hallander *et al.*, 2013].

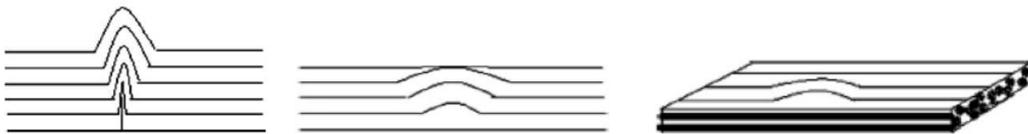


FIGURE 1.12 – Schéma des 3 types de plissements [Hallander *et al.*, 2013].

Le défaut de plissement peut être causé par différents facteurs, et les mécanismes impliqués dans sa formation dépendent du procédé de fabrication [Pandey et Sun, 1999]. Cela peut être la conséquence d'un léger excès de renfort dans un ou plusieurs plis par rapport à la surface disponible mais aussi d'un mauvais placement des plis lors de la phase de drapage surtout dans la fabrication de pièces qui demandent un drapage manuel [Caiazzo *et al.*, 2001, Potter, 2009]. Lightfoot *et al.* [Lightfoot *et al.*, 2013] ont montré l'influence des interactions entre les plis et l'outillage sur la formation de plissement. Hallander *et al.* [Hallander *et al.*, 2013] ont étudié la formation de plissements dus au formage de tissus préimprégnés sur des géométries complexes. D'autres études, menées sur des composites verre/époxy et carbone/époxy, ont démontré l'influence des chargements en compression lors du formage et de la consolidation [Rosen, 1965, Dodwell *et al.*, 2014], l'influence de l'automatisation du drapage [Beakou *et al.*, 2011, Croft *et al.*, 2011] et enfin l'influence de la vitesse de refroidissement et du Coefficient d'Expansion Thermique (CTE) du matériau de l'outillage en contact avec le stratifié [Kugler et Moon, 2002]. Le diagramme d'Ishikawa figure 1.13 résume les différents paramètres procédés pouvant conduire à la formation de plissements.

La question de l'impact de la présence de plissement dans une pièce composite sur son comportement mécanique est alors posée. Ainsi, plusieurs études ont été menées afin de mieux comprendre leurs effets. Parmi les premières études, on trouve celle de Garala et Hyer *et al.* qui ont testé des composites carbone/époxy et graphite/époxy avec plissements et ont constaté une baisse de la résistance au cisaillement interlaminaire favorisant la rupture du composite [Garala, 1987, Hyer et Fuchs, 1988, Garala, 1989]. Adams et Hyer [Adams et Hyer, 1993] ont aussi démontré que le défaut de plissement va de manière générale provoquer une diminution des propriétés mécaniques du composite stratifié, comme on peut l'observer sur la figure 1.14 qui illustre une baisse de 36% de la résistance en compression sur un stratifié carbone/polysulfone. Hayman *et al.* [Hayman *et al.*, 2007] ont eux étudié l'effet du plissement dans un composite verre/époxy et ont montré que

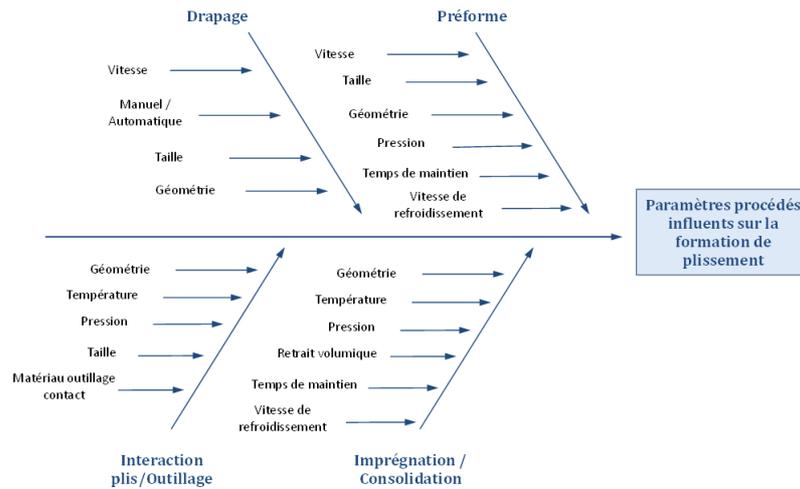


FIGURE 1.13 – Paramètres procédés pouvant conduire à la formation de plissements.

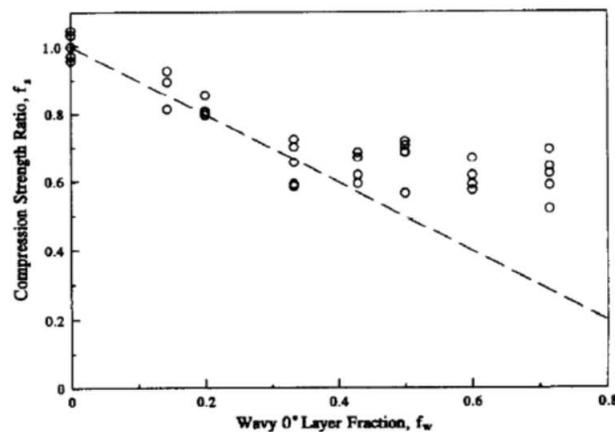


FIGURE 1.14 – Résistance en compression en fonction de la fraction de plissement dans le pli pour un composite carbone/polysulfone T300/P1700 [Adams et Hyer, 1993].

selon la géométrie du plissement et le nombre de plis impliqués, la résistance en compression pouvait diminuer de plus de 55%. En outre, d'autres études intéressantes [Wisnom et Atkinson, 1996, Makeev *et al.*, 2010, Wang *et al.*, 2012, Leong *et al.*, 2012, Mukhopadhyay *et al.*, 2015b] ont mis en évidence que la rupture en compression était fortement favorisée par le degré de sévérité du plissement. Dans [Bradley *et al.*, 1998], les auteurs ont comparé l'effet de la présence d'un seul plissement et celui de 3 plissements dans le composite et ont conclu que la rupture de la structure avec 3 plissements est plus précoce. El-Hajjar et al. [El-Hajjar et Petersen, 2011] ont évalué expérimentalement la résistance en traction d'un composite carbone/époxy et ont constaté que la rupture intervient toujours dans la zone du plissement. Le même constat a été effectué par [Lee et Soutis, 2007] pour un composite carbone/époxy avec plissement. Harisson et al. [Harrison *et al.*, 2012] ont caractérisé le comportement en cisaillement d'un composite verre/époxy et ont pu constater que plus le plissement est grand, plus les contraintes de cisaillement sont importantes. Une étude récente a été menée par Çinar et al. [Çinar et Ersoy, 2015] dans laquelle les auteurs se sont intéressés à des pièces composite carbone/époxy en forme de "L" avec défaut de

plissement. Ils ont obtenu une chute comprise entre 19 et 35% des propriétés élastiques en fonction des dimensions du plissement. L'étude de Bloom *et al.* [Bloom *et al.*, 2013] a elle mis en évidence l'influence de l'angle de désalignement du plissement par rapport au pli sur la résistance en traction d'un stratifié époxy/fibre de verre. Ainsi, une diminution variant de 3% à 50% de la charge maximale et de la charge à la première rupture a été observée avec l'augmentation de cet angle caractéristique du plissement. Tout comme le défaut de porosités, Le défaut de plissement est lui aussi très néfaste pour le comportement mécanique des structures composites.

### 1.4.2 Caractérisation et quantification du défaut de plissement

De même que pour le défaut de porosité, la caractérisation du défaut de plissement dans les composites se fait essentiellement par des moyens de Contrôle Non Destructif (CND). Le plissement est un défaut géométrique et sa caractérisation se fait essentiellement par analyse d'images comme dans l'étude de Gazo-Hanna *et al.* [Gazo-Hanna *et al.*, 2009] qui caractérise le défaut de plissement par Microscopie Optique (MO) et par Microscopie Électronique à Balayage (MEB). Certaines résultats de cette étude sont illustrés sur la figure 1.15.

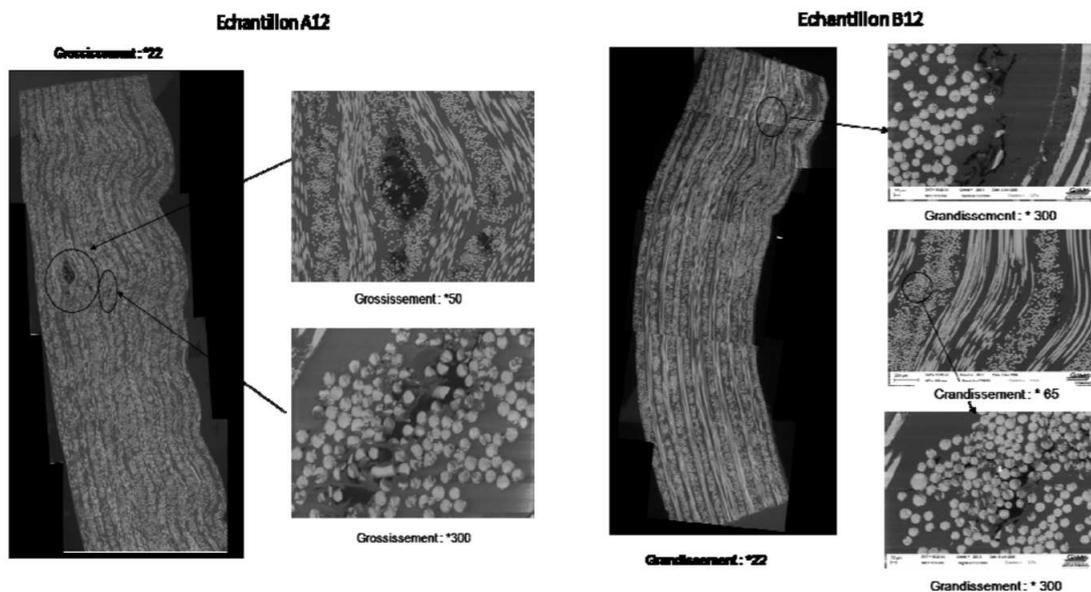


FIGURE 1.15 – Observation de deux échantillons avec plissements à l'aide d'un MEB [Gazo-Hanna *et al.*, 2009].

L'analyse des images par MO et par MEB permet d'avoir une bonne estimation de la morphologie des plissements et de leur quantité. Il est aussi possible de caractériser les différents paramètres des défauts tels que l'amplitude  $A$  des plissements, leur largeur  $L$  et leur angle de désalignement maximum  $\theta$ . Cependant, ces techniques fournissent des informations 2D qui ne sont pas forcément représentatives de l'échantillon global ou même de la structure.

Cette difficulté de représentation des défauts de plissement au sein même d'un échantillon ou d'une structure peut se résoudre par l'utilisation d'un système d'acquisition d'image 3D comme la tomographie. On trouve plusieurs études dans la littérature qui s'intéressent à la caractérisation des composites par tomographie [Bossi *et al.*, 1990] et plus précisément des défauts de plissement comme dans l'étude de Makeev et al. [Makeev et Nikishkov, 2011]. L'analyse par tomographie a l'avantage de donner une représentation 3D des différents défauts. Cela permet l'étude du plissement à travers l'épaisseur de l'échantillon conduisant à une représentation plus réaliste de ce défaut.

Outre les techniques d'analyse d'images en 2D ou 3D, le défaut de plissement peut aussi être caractérisé par étude de la propagation d'onde et plus particulièrement des ondes ultrasonores.

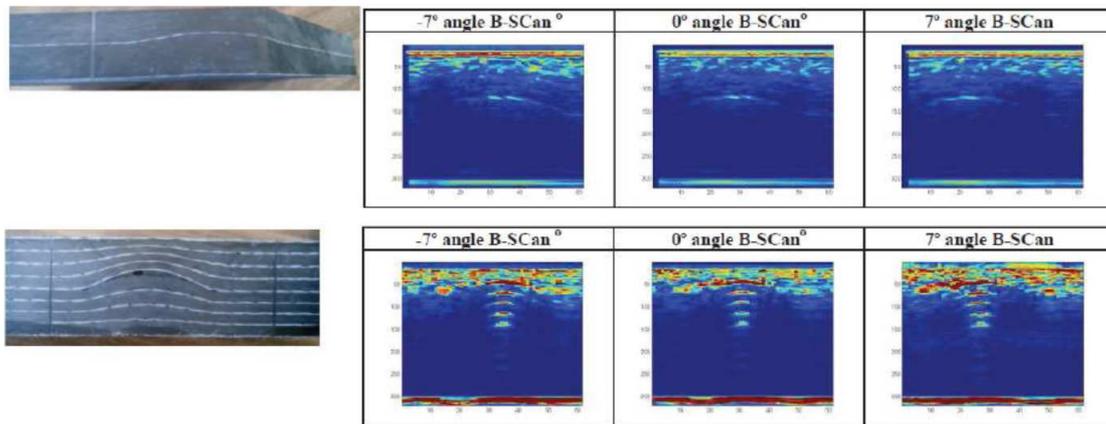


FIGURE 1.16 – Caractérisation par ondes ultrasoniques de plissements de différentes intensités [Fernández-López *et al.*, 2014].

Plusieurs travaux traitent de la caractérisation des défauts, et plus particulièrement du plissement, comme les travaux de Divinis et al. [Divinis *et al.*, 2005], de Chiao [Chiao, 1996], ou plus récemment de Fernández-López et al. [Fernández-López *et al.*, 2014].

On observe bien sur la figure 1.16 les différents plissements qui se forment sur l'image de traitement des ondes ultrasonores. Les ondes ultrasonores sont un bon outil pour la détection de plissements, mais il est cependant difficile de quantifier avec cet outil l'intensité de plissement qui correspond au rapport entre la hauteur du plissement et sa longueur [Fernández-López *et al.*, 2014].

Ces différents moyens de caractérisation ont permis d'identifier les différents paramètres géométriques du plissement afin d'alimenter les études numériques.

### 1.4.3 Modélisation et simulation du défaut de plissement

Afin d'étudier de plus près le défaut de plissement, plusieurs études numériques ont été menées. D'un point de vue modélisation, en se basant sur des observations et des caractérisations expérimentales, comme celles de la section précédente, les auteurs optent

généralement pour une modélisation avec une représentation géométrique du plissement basée essentiellement sur trois paramètres : son amplitude ou hauteur  $A$ , sa largeur  $L$  et l'angle de désalignement  $\theta$  entre le plissement et le pli [Adams et Hyer, 1993, Makeev *et al.*, 2010, Hallander *et al.*, 2013]. La figure 1.18 présente une illustration de ces paramètres.

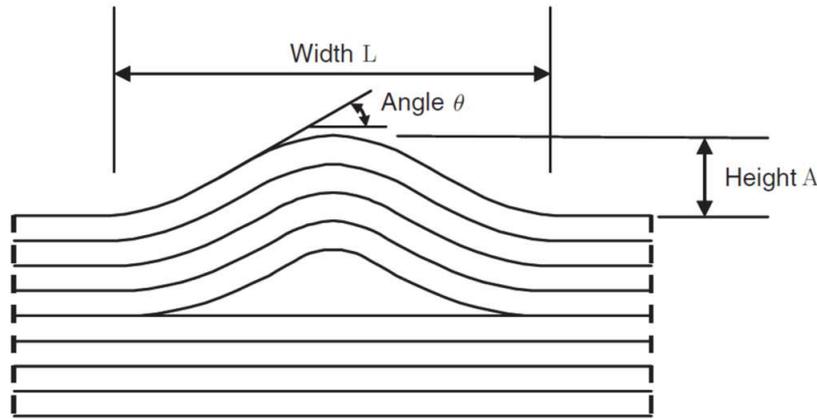


FIGURE 1.17 – Illustration des paramètres nécessaires pour la modélisation du plissement de type "wrinkle" [Hayman *et al.*, 2007].

En partant de ce paramétrage, certains auteurs tels que Hsiao et al. [Hsiao et Daniel, 1996] ont établi des modèles mathématiques en se basant sur des fonctions sinusoïdales qui permettent une bonne représentation du plissement sous la forme suivante

$$y = \frac{A}{2} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \quad (1.1)$$

où le couple  $(x, y)$  représente un point de l'interface supérieure du plissement.

Ainsi, les simulations faites par Mukhopadhyay et al. [Mukhopadhyay *et al.*, 2013, Mukhopadhyay *et al.*, 2015a, Mukhopadhyay *et al.*, 2015b] sont basées sur ce type de modélisation, et ont permis d'étudier numériquement le comportement d'un composite carbone/époxy avec plissement en tension. On a pu constater dans cette étude une diminution allant jusqu'à 27% de la résistance en tension, et une diminution allant jusqu'à 36% de la résistance en compression en fonction des dimensions du plissement. La figure 1.18 illustre un exemple de modélisation par éléments finis sous le logiciel Abaqus®.

Kantharaju a lui aussi utilisé le même modèle mathématique pour représenter le plissement dans un composite carbone/époxy [Kantharaju, 2012]. Il a comparé les propriétés mécaniques d'un composite avec plissement et sans plissement et a constaté une diminution du module de Young dans les directions longitudinale et transverse de 5 et de 4.1% respectivement, et, une légère réduction (de l'ordre de 1.5%) pour le module de cisaillement.

Une autre façon de faire consiste à définir la géométrie du plissement utilisée pour les modèles éléments finis à partir des images numériques prises à partir des échantillons. La série de points le long des interfaces, entre plis et plissements, est ainsi importée dans Ansys® et des lignes de construction basées sur des représentations par splines sont utili-

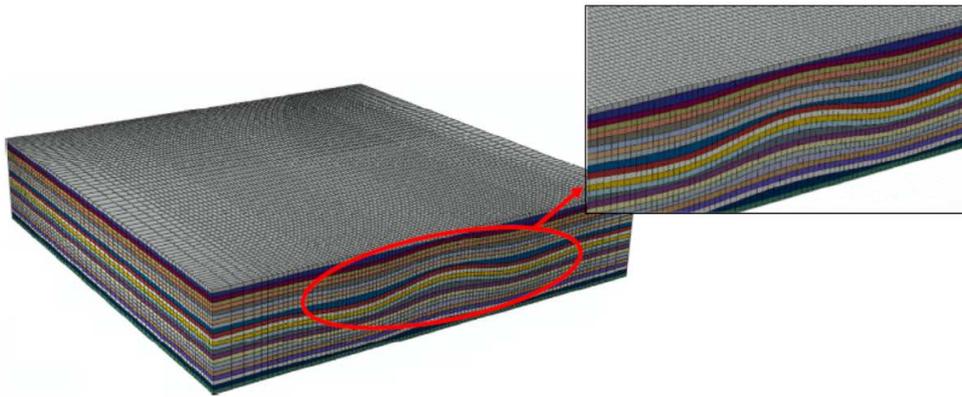


FIGURE 1.18 – Modélisation par éléments finis d'un plissement sous forme d'une fonction sinusoïdale [Mukhopadhyay *et al.*, 2015b].

sées pour l'interpolation entre ces points. Parmi les auteurs qui ont utilisé cette technique, [Hayman *et al.*, 2007] ont pu modéliser le plissement dans un matériau sandwich par éléments finis sous le logiciel Ansys<sup>®</sup> comme le montre la figure 1.19. Dans cette étude, un composite carbone/époxy avec plissement a été simulé en compression, et une baisse allant jusqu'à 55% de la résistance en compression a été rapportée. Dans [Bradley *et al.*, 1998] les auteurs ont également utilisé le même type d'approche.

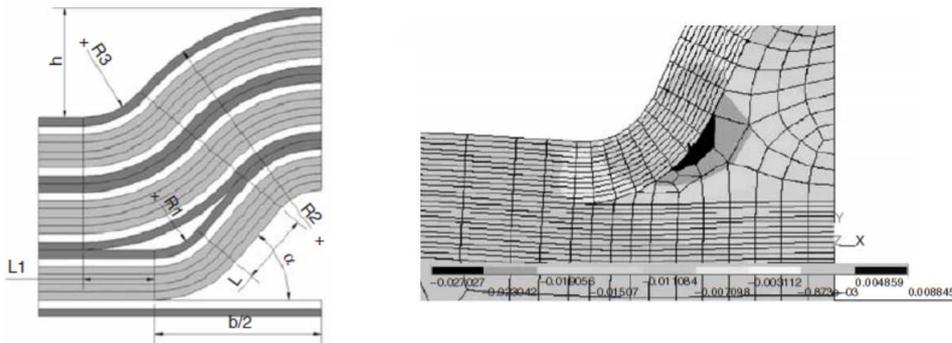


FIGURE 1.19 – Description paramétrique de la géométrie du plissement obtenue à partir des images et sa modélisation EF (Ansys<sup>®</sup>) [Hayman *et al.*, 2007].

Ils ont pu ainsi constater, pour un composite carbone/époxy, une diminution de 12.1% à 35.8% de la résistance en compression, en fonction du nombre de plis affectés par la présence du plissement. Un résumé des résultats de cette étude est présenté figure 1.20. Les travaux de Leong *et al.* [Leong *et al.*, 2012] portent aussi sur la même thématique : on retrouve des simulations de plissement dans des composites sandwichs comme illustré sur la figure 1.21. Ils existent aussi d'autres publications qui s'inspirent de ces techniques pour confronter des résultats expérimentaux et numériques. Par exemple, Makeev *et al.* [Makeev *et Nikishkov*, 2011] ont utilisé un modèle éléments finis pour étudier la rupture d'un composite carbone/époxy. Le critère de rupture d'Hashin et le critère de la contrainte maximale ont été utilisés dans ce modèle pour détecter la rupture.

Les résultats prévus correspondent bien avec des observations expérimentales en terme de

Layer Wave Configuration	Specimen	Strength	
		MPa	(ksi)
Single layer wave	1	605	(87.7)
	2	665	(96.4)
	3	689	(99.9)
	Average	653	(94.7)
Three nested layer waves	1	459	(66.6)
	2	441	(64.0)
	3	498	(72.2)
	4	509	(73.8)
	Average	477	(69.2)

FIGURE 1.20 – Résumé des résultats des tests de résistance à la compression d'un composite carbone/époxy avec plissement [Bradley *et al.*, 1998].

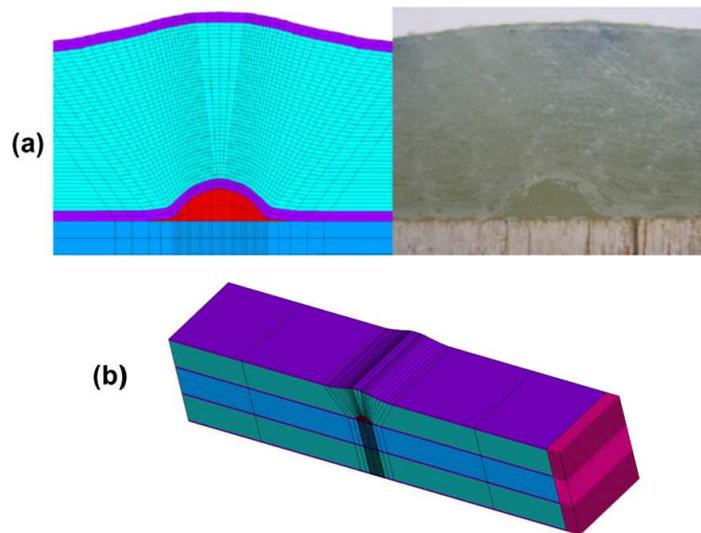


FIGURE 1.21 – (a) Modélisation par éléments finis d'un défaut de plissement et comparaison avec un plissement réel, (b) modèle 3D complet EF (Ansys® 11.0) du composite [Leong *et al.*, 2012].

charge à la rupture mais aussi concernant la zone de rupture. Cette dernière a été corrélée avec des mesures de déformations grâce à un logiciel de corrélation d'image (DIC) comme on peut le voir sur la figure 1.22.

On peut noter que des études numériques très similaires ont été réalisées dans [Garnich et Karami, 2004, Christensen *et al.*, 2013, Sjölander *et al.*, 2016] où les résultats des simulations sont comparés aux données expérimentales.

On peut finalement souligner que les études concernant le défaut de plissement sont moins nombreuses que celles concernant les défauts de porosités. Dans la section suivante, nous nous intéressons à la variabilité observée sur ces deux défauts.

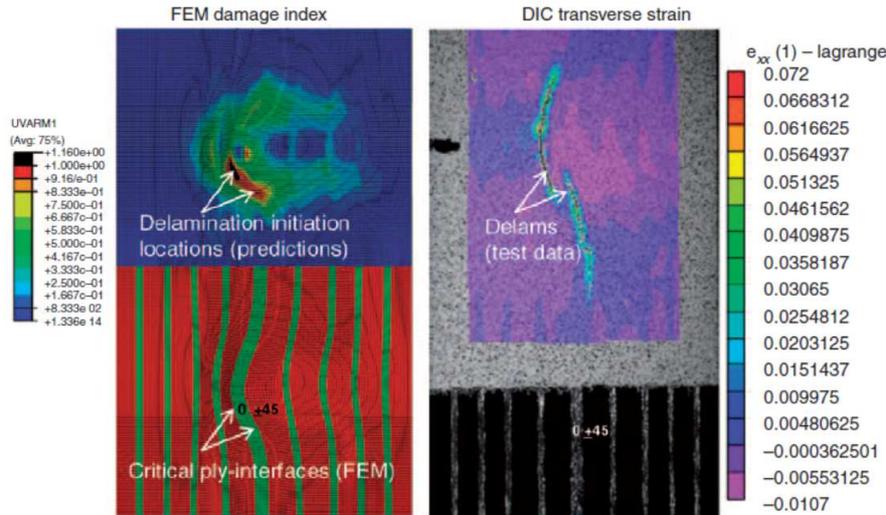


FIGURE 1.22 – Comparaison des zones de rupture d’un composite carbone/époxy obtenues par EF et DIC [Makeev et Nikishkov, 2011].

## 1.5 Variabilité des défauts de porosités et de plissement

Dans ce chapitre, nous avons montré, en nous appuyant sur la littérature, que le développement des défauts de porosités et de plissement étaient liés à la complexité des procédés de fabrication et étaient très sensibles à de nombreux paramètres tels que la température et la vitesse d’injection ou encore l’interaction entre l’outillage et le matériau. La prédiction de l’apparition de ces défauts est alors très difficile car très incertaine et, deux pièces composites, réalisées dans des conditions *a priori* similaires, peuvent comportés des défauts aux caractéristiques géométriques très différentes. Cette variabilité sur la géométrie des défauts du matériau entraîne donc une variabilité sur les performances et les caractéristiques physiques du matériau composite. Dans [Potter, 2009], une étude sur la quantification des incertitudes liés aux défauts observés à l’issu de différents procédés de mise en forme est réalisée pour différents matériaux composites. Les résultats de cette étude sont résumés dans la figure 1.23 où les défauts sont notamment classés en fonction de leur nombre, leur nature et de leur variabilité. On constate que les porosités sont reliées à la variabilité du matériau et du procédé. La variabilité des porosités porte alors sur leur forme, leur répartition et, finalement, sur leur taux volumique dans la pièce finale [Potter *et al.*, 2008, Potter, 2009, Hernández *et al.*, 2011, Hallander *et al.*, 2013, Gauthier, 2017]. La figure 1.24 illustre cette variabilité géométrique pour un composite verre/époxy où la forme et la répartition des vides, en noir, est clairement aléatoire. Cette variabilité provient, entre autres, des différentes conditions de stockage, de la variation de la viscosité de la résine ou encore de la fraction volumique de la préforme. Dans [Ledru *et al.*, 2009], les auteurs ont procédé à un comptage de ces vides classés en fonction de leur taille par analyse d’images de plusieurs échantillon d’un même composite verre/époxy. Les résultats de cette étude sont présentés sur la figure 1.25 sous forme d’un histogramme classé par

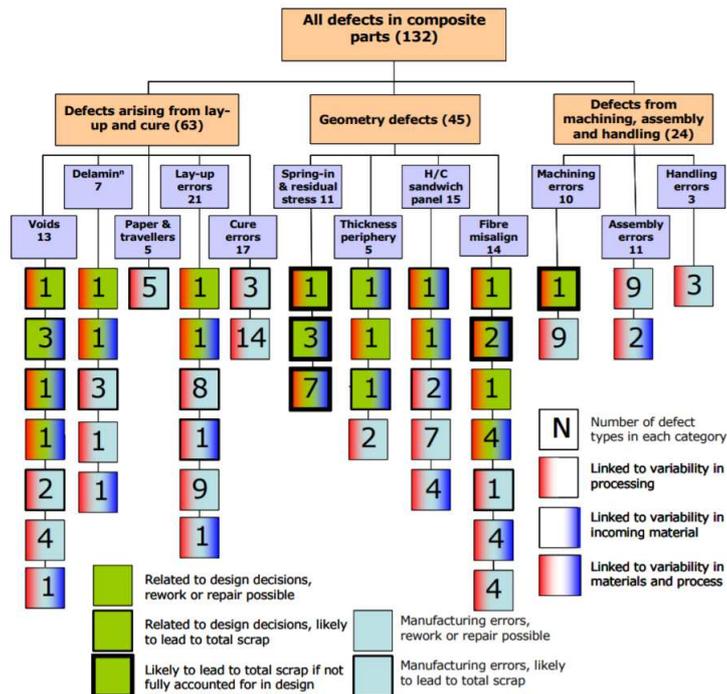


FIGURE 1.23 – Classification des différents types de défauts dans les matériaux composites [Potter, 2009].

tailles de pores observées pour deux échantillons représentatifs : on peut constater des écarts importants pour une même classe sur le nombre de vides entre les deux échantillons.

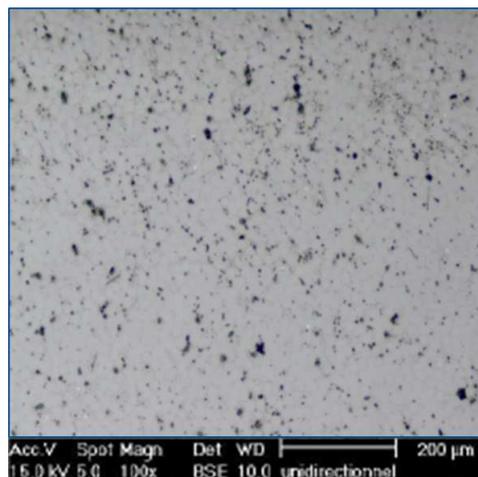


FIGURE 1.24 – Observation MEB du défaut de porosités pour un composite verre/époxy [Gauthier, 2017].

La variabilité des plissements porte également sur leur géométrie (hauteur, largeur et angle de désalignement) et conduit à un désalignement des fibres, *i.e.* une modification de la direction initiale des fibres, dans une zone variable autour du plissement. Les causes de

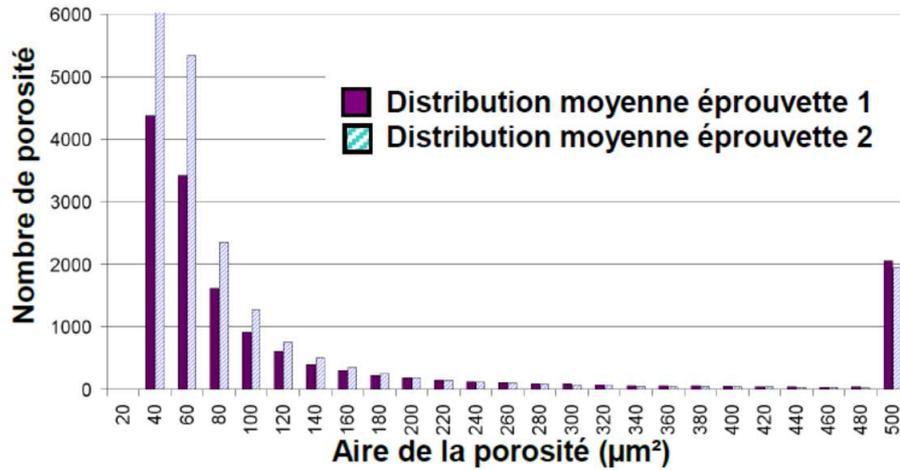


FIGURE 1.25 – Histogramme du nombre de porosités en fonction de l’intervalle de taille considéré [Ledru *et al.*, 2009].

cette variabilité peuvent provenir, comme pour les porosités, de la variabilité du matériau et du procédé [Potter, 2009]. Ce constat est visible sur la classification donnée par la figure 1.23, où le défaut de plissement est appelé *Fibre misalignment*, et où il est classé parmi les défauts géométriques.

Dans [Hayman *et al.*, 2007], une étude sur la corrélation entre le nombre de plis affectés par le plissement et la diminution de propriétés mécaniques est réalisée. Les auteurs se sont intéressés à des structures sandwichs composées de 8 et 24 plis et pour lesquelles le nombre de plis affectés est maîtrisé et diffère d’un échantillon à un autre. Nous présentons ici les résultats pour les tests de compression sur les figures 1.26 et 1.27. Pour les deux familles d’échantillons, on constate que la contrainte de compression à la rupture est fortement affectée avec une baisse allant jusqu’à presque 50% pour les spécimens de 8 plis. On constate par ailleurs que pour des échantillons avec des plissements identiques la contrainte de compression à rupture est soumise à des incertitudes avec des écarts significatifs de l’ordre de 15% (*cf.* figure 1.27 pour les échantillons 2.3 et 2.18).

Dans [Nelson *et al.*, 2017], les auteurs ont étudié les effets de défauts issus du procédé

Specimen no.	No. of layers in wrinkle	Wrinkle height $h$ (mm)	Wrinkle width $b$ (mm)	Compressive stress $\sigma$ at failure(MPa)		
				From load	From strain	Mean
1.7		No wrinkle		203	213	208
1.10		No wrinkle		211	220	215
1.20		Failed away from wrinkle		184	–	184
1.6	2	8	6.9	193	176	185
1.8	2	8	4	196	225	211
1.4	6	8	7.3	191	214	202
1.9	6	8	4	158	173	166
1.2	8	5	6	146	146	146
1.5	8	6	6	115	114	115

FIGURE 1.26 – Résultats des tests de compression obtenus pour la première configuration (8 plis) [Hayman *et al.*, 2007].

de fabrication de composite verre/époxy utilisé dans des pâles d’éolienne. Ils se sont notamment intéressé au désalignement des fibres dans le plan et hors plan. Les résultats sont présentés sur la figure 1.28 où les densités de probabilité de l’angle de désalignement

Specimen no.	No. of layers in wrinkle	Wrinkle height $h$ (mm)	Wrinkle width $b$ (mm)	Compressive stress $\sigma$ at failure (MPa)		
				From load	From strain	Mean
2.4		No wrinkle		247	263	255
2.7		No wrinkle		291	291	291
2.10		No wrinkle		250	270	260
2.19		No wrinkle		251	–	251
2.6	8	Not recorded		232	223	227
2.3	16	6.4	14.4	179	184	182
2.11	16	6.4	14.4	190	213	202
2.17	16	6.4	14.4	182	182	182
2.18	16	6.4	14.4	203	–	203
2.1	20	7.1	15.8	143	154	148
2.5	20	7.1	15.8	149	154	152
2.9	20	7.1	15.8	157	168	162
2.20	20	7.1	15.8	170	–	170

FIGURE 1.27 – Résultats des tests de compression obtenus pour la deuxième configuration (24 plis) [Hayman *et al.*, 2007].

des fibres sont données. On observe une variabilité importante avec un coefficient de variation de 33% dans les deux cas. En outre, les auteurs ont relié et ont montré que la diminution des contraintes à rupture en compression et en traction étaient clairement corrélées à l'augmentation de l'angle de désalignement des fibres (*cf.* figure 1.29).

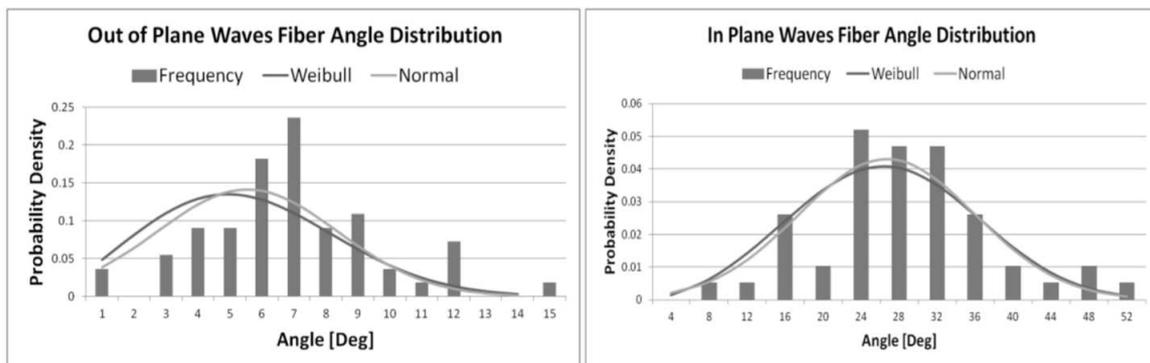


FIGURE 1.28 – Densités de probabilité des angles de désalignement hors plan et dans le plan de composite verre/époxy [Nelson *et al.*, 2017].

Ce dernier paragraphe a permis de sensibiliser le lecteur à la variabilité observée sur les défauts de porosités et de plissements ainsi que sur la variabilité des propriétés mécaniques.

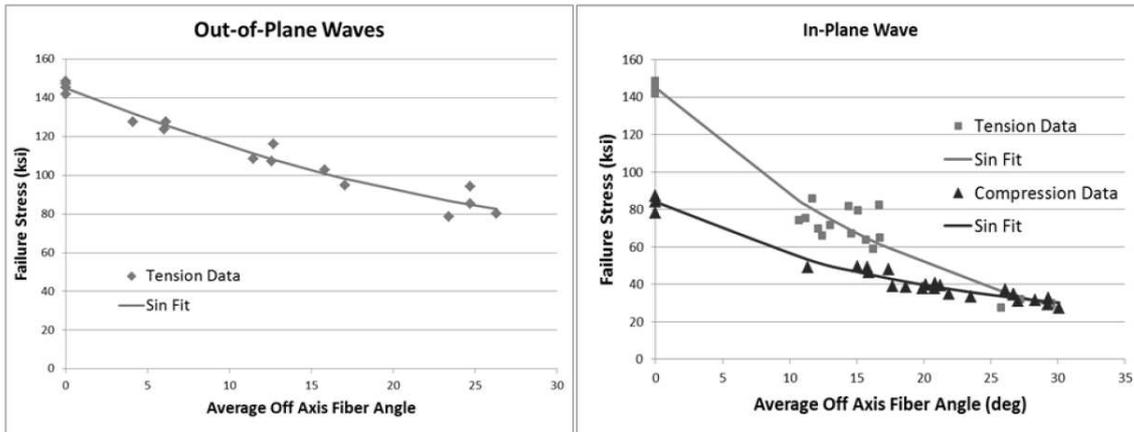


FIGURE 1.29 – Contraintes à rupture en compression et en traction en fonction de l’angle de désalignement [Nelson *et al.*, 2017].

## 1.6 Conclusion intermédiaire

Ce premier chapitre a permis de proposer un état de l’art non exhaustif sur les causes et les conséquences des défauts de plissement et de porosités issus des procédés de fabrication des matériaux composites. Le défaut de porosités provient essentiellement de l’emprisonnement de poches d’air durant le processus de fabrication : le nombre et la taille de ces poches sont influencés par un grand nombre de paramètres telles que la température ou la vitesse d’infusion de la résine. La prédiction du développement de ce type de défaut est alors très complexe et souvent soumise à des incertitudes. Le défaut de plissement peut lui notamment se manifester lors du drapage de grandes pièces composites où plusieurs paramètres comme la vitesse ou la géométrie de la pièce ont un rôle important. Il est alors, lui aussi, soumis à une variabilité significative.

Nous avons montré que les propriétés mécaniques pouvaient être fortement affectées par la présence de ces défauts et qu’il apparaissait important de les détecter pour prendre en compte leurs effets sur le comportement structurelle de la pièce composite. Nous avons présenté la majorité des méthodes de détection de ces défauts reposant le plus souvent sur une analyse d’images (tomographie, MEB etc.). Nous nous sommes également intéressés à la modélisation de ces défauts afin de réaliser des simulations numériques du comportement mécanique de pièces composites en présence de porosités ou de plissements. Enfin, nous avons mis l’accent sur la variabilité observée sur ces défauts ainsi que sur les incertitudes qui en découlent sur la diminution des performances et des propriétés mécaniques. Dans le chapitre suivant nous allons nous intéresser à la modélisation dans un cadre déterministe de ces deux défauts. Nous présenterons l’ensemble des modèles utilisés ainsi que des études numériques sur le comportement de composites en présence de porosités ou de plissements.



# Chapitre 2

## Modélisation et simulation déterministe des défauts de porosités et de plissement

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction du chapitre</b>	<b>32</b>
<b>2.2</b>	<b>Problème mécanique</b>	<b>32</b>
2.2.1	Présentation du cadre mécanique de l'étude	32
2.2.2	Transition d'échelles basée sur l'homogénéisation numérique	33
2.2.2.1	Principes et objectif de l'homogénéisation	33
2.2.2.2	Représentation et localisation	35
2.2.2.3	Homogénéisation et conditions aux limites	35
2.2.3	Généralité sur la rupture en mécanique des composites	37
<b>2.3</b>	<b>Étude déterministe du défaut de porosités</b>	<b>41</b>
2.3.1	Modélisation à l'échelle microscopique	41
2.3.2	Application : étude d'un composite UD [90°] avec porosités	43
2.3.3	Calculs des propriétés effectives avec porosités	46
2.3.4	Étude des macroporosités à l'échelle d'un pli UD 90°	50
<b>2.4</b>	<b>Étude déterministe du défaut de plissement</b>	<b>55</b>
2.4.1	Spécificité du défaut de plissement	55
2.4.2	Application : étude d'un composites UD [0°] avec plissement	57
<b>2.5</b>	<b>Conclusion intermédiaire</b>	<b>64</b>

---

## 2.1 Introduction du chapitre

Ce chapitre présente les modèles mécaniques utilisés pour l'étude de l'impact des défauts de porosités et de plissement sur les matériaux composites. Nous présentons les problèmes mécaniques modèles dans un cadre élastique linéaire intervenant à différentes échelles : microscopique et macroscopique pour les porosités et mésoscopique ou macroscopique pour les plissements. Afin de déterminer les propriétés effectives d'un milieu contenant des porosités et ainsi être capable de réaliser des simulations à l'échelle supérieure, nous proposons d'utiliser l'homogénéisation numérique détaillée plus loin dans ce chapitre. Nous nous intéressons également aux critères de rupture classiquement utilisés pour les matériaux composites et plus spécifiquement au critère de Puck permettant de distinguer la rupture au sein des fibres et dans la matrice. Nous détaillons par ailleurs les particularités et les développements liés à chaque défaut. Enfin, nous illustrons l'ensemble des modèles et méthodes proposés avec plusieurs exemples numériques relatifs aux défauts de porosités ou de plissement.

## 2.2 Problème mécanique

### 2.2.1 Présentation du cadre mécanique de l'étude

On se propose d'étudier le comportement d'un système mécanique qui, à partir d'un état initial non chargé, atteindra un nouvel état d'équilibre sous l'action de forces extérieures. L'étude sera limitée à un matériau composite constitué de plusieurs matériaux supposés linéaires élastiques dans le cadre des petites déformations. Dans la suite, par souci de clarté, nous présentons le problème avec deux matériaux mais il est à noter que la théorie reste valable pour un nombre de matériaux supérieur. On considère le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , où  $d$  représente la dimension spatiale, telle que  $\Omega = \Omega^{mat1} \cup \Omega^{mat2}$ . Ce domaine est soumis à des efforts volumiques  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  sur  $\Omega$  et des forces surfaciques  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  sur une partie  $\Gamma_2$  de la frontière  $\partial\Omega$ , avec des conditions aux limites spécifiques appliquées aux frontières. Les contraintes sont représentées par un tenseur symétrique du second ordre noté  $\boldsymbol{\sigma}$  de sorte que le problème consiste à trouver le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  qui vérifie :

$$\mathbf{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \quad \text{sur } \Omega \quad (2.1)$$

Cette équation est complétée par la loi de comportement qui relie le tenseur de contrainte au tenseur de déformation du deuxième ordre  $\boldsymbol{\varepsilon}$  :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{sur } \Omega \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{C}$  est le tenseur élastique du quatrième ordre dépendant du matériau. Des conditions aux limites spécifiques en déplacement (de type Dirichlet) sont ajoutées à ce problème pour assurer l'unicité de la solution. On a par exemple, sur le problème figure 2.1, les déplacements qui sont imposés nuls sur la partie  $\Gamma_1$  de la frontière  $\partial\Omega$  telle que  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ .

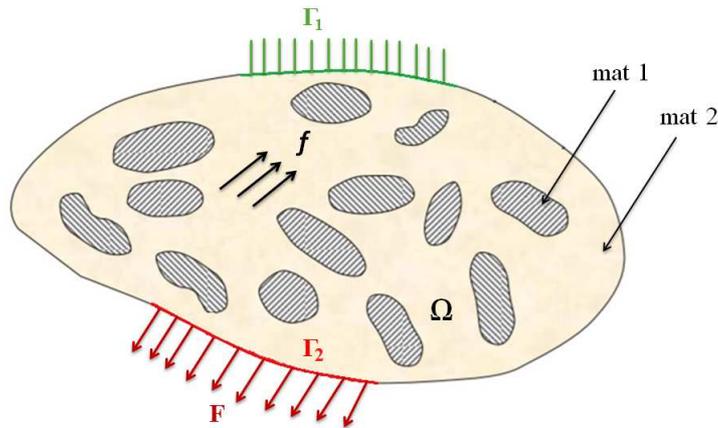


FIGURE 2.1 – Problème modèle en élasticité linéaire.

La partie complémentaire de  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  notée  $\Gamma_0$  est supposée libre, l'ensemble des conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{F} & \text{sur } \Gamma_2 \\ \mathbf{u} &= 0 & \text{sur } \Gamma_1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

avec  $\mathbf{n}$  la normale extérieure à la frontière considérée.

Les matériaux composites sont de plus en plus fréquemment utilisées dans la réalisation de structures à très hautes performances mécaniques. Cependant, le calcul direct des déformations et du comportement général de ces structures soulève des difficultés insurmontables dues au très grand nombre d'hétérogénéités du milieu. Les méthodes de calcul s'orientent donc vers l'assimilation du composite à un matériau homogène possédant une microstructure uniforme ou à variation spatiale lente. Pour cela, nous avons besoin des méthodes de transition d'échelle et en particulier de la théorie de l'homogénéisation qui permet une mise en œuvre rigoureuse et systématique de cette démarche.

## 2.2.2 Transition d'échelles basée sur l'homogénéisation numérique

### 2.2.2.1 Principes et objectif de l'homogénéisation

Contrairement aux matériaux homogènes dont l'étude peut être relativement simple, l'étude des matériaux hétérogènes est un peu plus complexe et la description de leur comportement est plus délicate. En effet, quand les hétérogénéités se situent à une petite échelle et que l'on souhaite réaliser une étude à une échelle bien supérieure, la représentation géométrique conduit à des coûts de calculs très importants. C'est la raison pour laquelle ce type de méthode a suscité l'intérêt de la communauté scientifique depuis plusieurs années afin de prendre en compte le caractère hétérogène de la matière à l'échelle microscopique [Michel *et al.*, 1999, Zaoui, 2001, Bornert, 2001]. La technique d'homogénéisation a pour but de trouver des modèles prédictifs fiables du comportement homogène

## Chapitre 2. Modélisation et simulation déterministe des défauts de porosités et de plissement

macroscopique équivalent au contenu physique via l'analyse de l'hétérogénéité du matériau de référence. On obtient donc un Milieu Homogène Équivalent (M.H.E.) qui permet de simplifier la représentation du milieu hétérogène. Les propriétés effectives de ce dernier sont déterminées à partir de celles des constituants microscopiques et les relations entre les grandeurs physiques à l'échelle microscopique et celles à l'échelle macroscopique sont établies grâce à la technique de changement d'échelles. Les informations sur la géométrie de la microstructure du milieu hétérogène sont également prises en considération dans cette procédure afin que les simulations réalisées à partir du M.H.E. conservent l'aspect prédictif des simulations réalisées avec la description hétérogène du milieu. L'efficacité de la méthode dépend de l'échelle pertinente pour décrire les phénomènes physiques auxquels on s'intéresse.

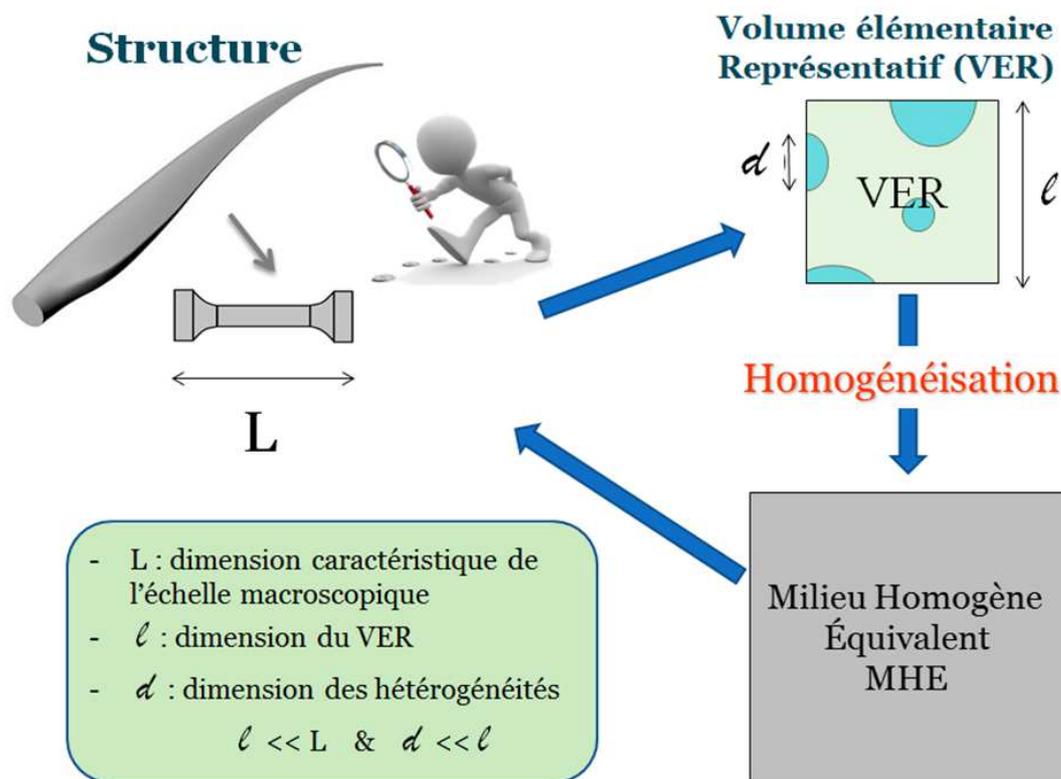


FIGURE 2.2 – Schéma du principe d'homogénéisation appliqué au matériau composite.

En pratique, les propriétés effectives du M.H.E. sont déterminées sur un Volume Élémentaire (V.E.) qualifié de Représentatif (V.E.R.) du milieu hétérogène à modéliser si les propriétés équivalentes obtenues sont indépendantes de la taille caractéristique du V.E. Dans le cas où ce V.E.R. existe, le comportement effectif du M.H.E. est défini comme étant la réponse moyenne du V.E.R. à un chargement moyen (lemme de Hill [Hill, 1963]). La figure 2.2 illustre la démarche de modélisation par changement d'échelle ainsi que les différentes échelles de représentation dans le cas d'un matériau composite. Cette procédure passe donc par trois grandes étapes. D'abord, la représentation où l'on cherche à définir le milieu hétérogène étudié et les différentes propriétés des constituants. Ensuite

la localisation qui nous permet d'avoir les champs résultants dans le V.E.R. d'un chargement moyen macroscopique homogène. Enfin, l'étape d'homogénéisation qui permet de déterminer la réponse moyenne du V.E. à partir de l'analyse précédemment réalisée des champs des quantités d'intérêts. Ceci va nous permettre d'établir les relations de transition de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique et ainsi de déduire les propriétés effectives.

### 2.2.2.2 Représentation et localisation

L'étape de représentation consiste à définir le V.E. du milieu hétérogène que l'on souhaite étudier. On doit donc définir les constituants en précisant leurs propriétés et leurs répartitions. Pour que le V.E. étudié puisse être un V.E.R. du milieu hétérogène, il est nécessaire d'avoir une description complète de sa géométrie. Certaines règles dimensionnelles de la séparation des échelles, concernant les dimensions et la définition du V.E., doivent être respectées comme indiqué sur la figure 2.2. Dans le cas de milieux périodiques, le V.E.R. peut se réduire à une cellule de base de l'arrangement périodique et il devient possible de s'affranchir de certaines règles. L'étape de représentation conduit alors à une description déterministe du milieu hétérogène. Dans le cas plus général des milieux aléatoires, la détermination du V.E.R. se fait de manière statistique car la description des champs mécaniques et de la géométrie n'est pas déterministe. Par la suite, on passe à l'étape de localisation qui vise à analyser le comportement du V.E. sous différentes sollicitations macroscopiques. On s'intéresse donc aux quantités d'intérêts mécaniques locales : les contraintes  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  et les déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$  induites dans le volume élémentaire par un chargement global. Les grandeurs globales macroscopiques  $\boldsymbol{\Sigma}$  et  $\mathbf{E}$ , qui sont respectivement les contraintes et les déformations macroscopiques, sont définies sur un volume  $V$ , désignant le volume du V.E. étudié, comme étant la moyenne spatiale des grandeurs locale par :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma} &= \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ \mathbf{E} &= \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}\end{aligned}\tag{2.4}$$

### 2.2.2.3 Homogénéisation et conditions aux limites

L'étape d'homogénéisation vise à déterminer l'expression et l'estimation du comportement moyen ou effectif équivalent du V.E. Nous devons donc calculer le tenseur d'élasticité (d'ordre 4) noté  $\mathbf{C}^{app}$ . Pour cela, on dispose de deux approches différentes : une première approche mécanique qui le définit comme étant le tenseur reliant directement les tenseurs des contraintes et des déformations macroscopiques par la relation

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{C}_{méca}^{app} : \mathbf{E}\tag{2.5}$$

et une seconde approche, dite énergétique qui, en se basant sur le fait que l'énergie de déformation microscopique est identique à celle de déformation macroscopique, définit le

tenseur d'élasticité de la manière suivante :

$$\frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{C}_{\text{éner}}^{\text{app}} : \mathbf{E} \quad (2.6)$$

avec  $\mathbf{C}$  le tenseur de rigidité défini en tout point du V.E.

L'équivalence entre ces deux approches est assurée par la condition de Hill [Hill, 1963], qui impose l'égalité du travail macroscopique et de la moyenne du travail microscopique [Di Paola, 2010] :

$$\frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{C}_{\text{éner}}^{\text{app}} : \mathbf{E} \quad (2.7)$$

Hazanov et Amieur [Hazanov et Amieur, 1995] et Hazanov et Huet [Hazanov et Huet, 1994] ont également proposé une alternative à la condition de Hill en utilisant des conditions particulières pour les contraintes  $\mathbf{t}$  sur le bord du V.E. et les déplacements  $\mathbf{u}$  :

$$\int_{\partial V} (\mathbf{u} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{t} - \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}) dS = 0 \quad (2.8)$$

Il est donc nécessaire d'appliquer des conditions particulières sur les déplacements et les vecteurs contrainte aux bords du V.E. afin d'assurer l'équivalence du comportement effectif entre les deux approches. En pratique, il existe plusieurs possibilités de conditions aux limites qui vérifient toutes la condition de macro-homogénéité (Lemme de Hill) et peuvent donc être appliquées. Cependant, trois types de conditions limites se distinguent et reviennent souvent dans la littérature : les conditions homogènes (de déformations ou de contraintes) sur le contour, les conditions mixtes et les conditions périodiques.

### Conditions aux Limites de Déformation Homogène (CLDH)

L'application de ce type de condition nécessite de se donner une déformation macroscopique  $\mathbf{E}^0$  et imposer le vecteur déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  sur le bord du V.E. tel que :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial V \quad (2.9)$$

On a donc  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^0$  qui se démontre facilement à l'aide du théorème de la divergence (ou de Green Ostrogradski) et des équations de compatibilité des déformations.

### Conditions aux Limites de Contrainte Homogène (CLCH)

On se donne une contrainte macroscopique  $\boldsymbol{\sigma}^0$ . Le principe des CLCH consiste à appliquer un vecteur de contrainte  $\mathbf{t}(\mathbf{x})$  sur le bord du V.E., tel que :

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}^0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial V \quad (2.10)$$

On a donc  $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0$  qui se démontre également facilement à l'aide du théorème de la divergence (ou de Green Ostrogradski) et des équations de compatibilité des contraintes.

### Conditions aux Limites Périodiques (CLP)

On se donne une déformation macroscopique  $\mathbf{E}^0$  et on impose le vecteur déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  sur le bord du V.E. tel que :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{u}'(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \partial V \quad (2.11)$$

avec  $\mathbf{u}'(\mathbf{x})$  un champ de déplacement périodique qui prend des valeurs identiques pour des points homologues de  $\partial V$ . On impose aussi au vecteur contrainte  $\mathbf{t}(\mathbf{x})$  d'être anti-périodique sur  $\partial V$ .

### Conditions aux Limites Mixtes (CLM)

L'objectif des CLM est de vérifier le lemme de Hill en imposant à la fois des conditions aux limites en déplacements  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  et des vecteurs contraintes  $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ . On retrouve plusieurs types de CLM parmi lesquelles les "Orthogonal Mixed Uniform Boundary Conditions" proposées par Hazanov et Amieur [Hazanov et Amieur, 1995] qui consistent à imposer en tout point du contour le vecteur contrainte macroscopique dans une direction et les déplacements dans les deux autres directions orthogonales. On peut également citer les conditions aux limites mixtes "normales" proposées par Gelebart [Gélébart *et al.*, 2009] qui consistent à imposer une condition d'homogénéité de la composante normale du vecteur déplacement et des composantes tangentielles du vecteur contrainte.

Plusieurs types de conditions aux limites s'offrent donc à nous pour le calcul des propriétés effectives. Nous avons fait le choix de travailler avec des conditions limites homogènes. Ces dernières sont relativement simples à mettre en œuvre puisque la majorité des logiciels éléments finis disposent de tous les éléments pour leur mise en place. En effet, grâce à cette technique, nous pouvons déterminer les contraintes dans le milieu homogène équivalent à partir de la microstructure. Celles-ci sont particulièrement intéressantes puisqu'elles peuvent être utilisées dans des critères de rupture à l'échelle macro qui, eux, permettent d'estimer la rupture.

### 2.2.3 Généralité sur la rupture en mécanique des composites

En service, une pièce composite peut subir des sollicitations très différentes (des chargements mécaniques, thermiques, chimiques). La présence des défauts dans le composite peut avoir des conséquences directes sur ses propriétés mécaniques mais également sur l'état de santé et les performances de la structure. En effet, cette dernière subit un endommagement progressif provoqué par ces défauts et qui se termine par la rupture. La prévision de la rupture finale des structures composites est donc nécessaire pour leur bon dimensionnement. Nous nous sommes ainsi intéressés aux différents critères de rupture. En effet, ces derniers ont pour objectif de prédire la capacité d'un matériau à supporter un certain type de sollicitation et de permettre au concepteur d'évaluer la résistance mécanique du composite, qui, d'une manière générale, correspond à une dégradation irréversible et finalement la rupture du matériau. Dans le cas des matériaux fragiles, cette

rupture peut survenir pour une contrainte proche de la limite d'élasticité. Dans le cas des matériaux composites, lorsque la limite du domaine élastique est atteinte, on peut observer différents mécanismes d'endommagement : fissuration de la matrice, ruptures des fibres, décohésion fibre-matrice, délaminage. (*cf.* figure 2.3).

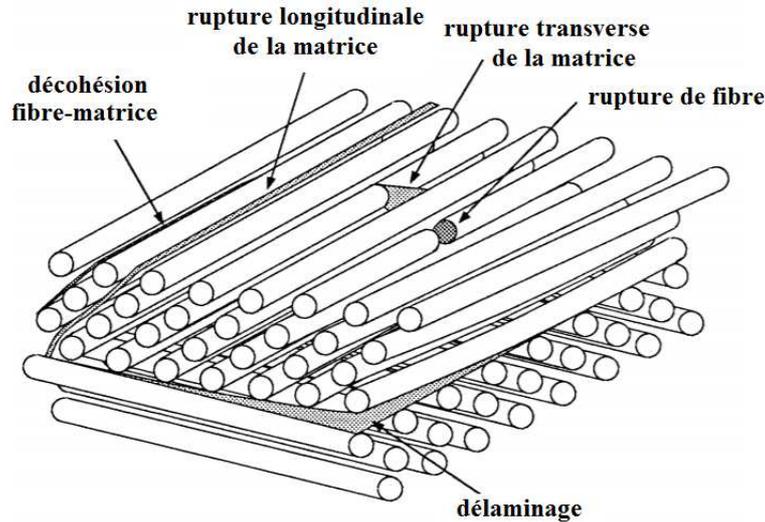


FIGURE 2.3 – Mécanismes de rupture observés dans les composites.

La rupture des composites peut être abordée de différentes façons. Il y a les concepts de résistance des matériaux conduisant à des modèles de rupture classiques. Ces modèles sont caractérisés par une fonction scalaire du tenseur des contraintes et il n'y a pas de rupture du matériau tant que la fonction n'atteint pas une valeur seuil.

La rupture peut être aussi abordée par la mécanique de la rupture qui se préoccupe de l'amorçage et de la propagation des défauts dans le matériau, ou encore par la mécanique de l'endommagement. Ainsi, Paris et al. [Paris et Jackson, 2001] ont résumé les différentes théories et les différents critères de rupture. On retrouve alors des critères polynomiaux qui sont des critères énergétiques ou tensoriels utilisant des expressions mathématiques pour décrire la rupture. Les critères les plus connus sont les critères de Tsai-Wu [Tsai et Wu, 1971] ou Tsai-Hill [Tsai, 1965] qui sont basés sur une généralisation des critères de plasticité de type Von Mises. Le critère proposé par Tsai-Wu peut être exprimé dans la notation tensorielle comme suit :

$$\frac{\sigma_{11}^2 - (R_{\parallel}^t - R_{\parallel}^c)\sigma_{11}}{R_{\parallel}^c R_{\parallel}^t} + \frac{\sigma_{22}^2 - (R_{\perp}^t - R_{\perp}^c)\sigma_{22}}{R_{\perp}^c R_{\perp}^t} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{\sqrt{R_{\parallel}^c R_{\parallel}^t R_{\perp}^c R_{\perp}^t}} = 1 \quad (2.12)$$

avec :

- $R_{\parallel}^t$  et  $R_{\parallel}^c$  les contraintes à la rupture en traction et en compression dans la direction des fibres d'un pli élémentaire ;
- $R_{\perp}^t$  et  $R_{\perp}^c$  les contraintes à la rupture en traction et en compression dans la direction transverse aux fibres d'un pli élémentaire ;

- $S$  la contrainte à la rupture en cisaillement dans le plan ;
- $\sigma_{11}$  et  $\sigma_{22}$  sont respectivement les contraintes longitudinale et transversale et  $\tau_{12}$  la contrainte de cisaillement.

Plusieurs autres critères quadratiques partant du même principe mais avec des formulations différentes ont été proposés par Azzi-Tsai [Azzi et Tsai, 1965], Hoffman [Hoffman, 1967] et Chamis [Chamis, 1969]. Le point fort de ce type de critère réside dans le fait qu'ils nous permettent de prendre en compte les interactions entre les contraintes dans plusieurs directions. Cependant, ils ne nous donnent pas d'information sur les modes de rupture.

Il existe aussi une autre catégorie de critères de rupture qui est directement associé à des modes de rupture. Ces critères considèrent que le caractère non homogène des composites conduit à différents modes de rupture des constituants. Ces critères sont établis d'un point de vue mathématique en se basant sur les résistances du matériau et en prenant en considération les différents modes de rupture des constituants. On peut ainsi identifier la rupture des fibres et la rupture transverse ou en cisaillement de la matrice. Les critères de rupture associés aux modes de ruptures peuvent être subdivisés en deux sous-groupes : les critères interactifs et les critères non interactifs.

Les critères non interactifs ne prennent pas en considération l'interaction entre les contraintes et les déformations agissant sur le composite. Ils conduisent généralement à des erreurs dans les prédictions des contraintes à la rupture. Parmi ces critères il y a les critères de contraintes maximales et de déformations maximales. Ces deux critères considèrent que la rupture de composite intervient lorsque les contraintes (respectivement les déformations) dépassent les limites correspondantes, c'est donc un moyen simple et direct de prédire la rupture des composites. Trois conditions différentes de défaillance sont considérées en correspondance avec une contrainte maximale dans la direction des fibres, la direction transversale et en cisaillement.

Les critères interactifs prennent eux en considération l'interaction entre les différentes contraintes et déformations agissant sur le composite. Parmi ces critères on retrouve celui de Hashin-Rotem [Hashin et Rotem, 1973] qui a été ensuite amélioré par Hashin [Hashin, 1980] avec une formulation basée sur quatre modes de rupture du matériau définis par des critères tensoriels quadratiques : rupture des fibres en traction/compression et rupture de la matrice en traction/compression. Un autre critère de plus en plus utilisé dans l'industrie est le critère de Puck [Puck et Schürmann, 1998, Puck et Schürmann, 2002]. Ce dernier introduit la notion de plan critique qu'une loi de type "frottement de Coulomb" pour les ruptures en compression/cisaillement. De plus, Puck propose de décomposer la rupture en deux familles : la rupture des fibres ("FF" pour *fiber failure*), et la rupture entre fibres ("IFF" pour *interfiber failure*). La rupture des fibres est évaluée en utilisant un critère simple en contrainte, les équations (2.13) et (2.14) résument la condition de défaillance :

$$\frac{\sigma_{11}}{R_t^f} = 1 \quad \text{si } \sigma_{11} > 0 \tag{2.13}$$

$$\frac{\sigma_{11}}{R_{\parallel}^c} = 1 \quad \text{si } \sigma_{11} < 0 \quad (2.14)$$

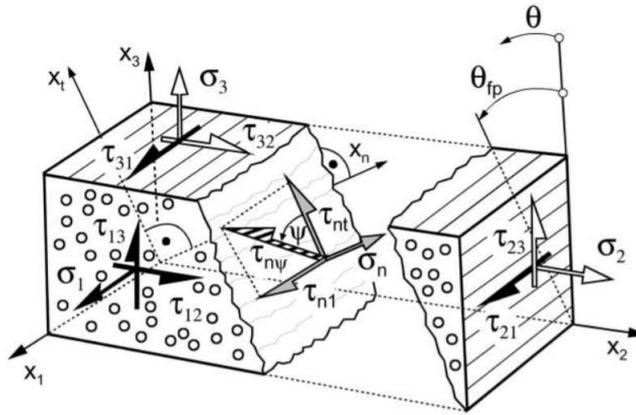


FIGURE 2.4 – Critère de Puck : rupture en mode entre fibres (IFF) [Puck et Schürmann, 2002].

La condition de rupture IFF est basée sur le critère de rupture de Mohr pour des matériaux fragiles. En effet, Mohr avait fait l'hypothèse que la rupture dépendait exclusivement des efforts sur le plan de rupture et Puck a lui aussi repris la même hypothèse. En raison de la présence des fibres, le plan de rupture ne peut pas avoir une orientation quelconque, et il est supposé parallèle aux fibres. La figure 2.4 représente l'état de contrainte d'un V.E.R. du pli élémentaire. Le critère de rupture IFF est défini par les équations (2.15) et (2.16) en fonction de l'état de contrainte local :

$$\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{nl}}{R_{\perp\parallel}^A}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_n}{R_{\perp}^A}\right)^2 = 1 \quad \text{si } \sigma_n \geq 0 \quad (2.15)$$

$$\left(\frac{\tau_{nt}}{R_{\perp\perp}^A - P_{\perp\perp}^c \sigma_n}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{nl}}{R_{\perp\parallel}^A - P_{\perp\parallel}^c \sigma_n}\right)^2 = 1 \quad \text{si } \sigma_n < 0 \quad (2.16)$$

avec :

- $\theta$  l'angle entre le plan de rupture et le plan du matériau ;
- $\sigma_n$  la contrainte normale au plan de rupture ;
- $\tau_{nt}$  et  $\tau_{nl}$  sont les contraintes de cisaillement du plan de rupture respectivement parallèle et perpendiculaire à la direction des fibres ;
- $P_{\perp\parallel}^c$  et  $P_{\perp\perp}^c$  les paramètres d'inclinaison propres à ce modèle représentant les effets de la friction interne (plus de détails dans [Puck et Schürmann, 1998, Puck et Schürmann, 2002]) ;
- $R_{\perp\perp}^A$  et  $R_{\perp\parallel}^A$  correspondant aux contraintes de rupture en cisaillement respectivement dans le plan perpendiculaire aux fibres et le plan aligné avec la direction des

fibres ;

- $R_{\perp}^{tA}$  la contrainte normale de rupture en traction sur le plan de rupture définie par l'angle  $\theta$ .

Le critère de Puck est donc un critère complet qui nous donne un maximum d'informations sur la rupture du composite (rupture des fibres en traction/compression, rupture entre fibres, angle de rupture, plan de rupture, etc.). De plus, ce critère est de plus en plus utilisé dans l'industrie. Toutes ces raisons, nous ont donc conduit à utiliser ce critère dans la suite de ces travaux.

Ce dernier n'étant pas disponible directement dans le logiciel Abaqus<sup>®</sup>, un travail préliminaire d'implémentation dans une subroutine "UVARM" a été réalisé afin de pouvoir l'utiliser. Nous disposons donc maintenant de tous les éléments nécessaires pour les études que nous proposons. Les sections suivantes sont donc dédiées à des études déterministes prenant en compte les défauts de porosités et de plissement.

## 2.3 Étude déterministe du défaut de porosités

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à l'étude du défaut de porosité. Nous allons nous baser sur les travaux expérimentaux réalisés dans le cadre de la deuxième thèse du projet SIMSCEF [Gauthier, 2017]. La campagne de caractérisation expérimentale a abouti à l'identification de deux types de porosités : les microporosités qui sont de l'ordre de quelques microns et les macroporosités qui sont de l'ordre du millimètre. Nous nous concentrerons sur des cas d'études en deux dimensions et l'ensemble des travaux numériques est réalisé avec le logiciel éléments finis Abaqus<sup>®</sup>.

### 2.3.1 Modélisation à l'échelle microscopique

L'étude portant sur le défaut de porosités se fait tout d'abord en se basant sur une représentation du matériau à l'échelle microscopique. A cette échelle, les détails des matériaux (renforts, matrice et défaut) sont géométriquement représentés. Nous devons donc définir dans un premier temps la microstructure du matériau. Nous considérons un matériau composite constitué d'une résine époxy renforcée avec des fibres de verre avec une fraction volumique de 50%. La taille caractéristique de la cellule est de  $70 \mu m$ , et cette cellule contient 16 fibres dont le diamètre déterministe est de  $14 \mu m$ . Les propriétés du matériau sont les suivantes :  $E_m = 3 \text{ GPa}$  et  $\nu_m = 0.33$  pour la résine époxy,  $E_f = 72 \text{ GPa}$  et  $\nu_f = 0.33$  pour les fibres de verre.

Comme nous l'avons expliqué dans la section 1.3.3, la porosité est souvent représentée par un vide sphérique en 3D ou circulaire en 2D. Dans ce travail, en se basant sur ces informations mais aussi sur des observations au MEB réalisées sur un composite verre/époxy comme celle illustrée figure 2.5, nous avons décidé de partir du même principe en considérant un ensemble de vides circulaires. En pratique, comme on peut le voir sur cette figure, ces vides sont répartis aléatoirement dans la microstructure, il est alors possible de

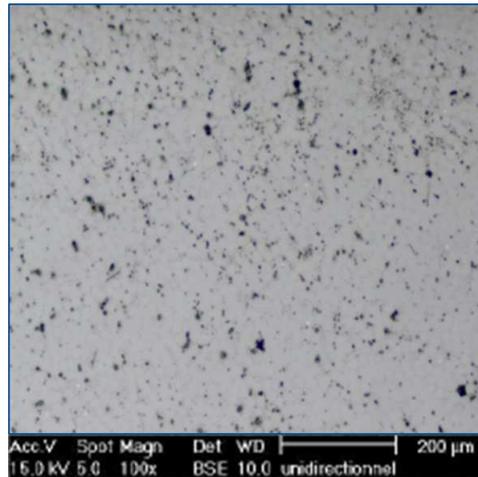


FIGURE 2.5 – Observation MEB du défaut de porosités pour un composite verre/époxy [Gauthier, 2017].

se retrouver avec des zones plus riches en porosités que d'autres. De même, le diamètre varie d'une porosité à l'autre. Dans nos travaux, pour des raisons de simplicité, nous avons choisi de considérer une répartition uniforme des porosités dans la microstructure (*cf.* figure 2.6). Le diamètre de ces vides (de l'ordre de quelques microns) est déterminé en fonction du taux de porosités considéré. Il est à noter que la position des porosités est fixe et que, avec cette représentation, des taux de porosités très élevés ne peuvent pas être atteints. Toutefois, les taux déduits des observations expérimentales sont assez faibles (<15%) et peuvent donc être pris en compte dans la modélisation choisie. Cette représen-

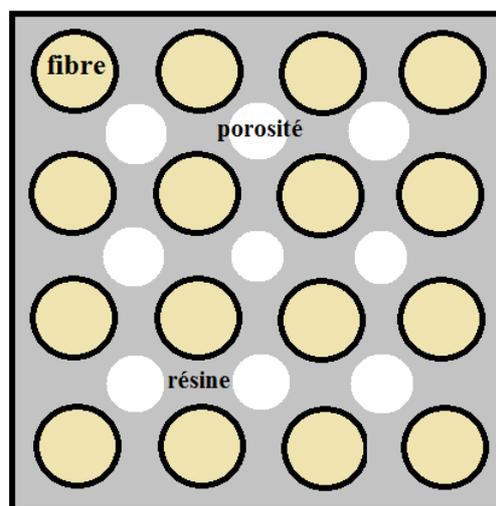


FIGURE 2.6 – Illustration de la microstructure pour le problème de porosité.

tation sera utilisée dans les études à l'échelle microscopique où l'on analysera l'influence de la porosité sur des quantités locales comme une contrainte maximale mais également les propriétés effectives du milieu homogène équivalent. Dans ce cas, la taille du domaine

ainsi que le nombre de fibres augmenteront afin d'atteindre la convergence des propriétés.

### 2.3.2 Application : étude d'un composite UD [90°] avec porosités

Dans cette première étude, nous allons procéder à une étude numérique déterministe portant sur le défaut de porosité. Nous allons donc travailler avec la microstructure que nous avons définie dans le paragraphe précédent. Les conditions aux limites utilisées pour cette étude sont illustrées sur la figure 2.7 avec une déformation imposée égale à 0.5% sur le bord  $\Gamma_2$  et un encastrement sur le bord inférieur  $\Gamma_1$ .

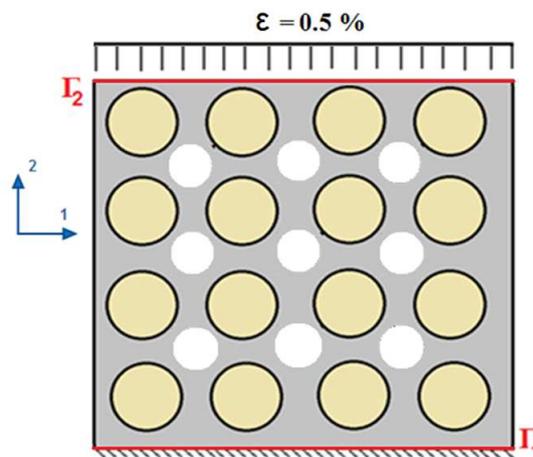


FIGURE 2.7 – Géométrie et conditions aux limites pour le problème de porosités à l'échelle microscopique.

L'objectif de cette étude est de déterminer l'influence du taux de porosités sur le comportement du matériau composite pour un taux de porosités faible (égal à 2%) et un taux de porosités plus important (égal à 12.5%). D'un point de vue numérique, nous avons utilisé un maillage constitué d'éléments triangulaires à trois nœuds avec des fonctions de forme linéaires. Afin de déterminer la taille de maille adaptée, nous avons procédé à une étude de convergence en fonction de la finesse du maillage sur la microstructure pour un taux de porosités de 12.5%. Nous avons ainsi comparé les valeurs des contraintes obtenues dans différentes directions. Les résultats de cette étude de convergence sont résumés dans le tableau 2.1. Nous avons donc constaté que les valeurs des contraintes se stabilisaient convenablement pour 38393 éléments finis. L'écart relatif sur les contraintes dans les différentes directions pour 895753 éléments finis et 38393 éléments finis est de l'ordre de 0.1%. Nous avons donc décidé de travailler avec un maillage constitué de 38393 éléments finis. La convergence du maillage pour le cas de figure avec 2% de porosités a également été vérifiée et un maillage composé de 42479 éléments a été retenu. Une illustration des deux maillages est présentée sur la figure 2.8.

Nous présentons maintenant une comparaison des contraintes pour un composite sain (0% de porosité), un composite avec un taux de porosités de 2% et un composite avec un taux

## Chapitre 2. Modélisation et simulation déterministe des défauts de porosités et de plissement

nombre d'éléments	$\sigma_{11}^{max}$ [MPa]	$\sigma_{22}^{max}$ [MPa]	$\sigma_{12}^{max}$ [MPa]
<b>2533</b>	18.73	74.3	14.68
<b>4380</b>	19.4	74.65	15.43
<b>9545</b>	20,26	75.72	16
<b>19728</b>	24.57	76.12	17.31
<b>38393</b>	24.84	76.61	18.56
<b>895753</b>	24.86	76.66	18.63

Tableau 2.1 – Résultats de l'étude de la convergence du maillage pour un volume de porosités de 12.5%.

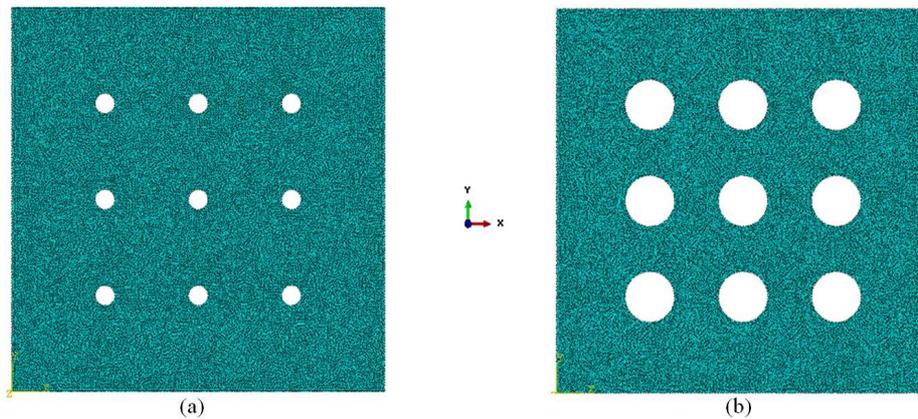


FIGURE 2.8 – Illustration du maillage triangulaire pour un taux de porosités de 2% (a) et pour un taux de porosités de 12.5% (b).

porosités de 12.5% dans les différentes directions. Les figures 2.9, 2.10 et 2.11 montrent des illustrations des résultats pour chaque direction.

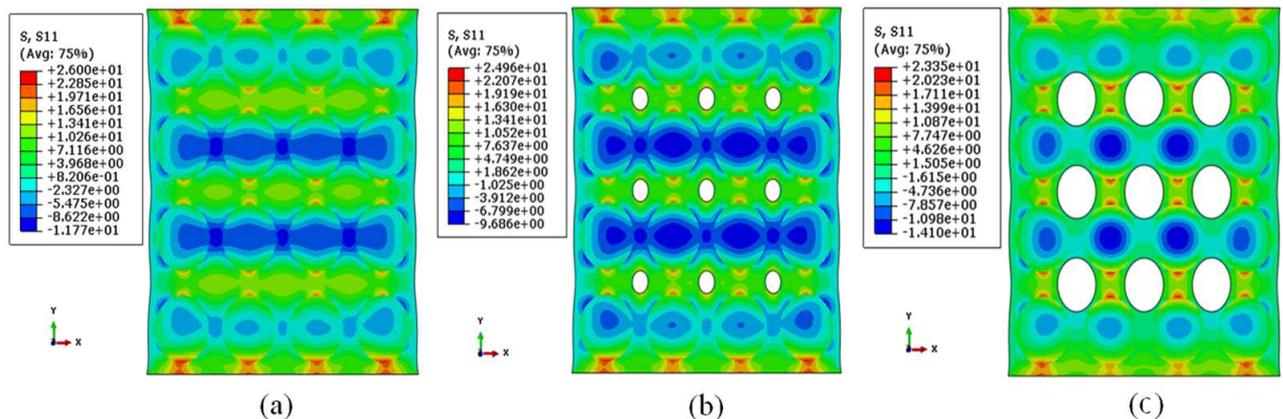


FIGURE 2.9 – Illustration des champs de contraintes  $\sigma_{11}$  [MPa] (a) pour un composite sain (0% de porosité) (b) pour un taux de porosités de 2% (c) pour un taux de porosités de 12.5%.

En comparant les résultats obtenus, nous avons constaté que les contraintes  $\sigma_{22}$  qui sont dans la direction de la sollicitation ont les valeurs les plus élevées. De plus, comme on peut le voir sur la figure 2.10, elles augmentent avec le taux de porosités. Nous avons un écart de l'ordre de 6% sur la contrainte maximale  $\sigma_{22}^{max}$  entre la microstructure avec

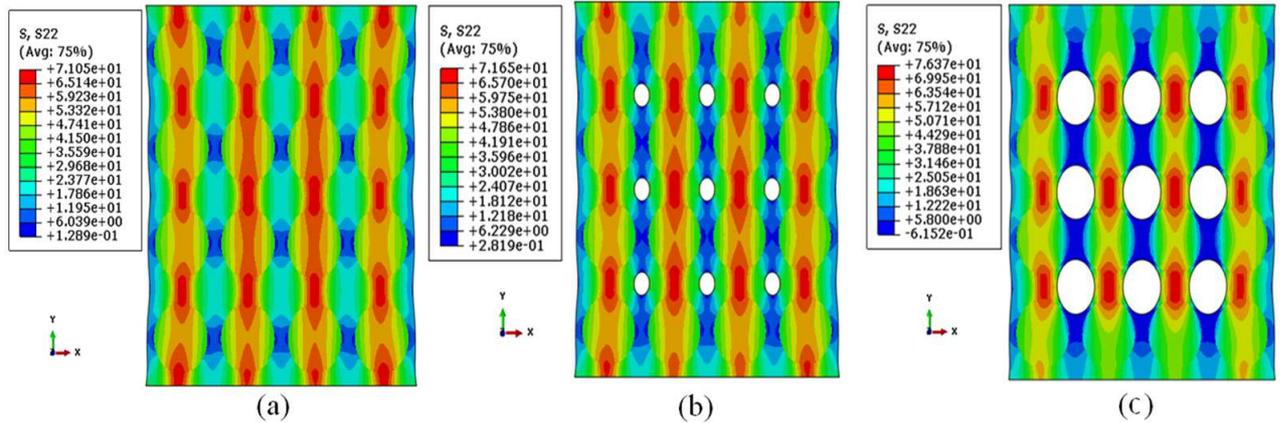


FIGURE 2.10 – Illustration des champs de contraintes  $\sigma_{22}$  [MPa] (a) pour un composite sain (0% de porosité) (b) pour un taux de porosités de 2% (c) pour un taux de porosités de 12.5%.

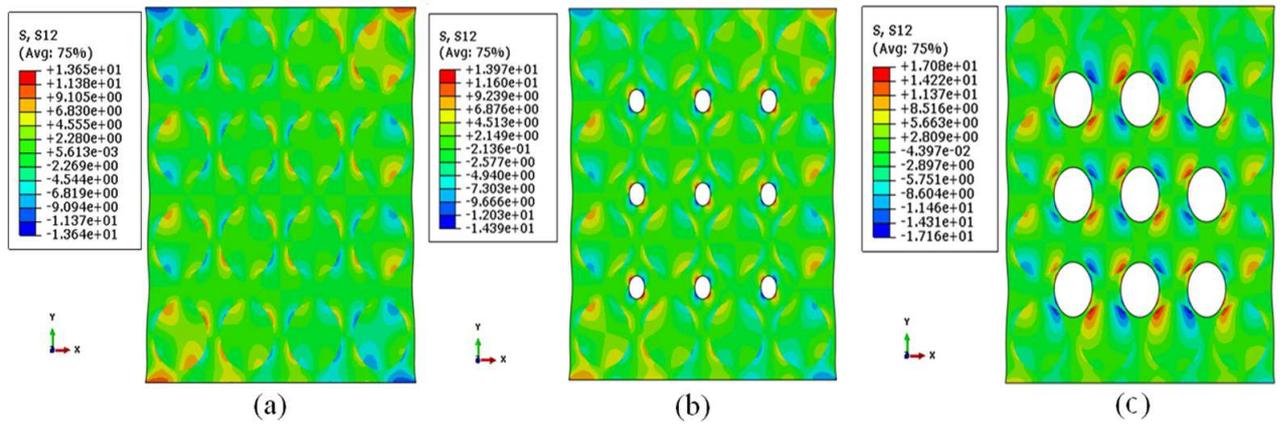


FIGURE 2.11 – Illustration des champs de contraintes  $\sigma_{12}$  [MPa] (a) pour un composite sain (0% de porosité) (b) pour un taux de porosités de 2% (c) pour un taux de porosités de 12.5%.

12.5% de porosités et celle avec 2% de porosité, et un écart de l'ordre de 7% entre la microstructure avec 12.5% de porosités et la microstructure saine. Nous constatons aussi une concentration de contraintes dans la zone entre les fibres (zone en rouge foncé). En revanche, pour les contraintes  $\sigma_{11}$  qui sont dans la direction transverse à la direction de la sollicitation (en traction), nous avons remarqué que ces dernières sont plus importantes pour le matériau sain. En effet, elles diminuent de 4% par rapport au matériau sain dans le cas où on a seulement 2% de porosités, et de 10% dans le cas où on a 12.5% de porosités (cf. figure 2.9). Il est important de noter que le niveau de cette contrainte  $\sigma_{11}$  est plus faible que celui de la contrainte  $\sigma_{22}$ . En ce qui concerne la contrainte  $\sigma_{12}$  (contrainte en cisaillement), ses valeurs sont plus faibles comparées aux autres contraintes dans les autres directions. De plus, tout comme  $\sigma_{22}$ , elle augmente quand le taux de porosités est plus important comme le montre la figure 2.11. Nous avons constaté que les contraintes maximales  $\sigma_{12}^{max}$  du matériau sain et avec 2% de porosités sont quasi identiques, alors que l'écart entre la configuration saine et celle avec 12.5% porosités est significatif (proche

de 25%). On remarque enfin que la concentration des contraintes se situe au bord des vides représentant la porosité. La variation des contraintes entre les trois configurations étudiées est intéressante et montre que la présence de ce type de défaut peut avoir des conséquences sur certaines quantités mécaniques locales en fonction du taux de porosités. Nous proposons maintenant de nous intéresser aux contraintes globales. Celles-ci sont obtenues en intégrant les contraintes locales sur tout le domaine spatial grâce à la formule suivante :

$$\Sigma = \langle \sigma \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.17)$$

Les résultats obtenus pour les contraintes globales sont détaillés dans le tableau 2.2. On

Taux de porosités [%]	$\Sigma_{11}$ [MPa]	$\Sigma_{22}$ [MPa]	$\Sigma_{12}$ [MPa]
<b>0 (composite sain)</b>	2.386	41.1639	0.0004
<b>2</b>	2.0436	40.4416	0.0003
<b>12.5</b>	1.0220	37.5810	0.0001

Tableau 2.2 – Résultats du calcul des contraintes globales  $\Sigma_{11}$ ,  $\Sigma_{22}$  et  $\Sigma_{12}$  pour un taux de porosités de 0%, 2% et 12.5%.

observe que seule la contrainte globale  $\Sigma_{22}$  est significative dans le problème étudié. En effet la contrainte  $\Sigma_{12}$  est nulle quel que soit le taux de porosités et la contrainte  $\Sigma_{11}$  proche de zéro. En ce qui concerne  $\Sigma_{22}$ , nous avons remarqué une faible diminution de 1.75% entre la microstructure avec 0% de porosités et celle avec 2% de porosité, et une diminution de 8.7% entre la microstructure avec 0% de porosités et celle avec 12.5%. Cette baisse peut s'expliquer par la diminution de matière et donc de raideur du matériau quand le taux de porosités augmente.

Cette première étude à l'échelle des constituants a permis de montrer que le niveau de porosités influençait non seulement certains états mécaniques locaux mais également globaux. Nous proposons donc, dans la section suivante, d'étudier l'influence du taux de porosités sur les propriétés effectives en utilisant les techniques d'homogénéisation numérique.

### 2.3.3 Calculs des propriétés effectives avec porosités

Pour pouvoir prendre en compte et étudier l'impact de la présence de porosités à l'échelle supérieure, nous proposons de déterminer les propriétés effectives du matériau à l'aide de l'homogénéisation numérique. Le logiciel éléments finis Abaqus<sup>®</sup> intègre directement tous les éléments pour la mise en place des conditions aux limites homogènes et c'est pourquoi notre choix s'est porté sur ce type de conditions présentées dans la section 2.2.2.3. Les conditions aux limites périodiques sont elles plus complexes à imposer. Ainsi, nous avons construit un outil d'homogénéisation qui propose deux types de conditions aux limites : Conditions aux Limites de Contrainte Homogène (CLCH) et Conditions aux Limites de Déformation Homogène (CLDH).

Afin de s'assurer que les propriétés homogènes obtenues sont bien les propriétés effectives représentatives du milieu homogène équivalent (M.H.E.), une étape de vérification auto-

### 2.3. Étude déterministe du défaut de porosités

matérialisée de la convergence a été mise en place. Un algorithme résumant ce processus est représenté figure 2.12. Cet algorithme prend en compte comme paramètres d'entrée : le

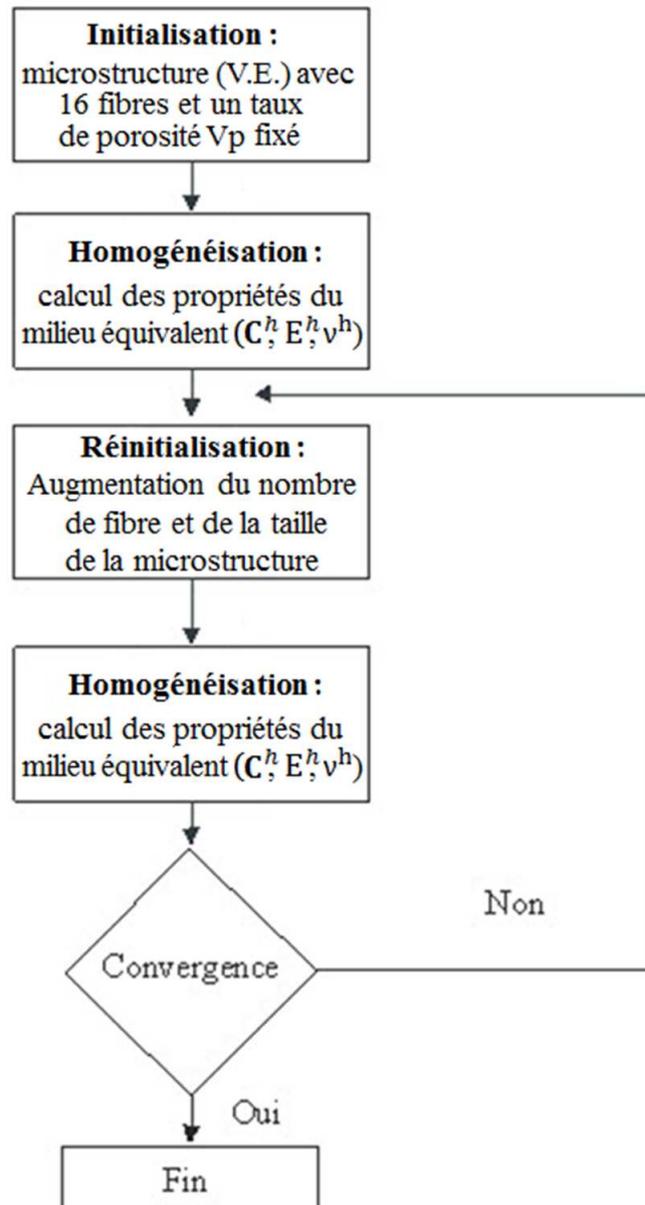


FIGURE 2.12 – Algorithme résumant le processus de détermination des propriétés effectives du M.H.E.

taux de porosités, la fraction volumique de fibres et le diamètre des fibres. La géométrie de la microstructure est alors automatiquement générée et le calcul des propriétés homogènes est d'abord fait pour  $n = 16$  fibres. L'étape suivante consiste à augmenter le nombre de fibres (*cf.* figure 2.13) et de calculer à nouveau les propriétés homogènes. La condition d'arrêt de la procédure consiste à vérifier que l'écart relatif entre les propriétés homogènes de deux calculs successifs est inférieur à une valeur désirée. En pratique, nous nous sommes basés sur le module de Young et le coefficient de Poisson pour lesquelles des écarts relatifs inférieurs à 1% ont été visés. Le V.E. de la microstructure est alors

## Chapitre 2. Modélisation et simulation déterministe des défauts de porosités et de plissement

qualifié de volume élémentaire représentatif (V.E.R.). Dans cette étude, nous proposons

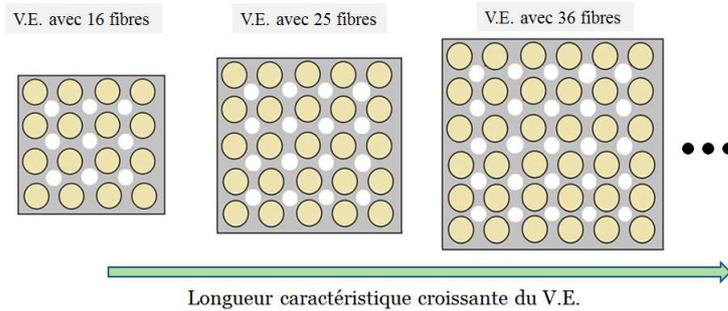


FIGURE 2.13 – Évolution des dimensions de la microstructure représentant le V.E. en fonction du nombre de fibres.

tout d'abord de comparer les résultats obtenus avec chaque type de conditions aux limites homogènes (CLDH et CLCH) afin de vérifier l'efficacité de chacune d'entre elles. Ainsi, nous nous sommes basés sur la microstructure initiale définie dans la section 2.3.1 et nous avons testé deux configurations : une microstructure avec un taux de porosités de 1% et une deuxième avec un taux de porosités de 10%. Nous présentons l'évolution du module de Young homogénéisé  $E^h$  sur la figure 2.14, et du coefficient de Poisson homogénéisé  $\nu^h$  sur la figure 2.15, obtenus pour les deux configurations en fonction de la taille caractéristique du domaine.

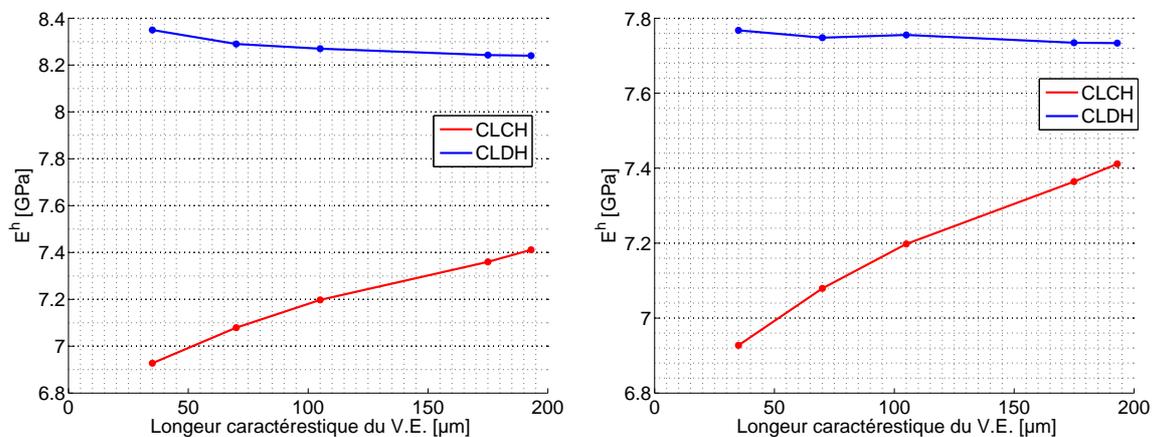


FIGURE 2.14 – Comparaison des modules de Young homogénéisés  $E^h$  (a) pour la configuration avec 1% de porosités (b) pour la configuration avec 10% de porosités.

À partir de ses courbes, nous pouvons constater que, comme attendu, qu'il s'agisse du module de Young homogénéisé  $E^h$  ou du coefficient de Poisson homogénéisé  $\nu^h$ , les conditions aux limites homogènes CLDH convergent plus rapidement que les conditions aux limites CLCH. En effet, on constate sur les figures 2.14 et 2.15 que la convergence désirée n'est atteinte qu'avec les conditions CLDH. Ainsi, puisque le calcul des propriétés effectives est plus efficace et rapide avec ces conditions, seules ces dernières seront utilisées dans la suite de ces travaux.

### 2.3. Étude déterministe du défaut de porosités

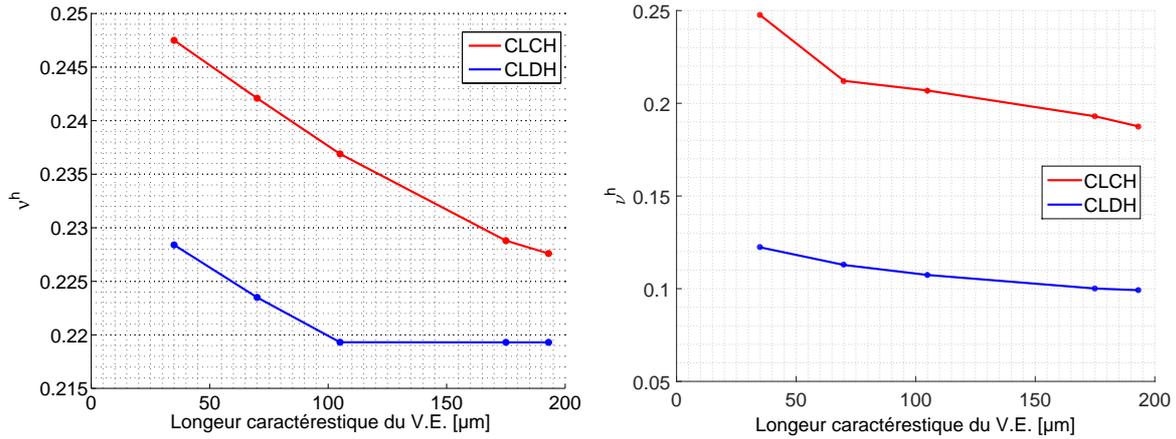


FIGURE 2.15 – Comparaison des coefficients de Poisson homogénéisés  $\nu^h$  (a) pour la configuration avec 1% de porosités (b) pour la configuration avec 10% de porosités.

Dans cette section, nous proposons enfin de comparer les propriétés effectives obtenues avec la procédure décrite précédemment avec celles obtenues par essais mécaniques. En effet, dans le cadre du projet SIMSCEF et de la thèse d'Edouard Gauthier [Gauthier, 2017], un nombre important d'essais mécaniques a été réalisé sur des éprouvettes de composite verre/époxy ayant des taux de porosités différents : 0%, 1.5% et 3%. Ces essais ont notamment permis de déterminer les propriétés élastiques du matériau comme le module de Young et le coefficient de Poisson. Nous avons donc déterminé numériquement ces mêmes propriétés en prenant en compte les variations du taux de porosités. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau 2.3. D'après ces résultats, nous pouvons constater

Taux de porosités [%]	0 (composite sain)	1.5	3
$E^h$ numérique [GPa]	8.1894	8.129	8.067
$E^h$ expérimental [GPa]	8.3654	8.3366	7.8962
Écart relatif [%]	2.1	2.5	2.1
$\nu^h$ numérique	0.28	0.26	0.25
$\nu^h$ expérimental	0.077	0.086	0.074
Écart relatif [%]	72.5	67	70.4

Tableau 2.3 – Comparaison des modules de Young homogénéisés  $E^h$  et des coefficients de Poisson homogénéisés  $\nu^h$  obtenus numériquement et expérimentalement pour différents taux de porosités.

que dans les deux cas le module de Young homogénéisé  $E^h$  et le coefficient de Poisson homogénéisé  $\nu^h$  diminuent avec l'augmentation du taux de porosités dans le composite. Nous pouvons constater une bonne corrélation des résultats pour le module de Young avec des écarts relatifs ne dépassant pas les 2.5%. En revanche, les écarts sont beaucoup plus importants pour le coefficient de Poisson. Ces écarts peuvent, entre autres, provenir de différences entre les propriétés des constituants : en effet ces dernières ne nous ont pas été données par le fournisseur et proviennent, pour les calculs, de la littérature.

### 2.3.4 Étude des macroporosités à l'échelle d'un pli UD 90°

Nous allons maintenant nous intéresser aux macroporosités et leurs effets sur le comportement d'un pli composite unidirectionnel à 90°. Nous rappelons que dans ces travaux, les macroporosités font référence à des vides dont l'ordre de grandeur est supérieur au millimètre. L'objectif de cette étude est de mettre en évidence les effets de ces porosités sur le comportement du matériau composite considéré. Pour cela, nous proposons une comparaison de ce comportement entre un échantillon sans porosité et deux échantillons dont le taux de porosités est identique mais dont la forme est différente. Nous pourrions ainsi également quantifier l'impact de la forme de la macroporosité sur le comportement du composite.

Nous considérons donc une cellule de longueur  $L = 10$  mm contenant une macroporosité. En parcourant la littérature et en se basant sur les observations au MEB comme celle présentée figure 2.16, nous avons choisi de représenter la macroporosité par une ellipse définie à partir de la longueur de son axe horizontal  $D$  et de son axe vertical  $d$  (*cf.* figure 2.17). En effet, cette simple représentation d'un vide par une ellipse permet de modifier significativement sa forme.

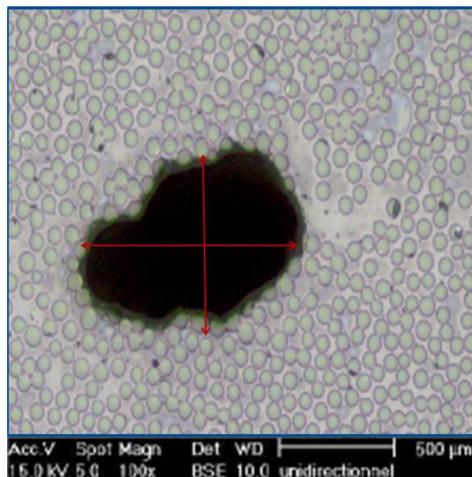


FIGURE 2.16 – Observation MEB d'une macroporosité pour un composite verre/époxy [Gauthier, 2017].

Nous allons considérer un taux de porosités de 0% pour le cas sain et de 5% pour les deux autres cas conduisant aux trois configurations suivantes :

- une cellule saine (sans macroporosité) ;
- une cellule avec une macroporosité circulaire centrée telle que  $D = d = 2.02$  mm ;
- une cellule avec une macroporosité elliptique centrée telle que  $D = 3.495$  mm et  $d = 1.165$  mm.

Les conditions aux limites utilisées pour cette étude sont illustrées sur la figure 2.17 avec une contrainte de traction égale à 20 MPa sur le bord supérieur  $\Gamma_1$  et un encastrement sur le bord inférieur  $\Gamma_2$ .

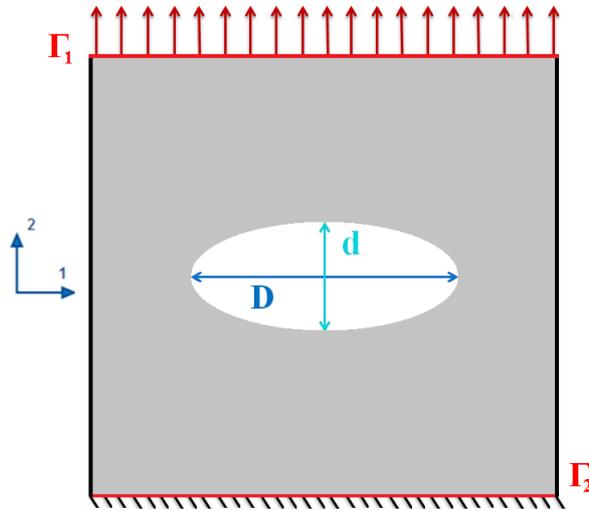


FIGURE 2.17 – Conditions aux limites pour le problème avec macroporosité.

Les propriétés mécaniques de la cellule sont celles d’un M.H.E. obtenues à partir d’une microstructure saine avec la technique d’homog n sation utilisée précédemment. Elles sont résumées dans le tableau 2.4.

	$E_1/E_2$ [GPa]	$\nu_{12}$
UD[90°]	8.1877 / 8.1877	0.2174

Tableau 2.4 – Propriétés élastiques de la cellule.

Nous avons utilisé dans cette étude un maillage constitué d’éléments triangulaires à trois nœuds. Après vérification de la convergence du maillage, avec une procédure identique à celle présentée dans la section 2.3.2, nous obtenons 51200 éléments dans la première configuration, 49967 éléments dans la deuxième configuration, et 49928 éléments dans la troisième. Les différents champs de contraintes simulés sont illustrés sur les figures 2.18, 2.19 et 2.20.

On constate que les contraintes sont systématiquement plus élevées dans la troisième configuration où la macroporosité est la plus grande et systématiquement plus faibles dans le cas sain.

Sur la figure 2.18, nous avons constaté un écart important sur la contrainte maximale  $\sigma_{11}^{max}$  entre les différentes cellules : 30% entre la cellule saine et la cellule avec macroporosité circulaire, et 60% entre cette dernière et celle avec macroporosité elliptique. Les contraintes  $\sigma_{22}^{max}$  (dans la direction de la sollicitation) présentent les valeurs les plus élevées. On observe un écart de 50% entre la cellule saine et la cellule avec macroporosité circulaire, et de 54.5% entre cette dernière et celle avec macroporosité elliptique (*cf.* figure 2.19). Enfin, on constate pour les contraintes  $\sigma_{12}^{max}$  sur la figure 2.20 des écarts conséquents. Ces écarts sont de 72% entre la cellule saine et la cellule avec macroporosité circulaire, et de 53% entre cette dernière et celle avec macroporosité elliptique. On remarque par ailleurs que des concentrations de contraintes apparaissent dans les deux cas avec porosites. Ces zones

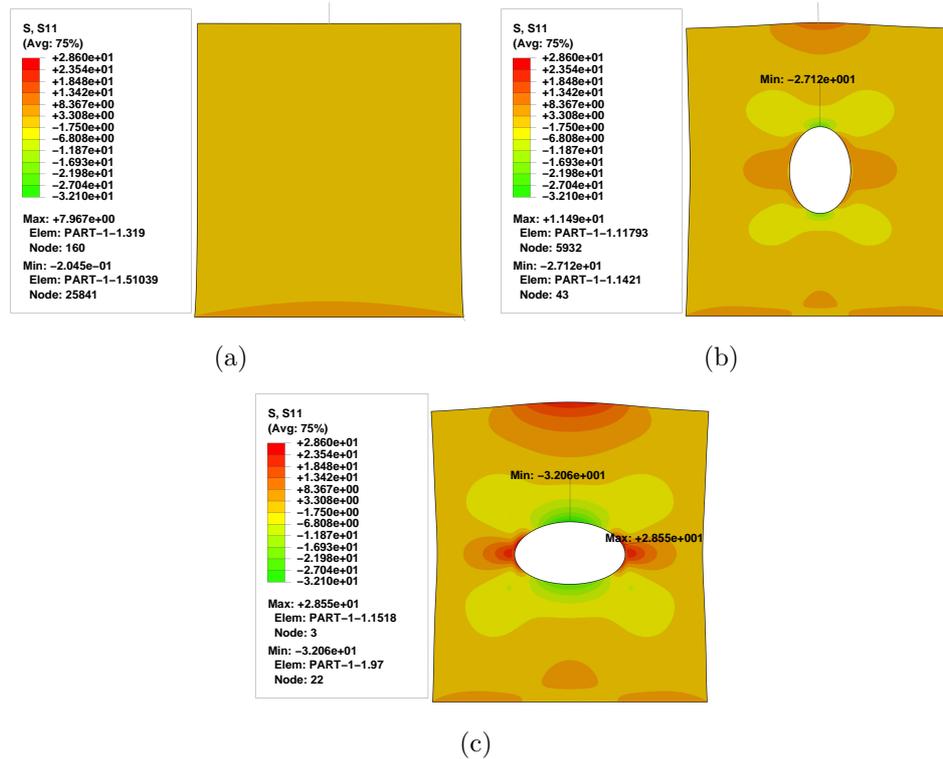


FIGURE 2.18 – Champ de contrainte  $\sigma_{11}$  [MPa] (a) pour une cellule saine (b) pour une cellule avec une macroporosité circulaire (c) pour une cellule avec une macroporosité elliptique.

de contraintes élevées se situent classiquement au bord des vides.

Nous présentons maintenant les déplacements dans la direction de la sollicitation. Les différents champs de déplacement simulés sont illustrés sur la figure 2.21. On constate que le champ de déplacement est perturbé par la présence et la forme de la macroporosité. De plus, on observe une augmentation marquante des déplacements avec des écarts de 25% entre la cellule saine et la cellule avec macroporosité circulaire, et entre cette dernière et celle avec macroporosité elliptique.

Pour conclure cet exemple, nous proposons d'étudier l'endommagement du matériau pour les trois configurations à l'aide du critère de Puck (*cf.* section 2.2.3). Les propriétés du matériau nécessaires à ce critère proviennent de la littérature et sont données dans le tableau 2.5.

	$R_{\parallel}^t/R_{\parallel}^c$ [MPa]	$R_{\perp}^t/R_{\perp}^c$ [MPa]	$R_{\perp}^A$ [MPa]	$P_{\perp\parallel}^c$	$P_{\perp\perp}^c$
<i>UD(verre/époxy)</i>	914 / 525	42 / 121	10	0.25	0.3

Tableau 2.5 – Propriétés matériau utilisées pour la rupture [Leong *et al.*, 2012, Puck et Schürmann, 1998].

On notera que dans ce cas, où le plan d'étude est transverse aux fibres, il n'est pas possible de déterminer si les fibres sont endommagées ou non : en effet, dans le critère de Puck,

### 2.3. Étude déterministe du défaut de porosités

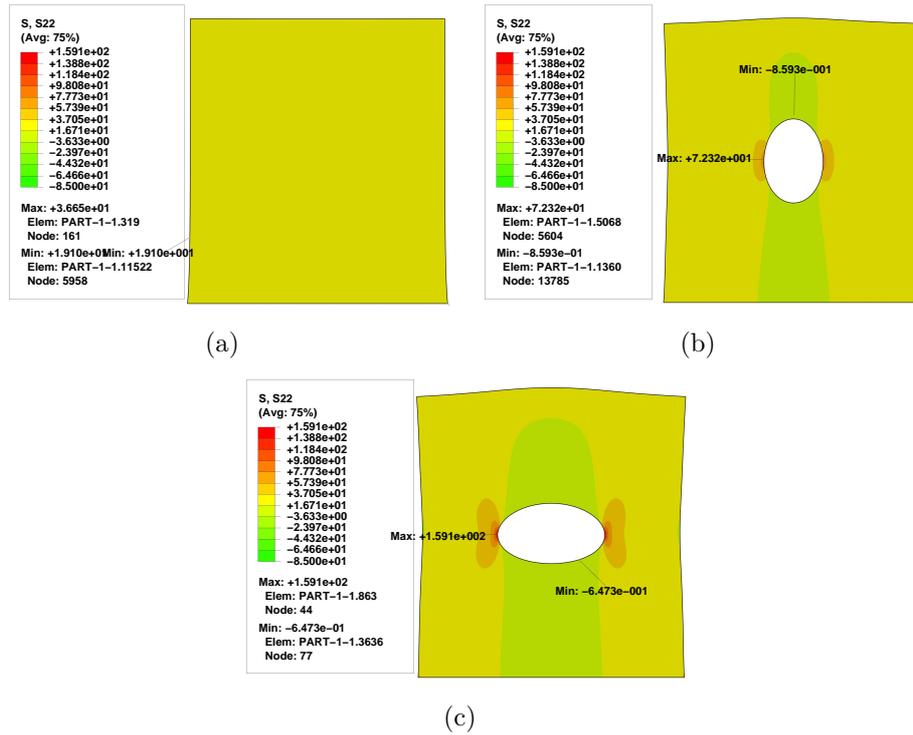


FIGURE 2.19 – Champ de contrainte  $\sigma_{22}$  [MPa] (a) pour une cellule saine (b) pour une cellule avec une macroporosité circulaire (c) pour une cellule avec une macroporosité elliptique.

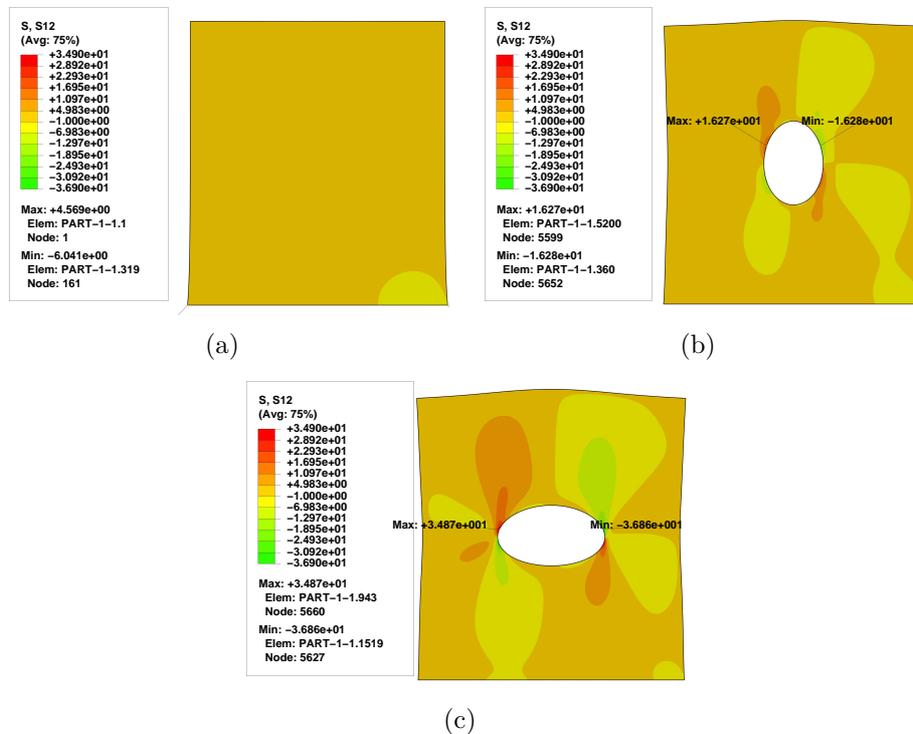


FIGURE 2.20 – Champ de contrainte  $\sigma_{12}$  [MPa] (a) pour une cellule saine (b) pour une cellule avec une macroporosité circulaire (c) pour une cellule avec une macroporosité elliptique.

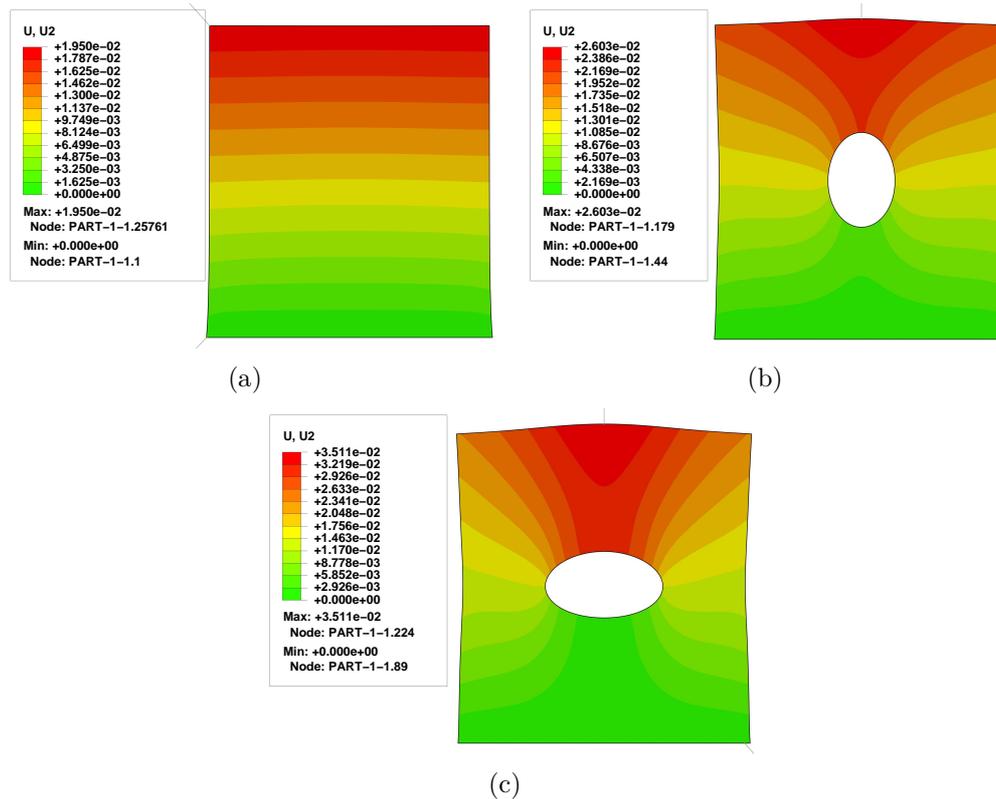


FIGURE 2.21 – Champ de déplacement  $u_2$  [mm] (a) pour une cellule saine (b) pour une cellule avec une macroporosité circulaire (c) pour une cellule avec une macroporosité elliptique.

cette rupture ne dépend que de la contrainte longitudinale au sein des fibres qui ne peut être calculée avec cette modélisation 2D. En revanche, une rupture matricielle peut être observée comme le montre la figure 2.22. Sur cette dernière, nous présentons les valeurs du critère pour ce mode de rupture : afin d'en simplifier l'analyse, nous avons choisi de ne montrer que les valeurs inférieures à 1 (en vert) et supérieures à 1 (en rouge).

On observe tout d'abord que le cas sain sans porosité n'est pas endommagé. En revanche, des zones de rupture non négligeables apparaissent au bord des vides dans les deux autres configurations. Enfin, on remarque que ces zones sont plus importantes dans le cas où la macroporosité est elliptique.

Cette étude a permis de montrer que les macroporosités influençaient le comportement mécanique du matériau composite : en effet, nous avons observé une augmentation des champs de contraintes et de déplacements en présence de porosités. De plus, nous avons montré que la forme de la porosité jouait également un rôle important sur ce comportement puisque le cas elliptique a conduit à des états mécaniques plus élevés que le cas circulaire. Enfin, les résultats issus du critère de rupture de Puck ont confirmé ce constat avec une rupture matricielle significative dans les cas avec macroporosité.

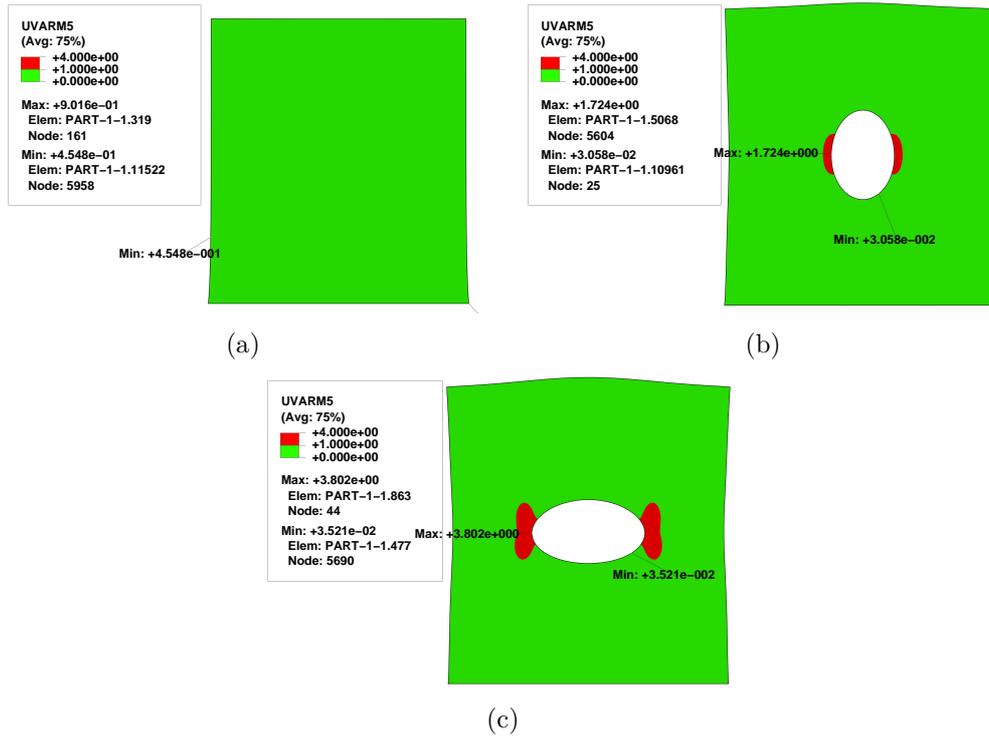


FIGURE 2.22 – Critère de rupture de la matrice (IFF) (a) pour une cellule saine (b) pour une cellule avec une macroporosité circulaire (c) pour une cellule avec une macroporosité elliptique.

## 2.4 Étude déterministe du défaut de plissement

La dernière partie de ce chapitre est consacrée à l'étude du défaut de plissement dans un cadre déterministe. Nous allons tout d'abord nous intéresser aux spécificités de ce défaut, comme le désalignement des fibres dû au plissement, et montrer comment nous les prenons en compte. Nous présentons ensuite une étude de cas numérique dans laquelle nous nous focalisons sur l'impact du plissement sur le comportement du composite en fonction de sa taille.

### 2.4.1 Spécificité du défaut de plissement

Le défaut de plissement est défini par une ondulation d'un ou plusieurs plis comme illustré sur la figure 2.23. Les auteurs optent généralement pour une modélisation basée sur une représentation géométrique comme expliqué dans la section 1.4.3. Pour modéliser un plissement, on se place à l'échelle mésoscopique où sont représentés les différents plis et l'ondulation liée au plissement. On notera que, à cette échelle, chaque pli unidirectionnel est modélisé sous forme d'un M.H.E. (propriétés effectives). En se basant sur la littérature [Adams et Hyer, 1993, Makeev *et al.*, 2010, Hallander *et al.*, 2013, Mukhopadhyay *et al.*, 2013], nous avons proposé un paramétrage géométrique basé sur l'amplitude  $A$  du plissement et sa largeur  $L$ . Nous rappelons que la surface du plissement est alors représentée

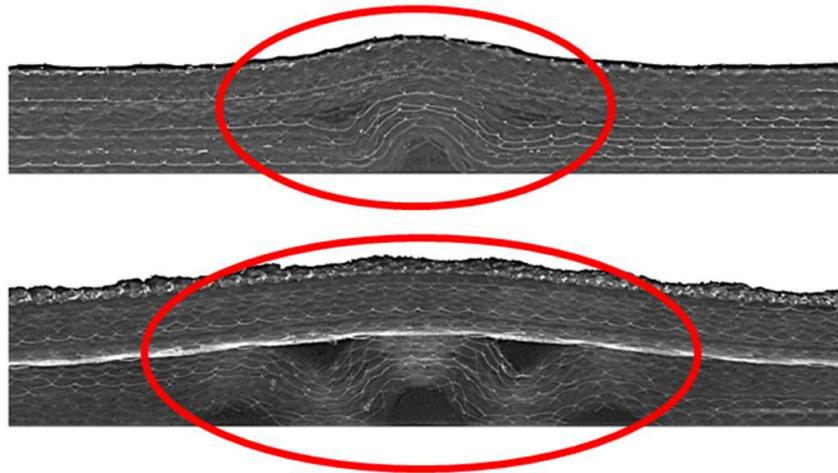


FIGURE 2.23 – Observation d’une coupe transverse dans l’épaisseur d’un composite avec plissement.

par la relation suivante :

$$y(x) = \frac{A}{2} \left[ \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + 1 \right] \quad (2.18)$$

où le couple  $(x, y)$  représente un point de l’interface entre deux plis du composite affectés par le plissement.

La construction du modèle mécanique incluant le défaut de plissement à partir de son amplitude et de sa largeur se fait dans Abaqus<sup>®</sup> à l’aide de splines. Toutefois, la représentation géométrique du plissement n’est pas la seule étape importante : en effet, le principal inconvénient du plissement vient du possible désalignement des fibres dans une zone proche de ce dernier. La quasi-totalité des auteurs cités dans la section 1.4.3 prennent en compte cet effet. Si on considère, par exemple, un pli UD  $[0^\circ]$  dont le sens longitudinal des renforts suit celui d’un plissement de type "wrinkle", le pli peut localement se « transformer » en un pli UD correspondant à une autre direction. Afin de tenir compte de cette désorientation locale des fibres du pli, nous proposons de décomposer le domaine proche du plissement tel que l’orientation des renforts suive la forme du plissement. Un exemple de décomposition est présenté sur la figure 2.24. Il est à noter que, comme nous l’avons précisé dans la section 1.4.3, nous nous concentrons dans nos travaux sur le plissement de type "wrinkle". Par conséquent, on considère que tous les plis qui se trouvent au-dessus du plissement sont affectés par la présence de ce dernier ce qui explique la bosse à la surface. La hauteur et la largeur de cette bosse dépendent de la hauteur et la largeur du plissement. En pratique, dans la littérature, il n’existe pas de manière précise pour déterminer la hauteur et la largeur de cette bosse. Dans notre cas, nous avons alors choisi une corrélation entre les deux avec un rapport de  $\frac{1}{3}$  entre les deux hauteurs et un rapport de  $\frac{2}{3}$  entre les deux largeurs. On notera que des effets de "compression" locale peuvent apparaître conduisant à des fractions volumiques de fibres plus importantes dans certaines zones et, notamment, au dessus du plissement. La prise en compte de ces effets locaux étant complexe, elle n’a pas été retenue dans la présente

étude : toutefois, il sera important dans la suite de ces travaux de pouvoir tenir compte de ce point. Pour ce point particulier, le lecteur pourra se référer à [Diao *et al.*, 2016]. Sur la

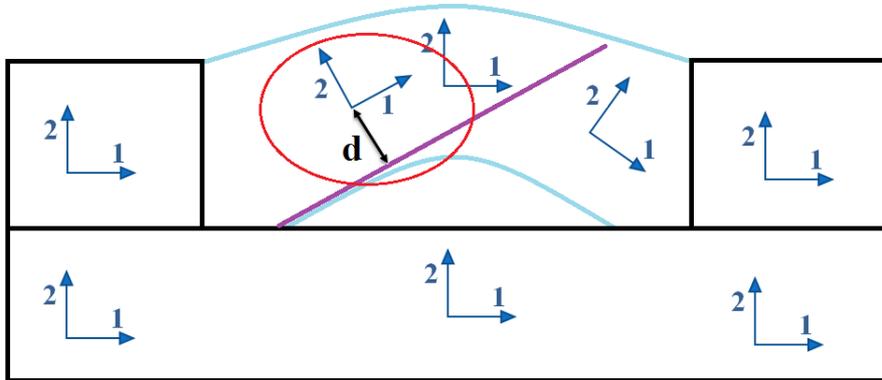


FIGURE 2.24 – Décomposition en sous-domaines d’un UD  $[0^\circ]$  afin de tenir compte de la désorientation des fibres.

figure 2.24, dans le sous-domaine contenant le plissement, la gestion de l’orientation des fibres se fait d’une façon particulière : pour un point donné  $P(x, y)$  de ce sous-domaine, l’orientation suivant l’axe 1, correspondant à la direction des fibres, suit la tangente au point du contour du plissement le plus proche. Dans tous les autres sous-domaines, les fibres sont orientées normalement ; on considère que le plissement n’a pas d’influence sur l’orientation des renforts.

### 2.4.2 Application : étude d’un composite UD $[0^\circ]$ avec plissement

Dans cette partie, nous proposons une étude numérique déterministe sur le défaut de plissement. Nous travaillons donc à l’échelle mésoscopique et nous considérons un matériau composite constitué de 140 plis composite unidirectionnel  $[0^\circ]$  verre/époxy. La longueur de chacun des plis est de 300 mm et leur épaisseur est de 0.57 mm. Une résine époxy vient combler l’espace vide entre les plis provoqué par la présence du plissement (*cf.* figure 2.25). Les propriétés élastiques du pli UD et de la résine sont données dans le tableau 2.6. L’échantillon considéré est sollicité en compression dans le sens longitudinal des fibres

	$E_1/E_2$ [GPa]	$\nu_{12}$
<b>UD</b> $[0^\circ]$	43 / 14	0.3
<b>Epoxy</b>	3 / 3	0.33

Tableau 2.6 – Propriétés élastiques des matériaux constituant le composite [Leong *et al.*, 2012].

(direction 1 sur la figure 2.25) avec une contrainte appliquée de -200 MPa et des conditions aux limites de symétrie. Le problème est présenté sur la la figure 2.25.

L’objectif de cette étude est de déterminer l’influence de l’aléa sur la forme géométrique du plissement sur le comportement du composite. Nous allons considérer deux configurations

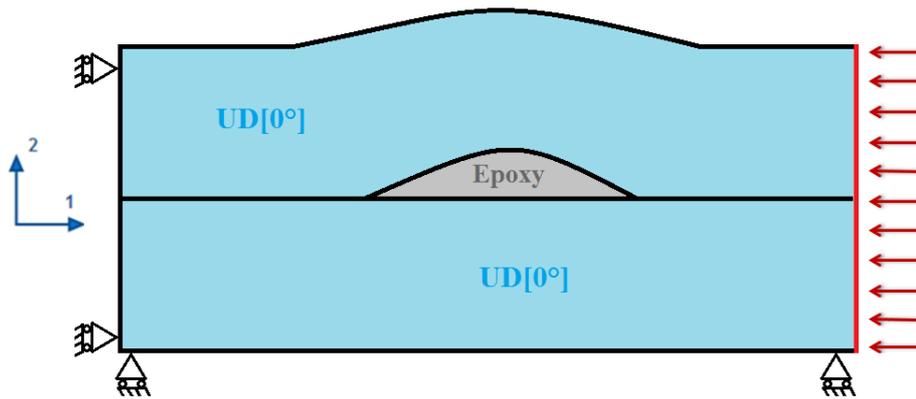


FIGURE 2.25 – Géométrie et conditions aux limites du problème de plissement.

différentes de plissement pour lesquelles seule la hauteur varie. Dans la première, notée configuration 1, nous choisissons une hauteur faible telle que  $A = 5$  mm. Dans la seconde, notée configuration 2, nous choisissons une hauteur plus importante telle que  $A = 20$  mm. Dans les deux cas, la largeur est identique et  $L = 150$  mm. De même que dans l'étude du défaut de porosités dans la section 2.3.2, nous avons effectué une étape de vérification de la convergence du maillage. Ainsi, le maillage est constitué de 137574 éléments dans la configuration 1 et de 191134 éléments pour la configuration 2. Les résultats des calculs des différents champs de contraintes sont illustrés sur les figures 2.26, 2.27 et 2.28.

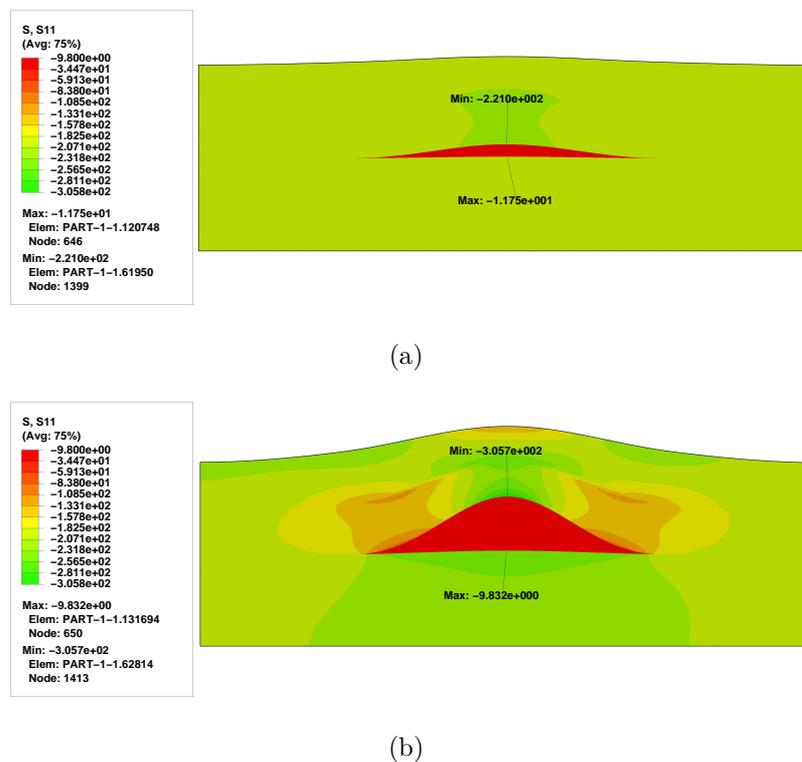
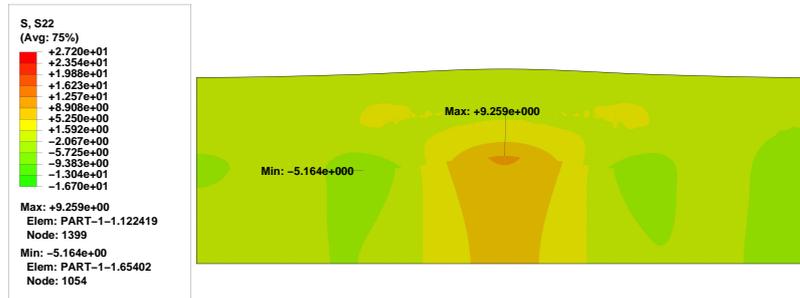
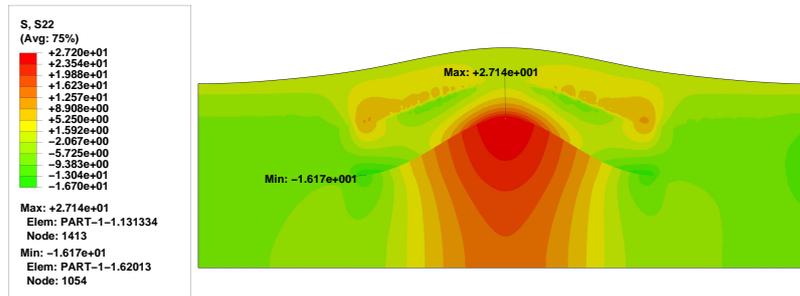


FIGURE 2.26 – Champs de contrainte  $\sigma_{11}$  [MPa] (a) configuration 1 (b) configuration 2.

## 2.4. Étude déterministe du défaut de plissement

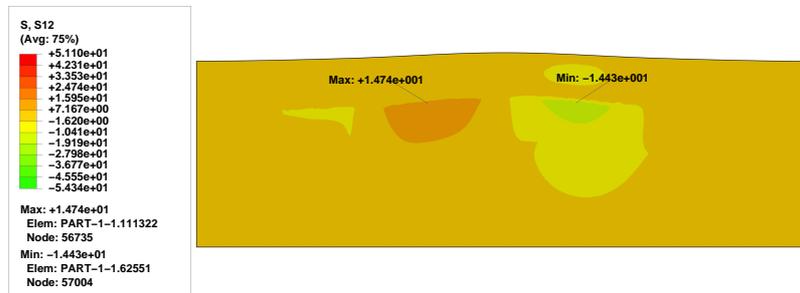


(a)

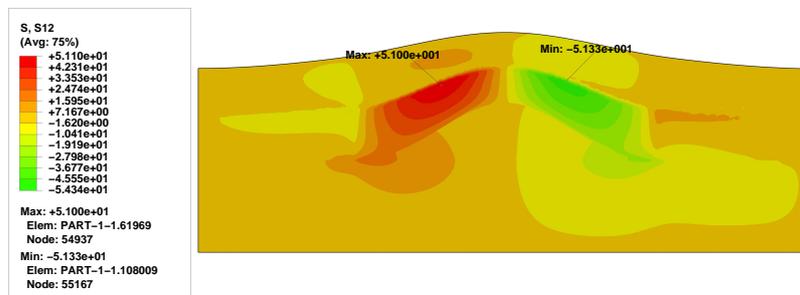


(b)

FIGURE 2.27 – Champs de contrainte  $\sigma_{22}$  [MPa] (a) configuration 1 (b) configuration 2.



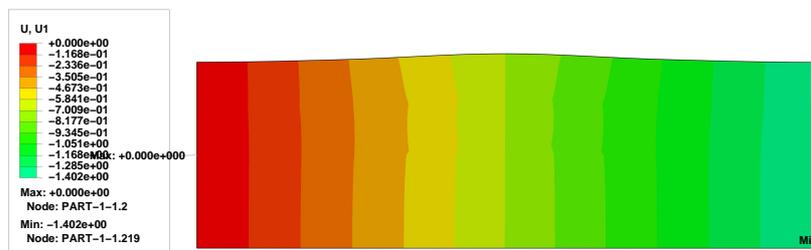
(a)



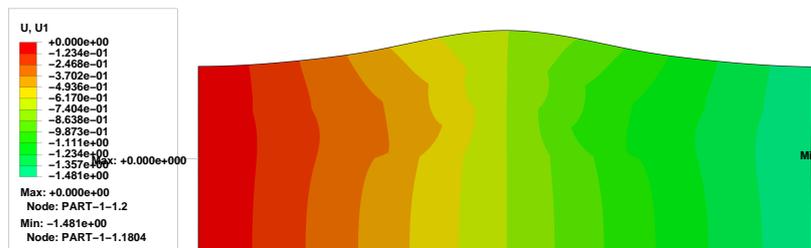
(b)

FIGURE 2.28 – Champs de contrainte  $\sigma_{12}$  [MPa] (a) configuration 1 (b) configuration 2.

En analysant les résultats obtenus, nous constatons que tous les champs de contraintes présentent des niveaux plus importants dans la configuration 2 où la hauteur est quatre fois supérieure à celle de la configuration 1. De plus, dans les deux configurations, les contraintes les plus élevées se situent systématiquement à l'interface entre le pli UD et la résine époxy où se situe une discontinuité importante des propriétés élastiques du milieu. Ainsi, nous observons un écart entre les deux configurations de 27% sur la contrainte de compression  $|\sigma_{11}^{min}|$  (contraintes dans la direction de la sollicitation). Nous constatons un écart relatif de 66% pour la contrainte maximale  $\sigma_{22}^{max}$  (dans la direction transverse à la sollicitation). Enfin, nous obtenons l'écart le plus important pour la contrainte de cisaillement  $\sigma_{12}^{max}$  avec 74%. Nous présentons maintenant les déplacements  $u_1$  et  $u_2$  respectivement dans la direction de la sollicitation et dans la direction transverse à la sollicitation. Les différents champs de déplacement simulés sont illustrés sur les figures 2.29 et 2.30.



(a)



(b)

FIGURE 2.29 – Champ de déplacement  $u_1$  [mm] dans la direction de la sollicitation (a) pour la configuration 1 (b) pour la configuration 2.

On constate que, dans les deux directions, le champ de déplacement est perturbé par la présence et la géométrie du plissement. De plus, comme attendu, des déplacements plus élevés sont obtenus dans la configuration 2. En effet, en comparant les deux configurations, nous constatons une faible augmentation des déplacements dans la direction 1 (sens de la sollicitation) avec un écart de 5% sur  $|u_1^{min}|$ . En contre partie, dans la direction transverse à la sollicitation, cette augmentation est importante avec un écart de 59% sur  $u_2^{max}$  entre les deux configurations étudiées.

On propose finalement de présenter les valeurs du critère de Puck permettant de dé-

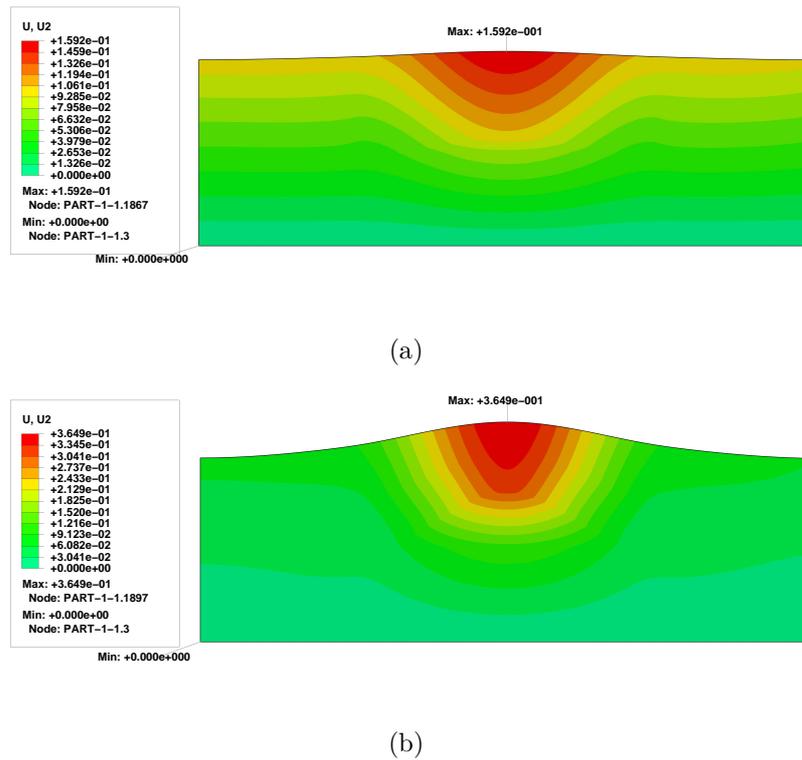
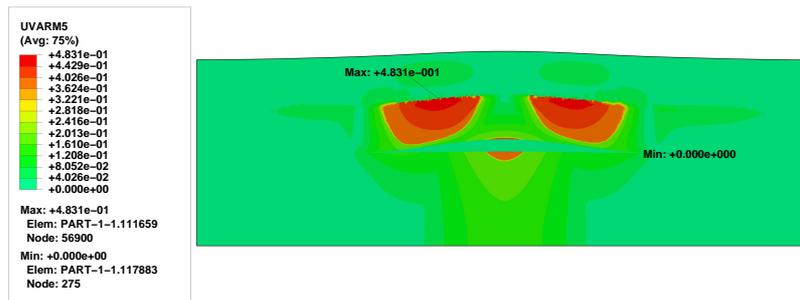


FIGURE 2.30 – Champ de déplacement  $u_2$  [mm] dans la direction transverse à la sollicitation (a) pour la configuration 1 (b) pour la configuration 2.

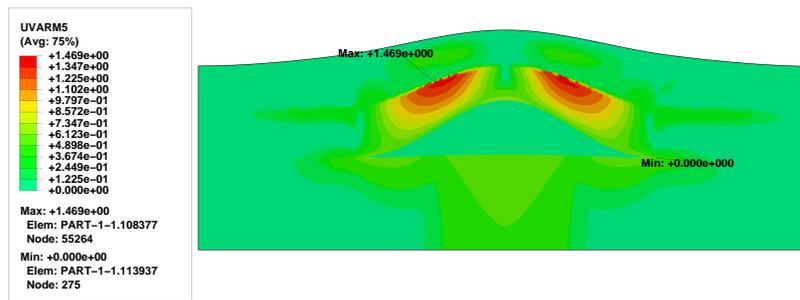
terminer si une rupture dans les fibres ou dans la matrice est possible. Les propriétés utilisés pour ce critère sont celles données dans le tableau 2.5. Comme pour l'étude de la macroporosité, ce critère ne prédit pas de rupture au sein des fibres quelle que soit la configuration : en effet, les valeurs maximales sont de 0.42 pour la configuration 1 et de 0.48 pour la configuration 2. Ces valeurs sont donc assez éloignées de l'unité signifiant la rupture des fibres. Les résultats de la rupture matricielle sont présentés sur les figures 2.31 et 2.32. La figure 2.32 illustre le critère de Puck pour la rupture matricielle pour les deux configurations. On rappelle que le calcul de ce critère est basé sur les champs de contrainte en cisaillement et transverse aux fibres (*cf.* équations (2.15) et (2.16)). On constate que la distribution spatiale du critère de rupture matricielle est proche du champ de contrainte  $\sigma_{12}$  montrant que ce critère dépend fortement de ce champ de contrainte bien que ses niveaux soient nettement plus faibles que ceux de la contrainte  $\sigma_{22}$ .

Par souci de clarté et pour bien identifier les zones du matériau où la rupture matricielle est apparue, nous présentons sur la figure 2.32 les mêmes résultats en distinguant seulement les valeurs inférieures à 1 (en vert) et supérieures à 1 (en rouge). On constate que seule la configuration 2, correspondant à la hauteur de plissement la plus élevée, mène à une rupture de la matrice dans deux zones importantes de chaque côté du plissement.

Cette étude numérique, prenant en compte des géométries de plissement différentes, a permis de montrer que la hauteur de plissement jouait un rôle important sur le com-

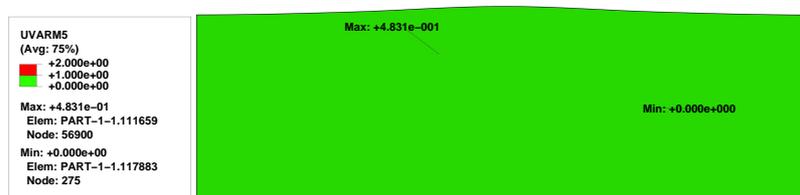


(a)

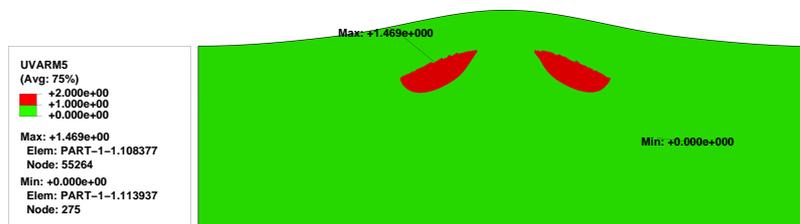


(b)

FIGURE 2.31 – Critère de rupture de Puck pour la matrice (IFF) (a) configuration 1 (b) configuration 2.



(a)



(b)

FIGURE 2.32 – Critère de rupture de Puck pour la matrice (IFF) (a) configuration 1 (b) configuration 2 où seules les valeurs inférieures et supérieures à l'unité sont données.

## **2.4. Étude déterministe du défaut de plissement**

---

portement mécanique de la pièce composite. Par souci de clarté, nous n'avons considéré qu'une variation de la hauteur du plissement, mais, l'influence des autres paramètres géométriques sera étudié dans le cadre stochastique dans le dernier chapitre de ce mémoire.

## 2.5 Conclusion intermédiaire

Grâce à ces premières études dans un cadre déterministe, nous avons pu mettre en évidence l'impact de la présence des défauts étudiés sur le comportement mécanique du matériau composite. Nous avons tout d'abord présenté un modèle mécanique associé à chaque défaut afin de prendre en compte les hétérogénéités à l'échelle microscopique pour les porosités et d'étudier l'impact des plissements à l'échelle d'un pli ou d'un stratifié. Par ailleurs, afin de prédire le comportement du matériau, en tenant compte des porosités, à une échelle supérieure pour laquelle la représentation des deux constituants devient difficile, nous avons montré comment se ramener à un Milieu Homogène Équivalent dans lequel les propriétés effectives sont déterminées par homogénéisation numérique. Afin d'obtenir des informations sur la rupture du matériau, nous avons proposé d'utiliser le critère de rupture de Puck permettant de distinguer la rupture au sein des fibres de la rupture matricielle.

Des études sur le défaut de porosités ont été proposées afin d'analyser l'impact des porosités sur le comportement du matériau à l'échelle microscopique et à l'échelle macroscopique pour laquelle les porosités, dénommées macroporosités dans ce mémoire, ont une taille caractéristique de l'ordre du millimètre. Dans le cadre mécanique choisi, nous avons observé que l'influence des porosités à l'échelle des constituants était assez limitée. Les champs mécaniques ainsi que les propriétés effectives sont en effet peu modifiés vis-à-vis du taux de porosités. En revanche, pour les macroporosités, nous avons constaté, sur l'exemple considéré, que leur influence pouvait être significative aussi bien sur les champs mécaniques que pour le critère de rupture de Puck.

Pour le problème de plissement, l'étude proposée a été réalisée à l'échelle d'un pli avec une représentation explicite du plissement sous une forme sinusoïdale paramétrée par son amplitude et sa largeur. Par ailleurs, afin de tenir compte du désalignement des fibres provoqué par le plissement, nous avons proposé de décomposer l'échantillon en plusieurs sous-domaines dans lesquels les fibres peuvent avoir une orientation qui suit la forme du plissement. L'étude proposée, dans laquelle deux configurations de plissements sont proposées, a montré que la hauteur de plissement jouait un rôle important dans le comportement mécanique de la pièce composite ainsi que sur sa rupture matricielle.

Ainsi, l'impact des défauts sur le comportement du composite est donc bien présent et varie en fonction de l'importance de ce dernier : le taux et éventuellement la forme pour les porosités et la géométrie pour les plissements. Dans le chapitre précédent, nous avons expliqué que ces défauts pouvaient être soumis à des incertitudes importantes qui peuvent donc conduire à une variabilité importante du comportement mécanique du matériau. Le chapitre suivant est donc dédié à la modélisation probabiliste en mécanique : nous introduirons différentes approches stochastiques qui permettront de prendre en compte la variabilité sur les paramètres d'entrée du problème et de déterminer les incertitudes sur

les champs mécaniques. Les performances de ces approches seront illustrées au travers d'un exemple numérique.



# Chapitre 3

## Modélisation stochastique des incertitudes

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction du chapitre . . . . .</b>	<b>68</b>
<b>3.2</b>	<b>Généralités sur la modélisation stochastique . . . . .</b>	<b>68</b>
<b>3.3</b>	<b>Méthodes de calcul probabiliste . . . . .</b>	<b>71</b>
3.3.1	Méthodes fiabilistes . . . . .	72
3.3.2	Méthodes d'intégration directe . . . . .	75
3.3.3	Développement en série . . . . .	77
3.3.4	La représentation sur des bases de fonctions . . . . .	79
3.3.4.1	Méthode de Galerkin au niveau stochastique . . . . .	79
3.3.4.2	Méthode de projection . . . . .	81
3.3.4.3	Méthode de régression . . . . .	81
<b>3.4</b>	<b>Représentation fonctionnelle des variables aléatoires sur le chaos polynomial . . . . .</b>	<b>82</b>
<b>3.5</b>	<b>Aspects techniques . . . . .</b>	<b>84</b>
<b>3.6</b>	<b>Exemple pour un matériau composite avec un chargement aléatoire . . . . .</b>	<b>86</b>
3.6.1	Présentation du problème . . . . .	86
3.6.2	Résultats numériques et discussion . . . . .	87
<b>3.7</b>	<b>Conclusion intermédiaire . . . . .</b>	<b>90</b>

---

### 3.1 Introduction du chapitre

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la modélisation stochastique des incertitudes. Nous commencerons dans un premier temps par un bilan bibliographique non exhaustif des approches probabilistes. Nous aborderons les différentes méthodes de calcul probabiliste et on s'intéressera particulièrement aux approches spectrales basées sur l'utilisation du chaos polynomial pour l'approximation stochastique. Nous aborderons ensuite les aspects techniques développés dans ces travaux permettant de réaliser les calculs avec une procédure automatisée.

Enfin, nous consacrerons la dernière partie de ce chapitre à la présentation d'un exemple type d'application sur un matériau composite avec un chargement aléatoire. Ceci permettra d'illustrer le choix de modélisation pour laquelle nous avons opté dans le cadre de nos travaux.

### 3.2 Généralités sur la modélisation stochastique

Dans la mécanique numérique classique, les simulations permettent de prédire le comportement de systèmes mécaniques complexes en se basant sur des modèles physiques représentant au mieux ce comportement. Les problèmes mécaniques se traduisent en général par des modèles mathématiques qui sont soit représentés sous forme analytique soit sous une forme plus complexe par des équations aux dérivées partielles (EDP) ou des équations différentielles ordinaires (EDO). Plusieurs méthodes ont été développées pour la résolution de ces EDP, comme la méthode des éléments finis (la plus utilisée en mécanique des structures) [Dhatt *et al.*, 2005], la méthode des différences finis et, depuis peu, les méthodes connues sous le nom de méthodes sans maillage. Ces différentes méthodes permettent la résolution de modèles mathématiques complexes tout en maîtrisant les erreurs d'approximation et la précision des résultats. Elles font généralement intervenir un grand nombre de paramètres d'entrées supposés connus et déterministes. Cependant, dans la réalité, ces paramètres peuvent contenir des méconnaissances ou des incertitudes liées aux matériaux, à la géométrie ou encore aux chargements. Ces incertitudes peuvent être divisées en deux catégories : les incertitudes dues à la variabilité sur les observations et les incertitudes liées à l'ignorance partielle. Cette dernière peut être réduite par l'obtention de nouvelles informations, mais la première est un peu plus compliquée à réduire. Il est donc indispensable de tenir compte de ces incertitudes si l'on veut garantir la prédiction la plus fiable de la réponse mécanique et donc du comportement des structures (*cf.* figure 3.1).

Depuis plus de trente ans maintenant, la prise en compte des incertitudes a été un sujet de recherche intensif en mécanique et plusieurs théories pour la modélisation de l'incertain ont été utilisées ou développées. Parmi ces dernières, on peut citer la théorie des intervalles, la théorie des preuves [Shafer *et al.*, 1976], la théorie des possibilités [Negoita *et al.*, 1978], la théorie des méconnaissances [Puel, 2004, Ladeveze *et al.*, 2006] et la théorie pro-

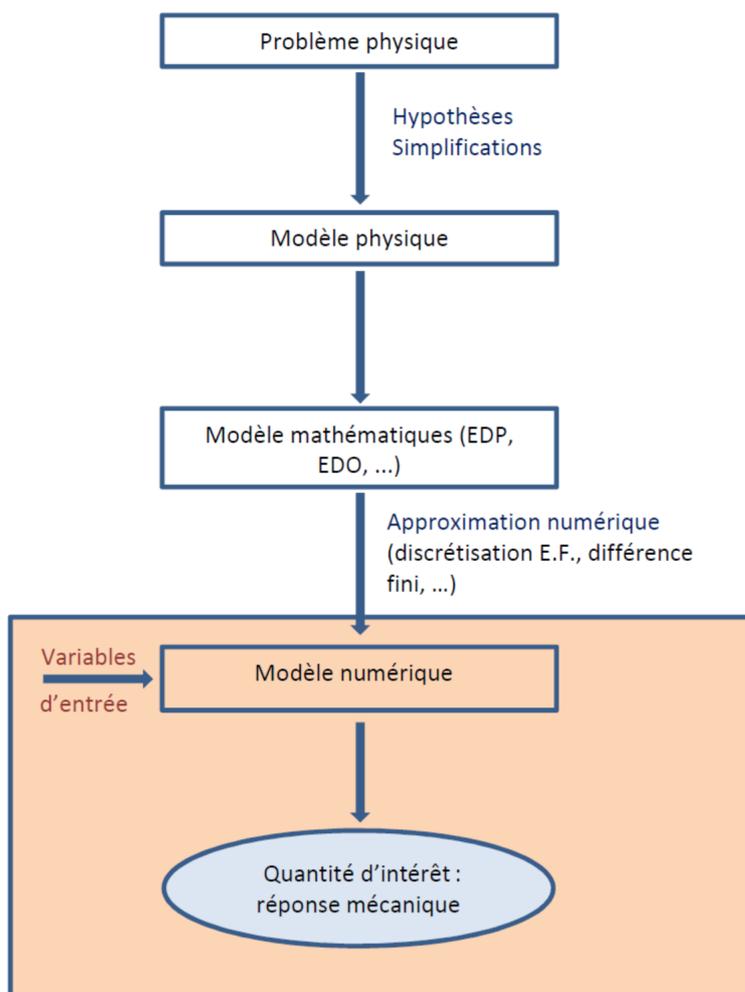


FIGURE 3.1 – Différentes étapes d'un calcul mécanique.

abiliste (approche stochastique). Cette dernière théorie est particulièrement prééminente et permet de prendre en compte à la fois l'incertitude liée à la variabilité des phénomènes répétables et l'incertitude due au manque d'information (dite épistémique). C'est cette approche que nous allons explorer dans le cadre de ces travaux.

La modélisation probabiliste des incertitudes est basée sur l'introduction d'un espace de probabilité abstrait  $(\Theta, \mathcal{B}, P)$  où  $\Theta$  est l'ensemble des événements élémentaires  $\theta$ ,  $\mathcal{B}$  est une tribu ou  $\sigma$ -algèbre, et  $P$  une mesure de probabilité.

Afin de définir l'espace probabilisé, deux types d'approches sont possibles : l'approche non-paramétrique et l'approche paramétrique. La première permet de prendre en compte les incertitudes liées au modèle considéré. Cette prise en compte se fait directement au niveau des matrices du système étudié telles que les matrices généralisées de masse, d'amortissement ou de rigidité [Soize, 2000, Soize, 2001].

La deuxième, l'approche probabiliste paramétrique, permet d'incorporer dans l'analyse mécanique les incertitudes sur les données comme les incertitudes paramétriques sur la géométrie, les conditions aux limites ou les propriétés des matériaux. Elle propose de repré-

senter le contenu probabiliste du problème stochastique par un ensemble fini de variables aléatoires  $\boldsymbol{\xi} : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Les paramètres d'entrée du modèle étant ainsi caractérisés, on cherchera à caractériser de façon probabiliste la ou les quantités d'intérêt du modèle par l'intermédiaire de méthodes numériques probabilistes. Parmi les méthodes représentatives de ce type d'approche, il y a la décomposition de Karhunen-Loève [Loève, 1977, Loève, 1978] et la méthode des éléments finis stochastiques [Ghanem et Spanos, 1991].

Dans le cadre de nos travaux, nous nous baserons sur une approche paramétrique où le contenu probabiliste est représenté par un ensemble fini de variables aléatoires  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ . On note  $\Theta \subset \mathbb{R}^m$  l'espace image de  $\Theta$  par  $\boldsymbol{\xi}$  et  $P_{\boldsymbol{\xi}}$  la mesure de probabilité associée à  $\boldsymbol{\xi}$ . La fonction de densité de probabilité associée à  $P_{\boldsymbol{\xi}}$  est notée  $p_{\boldsymbol{\xi}}$ . Les paramètres incertains du problème sont identifiés à l'aide de données disponibles ou d'un jugement d'expert. Nous pourrions ainsi caractériser la mesure de probabilité  $P_{\boldsymbol{\xi}}$  de dimension finie  $m$ .

On pourra alors prendre une fonction mesurable définie sur cet espace afin de définir une variable aléatoire. La réponse du modèle, notée  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})$ , sera alors cherchée comme une fonction de  $\boldsymbol{\xi}$  et devra vérifier

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (3.1)$$

où  $\mathbf{A}$  est un opérateur différentiel et  $\mathbf{b}$  un second membre qui représente les termes sources. Sauf mention contraire explicite, toutes les grandeurs aléatoires (variables, champs) considérées dans ce document sont supposées définies sur ce même espace de probabilité.

Avant de passer à la présentation des méthodes de calcul probabiliste, nous allons introduire la discrétisation d'un problème modèle. Cette dernière se compose de deux parties : une discrétisation au niveau déterministe et une discrétisation au niveau stochastique.

Il existe différents types de discrétisation au niveau déterministe en fonction de la nature du problème mécanique étudié. Dans le cadre de notre étude, nous utiliserons une approximation spatiale par éléments finis [Zienkiewicz et Taylor, 2005]. Cette approximation conduit à la définition d'un espace d'approximation  $\mathcal{U}_h$  tel que

$$\mathcal{U}_h = \left\{ \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(\mathbf{x}) v_i = \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x}) \mathbf{v}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N \right\} \quad (3.2)$$

où les  $\varphi_i(\mathbf{x}) \in \mathcal{U}_h$  sont les fonctions d'interpolation éléments finis associées au maillage utilisé. On considère que l'espace fonctionnel des variables aléatoires du second ordre à valeurs dans  $\mathcal{U}_h$ , noté  $\mathcal{N}$  est défini par

$$\mathcal{N} = \left\{ \mathbf{u} : \boldsymbol{\xi} \in \Theta \mapsto \mathbf{u}(\cdot, \boldsymbol{\xi}) \in \mathcal{U}_h; \int_{\Theta} \|\mathbf{u}(\cdot, \mathbf{x})\|_{\mathcal{U}_h}^2 dP_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) < \infty \right\} := L^2(\Theta, dP_{\boldsymbol{\xi}}; \mathcal{U}_h) \quad (3.3)$$

L'espace d'approximation semi-discrétisé  $\mathcal{N}_h \subset \mathcal{N}$  peut alors être défini de la manière

suivante

$$\mathcal{N}_h = \mathcal{S} \otimes \mathcal{U}_h = \left\{ \mathbf{v}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(\mathbf{x}) v_i(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{v} \in \mathcal{S} \otimes \mathbb{R}^N \right\} \quad (3.4)$$

où  $\mathcal{S} = L^2(\Theta, dP_\xi)$  est l'espace des variables aléatoires du second ordre.

La solution approchée semi-discrétisée  $\mathbf{u}_h \in \mathcal{N}_h$  du problème 3.1 s'écrit

$$A(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = L(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{N}_h \quad (3.5)$$

qui peut être réécrit sous une forme matricielle : trouver  $\mathbf{u} \in \mathcal{S} \otimes \mathbb{R}^N$  tel que

$$E(\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{u}) = E(\mathbf{v}^T \mathbf{b}) \quad (3.6)$$

où la matrice aléatoire  $\mathbf{A} \in \mathcal{S} \otimes \mathbb{R}^{N \times N}$  et le vecteur aléatoire  $\mathbf{b} \in \mathcal{S} \otimes \mathbb{R}^N$  sont définis par :

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}))_{ij} &= a(\varphi_j, \varphi_i; \boldsymbol{\xi}) \\ (\mathbf{b}(\boldsymbol{\xi}))_i &= a(\varphi_i; \boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Nous nous intéressons maintenant à la discrétisation au niveau stochastique du problème modèle. Nous cherchons à construire un espace d'approximation  $\mathcal{S}_P \subset \mathcal{S}$ . L'objectif est de pouvoir représenter une fonction aléatoire  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  en fonction des variables aléatoires de base  $\boldsymbol{\xi}$  de loi  $P_\xi$ . Quelle que soit la représentation stochastique choisie, l'espace  $\mathcal{S}_P$  de dimension finie  $P$  pourra s'écrire

$$\mathcal{S}_P = \left\{ v(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_P} v_\alpha H_\alpha(\boldsymbol{\xi}), v_\alpha \in \mathbb{R} \right\} \quad (3.8)$$

où  $\mathcal{J}_P$  est un sous-ensemble de  $P$  indices dans  $\mathcal{J}$  et où  $\{H_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}$  est une base de fonctions de  $\mathcal{S}$  pour laquelle plusieurs choix sont possibles et qui seront discutés dans la section 3.4. L'espace d'approximation complet  $\mathcal{N}_{h,P} \in \mathcal{N}$  sera alors défini par le produit tensoriel suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{h,P} &= \mathcal{S}_P \otimes \mathcal{U}_h \\ &= \left\{ \mathbf{v}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_P} \varphi_i(\mathbf{x}) H_\alpha(\boldsymbol{\xi}) v_{i,\alpha}, v_{i,\alpha} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{v}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi}), \mathbf{v} \in \mathcal{S}_P \otimes \mathbb{R}^N \right\} \end{aligned} \quad (3.9)$$

### 3.3 Méthodes de calcul probabiliste

Dans le cadre des approches probabilistes, ils existent différentes méthodes de calculs selon les quantités d'intérêt ciblées et du post-traitement souhaité. Prenons le cas d'une quantité d'intérêt  $\mathcal{J}(\mathbf{u})$ , plusieurs informations probabilistes telles que la probabilité d'événements particuliers ( $P_{\mathcal{J}} = P(\{\mathcal{J}(\mathbf{u}) \leq \mathcal{J}_0\})$ ) et les premiers moments statiques (moyenne  $\mu_{\mathcal{J}}$ , écart type  $\sigma_{\mathcal{J}}$  etc.), ou encore la description complète de la loi de probabilité, peuvent être obtenues sur cette quantité.

Dans le cadre de notre étude, nous avons choisi de travailler avec une approximation

basée sur le chaos polynomial. Nous allons donc mettre l'accent sur les méthodes de calcul probabiliste utilisant ce type d'approximation qui seront présentées de manière non exhaustive dans cette partie.

#### 3.3.1 Méthodes fiabilistes

Les méthodes fiabilistes consistent à calculer la probabilité de défaillance d'un composant ou d'une structure, si celle-ci est présumée faible (de l'ordre de  $10^{-3}$  ou inférieure). On considère un ensemble fini de variables aléatoires  $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m)$  représentant les paramètres incertains du problème, et  $p_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x})$  sa densité jointe de probabilité.

Dans la plupart des problèmes de fiabilité, le souci de modéliser les mécanismes de dégradations et les contraintes de l'environnement de la structure conduit à la définition d'une fonction de défaillance et d'un critère de défaillance. Ce critère est fonction des paramètres du modèle et implique une séparation de l'espace en deux zones : la zone de fiabilité et la zone de défaillance. La frontière entre ces deux sous espaces est une hypersurface d'équation  $G(\mathbf{x}) = 0$  où  $G$  désigne la fonction de défaillance du modèle. Cette frontière est appelée surface d'état limite ou surface de défaillance. Il y a donc défaillance lorsque  $G(\mathbf{x}) \leq 0$ . L'ensemble des états défaillants noté  $D \subset \Theta$  (domaine ou zone de défaillance) est défini par

$$D = \{\mathbf{x} \in \Theta / G(\mathbf{x}) \leq 0\} \quad (3.10)$$

L'ensemble des états fiables du modèle ou domaine de bon fonctionnement est le complémentaire de  $D$ . Il est noté  $S \subset \Theta$  (zone de fiabilité ou *safe set*) défini par

$$S = \{\mathbf{x} \in \Theta / G(\mathbf{x}) \geq 0\} \quad (3.11)$$

La surface dite de défaillance ou d'état limite est l'ensemble  $\{\mathbf{x} \in \Theta / G(\mathbf{x}) = 0\}$ . La figure 3.2 illustre parfaitement le contexte général d'un problème de fiabilité. La probabilité de défaillance d'une structure est donnée par

$$P_f = \int_D p_{\boldsymbol{\xi}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3.12)$$

Toutefois, la solution analytique de cette intégrale est en général complexe, voire impossible. En effet, la complexité des fonctions de défaillance et le grand nombre de variables du modèle rendent en général impossible le calcul direct de  $P_f$ .

Une manière de l'estimer consiste à utiliser une méthode de Monte-Carlo [Niederreiter, 1992, Papadrakakis et Papadopoulos, 1996, Caffisch, 1998] : on génère un grand nombre de valeurs aléatoires suivant les lois statistiques connues, et l'on dénombre le nombre de cas où  $G$  est négative. Cependant, cette méthode nécessite un nombre considérable de simulations pour avoir une bonne estimation de cette probabilité de défaillance. C'est pourquoi, en pratique, on utilise les méthodes telles que FORM et SORM [Ditlevsen et Madsen, 1996] qui sont basées sur une approximation du domaine de défaillance  $D$  par un domaine simplifié pour lequel l'intégrale peut être calculée par des techniques numériques.

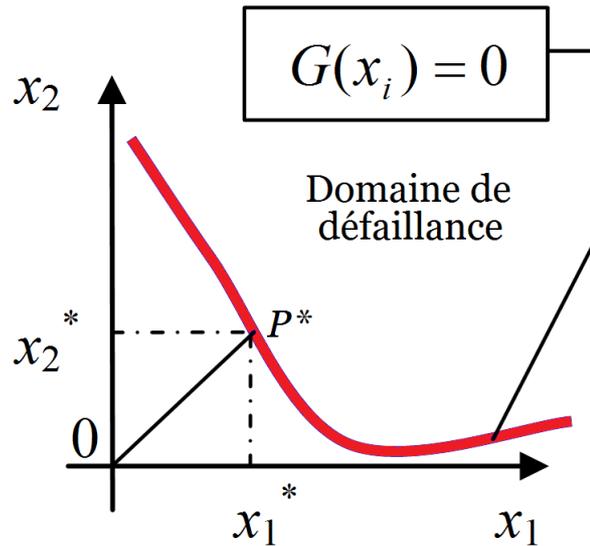


FIGURE 3.2 – Exemple de fonction de défaillance.

Ces méthodes sont couplées ou non à des méthodes d'intégration (tirage d'importance, etc.). Elles permettent de déterminer un point particulier appelé point de conception de la structure, et donc d'estimer la probabilité de défaillance  $P_f$ . Parmi les indices de fiabilité les plus répandus et qui sont utilisés comme estimateur de cette probabilité il y a celui de d'Hasofer-Lind [Hasofer et Lind, 1974] noté usuellement  $\beta$ .

Les méthodes FORM/SORM (*First or Second Order Reliability Method*) se décomposent en trois étapes : la transformation iso-probabiliste de l'espace d'origine des variables  $\xi$  en un espace gaussien standard (espace normé), la recherche du fameux point de conception *Design Point* dans le nouvel espace et l'approche de la surface de défaillance en ce point afin d'obtenir une approximation de la probabilité recherchée.

L'étape de transformation de l'espace des variables de base a pour objectif de définir un espace dans lequel les variables sont gaussiennes centrées réduites indépendantes, et dans lequel certaines propriétés pour la probabilité de défaillance sont satisfaites (*cf.* figure 3.3). Il existe donc plusieurs transformations régulièrement utilisées telle que la transformation de Rosenblatt pour laquelle des hypothèses fortes sont à prévoir, et la transformation de Nataf qui nécessite des hypothèses moins fortes que celle de Rosenblatt.

Après avoir transformé l'espace d'origine en un espace gaussien centré réduit, nous passons à l'étape suivante. Cette dernière consiste à approximer la surface d'état limite, dans l'espace des variables normées, à une surface tangente au point de conception. Nous devons donc calculer l'indice de fiabilité  $\beta$  dans ce nouvel espace. Ce dernier est défini comme la distance euclidienne entre l'origine et le domaine de défaillance  $D$ , donné par

$$\beta = \| \mathbf{x}^* \| \quad \text{où} \quad \mathbf{x}^* = \underset{\mathbf{x} \in D}{\operatorname{argmin}} \| \mathbf{x} \|^2 \quad (3.13)$$

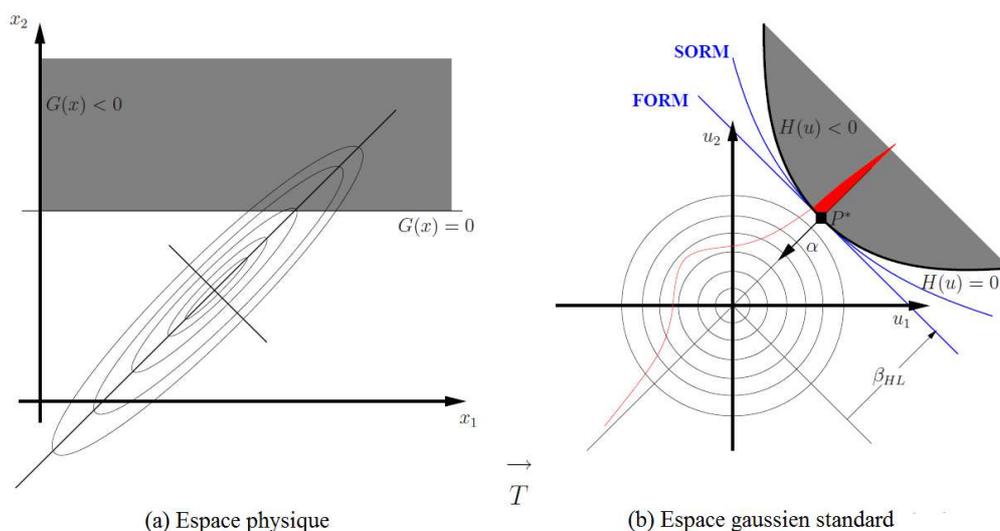


FIGURE 3.3 – Illustration de la transformation iso-probabiliste de l’espace de base pour définir un espace standard [Micol, 2007].

Ceci revient à résoudre un problème de minimisation dont le point solution, noté  $P^*$  et de coordonnées  $\mathbf{x}^*$ , est appelé point de défaillance le plus probable. Ce dernier n’est autre que le fameux point de conception de la structure, *i.e.* un point de la surface d’état limite le plus proche de l’origine de l’espace standard (*cf.* figure 3.2). Une fois l’indice  $\beta$  calculé, nous pouvons calculer  $P_f$  en utilisant des méthodes FORM/SORM.

Dans la méthode FORM (*First Order Reliability Method*), la surface d’état limite dans l’espace normé est approchée par un hyperplan tangent au point de conception. La probabilité de défaillance est approximée alors par la relation

$$P_f \approx \Phi(-\beta) = 1 - \Phi(\beta) \tag{3.14}$$

où  $\Phi$  est la fonction de répartition d’une variable aléatoire gaussienne centrée réduite dans le cas général. La précision de cette approximation linéaire de la surface d’état limite au point de conception dépend de la linéarité de la fonction d’état limite. En effet, pour une fonction d’état limite fortement non-linéaire, les méthodes FORM peuvent donc ne pas être toujours adéquates pour trouver une probabilité de défaillance raisonnablement correcte. Dans de tels cas, une meilleure approximation de la surface d’état limite au point de conception est exigée. Une fonction du second ordre (parabolique) est, pour cela, adaptée à la fonction d’état limite non-linéaire au point de conception.

La méthode SORM (*Second Order Reliability Method*) est un processus compliqué et nécessitant des temps de calcul relativement longs. Dans cette méthode, la fonction d’état limite est composée de deux fonctions aléatoires indépendantes, l’une linéaire et l’autre étant quadratique dans l’espace standard. Un calcul analytique exact de la probabilité de défaillance peut ne pas être possible à cause de la connaissance limitée sur la distribution de probabilité du terme quadratique. Une approximation asymptotique permet alors

d'exprimer la probabilité de défaillance en fonction de l'indice de fiabilité sous la forme

$$P_f \approx \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \beta_{k_i}}} \quad (3.15)$$

où les coefficients  $k_i$  sont les courbures principales de la parabololoïde.

Les méthodes fiabilistes fournissent donc une approximation de la probabilité de défaillance des structures. De plus, le temps de calcul ne dépend pas du niveau de la probabilité recherché. Cependant, ces méthodes ne permettent pas de contrôler les erreurs d'approximation et ne prennent pas en compte l'existence de plusieurs minima locaux dans l'algorithme de recherche du point de conception. Cela peut conduire à des approximations de la probabilité de défaillance qui sont erronées.

#### 3.3.2 Méthodes d'intégration directe

Les méthodes d'intégration directe, comme leur nom l'indique, sont basées sur des techniques d'intégration numérique. Elles sont souvent utilisées afin d'évaluer des moments statistiques d'une quantité d'intérêt  $\mathcal{J}(\mathbf{u})$  comme le moment d'ordre 1 ( $\mu_{\mathcal{J}} = E(\mathcal{J}(\mathbf{u}))$ ) appelée espérance ou moyenne représentant la tendance centrale de la variable aléatoire, et son moment d'ordre 2 appelé variance ( $Var(\mathcal{J}(\mathbf{u})) = \sigma_{\mathcal{J}}^2$ ) représentant la dispersion qui indique de quelle manière la série statistique ou la variable aléatoire se disperse autour de sa moyenne ou son espérance.

Dans une approche probabiliste, les quantités d'intérêt à prédire s'expriment notamment comme la moyenne d'une certaine fonctionnelle de la solution du modèle. Afin d'évaluer une telle quantité, nous avons besoin de calculer une intégrale par rapport à la mesure de probabilité  $P_{\xi}$

$$\mu_{\mathcal{J}} = \int_{\Theta} \mathcal{J}(\mathbf{u}(\mathbf{x})) dP_{\xi}(x) \quad (3.16)$$

Des méthodes d'intégration numérique sont alors utilisées en vue de résoudre ce problème. Le calcul de  $\mu_{\mathcal{J}}$  est approché dans ce cas par

$$\mu_{\mathcal{J}} = \int_{\Theta} \mathcal{J}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_k)) \omega_k \quad (3.17)$$

où les  $\mathbf{x}_k \in \Theta$  et les  $\omega_k \in \mathbb{R}$  sont respectivement les points et les poids d'intégration. Pour pouvoir résoudre ce problème, nous avons besoin d'évaluer la réponse du système pour  $N$  réalisations et donc pour  $N$  problèmes déterministes indépendants tels que

$$\mathbf{A}\mathbf{u}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{b}(\mathbf{x}_k) \quad (3.18)$$

Plusieurs méthodes d'intégrations sont envisageables, parmi lesquelles, on peut citer la méthode de Monte-Carlo [Caffisch, 1998]. Le principe de cette méthode consiste à choisir, pour les variables  $\xi$ ,  $k$  réalisations pseudo-aléatoires  $\mathbf{x}_k$ . Les poids d'intégration associés sont alors donnés par  $\omega_k = \frac{1}{N}$ . L'avantage de cette méthode réside dans la facilité à la mettre en place. En revanche, elle peut être coûteuse en terme de calcul surtout on

s'intéresse à des probabilités faibles.

Une autre alternative est la méthode Quasi-Monte-Carlo [Niederreiter, 1992] qui a été développée pour améliorer les calculs fournis par la méthode de Monte-Carlo. Elle consiste à choisir les  $x_k$  comme des réalisations pseudo-aléatoires (discrédance faible). Ces points sont choisis de manière déterministe dans l'hypercube unitaire  $[0, 1]^m$ , où  $m$  désigne la dimension stochastique du problème. Cette méthode est plus efficace que celle de Monte-Carlo. Cependant, la qualité des résultats dépend de la dimension stochastique  $m$  (la précision est détériorée en grande dimension).

Ils existent d'autres méthodes basées sur des quadratures de la forme

$$\mu_{\mathcal{J}} \approx \mathbf{Q}_r(\mathcal{J}) = \sum_{k=1}^r \mathcal{J}(\mathbf{u}(\mathbf{x}_k))\omega_k \quad (3.19)$$

La quadrature de Gauss consiste à définir les points d'intégration comme les  $r$  racines du  $r^{\text{ème}}$  polynôme orthogonal associé à  $dP_{\xi}$ . Une intégration des interpolants de Lagrange aux point  $x_k$  donne alors les coefficients de quadrature (ou poids)  $\omega_k$ . Ainsi, la quadrature de Gauss permet d'intégrer exactement des polynômes multi-dimensionnels de degré total inférieur ou égal à  $(2r - 1)$ . On peut alors avoir une quadrature en dimension  $m$  par tensorisation complète de ces quadratures uni-dimensionnelles sous la forme

$$\mathbf{Q}_M = Q_r^{(1)} \otimes \dots \otimes Q_r^{(m)} \quad (3.20)$$

avec

$$\mathbf{Q}_M(\mathcal{J}) = \sum_{k_1=1}^r \dots \sum_{k_m=1}^r \omega_{1,k_1} \dots \omega_{m,k_m} \mathcal{J}(\mathbf{u}(x_{1,k_1}, \dots, x_{m,k_m})) \quad (3.21)$$

Le nombre de points d'intégration  $M$  est alors donné par  $M = r^m$ . Des illustrations de quadrature de Gauss pour  $m = 2$  et  $r \in \{2, 4, 10\}$  sont représentées figure 3.4.

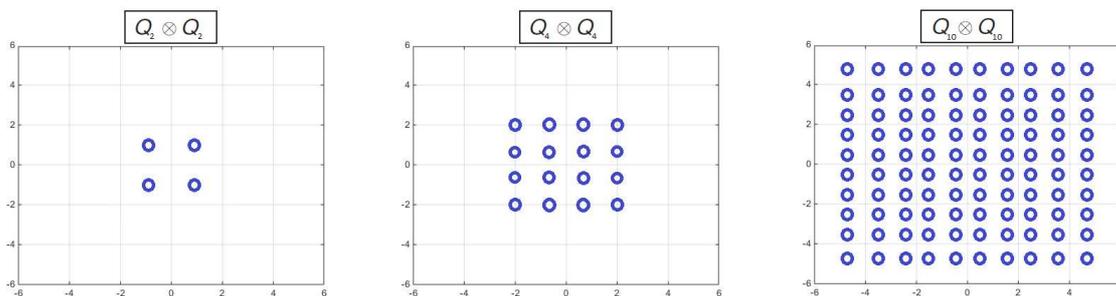


FIGURE 3.4 – Illustrations de quadrature de Gauss pour  $m = 2$  et  $r \in \{2, 4, 10\}$ .

En faible dimension stochastique  $m$ , cette méthode est très intéressante car elle donne une intégration précise de fonctions régulières. Néanmoins, quand cette dimension augmente, le nombre de points d'intégration augmente exponentiellement. La méthode risque alors de devenir très coûteuse. Dans ce cas, on favorise l'utilisation des quadratures creuses [Smolyak, 1963, Matthies et Keese, 2005] nécessitant un nombre limité de point d'intégration

comparé aux quadratures de Gauss. Il est à noter que d'autres quadratures imbriquées existent et elles sont recommandées pour réduire le nombre de points d'intégrations telles que celles de Clenshaw-Curtis et Gauss-Patterson.

### 3.3.3 Développement en série

Les méthodes d'intégration directe introduites précédemment sont classiquement utilisées pour l'évaluation de moments statistiques ou de probabilités d'événements particuliers, mais demandent généralement un grand nombre d'évaluations de la réponse du modèle les rendant coûteuses. Une approche alternative consiste à rechercher la solution  $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})$  ou une quantité d'intérêt  $\mathcal{J}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}))$  sous la forme d'une représentation en série. Parmi les méthodes de développement les plus répandues, on trouve la méthode de développement de Taylor et la décomposition de Neumann.

La méthode de développement de Taylor, appelée aussi méthode de perturbation, consiste à écrire la solution recherchée sous la forme d'un développement autour des valeurs moyennes des variables aléatoires  $\boldsymbol{\mu}_\xi$  de la forme

$$\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_{,j}(\xi_j - \mu_{\xi_j}) + \frac{1}{2}\mathbf{u}_{,jk}(\xi_j - \mu_{\xi_j})(\xi_k - \mu_{\xi_k}) + o(\|\boldsymbol{\xi}\|^2) \quad (3.22)$$

où  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(\boldsymbol{\mu}_\xi)$ ,  $\mathbf{u}_{,j} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_j}(\boldsymbol{\mu}_\xi)$  et  $\mathbf{u}_{,jk} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi_j \partial \xi_k}(\boldsymbol{\mu}_\xi)$ . Nous appliquons ce même développement à la matrice  $\mathbf{A}$  et au second membre  $\mathbf{b}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\boldsymbol{\xi}) &= \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_{,j}(\xi_j - \mu_{\xi_j}) + \frac{1}{2}\mathbf{A}_{,jk}(\xi_j - \mu_{\xi_j})(\xi_k - \mu_{\xi_k}) + o(\|\boldsymbol{\xi}\|^2) \\ \mathbf{b}(\boldsymbol{\xi}) &= \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_{,j}(\xi_j - \mu_{\xi_j}) + \frac{1}{2}\mathbf{b}_{,jk}(\xi_j - \mu_{\xi_j})(\xi_k - \mu_{\xi_k}) + o(\|\boldsymbol{\xi}\|^2) \end{aligned} \quad (3.23)$$

En les injectant dans l'équation 3.18, on obtient alors

$$\begin{aligned} &(\mathbf{A}_0 \mathbf{u}_0 - \mathbf{b}_0) + (\mathbf{A}_0 \mathbf{u}_{,j} + \mathbf{A}_{,j} \mathbf{u}_0 - \mathbf{b}_{,j})(\xi_j - \mu_{\xi_j}) + \\ &(\frac{1}{2}\mathbf{A}_0 \mathbf{u}_{,jk} + \mathbf{A}_{,j} \mathbf{u}_{,k} + \frac{1}{2}\mathbf{A}_{,jk} \mathbf{u}_0 - \frac{1}{2}\mathbf{b}_{,jk})(\xi_j - \mu_{\xi_j})(\xi_k - \mu_{\xi_k}) + o(\|\boldsymbol{\xi}\|^2) = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Pour satisfaire cette égalité, les termes du premier membre doivent s'annuler, on doit donc avoir

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 \mathbf{u}_0 &= \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{A}_0 \mathbf{u}_{,j} &= \mathbf{b}_{,j} - \mathbf{A}_{,j} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{A}_0 \mathbf{u}_{,jk} &= \mathbf{b}_{,jk} - \mathbf{A}_{,j} \mathbf{u}_{,k} - \mathbf{A}_{,k} \mathbf{u}_{,j} - \mathbf{A}_{,jk} \mathbf{u}_0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

Les termes du développement de  $\mathbf{u}$  peuvent alors être obtenus en résolvant successivement ces systèmes linéaires. On notera que dans toutes les équations, c'est la matrice  $\mathbf{u}_0$  qui intervient dans le premier membre. Afin de minimiser les coûts de calculs liés à la résolution de ces systèmes linéaires, cette matrice peut être factorisée une seule fois.  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{b}$  sont des quantités connues, et les termes de leur développement peuvent être estimés soit analytiquement (directement ou par un code de calcul formel), soit numériquement par un code de calcul. Cependant, les gradients d'ordre élevé de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{b}$  sont difficiles à obtenir. La méthode est alors souvent limitée à l'ordre 2.

Cette méthode est classiquement utilisée pour estimer les premiers moments statistiques de la solution. Par exemple, la moyenne et la matrice de covariance s'écrivent

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{u}} &= \mathbf{u}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_{,jk}C_{\xi_j\xi_k} + o(\|\boldsymbol{\xi}\|^2) \\ \mathbf{C}_{\mathbf{u}} &= \mathbf{u}_{,j}\mathbf{u}_{,k}^T C_{\xi_j\xi_k} + \frac{1}{2}(\mathbf{u}_{,j}\mathbf{u}_{,kl}^T) + o(\|\boldsymbol{\xi}\|^2)\end{aligned}\quad (3.26)$$

où  $C_{\xi_j\xi_k}$  est la covariance des variables  $\xi_j$  et  $\xi_k$ . Les approximations du second ordre de ces quantités s'expriment alors

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{u}} &\approx \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{2}\mathbf{u}_{,jk}C_{\xi_j\xi_k} \\ \mathbf{C}_{\mathbf{u}} &\approx \mathbf{u}_{,j}\mathbf{u}_{,k}^T C_{\xi_j\xi_k}\end{aligned}\quad (3.27)$$

La méthode de développement de Taylor est attirante en raison de son efficacité en termes de temps de calcul et d'exactitude des premiers moments statistiques. En revanche, cela devient plus compliqué et coûteux en terme de temps pour des ordres plus élevés, on se limite alors à un faible ordre de décomposition (la moyenne et la covariance).

La méthode de décomposition de Neumann [Babuška et Chatzipantelidis, 2002, Ghanem et Spanos, 1991] consiste à chercher la solution  $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})$  à l'aide d'une décomposition de la forme

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_0(\mathbf{I} + \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{A}_1)\quad (3.28)$$

avec  $\mathbf{A}_0$  une matrice déterministe,  $\mathbf{A}_0^{-1}$  son inverse, et  $\mathbf{I}$  la matrice d'identité. On peut alors montrer que l'inverse de la matrice aléatoire  $\mathbf{A}$  s'écrit

$$\mathbf{A}^{-1} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p (\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{A}_1)^p \mathbf{A}_0^{-1}\quad (3.29)$$

En posant  $\mathbf{L} = \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{A}_1$ , l'équation précédente devient

$$\mathbf{A}^{-1} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \mathbf{L}^p \mathbf{A}_0^{-1}\quad (3.30)$$

Ceci nous permet d'écrire la solution du système  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$  sous la forme

$$\mathbf{u} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \mathbf{L}^p \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{b}\quad (3.31)$$

où les différents termes de la série sont obtenus en résolvant les systèmes suivants

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_0 &= \mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{u}_{p+1} &= -\mathbf{L}\mathbf{u}_p = -\mathbf{A}_0^{-1}\mathbf{A}_1\mathbf{u}_p, \quad \text{pour } p \geq 0\end{aligned}\quad (3.32)$$

Pour pouvoir déterminer ces termes, nous devons résoudre un certain nombre de problèmes déterministes. Cependant, le coût des calculs peut devenir prohibitif surtout pour des ordres élevés de développement de la série.

### 3.3.4 La représentation sur des bases de fonctions

La représentation sur des bases de fonctions consiste à rechercher la solution  $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})$  ou une quantité d'intérêt  $\mathcal{J}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}))$  sous la forme d'un développement en série qui s'exprime

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})) \approx \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_P} \mathcal{J}_\alpha H_\alpha(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.33)$$

où  $\mathcal{I}_P$  est un sous-ensemble de  $P$  indices dans  $\mathcal{I}$ ,  $\{H_\alpha(\boldsymbol{\xi})\}_{\alpha=1}^P$  désigne une certaine base connue de fonctions et où les  $\mathcal{J}_\alpha$  sont les coefficients à déterminer. L'obtention de la forme fonctionnelle de la solution nécessite de choisir une base de fonctions adaptée ainsi qu'une méthode de calcul des coefficients efficace. Il existe différentes options pour le choix des bases de fonctions, ces dernières seront discutées dans la section 3.4. En ce qui concerne le calcul de l'approximation, deux grandes familles se distinguent dans la littérature : les méthodes dites "non intrusives" (régression ou projection  $L^2$ ) et les méthodes dites "intrusives" de type Galerkin au niveau stochastique [Ghanem et Spanos, 1991, Babuška et Chleboun, 2002, Matthies et Keese, 2005].

#### 3.3.4.1 Méthode de Galerkin au niveau stochastique

Les approches de type Galerkin au niveau stochastique [Ghanem et Spanos, 1991, Babuška et Chleboun, 2002, Matthies et Keese, 2005] consistent à injecter l'espace d'approximation  $\mathcal{N}_{h,P}$  dans 3.5. La solution approchée  $\mathbf{u}_{h,P}$  est donc solution du problème suivant

$$A(\mathbf{u}_{h,P}, \mathbf{v}_{h,P}) = L(\mathbf{v}_{h,P}) \quad \forall \mathbf{v}_{h,P} \in \mathcal{N}_{h,P} \quad (3.34)$$

De plus, dans le cas où  $A$  est une forme bilinéaire coercive symétrique, l'approximation de Galerkin peut être vue comme une projection au sens de l'opérateur

$$\mathbf{u}_{h,P} = \underset{\mathbf{v}_{h,P} \in \mathcal{N}_{h,P}}{\operatorname{argmin}} \|\mathbf{v}_{h,P} - \mathbf{u}\|_A \quad (3.35)$$

où  $\mathbf{u}$  est la solution exacte du problème et  $\|\cdot\|_A$  la norme induite par  $A$ . Les coefficients de l'approximation de Galerkin  $\mathbf{u}_{h,P} \in \mathcal{N}_{h,P}$  sont alors solutions du système d'équations suivant

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{J}_P} E(H_\beta \mathbf{A} H_\alpha) \mathbf{u}_\alpha = E(\mathbf{b} H_\beta) \quad \forall \beta \in \mathcal{J}_P \quad (3.36)$$

où  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{b}$  sont respectivement la matrice éléments finis et le vecteur chargement aléatoires. La première étape consiste à décomposer ces quantités sur une base orthonormée  $\{H_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{J}}$  de  $\mathcal{S} = L^2(\boldsymbol{\Theta}, dP_\xi)$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{\gamma \in \mathcal{I}_A} \mathbf{A}_\gamma H_\gamma \quad \text{avec} \quad \mathbf{A}_\gamma = E(\mathbf{A} H_\gamma) \\ \mathbf{b} &= \sum_{\gamma \in \mathcal{I}_b} \mathbf{b}_\gamma H_\gamma \quad \text{avec} \quad \mathbf{b}_\gamma = E(\mathbf{b} H_\gamma) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Les coefficients de la décomposition de  $\mathbf{b}$  conduisent directement aux termes de droite du système 3.36 par orthonormalité des fonctions de base. Ces coefficients doivent être

donc calculés uniquement pour les indices  $\mathcal{I}_b = \mathcal{I}_P$ . Dans le système 3.36, les termes du membre de gauche peuvent s'écrire

$$E(\mathbf{A}H_\alpha H_\beta) = \sum_{\gamma \in \mathcal{I}_A} \mathbf{A}_\gamma E(H_\gamma H_\alpha H_\beta) \quad (3.38)$$

Lorsqu'on utilise des fonctions de base  $\{H_\alpha\}$  polynomiales, ou polynomiales par morceaux, si  $\mathcal{I}_P$  correspond aux polynômes de degré inférieur ou égal à  $p$ , les coefficients  $\mathbf{A}_\gamma$  doivent être seulement calculés pour l'ensemble des indices  $\mathcal{I}_A$  correspondant aux fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à  $2p$ , qui est le degré maximum du produit des polynômes  $H_\alpha$  et  $H_\beta$ . Ainsi,  $E(H_\gamma H_\alpha H_\beta) = 0$  pour  $\gamma \in (\mathcal{I}_P \setminus \mathcal{I}_A)$ . Avec ce choix, l'approximation de  $\mathbf{A}$  n'a pas d'influence sur la solution du problème discrétisé 3.36. On notera que, pour certains problèmes, si le degré  $p$  utilisé est assez élevé, on pourra utiliser un ordre moins élevé que  $2p$  pour la décomposition 3.37 : la matrice de rigidité  $\mathbf{A}$  sera alors approchée mais elle restera assez bien décomposée pour obtenir une bonne solution. Dans tous les cas, quel que soit l'ordre de décomposition choisi pour  $\mathbf{A}$ , on doit calculer efficacement les quantités  $E(H_\gamma H_\alpha H_\beta)$ . Ces quantités dépendent seulement de la base stochastique choisie et peuvent être facilement pré-calculées. De plus, si on choisit comme base d'approximation le chaos polynomial ou le chaos polynomial généralisé, une expression analytique de ces quantités est parfois disponible. Finalement, en notant  $\mathcal{I}_P = \{\alpha_1, \dots, \alpha_P\}$  et  $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_{\alpha_1}^T \cdots \mathbf{u}_{\alpha_P}^T)^T \in \mathbb{R}^{N \times P}$ , le système 3.5 peut s'écrire sous la forme d'un système d'équations par bloc

$$\mathbf{A}\mathbf{u} := \begin{pmatrix} E(\mathbf{A}H_{\alpha_1}H_{\alpha_1}) & \dots & E(\mathbf{A}H_{\alpha_1}H_{\alpha_P}) \\ \vdots & \ddots & \dots \\ E(\mathbf{A}H_{\alpha_P}H_{\alpha_1}) & \dots & E(\mathbf{A}H_{\alpha_P}H_{\alpha_P}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{\alpha_1} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{\alpha_P} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} E(\mathbf{b}H_{\alpha_1}) \\ \vdots \\ E(\mathbf{b}H_{\alpha_P}) \end{pmatrix} := \mathbf{b} \quad (3.39)$$

Ce système est un système linéaire de grande taille  $N \times P$  où  $N$  et  $P$  sont respectivement le nombre de degrés de liberté du modèle éléments finis et le nombre de fonctions de base stochastique. Des solveurs itératifs, tels qu'une méthode de gradient conjugué préconditionné pour des problèmes symétriques, peuvent être utilisés afin résoudre ce système [Demmel, 1997, Pellissetti et Ghanem, 2000, Matthies et Keese, 2005]. Ce type de solveur nécessite uniquement des produits matrice-vecteur. Il exploite bien la structure parfois creuse du système due à la structure creuse de la matrice éléments finis associée au problème déterministe.

Les approches de type Galerkin permettent généralement une bonne maîtrise de l'approximation notamment l'estimation d'erreur *a priori* [Deb *et al.*, 2001, Frauenfelder *et al.*, 2005], l'estimation d'erreur *a posteriori* et l'adaptativité [Ladeveze et Florentin, 2006, Mathelin et Le Maître, 2007]. Elles sont souvent beaucoup plus efficaces plus robustes que les approches directes. Néanmoins, elles nécessitent souvent une bonne connaissance des équations régissant le modèle physique et l'élaboration ou l'adaptation de solveurs spécifiques pour une classe de problèmes donnée.

### 3.3.4.2 Méthode de projection

La méthode de projection  $L^2$  est une méthode d'intégration directe qui consiste à considérer la solution de 3.33 comme la projection de  $\mathcal{J}$  sur le sous espace  $L^2(\Theta, dP_\xi)$ . L'approximation  $\mathbf{u}_P = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_P} \mathbf{u}_\alpha H_\alpha$  est alors définie par

$$\ll \mathbf{u}_P, \mathbf{v}_P \gg_{L^2(\Theta, dP_\xi)} = \ll \mathbf{u}, \mathbf{v}_P \gg_{L^2(\Theta, dP_\xi)} \quad \forall \mathbf{v}_P \in \{\mathcal{S}_P \otimes \mathbb{R}^N\} \quad (3.40)$$

au sens du produit scalaire suivant

$$\ll \mathbf{u}_P, \mathbf{v}_P \gg_{L^2(\Theta, dP_\xi)} = E(\mathbf{v}_P^T \mathbf{u}_P) \quad \forall \mathbf{v}_P \in \{\mathcal{S}_P \otimes \mathbb{R}^N\} \quad (3.41)$$

Les composantes de l'approximation peuvent alors s'écrire sous la forme

$$\mathbf{u}_\alpha = \int_{\Theta} H_\alpha(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) dP_\xi(\mathbf{x}) = E(H_\alpha \mathbf{u}) \quad (3.42)$$

On peut alors, grâce à des techniques d'intégration numérique estimer cette espérance

$$\mathbf{u}_\alpha \approx \sum_{k=1}^M \omega_k H_\alpha(\boldsymbol{\xi}_k) \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}_k) \quad (3.43)$$

où les  $\boldsymbol{\xi}_k \in \Theta$  et les  $\omega_k \in \mathbb{R}$  sont respectivement les points et les poids d'intégration associés.

Cette méthode nécessite la résolution de  $M$  problèmes déterministes pour calculer les quantités  $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}_k)$ , associées à des réalisations particulières  $\boldsymbol{\xi}_k$ . On parle dans ce cas de méthode de projection "non-intrusive" car le calcul nécessite uniquement l'utilisation de codes déterministes. Ce type de méthodes est relativement facile à mettre en place. Cependant, il peut s'avérer très coûteux dans le cas où le nombre de points d'intégration est élevé. On peut dans ce cas utiliser des techniques basées sur des quadratures creuses pour le réduire [Smolyak, 1963, Matthies et Keese, 2005].

### 3.3.4.3 Méthode de régression

La méthode de régression [Choi *et al.*, 2004b, Choi *et al.*, 2004a, Sudret, 2008], appelée aussi méthode de minimisation aux sens des moindres carrés, est une approche probabiliste non intrusive. Elle consiste à approcher la réponse  $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})$  ou une quantité d'intérêt  $\mathcal{J}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}))$  d'un modèle numérique à l'aide d'une surface de réponse de sorte que cette dernière coïncide avec la réponse du modèle sur un ensemble fini de valeurs. Les coefficients de la décomposition sont définis dans ce cas par un problème d'optimisation de la forme

$$\{\mathcal{J}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}_P} = \underset{\{\mathcal{J}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}_P}}{\operatorname{argmin}} \sum_{k=1}^M \omega_k \|\mathcal{J}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}_k)) - \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_P} \mathcal{J}_\alpha H_\alpha(\boldsymbol{\xi}_k)\|^2 \quad (3.44)$$

où les  $\boldsymbol{\xi}_k$  sont les points de la régression et  $\omega_k$  ses poids. On note  $\mathbf{J} = (\mathcal{J}_{\alpha_1}, \dots, \mathcal{J}_{\alpha_P})$  l'ensemble des coefficients à déterminer, le problème d'optimisation revient à résoudre le

système linéaire

$$\mathbf{G}\mathbf{J} = \mathbf{g}, \quad (\mathbf{G})_{ij} = \sum_{k=1}^M \omega_k H_{\alpha_i}(\xi_k) H_{\alpha_j}(\xi_k) \quad (\mathbf{g})_j = \sum_{k=1}^M \omega_k H_{\alpha_j}(\xi_k) \mathcal{J}(\mathbf{u}(\xi_k)) \omega_k \quad (3.45)$$

Nous avons donc besoin de résoudre  $M$  problèmes déterministes pour pouvoir déterminer le second membre de ce système. Cependant, le choix des points et poids de régression demande une attention particulière car il conditionne la régularité de la fonction  $\mathcal{J}$ . Ainsi, plusieurs choix ont été proposés dans la littérature comme le tirage de Monte-Carlo/Quasi-Monte-Carlo ou les quadratures de Gauss [Berveiller, 2005, Blatman et Sudret, 2008, Blatman, 2009].

### 3.4 Représentation fonctionnelle des variables aléatoires sur le chaos polynomial

La représentation fonctionnelle d'une variable aléatoire consiste à rechercher la solution  $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})$  ou une quantité d'intérêt  $\mathcal{J}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}))$  sous la forme d'un développement en série pouvant s'écrire

$$\mathcal{J}(\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi})) \approx \sum_{\alpha=1}^P \mathcal{J}_\alpha H_\alpha(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.46)$$

où  $\{H_\alpha(\boldsymbol{\xi})\}_{\alpha=1}^P$  désigne une certaine base connue de fonctions où les  $\mathcal{J}_\alpha$  sont les coefficients à déterminer. Dans de nombreux problèmes physiques, les quantités d'intérêt sont des variables aléatoires du second ordre ce qui conduit à choisir la base  $L^2(\Theta, dP_\boldsymbol{\xi})$ . L'obtention de la forme fonctionnelle de la solution nécessite de choisir une base de fonction adaptée ainsi qu'une méthode de calcul des coefficients efficace.

Il existe différentes méthodes de représentation fonctionnelle d'une variable aléatoire telle que les éléments finis au niveau stochastique [Deb *et al.*, 2001, Wan et Karniadakis, 2005], la décomposition en multi-ondelettes [Le Maître *et al.*, 2004b, Le Maître *et al.*, 2004a] ou la décomposition sur le chaos polynomial [Wiener, 1938, Cameron et Martin, 1947]. Cette dernière méthode est une construction particulière de la base où les fonctions  $H_\alpha$  sont des polynômes multi-dimensionnels orthonormés. De plus, dans le cas où  $\boldsymbol{\xi}$  est un vecteur de variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes, la base  $\{H_\alpha(\boldsymbol{\xi})\}_{\alpha=1}^P$  est composée par des polynômes d'Hermite orthonormés [Wiener, 1938, Ghanem et Spanos, 1991]. Ce vecteur vérifie  $E(\xi_i) = 0$ ,  $E(\xi_i^2) = 1$  et  $E(\xi_i \xi_j)_{i \neq j} = 0$ . La densité de probabilité  $p_\boldsymbol{\xi}$  n'est autre que la densité normale canonique donnée par

$$p_\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}{2}\right) = \varphi(x_1) \times \dots \times \varphi(x_m) \quad (3.47)$$

où  $\varphi(x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ . Les polynômes orthogonaux de  $L^2(\mathbb{R}, \varphi(x)dx)$  sont les polynômes d'Hermite  $\{h_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$ . La figure 3.5 illustre trois fonctions de base du chaos polynomial d'Hermite en dimension  $m = 2$ .

### 3.4. Représentation fonctionnelle des variables aléatoires sur le chaos polynomial

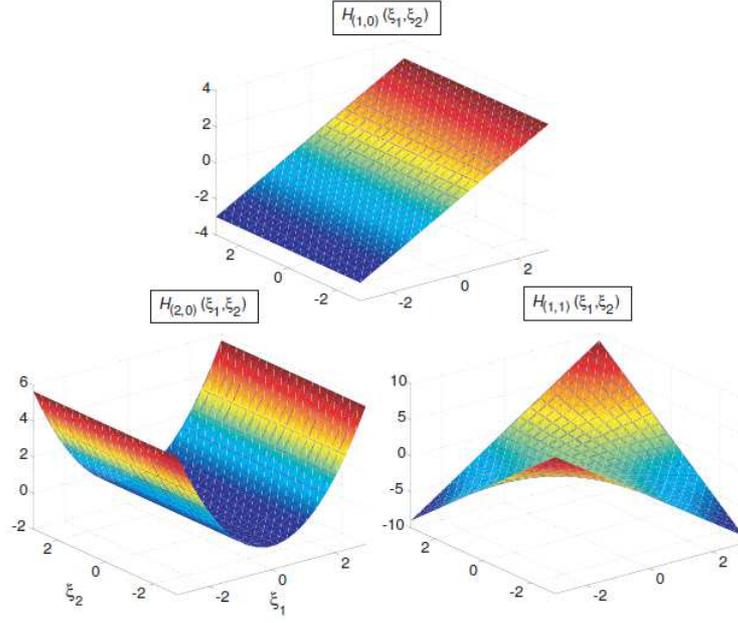


FIGURE 3.5 – Exemples de polynômes d’Hermite en dimension 2. [Clement, 2008].

Ces polynômes d’Hermite normalisés vérifient

$$\int_{\mathbb{R}} h_i(x)h_j(x)\varphi(x)dx = \delta_{ij} \quad (3.48)$$

On construit alors les polynômes d’Hermite multi-dimensionnels de la forme

$$H_{\alpha}(\mathbf{x}) = h_{\alpha_1}^{(1)}(x_1) \times \dots \times h_{\alpha_m}^{(m)}(x_m) \quad (3.49)$$

qui constituent bien une famille orthonormée de polynômes multi-dimensionnels. L’espace d’approximation stochastique  $\mathcal{S}_p$  peut alors s’écrire

$$\mathcal{S}_p = span\{H_{\alpha}(\mathbf{x}), |\alpha| \leq p\} \quad (3.50)$$

où  $p$  est l’ordre maximal du chaos polynomial. On notera que le nombre de fonctions de base est  $P = \frac{(m+p)!}{m!p!}$ .

Dans le cas où les variables aléatoires de base sont indépendantes mais non gaussiennes, on parle de chaos polynomial généralisé [Xiu et Karniadakis, 2002] et l’espace  $\mathcal{S}_p$  est toujours défini par l’équation 3.50 mais les familles de polynômes orthogonaux varient. Le tableau 3.1 présente les familles de polynômes orthogonaux pour différentes lois de probabilité classiques.

On se place dans le cas où  $\boldsymbol{\xi}$  est un vecteur de variables aléatoires dépendantes [Soize et Ghanem, 2004]. On considère  $P_{\boldsymbol{\xi}}$  une loi à densité et  $H_{\alpha}^*(\mathbf{x})$  une base de polynômes orthonormés pour la mesure  $dP_{\xi_1}(x_1) \times \dots \times dP_{\xi_m}(x_m)$ . On se donne alors la base de

loi de $\xi$	support $\Theta$	densité $p_\xi(x)$	famille de polynômes
Normale	$\mathbb{R}$	$(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \exp(-x)$	Hermite
Uniforme	$[-1,1]$	$\frac{1}{2}$	Legendre
Gamma	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-x)$	Laguerre
Beta	$[-1,1]$	$\frac{(1+x)^{a-1} (1-x)^{b-1}}{B(a,b) 2^{a+b-1}}$	Jacobi

Tableau 3.1 – Exemples de polynômes orthogonaux pour différentes lois de probabilité.

fonction  $H_\alpha$  définie par

$$H_\alpha(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{p_{\xi_1}(x_1) \times \dots \times p_{\xi_m}(x_m)}{p_\xi(\mathbf{x})}} H_\alpha^*(\mathbf{x}) \quad (3.51)$$

On a donc

$$\begin{aligned} \langle H_\alpha, H_\beta \rangle &= \int_{\mathbb{R}^m} H_\alpha(\mathbf{x}) H_\beta(\mathbf{x}) p_\xi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} H_\alpha^*(\mathbf{x}) H_\beta^*(\mathbf{x}) p_{\xi_1}(x_1) \times \dots \times p_{\xi_m}(x_m) d\mathbf{x} = \delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (3.52)$$

La base obtenue de fonctions  $H_\alpha$  n'est cependant pas une base de polynômes. On parle alors de décomposition généralisée sur le chaos polynomial.

### 3.5 Aspects techniques

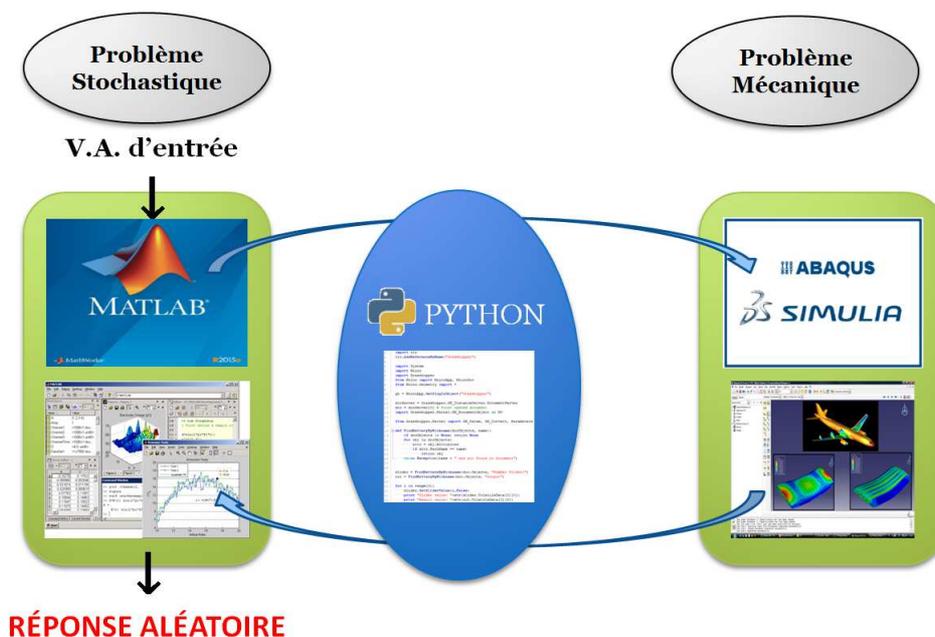


FIGURE 3.6 – Principe général du calcul mécano-probabiliste.

Avant de passer à l'illustration de l'approche adoptée, il est nécessaire de souligner le travail important qui a été réalisé pour la mise en place de toute une procédure de couplage

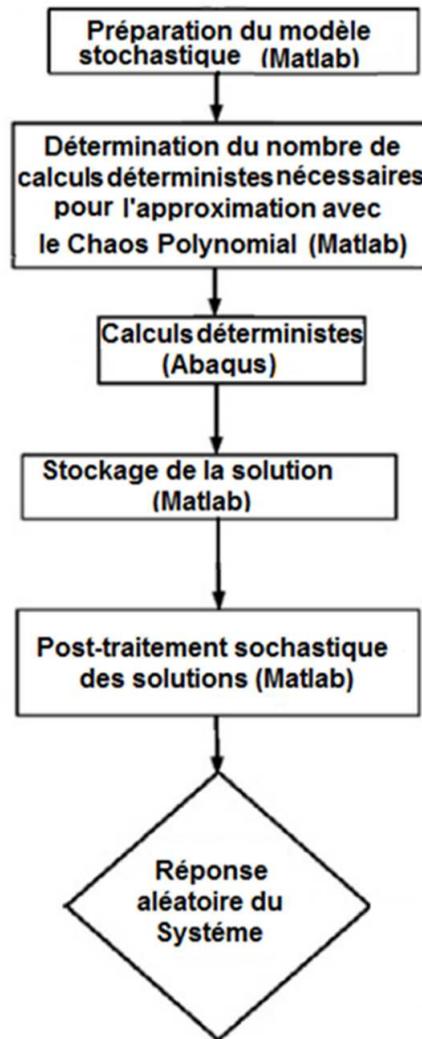


FIGURE 3.7 – Schéma de la procédure de calcul de la réponse stochastique du système.

du logiciel Matlab<sup>®</sup>, pilotant la partie probabiliste, et du logiciel éléments finis Abaqus<sup>®</sup>, permettant de résoudre le problème mécanique. La communication entre ces deux logiciels se fait via des scripts Python. La figure 3.6 résume le principe général de cette opération.

La première étape qui concerne la modélisation stochastique du problème permet de définir le contenu probabiliste du problème décrit, par exemple, par un ensemble de variables aléatoires définies par leurs lois de probabilité. En fonction de ce modèle, nous définissons les paramètres de l'approximation comme le degré maximal des polynômes de chaos ainsi que les choix nécessaires au calcul de la représentation fonctionnelle (points et poids d'intégration). La deuxième étape consiste à propager ces incertitudes afin d'obtenir la réponse du système étudié en fonction des variables aléatoires de base du problème. Pour cela, l'ensemble des calculs déterministes correspondants à des réalisations particulières des paramètres aléatoires d'entrée est réalisé avec le logiciel de calcul EF Abaqus<sup>®</sup>. Cette

étape importante est entièrement automatisée à l'aide de scripts Python qui créent la géométrie du problème et définissent les propriétés matérielles et les conditions aux limites du problème. Les résultats sont alors transmis à Matlab<sup>®</sup>, également sous forme de scripts python, qui détermine la décomposition sur le chaos polynomial (valeurs des coefficients du chaos). La solution stochastique désormais obtenue, il est possible de la post-traiter afin d'obtenir des statistiques ou des lois de probabilité sur les quantités d'intérêt ciblées.

Pour récapituler, Matlab<sup>®</sup> joue ici le rôle du logiciel maître alors qu'Abaqus<sup>®</sup> fonctionne en esclave, et python sert simplement de moyen de communication entre les deux. Le schéma figure 3.7 résume cette procédure.

## 3.6 Exemple pour un matériau composite avec un chargement aléatoire

Dans cette partie, on se propose d'illustrer l'approche que nous avons choisi d'utiliser dans le cadre de ce mémoire à travers un exemple simple. Nous allons, dans un premier temps, commencer par la présentation de l'exemple considéré ainsi que le cadre de cette étude. On proposera alors une comparaison de l'approche spectrale stochastique à la technique de Monte-Carlo afin de montrer son efficacité.

### 3.6.1 Présentation du problème

On considère une plaque  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  constitué d'un matériau homogène élastique isotrope avec un module de Young  $E = 15$  GPa et un coefficient de poisson  $\nu = 0.33$ . La taille caractéristique de cette plaque est de  $70$  mm. Cette plaque est sollicitée en traction simple sur le bord  $\Gamma_1$ , et une condition d'encastrement est imposée sur le bord inférieur  $\Gamma_2$  (cf. figure 3.8).

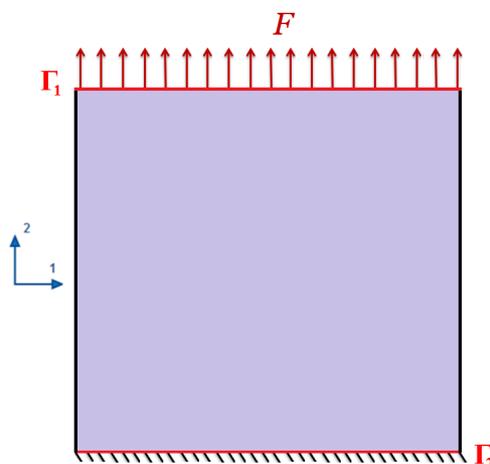


FIGURE 3.8 – Géométrie et conditions aux limites du problème de chargement aléatoire.

### 3.6. Exemple pour un matériau composite avec un chargement aléatoire

L'objectif de cette étude est de comparer les solutions aléatoires obtenues avec la technique de Monte-Carlo et la méthode de décomposition spectrale. Le chargement est modélisé avec une variable aléatoire uniforme de telle sorte que  $F \in U(5 \text{ MPa}, 20 \text{ MPa})$ . Dans un premier temps, le calcul probabiliste est basé sur la technique de Monte-Carlo (M-C) avec 10000 réalisations. Nous utilisons également une approximation sur le chaos polynomial (CP) calculée avec la méthode de projection L2. Nous adoptons un chaos polynomial généralisé pour deux ordres différents,  $p = 2$  et  $p = 3$ , afin de montrer la convergence de l'approximation stochastique. La base de fonctions est ainsi composée des polynômes de Legendre. Le calcul des coefficients du chaos polynomial des différentes solutions est réalisé à partir de 5 calculs déterministes pour l'ordre  $p = 2$  et à partir de 7 calculs déterministes pour l'ordre  $p = 3$  afin d'intégrer au mieux ces coefficients ; une intégration propre basée sur un polynôme de degré  $p$  nécessite en effet  $2p + 1$  points d'intégration. Nous pouvons ainsi comparer les deux approches et montrer l'efficacité des approches spectrales dans le cas d'un problème modélisé avec une seule variable aléatoire. Pour l'approximation spatiale, nous utilisons un maillage d'éléments finis composé d'éléments triangulaires linéaires à 3 nœuds constitué de 9800 éléments. Il convient de noter que la convergence spatiale a été vérifiée afin de fournir des résultats précis dans ce qui suit.

#### 3.6.2 Résultats numériques et discussion

Les figures 3.9 et 3.10 représentent les surfaces de réponses, les densités de probabilité (PDF) et les fonctions de répartition pour, respectivement, la contrainte  $\sigma_{22}^{max}$  et le déplacement  $u_2^{max}$ .

Pour la surface de réponse de  $\sigma_{22}^{max}$ , les courbes obtenues avec M-C et le CP d'ordre 2 et 3 ont la même allure. En effet, elles sont bien toutes linéaires puisque le problème est lui-même posé dans le cadre de l'élasticité linéaire. En revanche, pour la PDF, les résultats obtenus entre les deux approches sont légèrement différents. On remarque toutefois que chacune des solutions conduit à une loi uniforme pour  $\sigma_{22}^{max}$ . Ce comportement s'explique à la fois par la linéarité du problème (*cf.* figure 3.9(a)) et par la loi uniforme représentant le chargement  $F$ . On notera que si on avait choisi une autre loi, normale ou autre, ou, si on avait plusieurs paramètres aléatoires en entrée, nous aurions obtenu une loi différente pour  $\sigma_{22}^{max}$ . Les écarts observés entre les PDF s'expliquent par le "faible" nombre de tirages avec la technique de Monte-Carlo (10000 réalisations), pour lequel il n'est pas possible d'obtenir une PDF aussi régulière que celle issue de l'approximation sur le chaos polynomial. Enfin, pour les fonctions de répartition, on observe une bonne concordance entre les deux approches. En effet, cette fonction, de par sa nature cumulative, tend à lisser les résultats et conduit donc, pour la technique de Monte-Carlo, à une représentation presque aussi régulière que celle obtenue avec le chaos polynomial.

On constate sur la figure 3.10, où les résultats pour le déplacement  $u_2^{max}$  sont présentés, les mêmes comportements avec un bon accord entre les deux approches pour les surfaces de réponse et les CDF, mais avec des écarts sur les PDF provenant du nombre de tirages

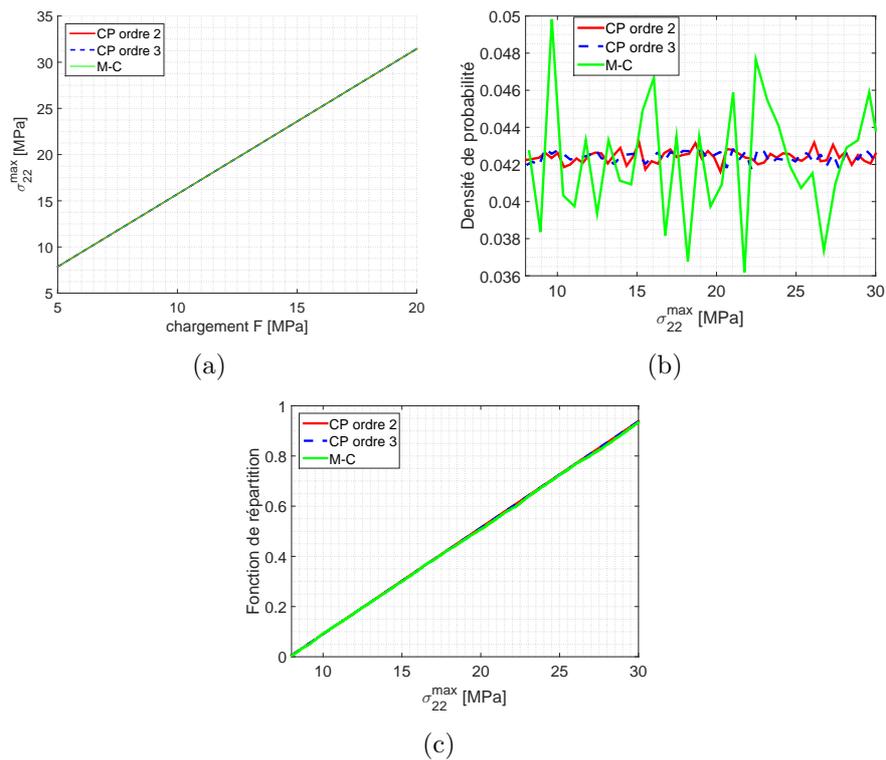


FIGURE 3.9 – (a) Surface de réponse de la contrainte locale  $\sigma_{22}^{max}$  en fonction du chargement  $F$  (b) fonction de densité de probabilité de  $\sigma_{22}^{max}$  (c) fonction de répartition de  $\sigma_{22}^{max}$

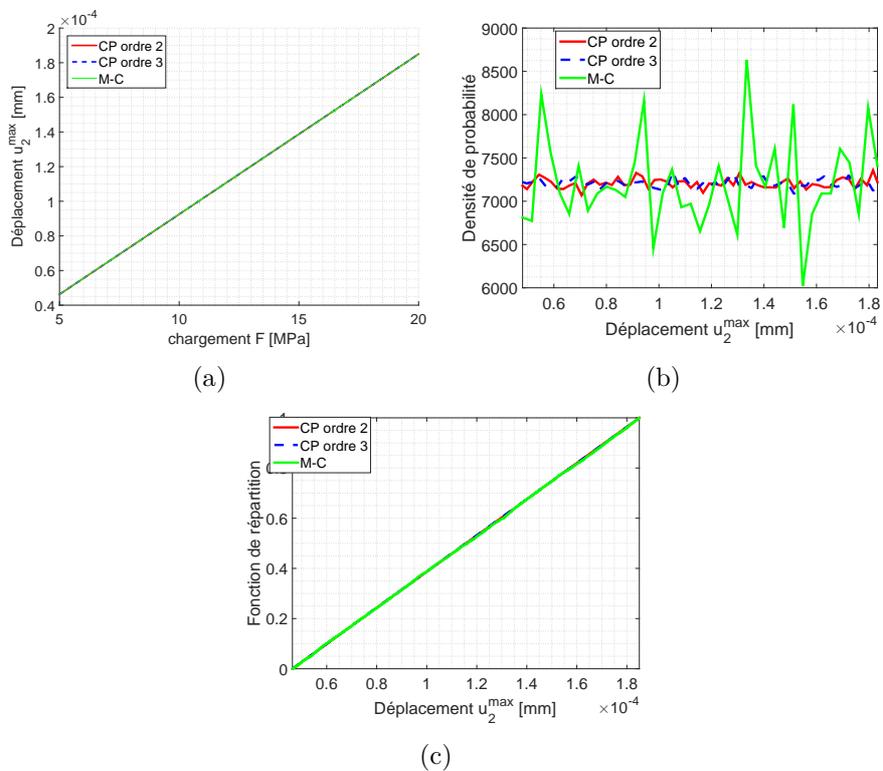


FIGURE 3.10 – (a) Surface de réponse du déplacement  $u_2^{max}$  en fonction du chargement  $F$  (b) fonction de densité de probabilité de  $u_2^{max}$  (c) fonction de répartition de  $u_2^{max}$  .

### **3.6. Exemple pour un matériau composite avec un chargement aléatoire**

trop faible avec la méthode de Monte-Carlo. En conclusion, nous avons montré dans le cas d'un problème linéaire avec une seule variable aléatoire en entrée le bon comportement des approches spectrales au regard de la technique de Monte-Carlo. Nous avons même observé, dans ce cas, des résultats plus précis avec l'approximation sur le chaos polynomial. De plus, il est important de noter que très peu d'appels au code de calculs déterministe ont été nécessaires pour obtenir cette approximation. En revanche, il est important de rappeler que pour des cas où la dimension stochastique est plus élevée, le nombre de calculs déterministes augmente fortement et l'approche peut perdre son attractivité par rapport à la technique de Monte-Carlo dont la convergence est indépendante de la dimension stochastique. Pour ce type de problème, il faudra se tourner vers les améliorations des méthodes de calcul de la solution proposée en grande dimension stochastique.

### 3.7 Conclusion intermédiaire

Ce chapitre nous a permis d'introduire le cadre stochastique de l'étude. Nous avons présenté, de manière non exhaustive, différentes approches probabilistes pour la prise en compte d'incertitudes dans le calcul de structures telles que les approches fiabilistes ou les représentations fonctionnelles. Nous nous sommes principalement focalisé sur les approches spectrales basées sur une approximation sur le chaos polynomial. Ces approches conduisent à une caractérisation complète de la solution aléatoire permettant de déterminer les différents moments statistiques ou les lois de probabilité des quantités d'intérêt souhaitées. Nous avons expliqué qu'il existait plusieurs techniques de calcul pouvant être classées sous les appellations intrusive et non-intrusive. Les approches intrusives, comme la projection de Galerkin, permettent de se placer dans un cadre mathématique bien maîtrisé mais demandent des modifications lourdes du code de calcul existant. Nous avons donc opté pour la méthode non-intrusive de projection L2 qui permet d'obtenir une bonne solution stochastique sans avoir à modifier le code de calcul déterministe.

Nous avons alors également exposé les aspects techniques de ces travaux en présentant la procédure mise en place pour le couplage du logiciel Matlab<sup>®</sup>, pilotant la partie stochastique du calcul, et le logiciel éléments finis Abaqus<sup>®</sup> fournissant lui la réponse mécanique pour des réalisations des variables aléatoires d'entrée.

Enfin, nous avons proposé une application illustrative de la modélisation probabiliste retenue. Nous avons ainsi présenté un exemple s'appuyant sur un modèle mécanique simple afin de montrer la qualité de la solution obtenue avec les approches spectrales stochastiques. Pour cela, nous avons comparé ces résultats avec ceux issus de la technique de Monte-Carlo. Nous avons montré que l'approximation sur le chaos polynomial conduisait à une solution de très bonne qualité et permettait, dans le cas d'un faible nombre de variables aléatoires, de réduire le nombre d'appels au code déterministe et ainsi de diminuer significativement les temps de calculs.

Le chapitre suivant est donc dédié aux études probabilistes réalisées dans le cadre du projet SIMSCEF ayant pour but de quantifier l'impact des incertitudes observées sur les défauts de porosités et de plissement pouvant apparaître dans les matériaux composites.

# Chapitre 4

## Études numériques des défauts de porosités et de plissement dans un cadre incertain

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction du chapitre</b>	<b>92</b>
<b>4.2</b>	<b>Études du défaut de porosités</b>	<b>92</b>
4.2.1	Application 1 : étude d'un composite UD [90°] avec taux de porosités aléatoire	92
4.2.1.1	Présentation du problème stochastique	92
4.2.1.2	Analyse du comportement mécanique à l'échelle microscopique	93
4.2.1.3	Calculs des propriétés apparentes par homogénéisation numérique	98
4.2.1.4	Comparaison des approches hétérogène et homogène équivalente	100
4.2.2	Application 2 : étude des macroporosités aléatoire à l'échelle d'un pli UD [90°]	101
4.2.2.1	Présentation du problème stochastique	101
4.2.2.2	Résultats de l'étude macroscopique	102
<b>4.3</b>	<b>Études du défaut de plissement</b>	<b>107</b>
4.3.1	Études d'un composite stratifié avec géométries de plissement aléatoires	107
4.3.1.1	Présentation du problème stochastique	107
4.3.1.2	Application 1 : étude du comportement d'un composite avec un plissement à géométrie aléatoire	107
4.3.1.3	Application 2 : étude du comportement d'un composite avec plusieurs plissements à géométries aléatoires	114
4.3.2	Bilan des études réalisées	120
<b>4.4</b>	<b>Conclusion intermédiaire</b>	<b>121</b>

---

## 4.1 Introduction du chapitre

Ce chapitre est consacré à la présentation des études numériques stochastiques réalisées dans le cadre de ces travaux. Nous allons notamment reprendre les études déterministes menées dans le chapitre 2 en prenant en compte l'aléa sur les défauts de porosités et de plissement.

La première partie de ce chapitre est consacrée au défaut de porosités. Les paramètres aléatoires d'entrée permettent dans ce cas de caractériser la géométrie des vides modélisant les porosités et leurs distributions spatiales. On cherchera alors à déterminer l'impact de l'aléa de ces paramètres sur la tenue mécanique de la structure à différentes échelles.

La deuxième partie est dédiée au défaut de plissement. Nous utilisons une représentation paramétrique de la géométrie du plissement où sa hauteur et sa largeur sont modélisées par des variables aléatoires indépendantes. Nous proposons donc une analyse de l'influence de ces paramètres, à travers deux exemples numériques, sur les quantités mécaniques locales telles que les champs de contraintes et les critères d'endommagement locaux.

## 4.2 Études du défaut de porosités

### 4.2.1 Application 1 : étude d'un composite UD [90°] avec taux de porosités aléatoire

#### 4.2.1.1 Présentation du problème stochastique

Pour cette première application, nous proposons une étude numérique impliquant la porosité aléatoire. Nous nous plaçons dans un premier temps à l'échelle microscopique, où nous considérons un matériau composite constitué d'une résine époxy et renforcé avec des fibres de verre avec une fraction volumique de 50%. Nous allons reprendre l'exemple déterministe présenté dans la partie 2. Nous travaillerons avec la même microstructure que celle définie dans la section 2.3.1 (*cf.* figure 4.1(a)). Les propriétés des matériaux constitutifs de cette microstructure sont résumées dans le tableau 4.1.

	$E$ [GPa]	$\nu$
<i>résine époxy</i>	3	0.3
<i>fibres de verre</i>	72	0.33

Tableau 4.1 – Propriétés élastiques de la cellule.

Les porosités sont représentées par des vides dans la matrice et leur taux est modélisé avec une variable aléatoire. Les données expérimentales issue de la thèse d'Edouard Gauthier [Gauthier, 2017] ont permis d'identifier cette variable aléatoire en se basant sur des tests statistiques. La loi log-normale semble être une bonne candidate, comme le montre la figure 4.1(b) avec une moyenne  $\mu = 4.63\%$  et un écart-type  $\sigma = 1,65\%$  conduisant à un coefficient de variation  $\text{CoV} = \frac{\sigma}{\mu} = 35.7$ . L'espace d'approximation stochastique est basé sur un chaos polynomial (CP) d'ordre  $p = 2$  composé de polynômes d'Hermite. Pour

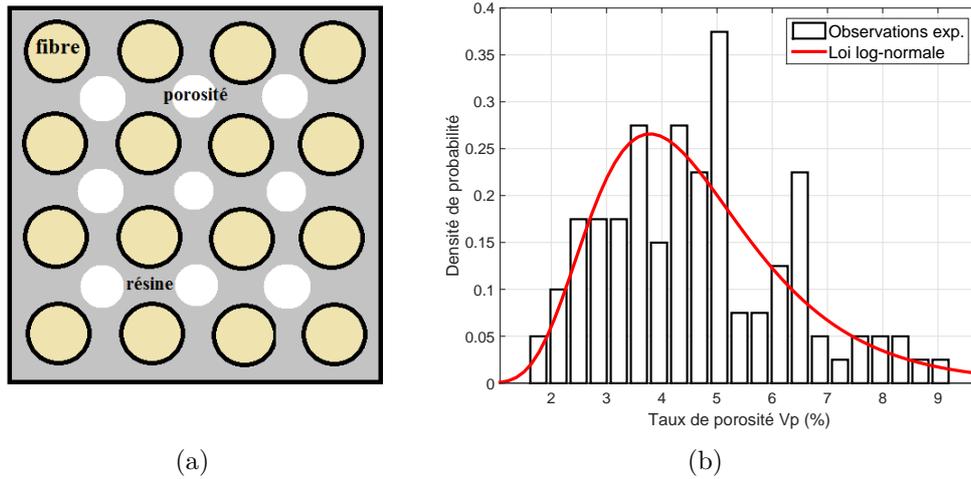


FIGURE 4.1 – (a) Illustration de la microstructure pour le problème de porosités (b) fonction de densité de probabilité (PDF) du taux de porosités.

l'approximation spatiale, nous utilisons un maillage d'éléments finis composé d'éléments triangulaires linéaires à 3 nœuds. Le nombre d'éléments varie suivant le taux de porosités dans la microstructure, mais la taille caractéristique des mailles reste la même. Il convient de noter que les convergences spatiale et stochastique ont été vérifiées afin de fournir des résultats précis dans ce qui suit. Ainsi, le calcul des coefficients du chaos polynomial par la technique de projection L2 est réalisé à partir de 5 calculs déterministes.

#### 4.2.1.2 Analyse du comportement mécanique à l'échelle microscopique

Nous allons donc commencer par une étude numérique stochastique à l'échelle microscopique. Nous considérons la microstructure d'un composite unidirectionnel  $[0^\circ]$  telle que nous l'avons définie dans le paragraphe précédent. Les conditions aux limites utilisées pour cette étude sont illustrées sur la figure 4.2 avec une déformation imposée égale à 0.5% sur le bord  $\Gamma_2$  et un encastrement sur le bord inférieur  $\Gamma_1$ .

L'objectif de cette étude est de déterminer l'influence de l'aléa du taux de porosités sur le comportement mécanique du composite. Les résultats des calculs probabilistes sont illustrés sur les figures 4.3, 4.4 et 4.5.

La figure 4.3 représente la surface de réponse, la fonction de densité de probabilité (PDF) et la fonction de répartition (CDF) de la contrainte  $|\sigma_{11}^{min}|$ . La surface de réponse permet d'analyser le comportement paramétrique de  $|\sigma_{11}^{min}|$  en fonction des variables aléatoires d'entrée tandis que les PDF et CDF permettent de calculer des probabilités d'événements particuliers comme le dépassement d'une certaine valeur seuil.

On observe sur la figure 4.3(b) que le niveau de contrainte diminue avec l'augmentation du taux de porosité. Nous avons également un bon accord entre les calculs éléments finis et l'approximation stochastique. La PDF de  $|\sigma_{11}^{min}|$ , présentée sur la figure 4.3(b), montre que nous avons une faible probabilité d'avoir un niveau de contrainte

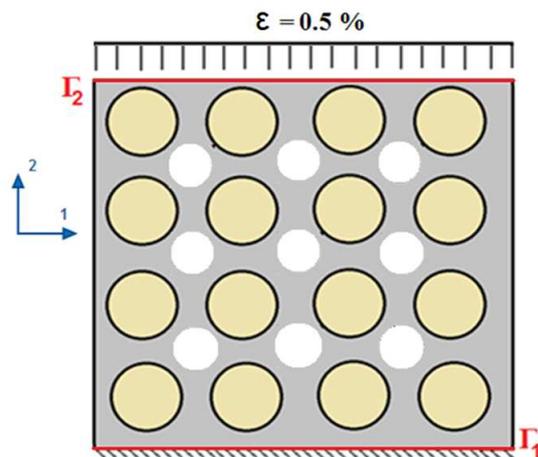


FIGURE 4.2 – Géométrie et conditions aux limites pour le problème de porosités à l'échelle microscopique.

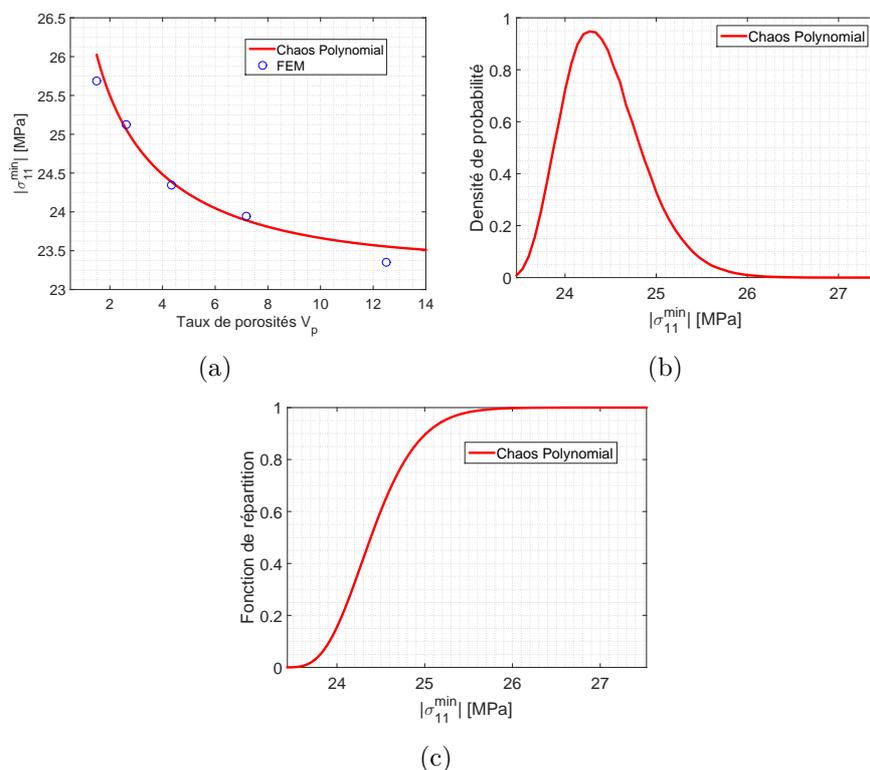


FIGURE 4.3 – (a) Surface de réponse de la contrainte  $|\sigma_{11}^{min}|$  en fonction du taux de porosités  $V_p$  (b) fonction de densité de probabilité (PDF) de  $|\sigma_{11}^{min}|$  (c) fonction de répartition (CDF) de  $|\sigma_{11}^{min}|$ .

supérieur à 26 MPa et nous pouvons déterminer à partir de la CDF figure 4.3(c) que  $P(|\sigma_{11}^{min}| \geq 26 \text{ MPa}) = 0.004$ . Le coefficient de variation de cette quantité est égal à 1.78%, qui est une valeur assez faible comparée à celle que nous avons pour le taux de porosités d'entrée (35.7%).

Nous considérons maintenant la contrainte  $\sigma_{22}^{max}$  (contrainte dans la direction de la sollicitation). La figure 4.4 représente la surface de réponse, la fonction de densité de proba-

## 4.2. Études du défaut de porosités

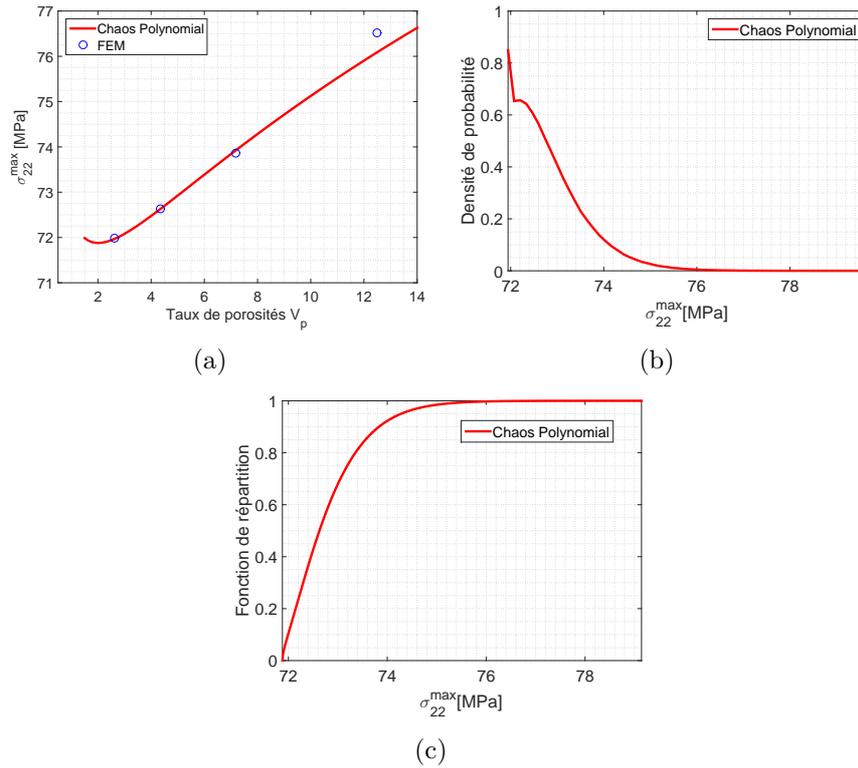


FIGURE 4.4 – (a) Surface de réponse de la contrainte  $\sigma_{22}^{max}$  en fonction du taux de porosités (b) fonction de densité de probabilité (PDF) de  $\sigma_{22}^{max}$  (c) fonction de répartition (CDF).

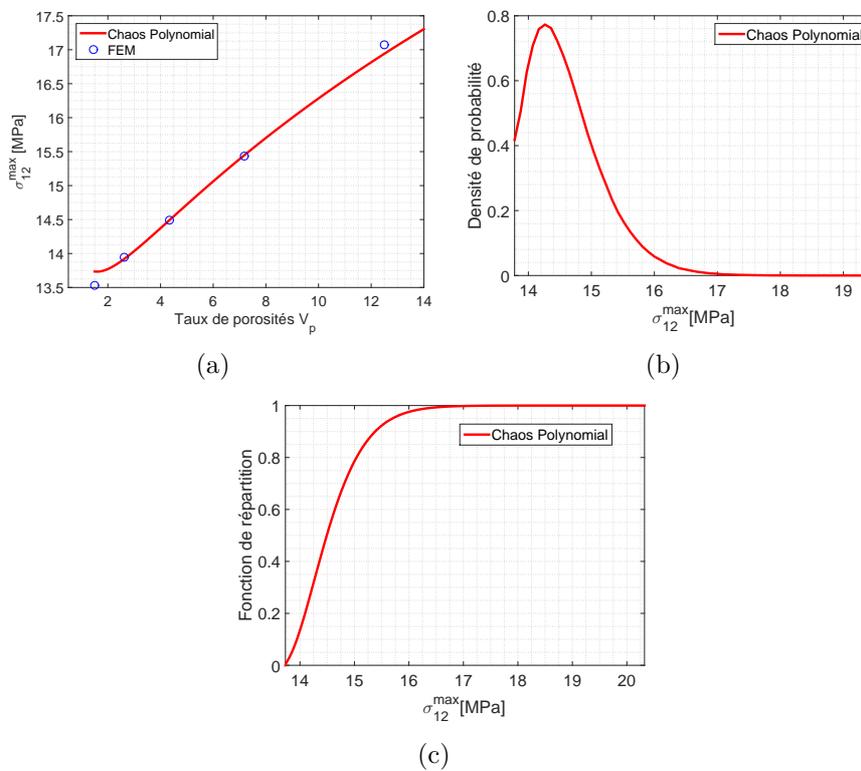


FIGURE 4.5 – (a) Surface de réponse de la contrainte  $\sigma_{12}^{max}$  en fonction du taux de porosités (b) fonction de densité de probabilité (PDF) de  $\sigma_{12}^{max}$  (c) fonction de répartition (CDF).

bilité (PDF) et la fonction de répartition (CDF) de la contrainte maximale locale  $\sigma_{22}^{max}$ . Comme prévu, la surface de réponse figure 4.4(a) indique que le niveau de contrainte augmente proportionnellement au taux de porosité. Il est à noter que nous avons ici aussi un bon accord entre l'approximation obtenue avec le chaos polynomial et les calculs éléments finis ayant servis au calcul de la décomposition. La PDF et la CDF de  $\sigma_{22}^{max}$  permettent d'obtenir la probabilité d'obtenir un niveau de contrainte supérieur à 75 MPa avec  $P(\sigma_{22}^{max} \leq 75 \text{ MPa}) = 0.04$ . Le coefficient de variation de cette quantité révèle une faible variabilité comparée à celle en entrée avec un CoV = 1.74% presque identique à celui déterminé pour la contrainte  $\sigma_{11}^{max}$ .

La figure 4.5 représente la surface de réponse, la fonction de densité de probabilité (PDF) et la fonction de répartition (CDF) de la contrainte  $\sigma_{12}^{max}$  (contrainte de cisaillement). La figure 4.5(a) montre que nous avons un bon accord entre les deux approches (calculs éléments finis et chaos polynomial) et que le niveau de contrainte augmente avec le taux de porosité. À partir de la fonction de densité de probabilité de cette quantité, nous pouvons constater une faible probabilité d'avoir un niveau de contrainte supérieur à 15 MPa avec  $P(\sigma_{12}^{max} \geq 17 \text{ MPa}) = 0.004$ . Le coefficient de variation de cette quantité est égale à 3.9%, qui est une valeur plus importante comparée à celle que nous avons pour les contraintes locales mais qui reste faible au regard du coefficient de variation du taux de porosités.

Nous nous intéresserons maintenant aux contraintes globales. Pour rappel, celles-ci sont obtenues en intégrant les contraintes locales sur l'ensemble du domaine spatial.

Nous remarquons que seule la contrainte globale  $\Sigma_{22}$  est significative dans le problème étudié. En effet, la figure 4.6(a) représentant la surface de réponse de  $\Sigma_{11}$ , indique que cette dernière est très faible et que, plus le taux de porosités augmente, plus elle se rapproche de zéro. La PDF et la CDF de cette quantité confirment ce constat avec une probabilité  $P(\Sigma_{11} \geq 2 \text{ MPa}) = 0.02$  (*cf.* figures 4.6(b) et 4.6(c)). Par ailleurs, nous précisons que la contrainte globale  $\Sigma_{12}$  est nulle quel que soit le taux de porosités, c'est pourquoi nous avons fait le choix de ne pas la présenter.

La surface de réponse de la contrainte globale  $\Sigma_{22}$ , présentée sur la figure 4.7(a), indique que cette quantité diminue proportionnellement au taux de porosités. La probabilité d'obtenir une valeur de cette contrainte globale supérieure à 40 MPa dans ce cas est  $P(\Sigma_{22} \geq 40 \text{ MPa}) = 0.17$  (*cf.* figures 4.7(b) et 4.7(c)). Toutefois, le coefficient de variation de cette quantité, égal à 1.23%, est assez faible comparée à celui du taux de porosités d'entrée.

Pour conclure, nous avons constaté à travers cette étude microscopique que les coefficients de variation des différentes quantités mécaniques locales et globales étaient assez faibles comparés à celui que nous avons pour le taux de porosités d'entrée. Ceci indique que, pour le problème considéré et le modèle associé, l'influence de la porosité est modeste à cette échelle. Nous proposons donc, dans la section suivante, d'étudier l'influence de l'aléa du taux de porosités sur les propriétés effectives.

## 4.2. Études du défaut de porosités

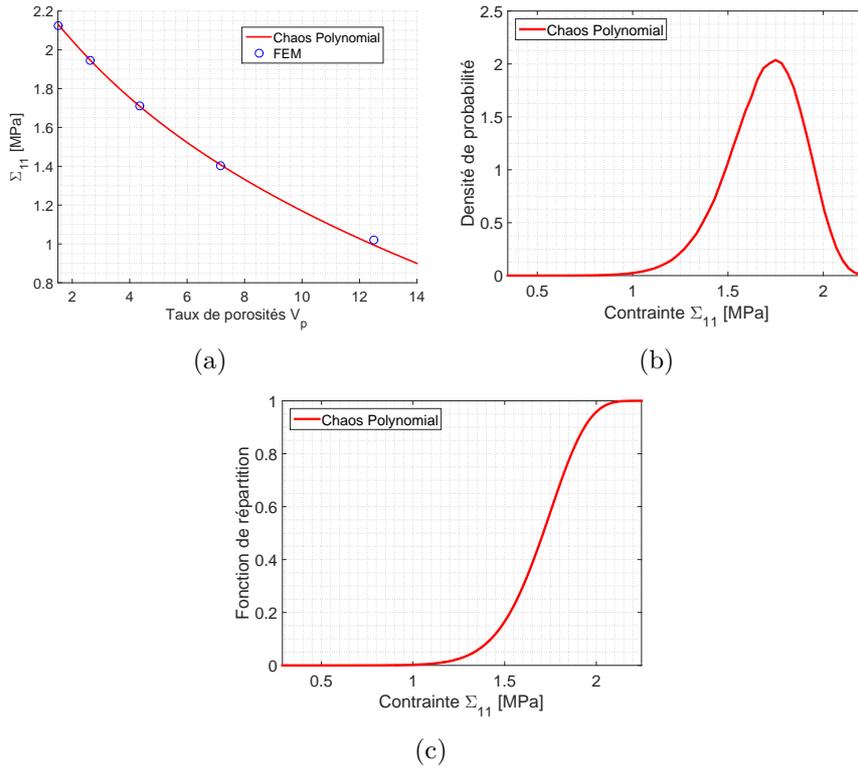


FIGURE 4.6 – (a) Surface de réponse de la contrainte globale  $\Sigma_{11}$  en fonction du taux de porosités (b) fonction de densité de probabilité de  $\Sigma_{11}$  (c) fonction de répartition de  $\Sigma_{11}$ .

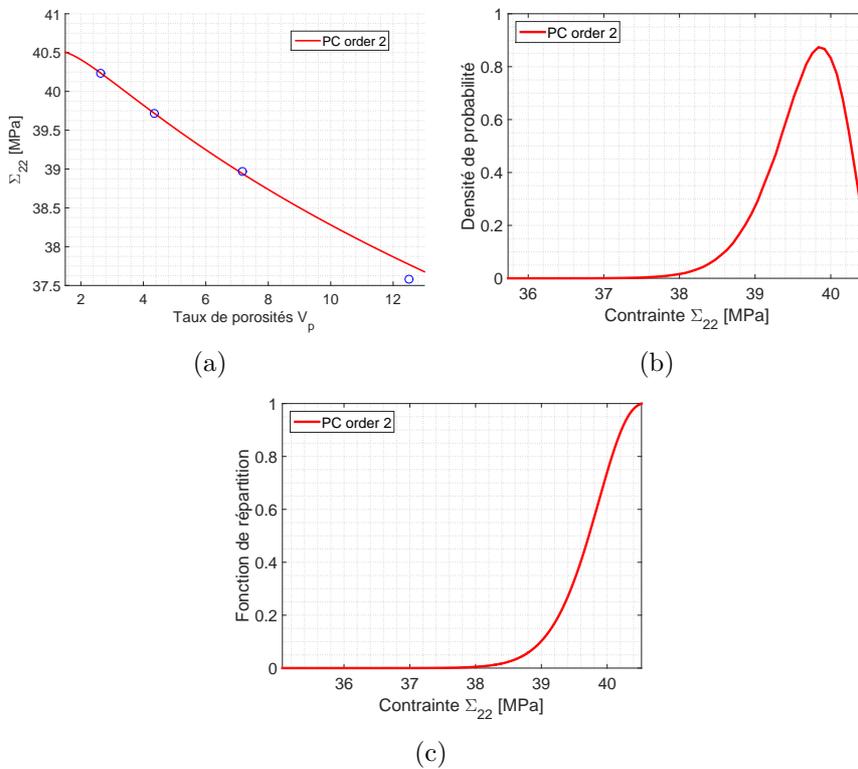


FIGURE 4.7 – (a) Surface de réponse de la contrainte globale  $\Sigma_{22}$  en fonction du taux de porosités (b) fonction de densité de probabilité de  $\Sigma_{22}$  (c) fonction de répartition de  $\Sigma_{22}$ .

### 4.2.1.3 Calculs des propriétés apparentes par homogénéisation numérique

Avant tout, pour faire la transition de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique, nous avons besoin de déterminer les propriétés du Milieu Homogène Equivalent (M.H.E.). Pour cela, nous utiliserons l'outil d'homogénéisation numérique que nous avons développé dans la section 2.3.3 et que nous étendons au cadre stochastique dans cette section.

Dorénavant, l'objectif est de prendre en compte l'aléa sur le taux de porosités dans le calcul des propriétés équivalentes. Dans ce cas, ces propriétés sont dites apparentes car, *a priori*, toujours soumises à des incertitudes. Pour les calculer, nous utilisons une décomposition sur le chaos polynomial. Cette technique nous permettra de quantifier l'aléa sur ces quantités en fonction de l'incertitude observée sur les paramètres d'entrée. La méthode d'homogénéisation devient alors notre « solveur déterministe ». Dans l'étude suivante, les paramètres mécaniques déterministes sont les mêmes que dans la section précédente : nous utilisons la microstructure représentée figure 4.1(a) et les propriétés des matériaux constitutifs de cette dernière sont ceux présentés dans le tableau 4.1. Nous utilisons ici aussi un chaos polynomial d'ordre  $p = 2$  et le calcul des coefficients du CP avec la méthode de projection L2 est réalisé à partir de 5 calculs déterministes.

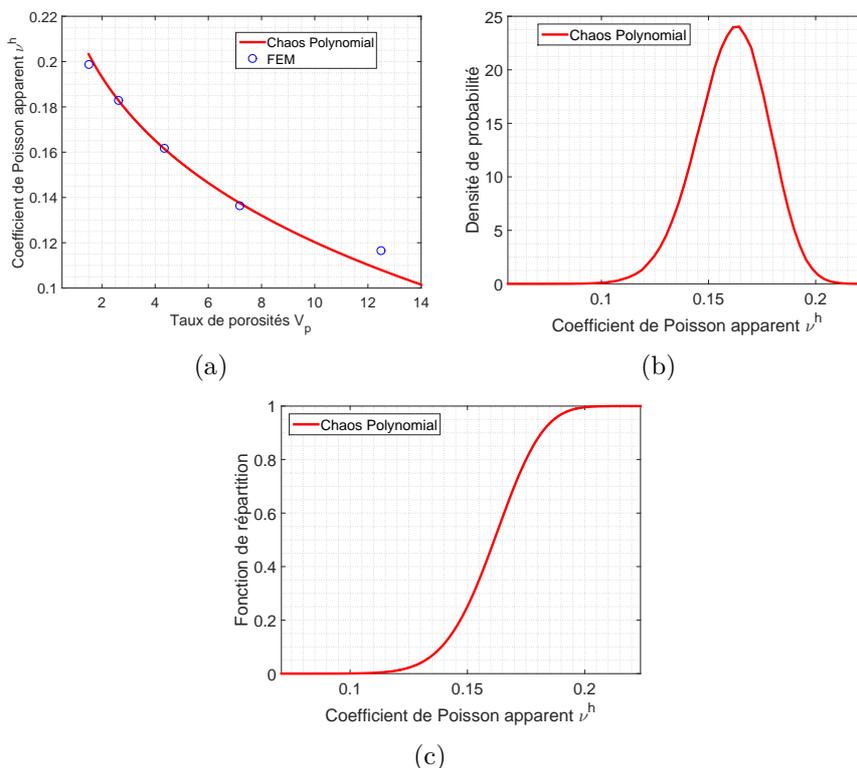


FIGURE 4.8 – (a) Surface de réponse du coefficient de Poisson apparent  $\nu^h$  en fonction du taux de porosités (b) fonction de densité de probabilité (PDF) de  $\nu^h$  (c) fonction de répartition (CDF) de  $\nu^h$  .

La figure 4.8 représente la surface de réponse, la fonction de densité de probabilité (PDF) et la fonction de répartition (CDF) du coefficient de Poisson apparent noté  $\nu^h$ . On constate

donc sur la figure 4.8(a) que, comme attendu, le coefficient de Poisson apparent diminue nettement quand le taux de porosités augmente. La PDF et la CDF figures 4.8(b) et 4.8(c) indiquent une forte probabilité d’avoir un coefficient de Poisson compris entre 0.1 et 0.2 avec  $P(0.1 \leq \nu^h \leq 0.2) = 0.99$ . Le coefficient de variation de cette quantité est égal à 10 % ce qui est trois fois plus faible que celui du taux de porosité. Ce CoV est cependant significatif et montre une sensibilité non négligeable du coefficient de Poisson au taux de porosités.

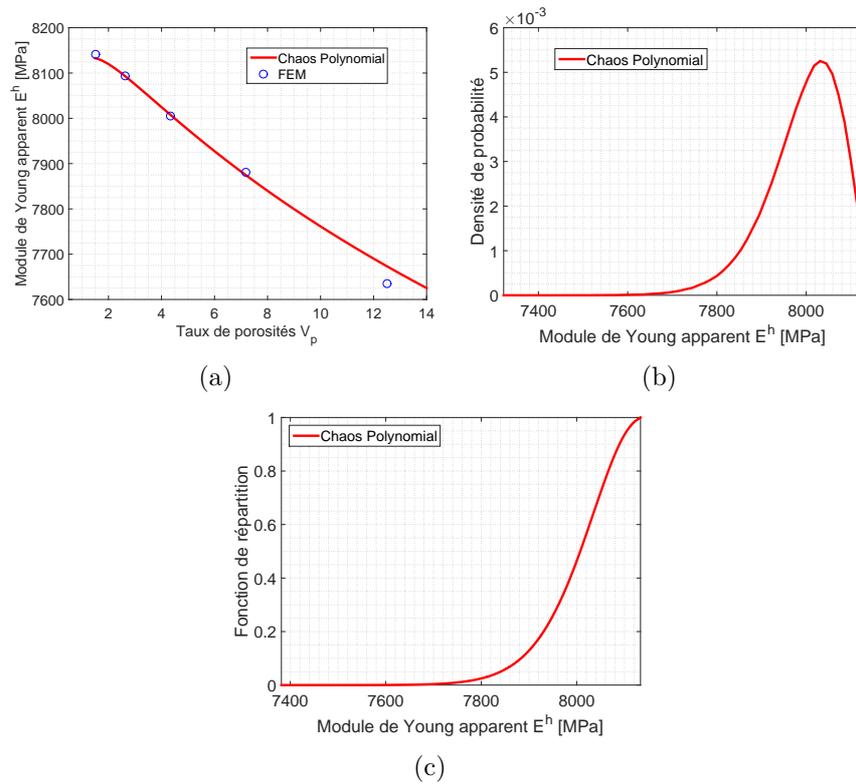


FIGURE 4.9 – (a) Surface de réponse du module de Young apparent  $E^h$  en fonction du taux de porosités (b) fonction de densité de probabilité (PDF) de  $E^h$  (c) fonction de répartition (CDF) de  $E^h$  .

La figure 4.9 représente la surface de réponse, la fonction de densité de probabilité (PDF) et la fonction de répartition (CDF) du module de Young apparent. Ce dernier diminue également lorsque le taux de porosités augmente (*cf.* figure 4.9(a)). La PDF du module de Young apparent représentée sur la figure 4.9(b) expose une probabilité assez faible d’obtenir un module d’élasticité apparent inférieur à 7800 MPa. Nous pouvons déterminer à partir de la CDF que  $P(E^h \leq 7800 \text{ MPa}) = 0.012$ . Le coefficient de variation de cette quantité est de 1 %, ce qui est une valeur très faible au regard du coefficient de variation du taux de porosités en entrée. Contrairement au coefficient de Poisson, le module de Young pourrait être considéré déterministe.

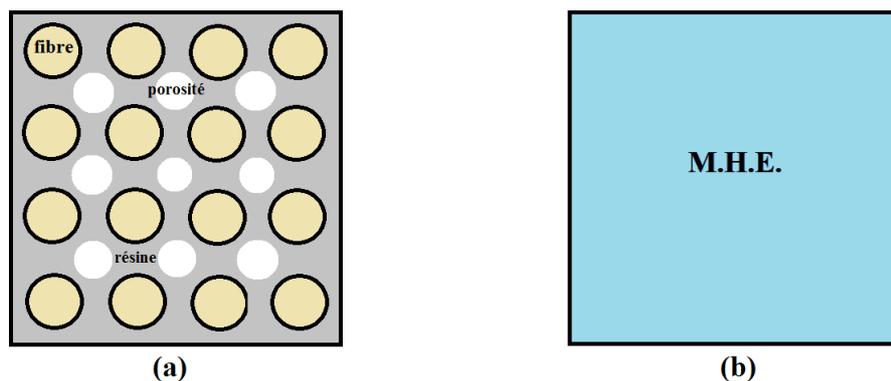


FIGURE 4.10 – (a) Illustrations de la microstructure pour le problème de porosités (b) et du Milieu Homogène Equivalent (M.H.E.).

#### 4.2.1.4 Comparaison des approches hétérogène et homogène équivalente

Nous proposons finalement de comparer le problème stochastique hétérogène de la section 4.2.1.2 et le problème stochastique homogène dont les propriétés apparentes sont celles obtenues précédemment (*cf.* figure 4.10). Les convergences spatiale et stochastique ont été vérifiées afin de fournir des résultats précis dans ce qui suit. Le calcul des coefficients du chaos polynomial à l'ordre  $p = 2$  par la technique de projection L2 est réalisé à partir de 5 calculs déterministes, et le maillage est constitué d'éléments triangulaire à 3 noeuds. Cette comparaison, basée sur le problème présenté sur la figure 4.1, nous permettra de valider le bon comportement de l'approche proposée.

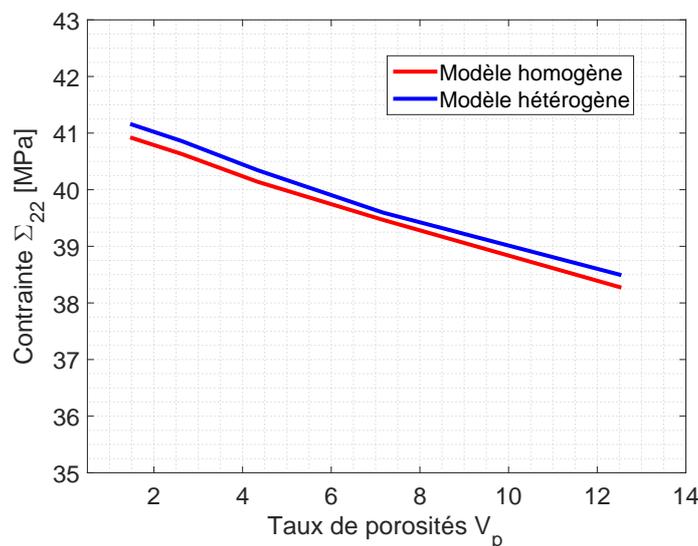


FIGURE 4.11 – Comparaison entre le modèle hétérogène et le modèle homogène sur la contrainte globale  $\Sigma_{22}$ .

La figure 4.11 présente les résultats obtenus avec les deux modèles homogène et hétérogène pour la contrainte globale  $\Sigma_{22}$  correspondant au sens de la sollicitation. Cette dernière est calculée à partir de la moyenne spatiale de la contrainte locale  $\sigma_{22}$  (intégration sur le

domaine). On observe alors un bon accord entre les deux solutions avec un écart maximal ne dépassant pas les 1 %. Cela nous réconforte dans notre démarche et nous permet de valider notre modèle.

## 4.2.2 Application 2 : étude des macroporosités aléatoire à l'échelle d'un pli UD [90°]

### 4.2.2.1 Présentation du problème stochastique

Dans cette deuxième application, nous allons nous intéresser aux macroporosités aléatoires et leurs effets sur le comportement d'un pli composite unidirectionnel à 90°. Nous allons reprendre l'exemple déterministe présenté dans la section 2.3.4. Nous travaillons à l'échelle macroscopique avec la même cellule que celle définie dans l'exemple déterministe (cellule carrée de longueur  $L = 10$  mm contenant une macroporosité représentée sur la figure 4.13). Nous rappelons que les propriétés mécaniques de cette cellule sont celles d'un M.H.E. obtenues à partir d'une microstructure saine avec la technique d'homogénéisation que nous avons mis en place (*cf.* tableau 4.2).

	$E_1/E_2$ [GPa]	$\nu_{12}$
<b>UD [90°]</b>	8.188 / 8.188	0.217

Tableau 4.2 – Propriétés élastiques de la cellule.

Dans cette étude, l'aléa porte sur la géométrie de la macroporosité. Nous utilisons une représentation paramétrique de l'ellipse vide représentant la macroporosité par la longueur de son axe horizontal  $D$  et le rapport  $R = \frac{D}{d}$ , où  $d$  est la longueur de son axe vertical. La caractérisation expérimentale réalisée dans le cadre de la thèse d'Edouard Gauthier [Gauthier, 2017] a permis d'identifier ces paramètres. Ils sont donc considérés comme des variables aléatoires suivant des lois Log-Normales (*cf.* figure 4.12(a) et figure 4.12(b)) telles que pour  $D$ ,  $\mu_D = 1.75$  mm et  $\sigma_D = 0.88$  mm (CoV =  $\frac{\sigma}{\mu} = 50\%$ ), et, pour  $R$ ,  $\mu_R = 1.73$  et  $\sigma_R = 0.65$  (CoV =  $\frac{\sigma}{\mu} = 37.4\%$ ). L'espace d'approximation stochastique est basé sur un chaos polynomial d'ordre 4 composé de polynômes d'Hermite, et le calcul des coefficients du CP avec la méthode de projection L2 est réalisé à partir de 81 calculs déterministes. Pour l'approximation spatiale, nous utilisons un maillage éléments finis composé d'éléments triangulaires avec un nombre d'éléments qui varie suivant la géométrie de la macroporosité. Enfin, il convient de mentionner que les convergences spatiale et stochastique ont été vérifiées afin de garantir la précision des résultats.

La géométrie du problème ainsi que les conditions aux limites utilisées pour cette étude sont illustrées sur la figure 4.13 avec une déformation imposée égale à 0.5% sur le bord  $\Gamma_1$  et un encastrement sur le bord inférieur  $\Gamma_2$ .

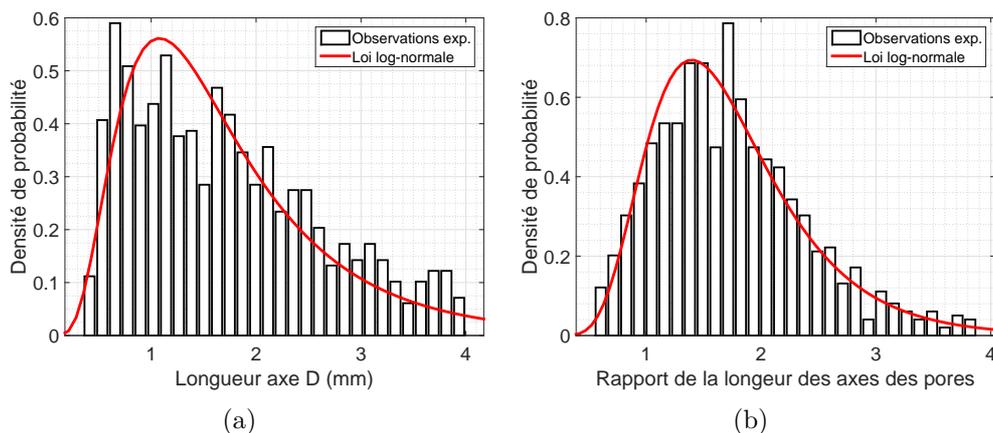


FIGURE 4.12 – Fonction de densité de probabilité (PDF) (a) de la longueur de l’axe horizontal de la macroporosité  $D$  (b) du rapport de la longueur des axes  $R = \frac{D}{d}$ .

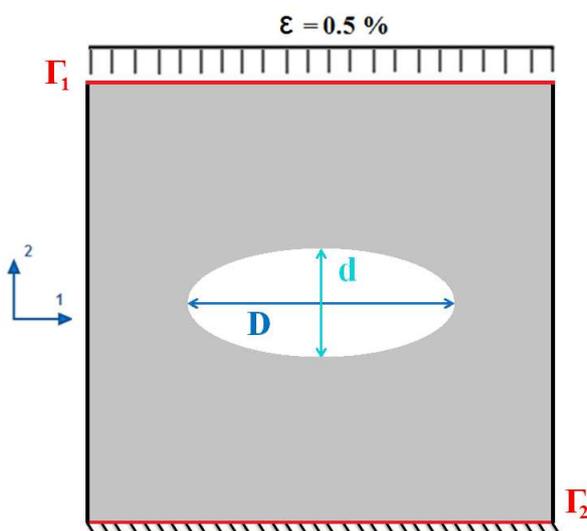


FIGURE 4.13 – Conditions aux limites pour le problème avec macroporosité.

#### 4.2.2.2 Résultats de l’étude macroscopique

Nous allons commencer par introduire les résultats probabilistes pour des quantités locales. Les figures 4.14, 4.15 et 4.16 montrent les surfaces de réponses, les fonctions de densité de probabilité (PDF) et les fonctions de répartition (CDF) pour les contraintes locales maximales  $|\sigma_{11}^{min}|$  (contrainte de compression),  $\sigma_{22}^{max}$  (contrainte dans la direction de la sollicitation) et  $\sigma_{12}^{max}$  (contrainte de cisaillement).

Les surfaces de réponse de ces quantités révèlent un bon accord entre l’approximation sur le chaos polynomial et les calculs déterministes FEM correspondants à des réalisations particulières des variables aléatoires d’entrée.

Comme attendu, nous constatons que les niveaux des contraintes représentatives de la compression (sens 1) et du cisaillement sont relativement faibles comparés à ceux correspondants au sens de la traction (sens 2). On peut observer sur la figure 4.14(a) que la

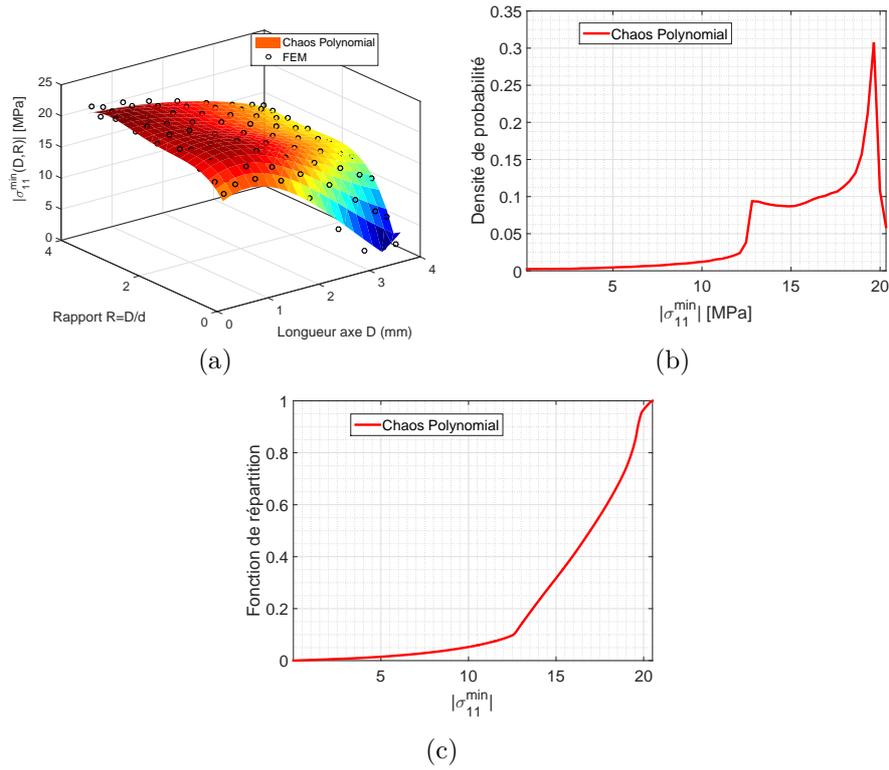


FIGURE 4.14 – Surface de réponse de la contrainte  $|\sigma_{11}^{min}|$  en fonction de la longueur  $D$  et du rapport  $R$  (b) PDF de  $|\sigma_{11}^{min}|$  (c) CDF de  $|\sigma_{11}^{min}|$ .

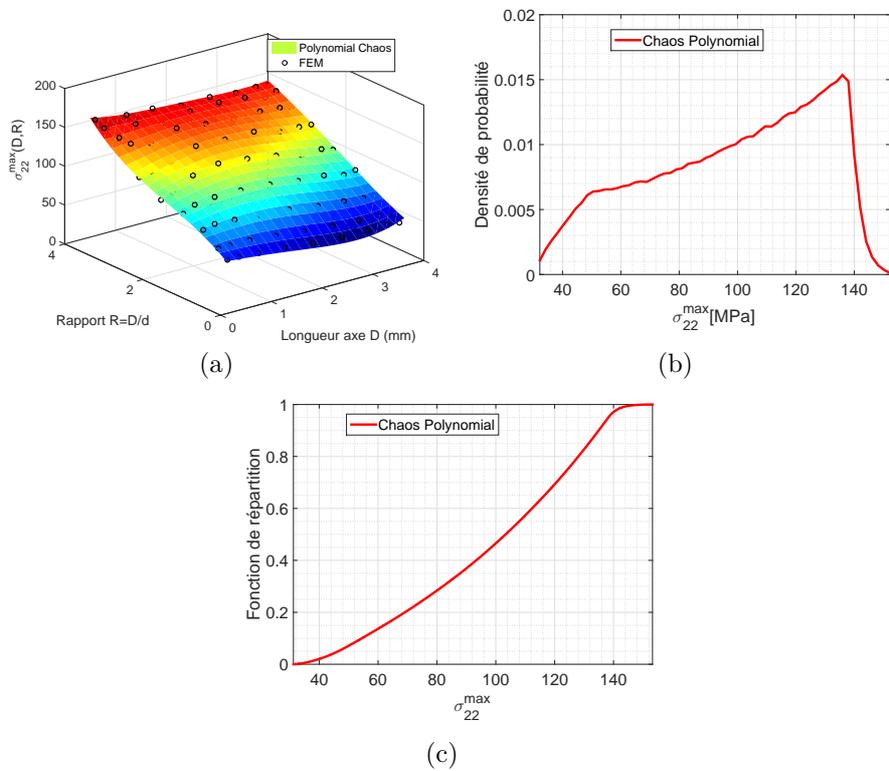


FIGURE 4.15 – (a) Surface de réponse de la contrainte  $\sigma_{22}^{max}$  en fonction de la longueur  $D$  et du rapport  $R$  (b) PDF de  $\sigma_{22}^{max}$  (c) CDF de  $\sigma_{22}^{max}$ .

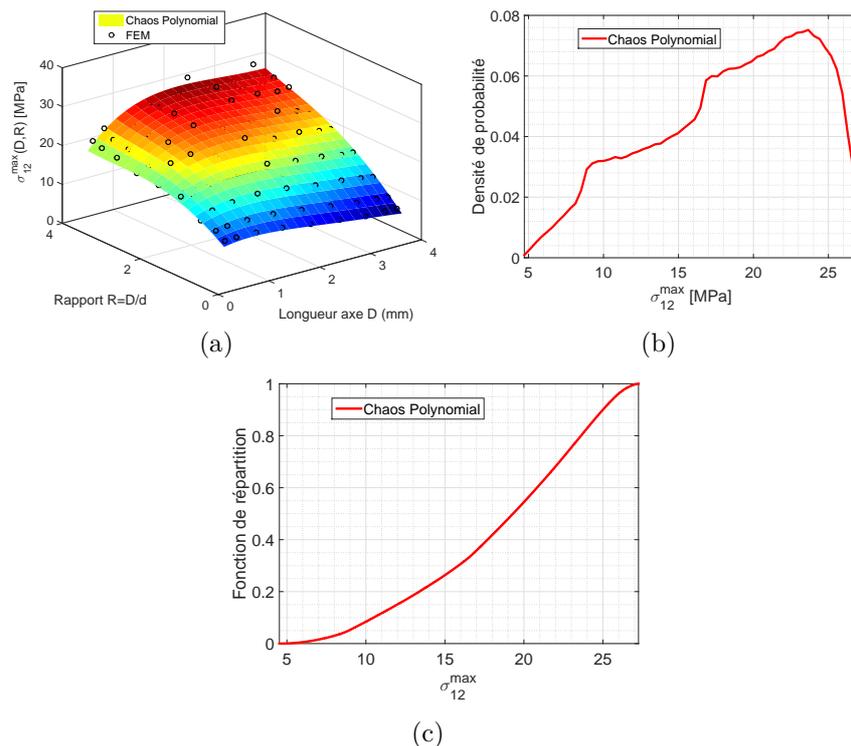


FIGURE 4.16 – (a) Surface de réponse de la contrainte  $\sigma_{12}^{max}$  en fonction de la longueur  $D$  et du rapport  $R$  (b) fonction de densité de probabilité (c) fonction de répartition.

contrainte  $|\sigma_{11}^{min}|$  diminue avec l'augmentation de la longueur de l'axe  $D$  de l'ellipse. En revanche, le rapport  $R$  a un faible impact sur cette quantité.

En ce qui concerne  $\sigma_{22}^{max}$ , nous pouvons constater que cette contrainte augmente avec le rapport  $R$  et la diminution de  $D$ , avec une faible influence pour  $D$  (*cf.* figure 4.15(a)). Enfin, la figure 4.16(a) montre une augmentation de  $\sigma_{12}^{max}$  en fonction de l'augmentation de  $D$  et de  $R$ . Les fonctions de densité de probabilité et les fonctions de répartition nous permettent de calculer la probabilité que ces contraintes locales dépassent une certaine valeur seuil : par exemple, sur la figure 4.14(b) et la figure 4.14(c), nous constatons une faible probabilité de trouver une contrainte  $|\sigma_{11}^{min}|$  supérieure à 20 MPa avec une probabilité  $P(|\sigma_{11}^{min}| \geq 20 \text{ MPa}) = 0.026$ . Les figures 4.15(b) et 4.15(c) présentent une faible probabilité d'avoir une contrainte  $\sigma_{22}^{max}$  supérieure à 140 MPa avec une probabilité  $P(\sigma_{22}^{max} \geq 140 \text{ MPa}) = 0.024$ . Nous avons également, d'après les figures 4.15(b) et 4.15(c), une faible probabilité de trouver une contrainte  $\sigma_{12}^{max}$  supérieure à 26 MPa avec une probabilité  $P(\sigma_{12}^{max} \geq 26 \text{ MPa}) = 0.038$ . Enfin, on notera une variabilité importante sur ces quantités locales avec un coefficient de variation  $\text{CoV} = 21.3\%$  pour  $|\sigma_{11}^{min}|$  et un coefficient de variation  $\text{CoV}$  avoisinant  $29\%$  pour  $\sigma_{22}^{max}$  et  $\sigma_{12}^{max}$ .

Nous proposons maintenant de nous intéresser aux contraintes globales. La surfaces de réponse, la fonctions de densité de probabilité (PDF) et la fonction de répartition (CDF) pour  $\Sigma_{22}$  sont présentés sur la figure 4.17. On notera que la contraintes globale  $\Sigma_{12}$  est nulle quel que soit le rapport  $R$  et la longueur de l'axe  $D$ , et que la contrainte globale  $\Sigma_{11}$  est négligeable. C'est pourquoi nous avons fait le choix de ne pas les présenter.

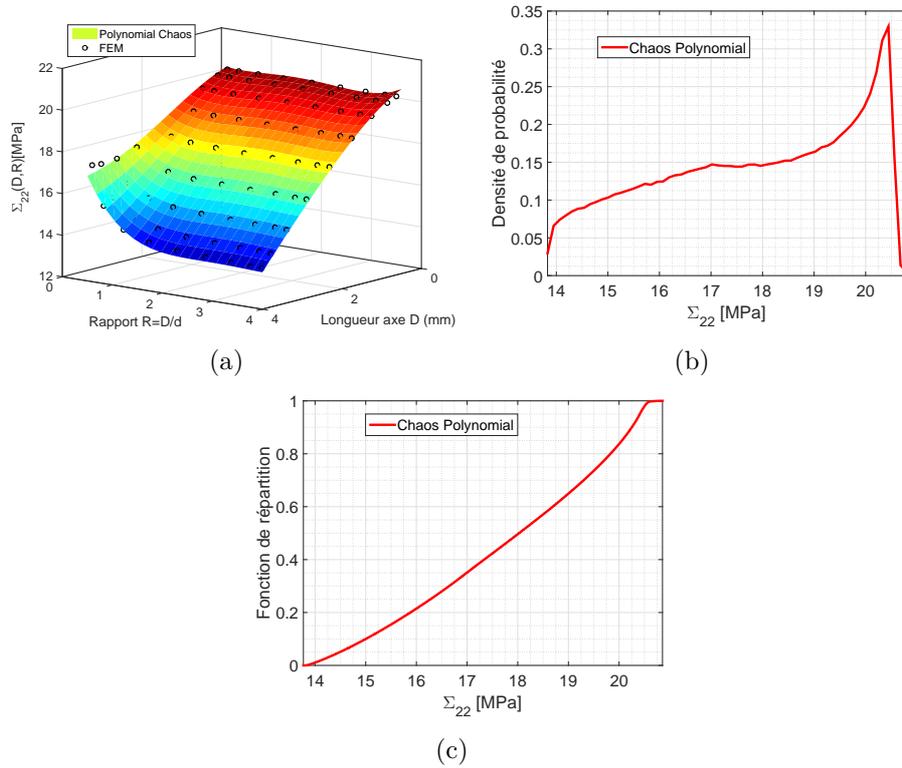


FIGURE 4.17 – (a) Surface de réponse de la contrainte  $\Sigma_{22}$  en fonction de la longueur  $D$  et du rapport  $R$  (b) PDF de  $\Sigma_{22}$  (c) CDF de  $\Sigma_{22}$ .

La surface de réponse figure 4.17(a) montre que la contrainte  $\Sigma_{22}$  diminue avec l'augmentation de la longueur  $D$ , tandis que le rapport  $R$  a finalement une influence relativement faible sur cette quantité. Une faible probabilité de trouver une contrainte  $\Sigma_{22}$  supérieure à 22 MPa est relevée, elle est égale à  $P(\Sigma_{22} \geq 22 \text{ MPa}) = 0.025$ . Pour finir, il convient de mentionner une variabilité assez faible pour cette contrainte avec un  $\text{CoV} = 7.46\%$ . Cette variabilité est toutefois significative au regard des  $\text{CoV}$  de  $D$  et  $R$  respectivement égaux à 50% et 37.4%.

On propose pour terminer cette étude de présenter les résultats probabilistes du critère de Puck permettant de déterminer si une rupture dans les fibres ou dans la matrice est possible. Les figures 4.18 et 4.19 illustrent donc ces résultats.

La surface de réponse figure 4.18(a) indique que ce critère ne prédit pas de rupture au sein des fibres. Effectivement, comme nous l'avons souligné dans la section 2.3.4, dans ce cas, où le plan d'étude est transverse aux fibres, il n'est pas possible de déterminer si les fibres sont endommagées. Néanmoins, une rupture matricielle peut être observée. Nous constatons ainsi, à partir de la surface de réponse figure 4.19(a), que les valeurs du critère de la rupture matricielle augmente avec l'augmentation du rapport, et que la longueur  $D$  n'a relativement pas d'influence sur ce critère. La fonction densité de probabilité et la fonction de répartition indiquent que nous avons une forte probabilité d'avoir une rupture

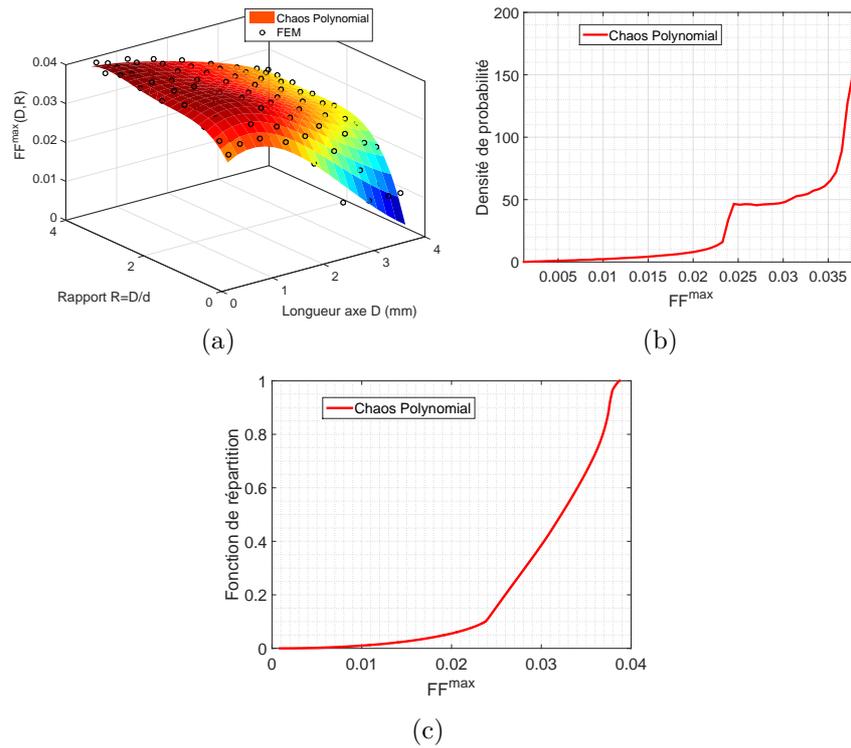


FIGURE 4.18 – (a) Surface de réponse du critère de rupture de Puck pour les fibres (FF) (b) Fonction de densité de probabilité de FF (c) fonction de répartition de FF.

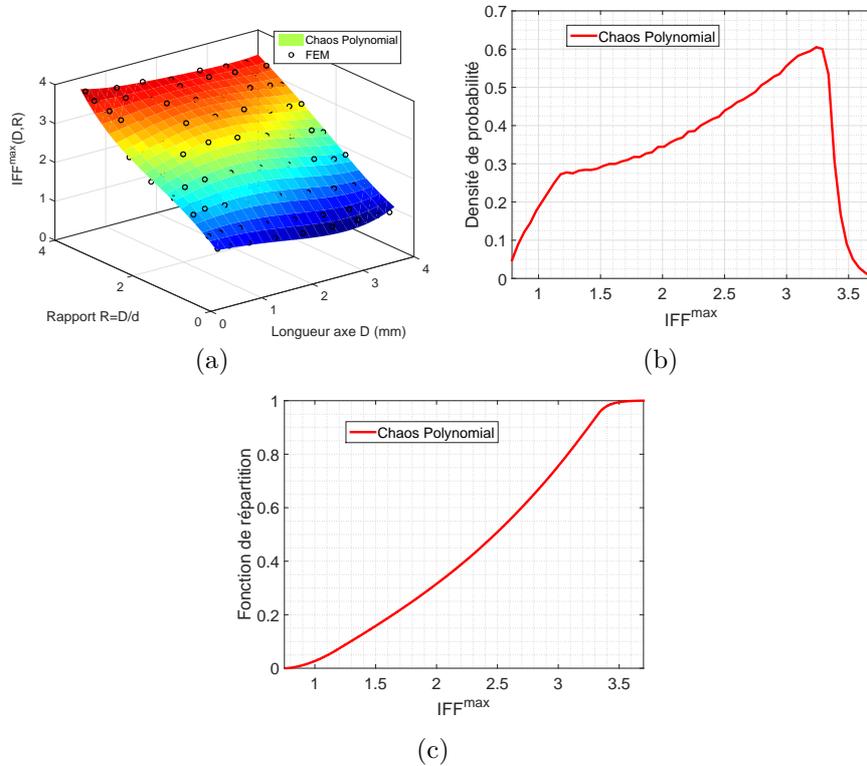


FIGURE 4.19 – (a) Surface de réponse du critère de rupture de Puck pour la matrice (IFF) (b) Fonction de densité de probabilité de IFF (c) fonction de répartition de IFF.

matricielle avec  $P(IFF \geq 1) = 0.96$  (cf. figures 4.19(b) et 4.19(c)). Finalement, on notera que la variabilité de ce mode de rupture est importante avec un coefficient de variation de l'ordre de 30%.

Cette étude numérique, prenant en compte l'aléa sur la géométrie de la macroporosité, a permis de montrer que cet aléa influençait le comportement mécanique du matériau composite. En effet, nous avons constaté une variabilité importante sur les différentes quantités mécaniques présentées dans cette étude. De plus, nous avons constaté une forte probabilité d'avoir une rupture matricielle dans le composite.

## 4.3 Études du défaut de plissement

### 4.3.1 Études d'un composite stratifié avec géométries de plissement aléatoires

#### 4.3.1.1 Présentation du problème stochastique

Dans cette partie, nous proposons une étude numérique sur le défaut de plissement. Nous allons nous concentrer sur deux exemples : dans le premier on traitera un composite avec un plissement à géométrie aléatoire, et dans le deuxième un composite avec trois plissements à géométries aléatoires. Nous travaillons avec un matériau composite constitué de 140 plis composite unidirectionnel UD  $[0^\circ]$  verre/époxy dans le premier exemple et carbone/époxy pour le deuxième exemple. La longueur de chacun des plis est de 300 mm et son épaisseur est de 0.57 mm. Une résine époxy pure comble l'espace entre les plissements et les plis  $[0^\circ]$ .

Nous utilisons une représentation paramétrique de la géométrie du plissement où sa hauteur et sa largeur sont modélisées par des variables aléatoires indépendantes. En se basant sur des données expérimentales pour ce type de défaut (provenant des partenaires industriels du projet et de la littérature), ces paramètres géométriques sont considérés comme des variables aléatoires uniformes de telle sorte que la largeur  $L \in U(30 \text{ mm}, 150 \text{ mm})$  avec une moyenne  $\mu = 12.5 \text{ mm}$  et un écart-type  $\sigma = 4.33 \text{ mm}$  conduisant à un coefficient de variation  $\text{CoV} = \frac{\sigma}{\mu} = 34.64 \%$ , et la hauteur  $A \in U(5 \text{ mm}, 20 \text{ mm})$  avec une moyenne  $\mu = 12.5 \text{ mm}$  et un écart-type  $\sigma = 90 \text{ mm}$  conduisant à un coefficient de variation  $\text{CoV} = \frac{\sigma}{\mu} = 38\%$ . L'espace d'approximation stochastique est basé sur un chaos polynomial d'ordre 3 composé de polynômes de Legendre. Les convergences spatiale et stochastique pour chaque exemple ont été vérifiées afin de garantir des résultats précis.

#### 4.3.1.2 Application 1 : étude du comportement d'un composite avec un plissement à géométrie aléatoire

Pour ce premier exemple, nous reprenons le problème présenté dans la section 2.4.2. Nous allons donc considérer un composite unidirectionnel UD  $[0^\circ]$  verre/époxy contenant un

## Chapitre 4. Études numériques des défauts de porosités et de plissement dans un cadre incertain

défaut de plissement à géométrie aléatoire. Les propriétés élastiques du composite sont listées dans le tableau 4.3.

	$E_1/E_2$ [GPa]	$\nu_{12}$
<i>UD</i> [0°]	43 / 14	0.3
<i>Epoxy</i>	3 / 3	0.33

Tableau 4.3 – Propriétés élastiques des matériaux constituant le composite [Leong *et al.*, 2012].

Nous rappelons que ce composite est chargé en compression dans le plan, comme illustré sur la figure 4.20 et des conditions aux limites de symétrie sont imposées. L'objectif de cette étude est de déterminer l'influence de l'aléa de la géométrie du plissement sur le comportement du composite.

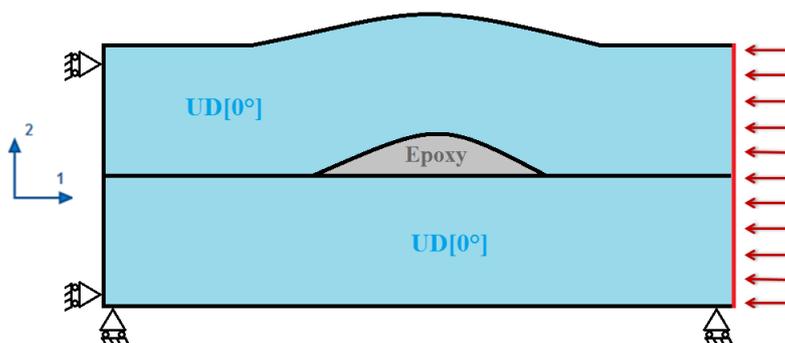


FIGURE 4.20 – Géométrie et conditions aux limites du problème de plissement.

Les résultats des calculs probabilistes sont introduits sur les figures 4.21, 4.22 et 4.23.

Les figures 4.21, 4.22 et 4.23 montrent les surfaces de réponses, les fonctions de densité de probabilité (PDF) et les fonctions de répartition (CDF) respectivement pour les contraintes locales maximales  $|\sigma_{11}^{min}|$  (contrainte de compression),  $\sigma_{22}^{max}$  et  $\sigma_{12}^{max}$ . Nous constatons à travers les surfaces de réponse un bon accord entre les solutions avec une approximation sur le chaos polynomial et les calculs déterministes correspondant à des réalisations particulières des variables aléatoires d'entrée. Comme nous pouvons le voir sur la figure 4.21(a),  $|\sigma_{11}^{min}|$  augmente quand la hauteur du plissement augmente et sa largeur diminue. De plus, on observe sur la PDF et la CDF de  $|\sigma_{11}^{min}|$  (*cf.* figure 4.21(b) et 4.21(c)) que la probabilité d'obtenir une valeur de cette la contrainte dépassant les 250 MPa est de 0.05%. Enfin, on note une variabilité assez importante pour cette quantité avec un coefficient de variation  $CoV = 19.7\%$  qui est à peu près la moitié de ce que nous avons pour la hauteur  $A$  (34.64 %) et la largeur  $L$  (38 %) en entrée.

La contrainte  $\sigma_{22}^{max}$  présente des valeurs beaucoup plus faibles que celles observées pour  $|\sigma_{11}^{min}|$  ce qui était attendu car la sollicitation se fait dans le sens 1. De plus, ces valeurs

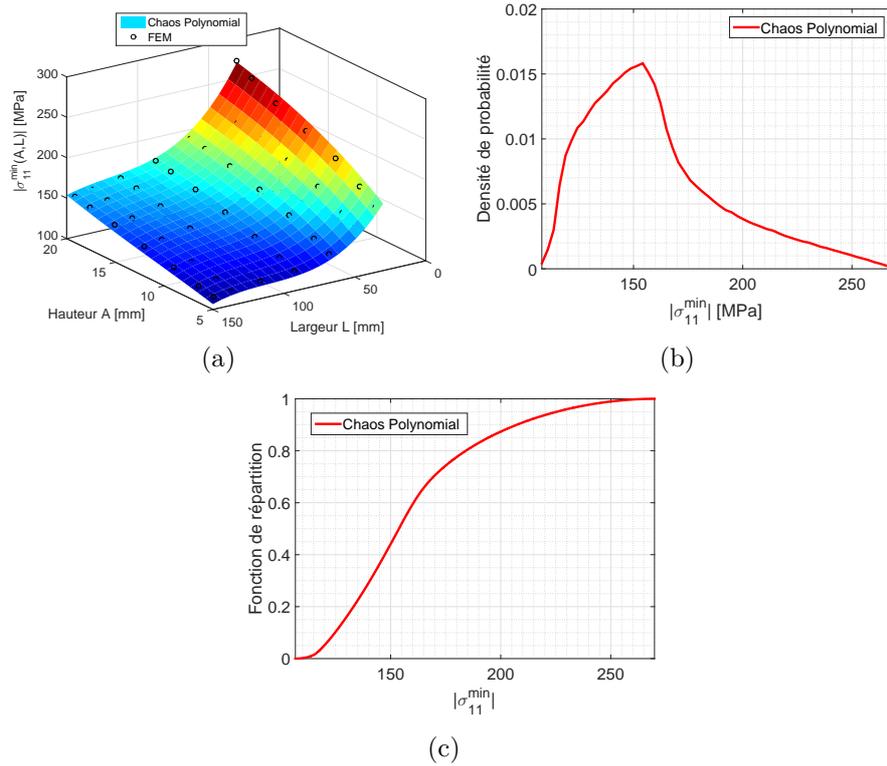


FIGURE 4.21 – (a) Surface de réponse de la contrainte  $|\sigma_{11}^{min}|$  en fonction de la hauteur  $A$  et la largeur  $L$  du plissement (b) PDF de  $|\sigma_{11}^{min}|$  (c) CDF de  $|\sigma_{11}^{min}|$ .

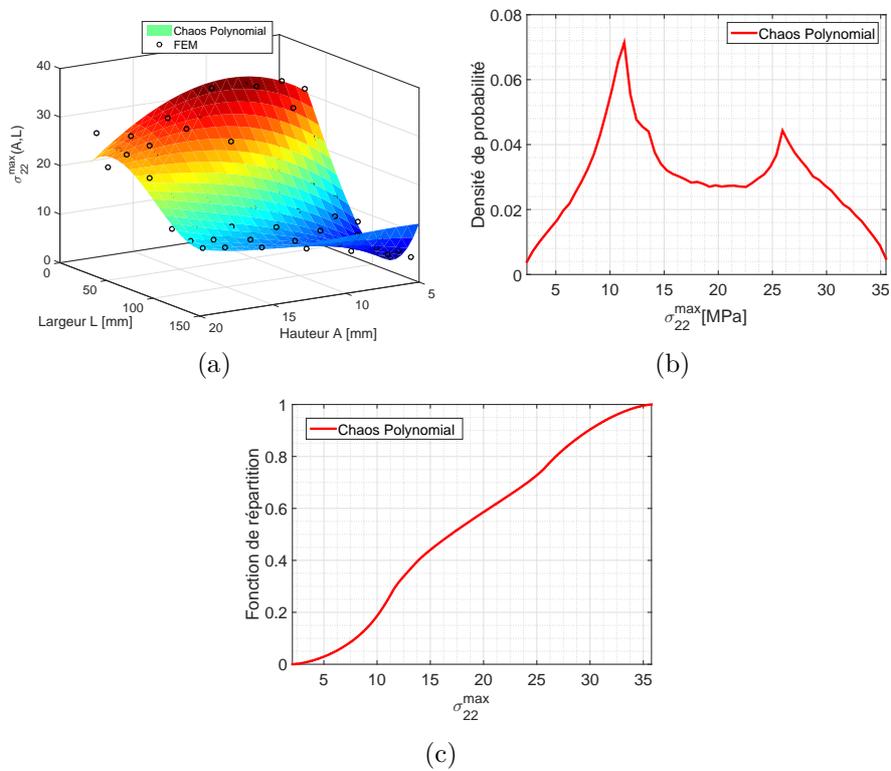


FIGURE 4.22 – (a) Surface de réponse de la contrainte  $\sigma_{22}^{max}$  en fonction de la hauteur  $A$  et la largeur  $L$  du plissement (b) PDF de  $\sigma_{22}^{max}$  (c) CDF de  $\sigma_{22}^{max}$ .

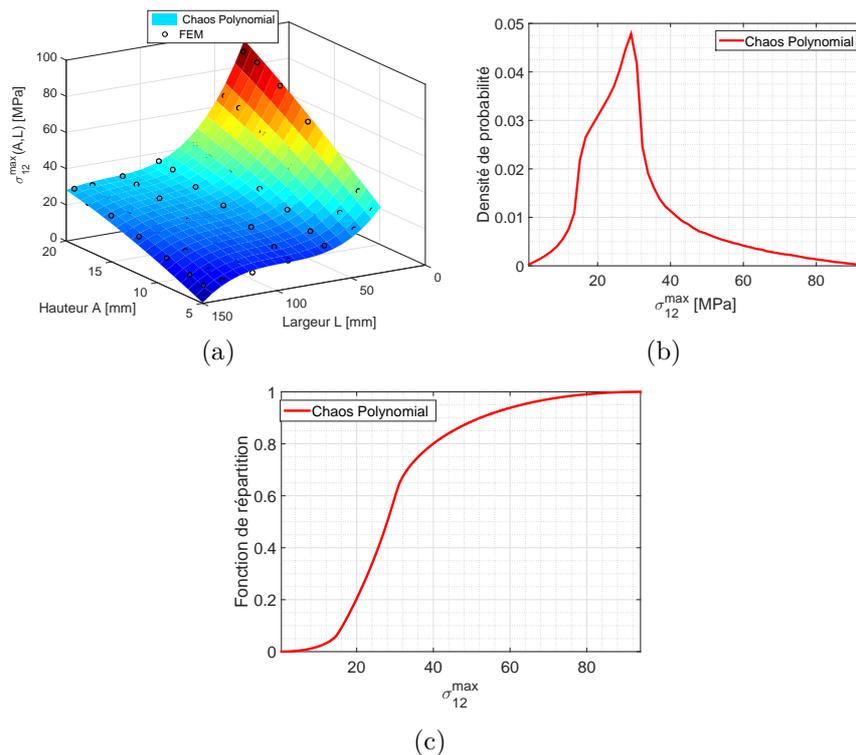


FIGURE 4.23 – (a) Surface de réponse de la contrainte  $\sigma_{12}^{max}$  en fonction de la hauteur  $A$  et la largeur  $L$  du plissement (b) PDF de  $\sigma_{12}^{max}$  (c) CDF de  $\sigma_{12}^{max}$ .

sont plus importantes quand la largeur du plissement est faible comme le montre la surface de réponse de la figure 4.22(a). Cependant, vis à vis de la hauteur du plissement, la tendance est moins marquée avec des valeurs fluctuantes. La PDF de  $\sigma_{22}^{max}$ , figure 4.22(b), présente deux modes correspondant aux deux zones de concentration de valeurs observées sur la surface de réponse de cette quantité, la première pour des faibles valeurs de la largeur (zone en rouge), et la deuxième pour des valeurs plus importantes (zone en bleu). La CDF représentée sur la figure 4.22(c) indique une très faible probabilité de trouver des valeurs supérieures à 35 MPa pour cette contrainte avec  $P(\sigma_{22}^{max} \geq 35 \text{ MPa}) = 10^{-4}$ . Le coefficient de variation de cette quantité est de 46% ce qui est une variabilité importante comparée à celle que nous avons pour la hauteur et la largeur en entrée.

La figure 4.23 représentant la surface de réponse de la contrainte  $\sigma_{12}^{max}$  montre que les valeurs obtenues pour cette quantité sont moins importantes que celle de  $|\sigma_{11}^{min}|$ , et plus importantes que celle de  $\sigma_{22}^{max}$ . Nous constatons sur cette figure que quand la hauteur du plissement augmente et sa largeur diminue, les valeurs de cette quantité deviennent plus importantes. Nous avons pour cette contrainte des valeurs assez proches (entre 15 et 40 MPa) pour les largeurs comprises entre 90 et 150 mm, puis elles augmentent rapidement. Nous observons ainsi une sorte de "plateau" en bleu (*cf.* figure 4.23(a)) que nous retrouvons, sous forme de pic, sur la PDF de  $\sigma_{12}^{max}$ , révélant ainsi une forte probabilité de trouver une valeur comprise entre 15 MPa et 40 MPa ( $P(15 \text{ MPa} \leq \sigma_{12}^{max} \leq 40 \text{ MPa}) = 0.78$ ). Enfin, on note que la probabilité d'obtenir une valeur de cette contrainte dépassant les 80 MPa est de 0.05%, et que la variabilité est importante sur cette quantité avec un

coefficient de variation de 47.4%.

Nous présentons maintenant les résultats probabilistes des déplacements  $u_1$  et  $u_2$  respectivement dans la direction de la sollicitation et dans la direction transverse à la sollicitation. Les résultats obtenus sont illustrés sur les figures 4.24 et 4.25.

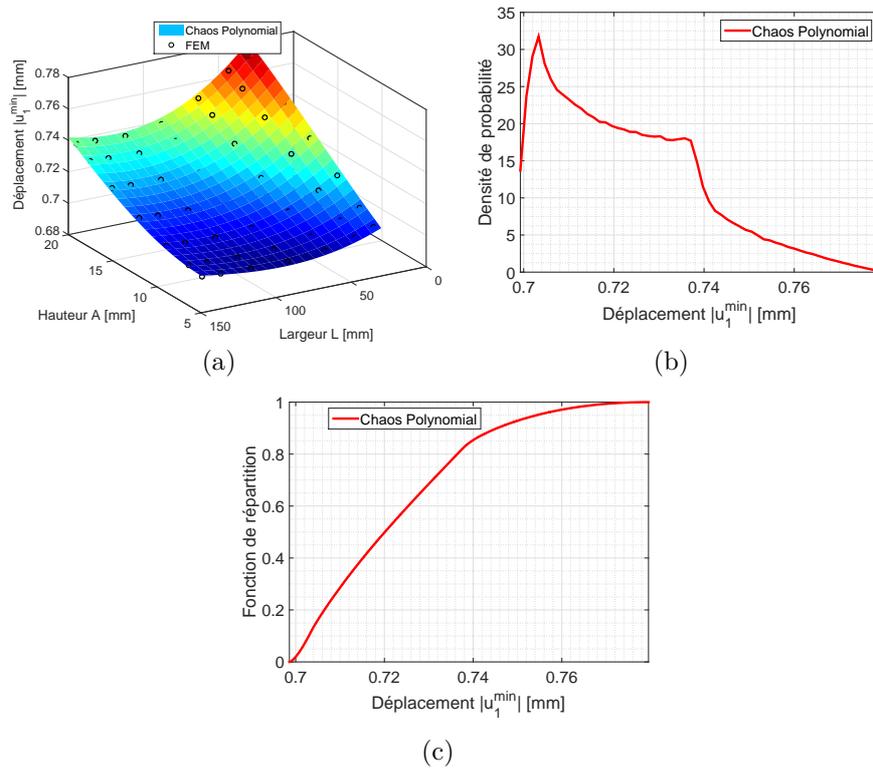


FIGURE 4.24 – (a) Surface de réponse du déplacement  $|u_1^{min}|$  en fonction de la hauteur  $A$  et la largeur  $L$  du plissement (b) PDF du déplacement  $|u_1^{min}|$  (c) CDF de  $|u_1^{min}|$ .

La surface de réponse de  $|u_1^{min}|$  (le déplacement dans la direction de la compression) indique une augmentation de cette quantité quand la hauteur et la largeur du plissement augmentent. On notera que l'influence de la largeur sur cette quantité est plus importante que celle de la hauteur. La probabilité de trouver des valeurs supérieures à 0.77 mm est  $P(|u_1^{min}| \geq 0.77 \text{ mm}) = 0.006$  comme le l'indique la CDF représentée sur la figure 4.24(c). La variabilité sur cette quantité est de 5%.

Le déplacement  $u_2^{max}$  augmente avec la hauteur du plissement. Toutefois, la largeur du plissement a un faible impact sur cette quantité comme le montre la surface de réponse de la figure 4.25(a). De plus, on peut voir sur la PDF et la CDF de  $u_2^{max}$ , figures 4.25(b) et 4.25(c), que la probabilité de trouver une valeur de cette quantité supérieure à 0.182 mm est  $P(u_2^{max} \geq 0.182 \text{ mm}) = 0.017$ . Enfin, on note une variabilité assez importante pour cette quantité avec un coefficient de variation  $\text{CoV} = 14.3\%$ .

Nous proposons finalement de présenter les valeurs du critère de Puck permettant de déterminer si une rupture dans les fibres ou dans la matrice est probable. Les figures 4.26

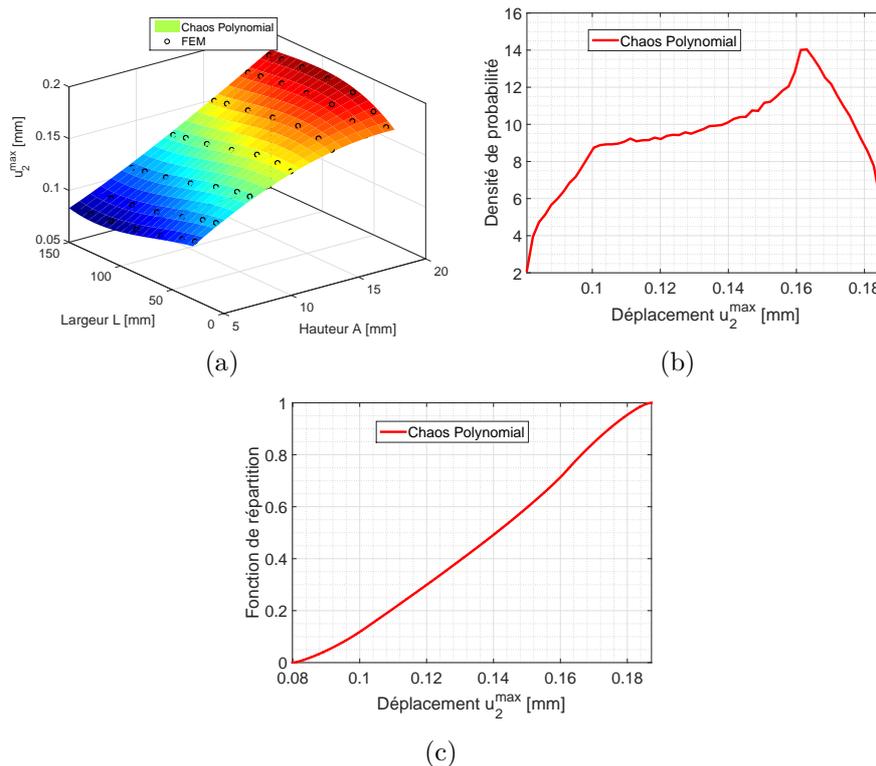


FIGURE 4.25 – (a) Surface de réponse du déplacement  $u_2^{max}$  en fonction de la hauteur  $A$  et la largeur  $L$  du plissement (b) PDF du déplacement  $u_2^{max}$  (c) CDF de  $u_2^{max}$ .

et 4.27 illustrent les résultats probabilistes sur ce critère.

La surface de réponse du critère de rupture de Puck pour les fibres révèle que ce critère ne prédit pas de rupture : en effet, les valeurs obtenues pour ce critère sont assez éloignées de l'unité signifiant la rupture (la valeur maximale est de 0.52). La probabilité de trouver une rupture des fibres est alors  $P(F \geq 1) = 0$  (cf. figures 4.26(b) et 4.26(c)).

Dans le cas du critère de rupture de Puck pour la matrice, nous constatons que la surface de réponse du critère de rupture matricielle est proche de celle de la contrainte  $\sigma_{12}^{max}$ . Nous retrouvons là aussi un "plateau", comme pour  $\sigma_{12}^{max}$ , puis une augmentation de ce critère avec l'augmentation de la largeur. La PDF de l'IFF figure 4.27(b) montre un pic sous forme de "Dirac", correspondant au plateau qu'on avait sur la surface de réponse indiquant une forte probabilité d'avoir des valeurs comprises entre 0.5 et 1. De plus, la probabilité d'avoir une rupture matricielle dans le composite est  $P(IFF \geq 1) = 0.21$  qui est une forte probabilité. Enfin, il convient de mentionner la variabilité importante pour les deux modes de rupture comparée à la variabilité des paramètres d'entrée avec un coefficient de variation de l'ordre de 25%.

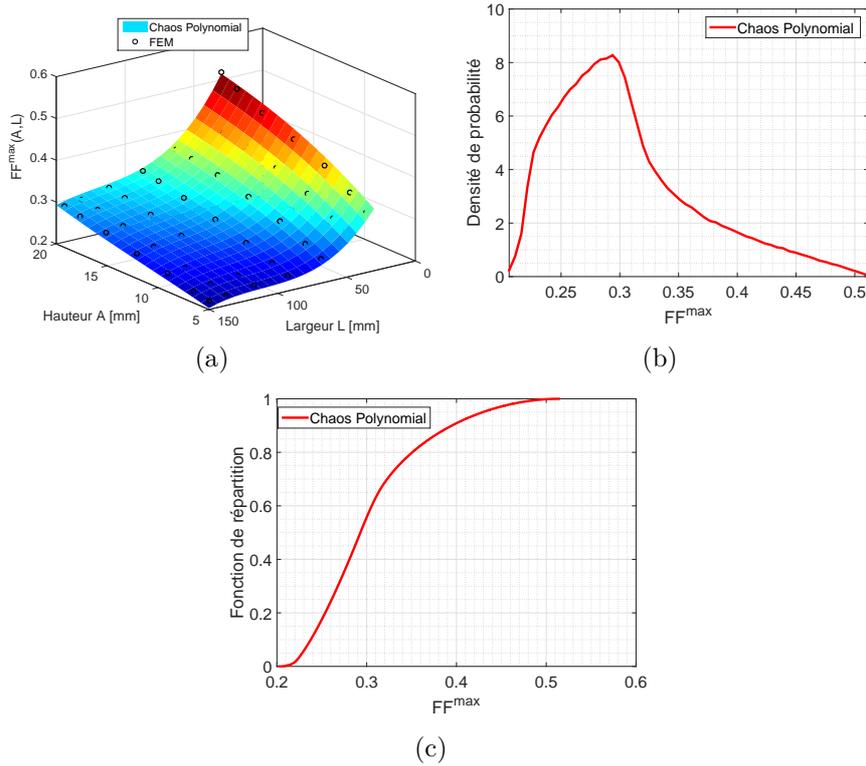


FIGURE 4.26 – (a) Surface de réponse du critère de rupture de Puck pour les fibres (FF) (b) Fonction de densité de probabilité de FF (c) fonction de répartition de FF.

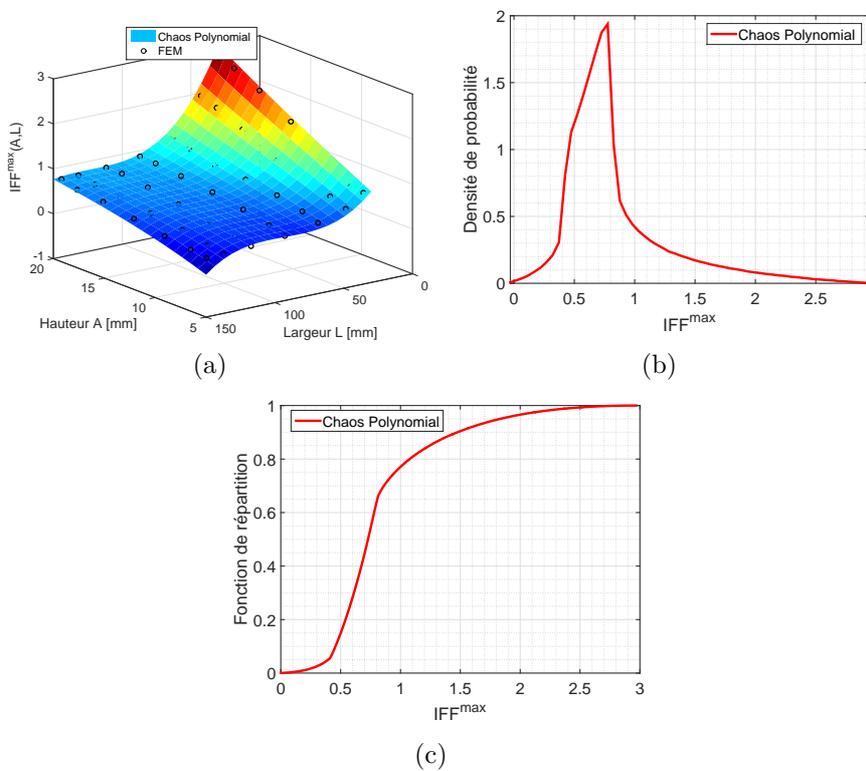


FIGURE 4.27 – (a) Surface de réponse du critère de rupture de Puck pour la matrice (IFF) (b) Fonction de densité de probabilité de IFF (c) fonction de répartition de IFF.

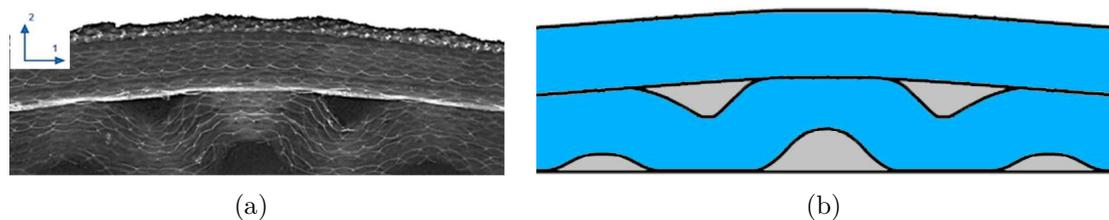


FIGURE 4.28 – Géométrie du problème (a) observation réelle à partir d'une coupe transverse (b) modélisation numérique.

### 4.3.1.3 Application 2 : étude du comportement d'un composite avec plusieurs plissements à géométries aléatoires

Pour ce deuxième exemple, nous allons étudier un composite unidirectionnel UD  $[0^\circ]$  carbone/époxy contenant trois plissements à géométries aléatoires. La géométrie de ce composite est obtenue à partir d'une observation d'une coupe transverse dans le plan illustrée sur la figure 4.28. En se basant sur cette observation, nous proposons la modélisation présentée sur la figure 4.29. Chaque plissement est caractérisé par sa hauteur  $A_i$  et sa largeur  $L_i$  où l'indice  $i$  fait référence à un plissement particulier. En se basant sur l'observation de la figure 4.28(a), et afin de réduire le nombre de variables aléatoires d'entrée du problème, nous proposons de corrélérer les hauteurs  $A_2$  et  $A_3$  et les largeurs  $L_2$  et  $L_3$  aux hauteur  $A_1$  et largeur  $L_1$  telles que :  $A_1 = \frac{1}{3}A_1$ ,  $A_2 = \frac{2}{3}A_1$  et  $L_2 = L_3 = \frac{2}{3}L_1$ . La gestion du désalignement des fibres dû à la présence de ces plissements est gérée avec la stratégie présentée dans la section 2.4.1. La figure 4.30 illustre la décomposition en sous-domaines retenue pour cette étude.

Les propriétés des matériaux constituant ce composite, issues de [Leong *et al.*, 2012], sont données dans le tableau 4.4.

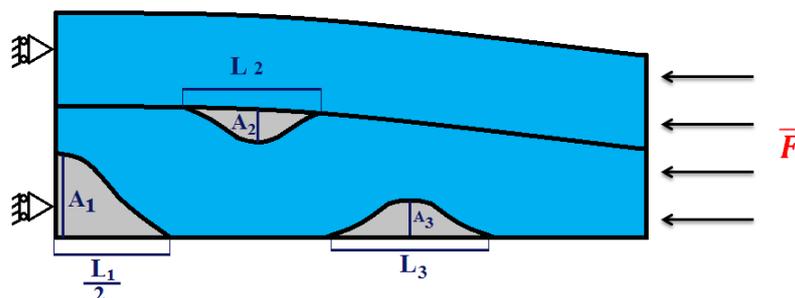


FIGURE 4.29 – Conditions aux limites du problème.

Cet échantillon est soumis à un effort de compression dans le plan avec une contrainte appliquée de  $-200 \text{ MPa}$ , et des conditions aux limites de symétrie sont imposées (*cf.* figure 4.29) afin de simplifier la résolution numérique du problème. Les variables aléatoires d'entrée sont identiques à celles du problème précédent et telles que  $L \in U(30 \text{ mm}, 150 \text{ mm})$  et  $A \in U(5 \text{ mm}, 20 \text{ mm})$ . L'approximation stochastique est également basée sur un

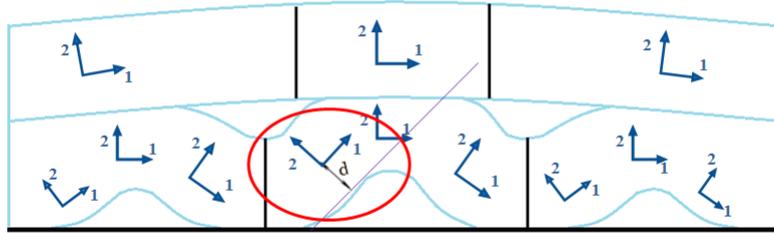


FIGURE 4.30 – Décomposition en sous-domaines d'un UD  $[0^\circ]$  afin de tenir compte de la désorientation des fibres.

	$E_1/E_2$ [GPa]	$\nu_{12}$
<b>UD<math>[0^\circ]</math> carbone/époxy</b>	123.5 / 7.6	0.28
<b>Epoxy</b>	3 / 3	0.3

Tableau 4.4 – Propriétés élastiques des matériaux constituant le composite carbone/époxy avec trois plissements [Leong *et al.*, 2012].

chaos polynomial généralisé de degré  $p = 3$  composé de polynômes de Legendre multidimensionnels. L'objectif de cette étude est de déterminer l'influence de l'aléa de la géométrie des plissements sur le comportement du composite.

Les figures 4.21, 4.22 et 4.23 montrent les surfaces de réponses, les fonctions de densité de probabilité (PDF) et les fonctions de répartition (CDF) des contraintes locales maximales  $|\sigma_{11}^{min}|$ ,  $\sigma_{22}^{max}$  et  $\sigma_{12}^{max}$ . La surface de réponse de  $|\sigma_{11}^{min}|$  (contrainte dans la direction de la sollicitation) illustrée sur la figure 4.31(a) montre que cette quantité augmente quand la largeur du plissement diminue et sa hauteur augmente. Nous observons également une zone où les niveaux de contrainte sont compris entre 400 MPa et 1100 MPa (zone en bleu). Cette même zone se retrouve sur la PDF représentée sur la figure 4.31(b) conduisant à une forte probabilité de trouver des valeurs dans cet intervalle ( $P(400 \text{ MPa} \leq |\sigma_{11}^{min}| \leq 1100 \text{ MPa}) = 0.76$ ). À partir des PDF et CDF, on peut estimer que la probabilité que la contrainte  $|\sigma_{11}^{min}|$  dépasse les 2 GPa est de 0.011%. En outre, une variabilité importante a été observée pour cette quantité avec un coefficient de variation égal à 40%.

La surface de réponse de la contrainte  $\sigma_{22}^{max}$  révèle que le comportement de cette contrainte est semblable à celui de  $|\sigma_{11}^{min}|$  (*cf.* figure 4.32(a)). La probabilité de trouver une valeur de cette quantité supérieure à 150 MPa est non négligeable avec  $P(\sigma_{22}^{max} \geq 150 \text{ MPa}) = 0.1$ . Enfin, Le coefficient de variation de cette quantité est égal à 87%. Cette variabilité est très importante comparée à la variabilité que nous avons pour la hauteur et la largeur en entrée : ce coefficient est en effet deux fois plus élevé.

La surface de réponse de la contrainte  $\sigma_{12}^{max}$  montre que cette quantité augmente quand la hauteur augmente et la largeur diminue (*cf.* figure 4.33(a)). La probabilité de trouver une valeur de cette contrainte supérieure à 100 MPa est  $P(\sigma_{12}^{max} \geq 100 \text{ MPa}) = 0.1$ . On

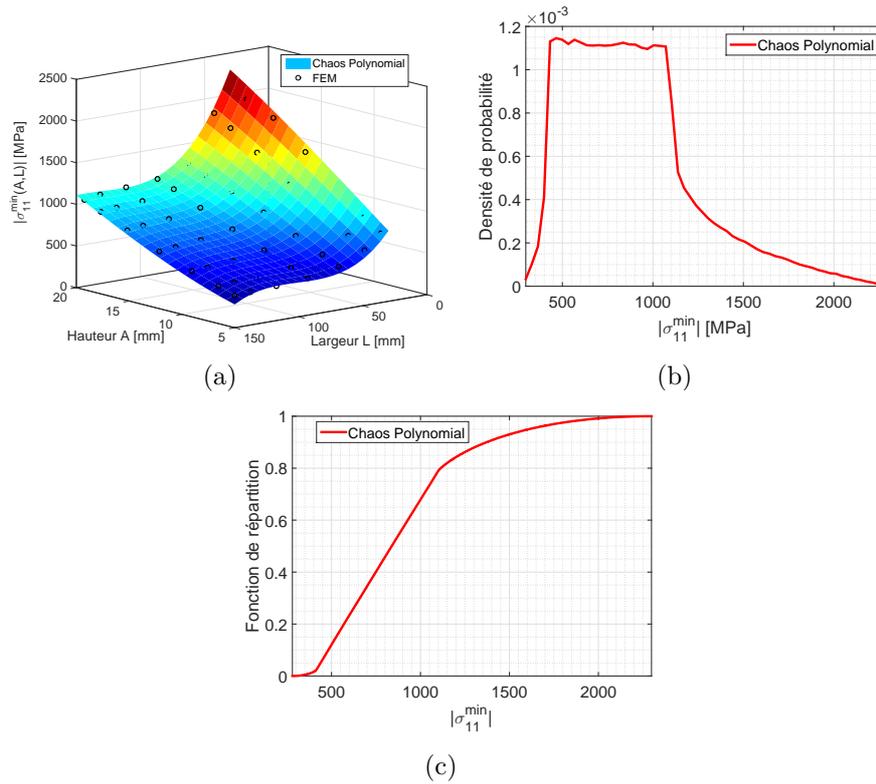


FIGURE 4.31 – (a) Surface de réponse de la contrainte  $|\sigma_{11}^{min}|$  (b) fonction de densité de probabilité (c) fonction de répartition.

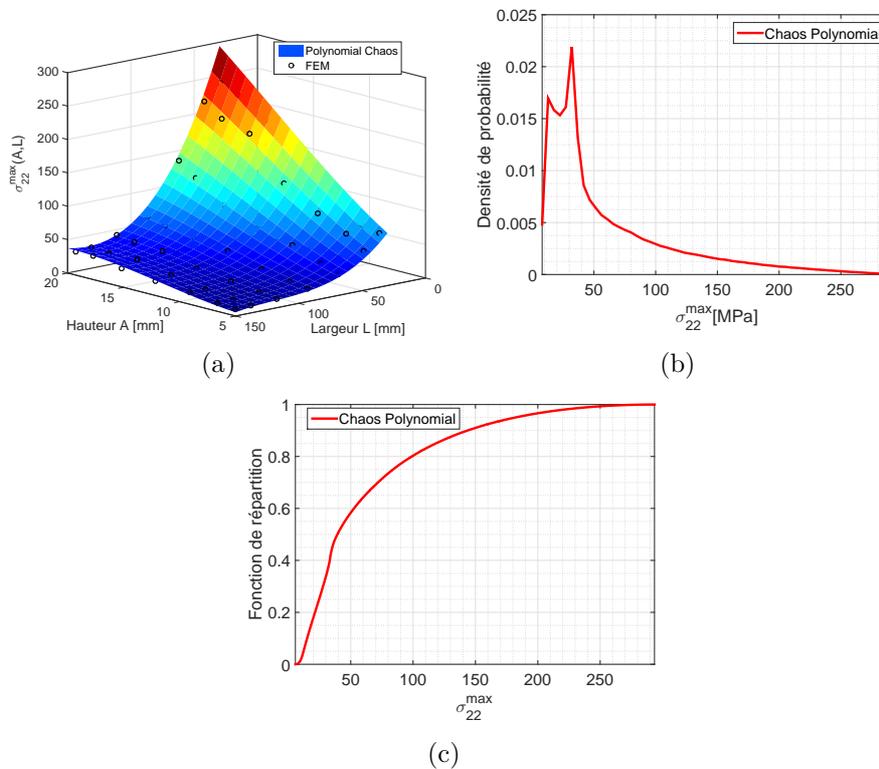


FIGURE 4.32 – (a) Surface de réponse de la contrainte  $\sigma_{22}^{max}$  (b) fonction de densité de probabilité (c) fonction de répartition.

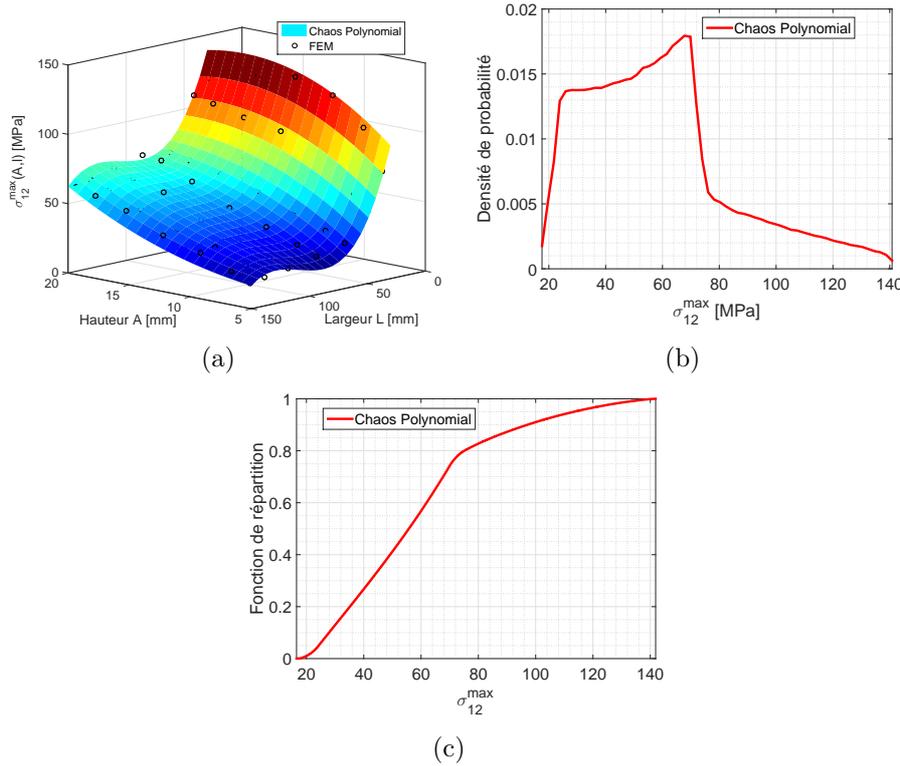


FIGURE 4.33 – (a) Surface de réponse de la contrainte  $\sigma_{12}^{max}$  (b) fonction de densité de probabilité (c) fonction de répartition.

peut également noter, comme pour la contrainte  $|\sigma_{11}^{min}|$ , une variabilité importante avec un coefficient de variation  $CoV = 44.5\%$ .

Nous nous intéressons maintenant aux résultats probabilistes des déplacements  $|u_1^{min}|$  dans la direction de la compression et  $u_2^{max}$  dans la direction transverse à la compression. Les résultats obtenus sont illustrés sur les figures 4.34 et 4.35.

La surface de réponse de  $|u_1^{min}|$  indique une augmentation de cette quantité quand la hauteur augmente. Toutefois, la largeur du plissement a un faible impact sur cette quantité. De plus, on peut voir sur les PDF et CDF de cette quantité illustrées sur les figures 4.34(b) et 4.34(c) que la probabilité de trouver une valeur de cette quantité supérieure à  $1.5 \text{ mm}$  est  $P(|u_1^{min}| \geq 1.5 \text{ mm}) = 0.18$ . Il convient de noter la variabilité assez importante sur cette quantité par rapport à la variabilité en entrée avec un  $CoV = 33.6\%$ .

Comme nous pouvons le voir sur la surface de réponse figure 4.35(a),  $u_2^{max}$  augmente avec la hauteur du plissement. Nous constatons que la probabilité de trouver une valeur de cette quantité supérieure à  $0.25 \text{ mm}$  est  $P(|u_1^{min}| \geq 0.25 \text{ mm}) = 0.05$ . Enfin, on note une variabilité très importante pour cette quantité avec un coefficient de variation  $CoV = 86\%$ . Cette variabilité est très importante comparée à la variabilité que nous avons en entrée pour la hauteur ( $CoV = 38 \%$ ) et la largeur ( $CoV = 34.64 \%$ ).

Pour conclure cet exemple, nous proposons d'étudier l'endommagement du matériau à l'aide du critère de rupture de Puck. Les propriétés du matériau utiles à ce critère pro-

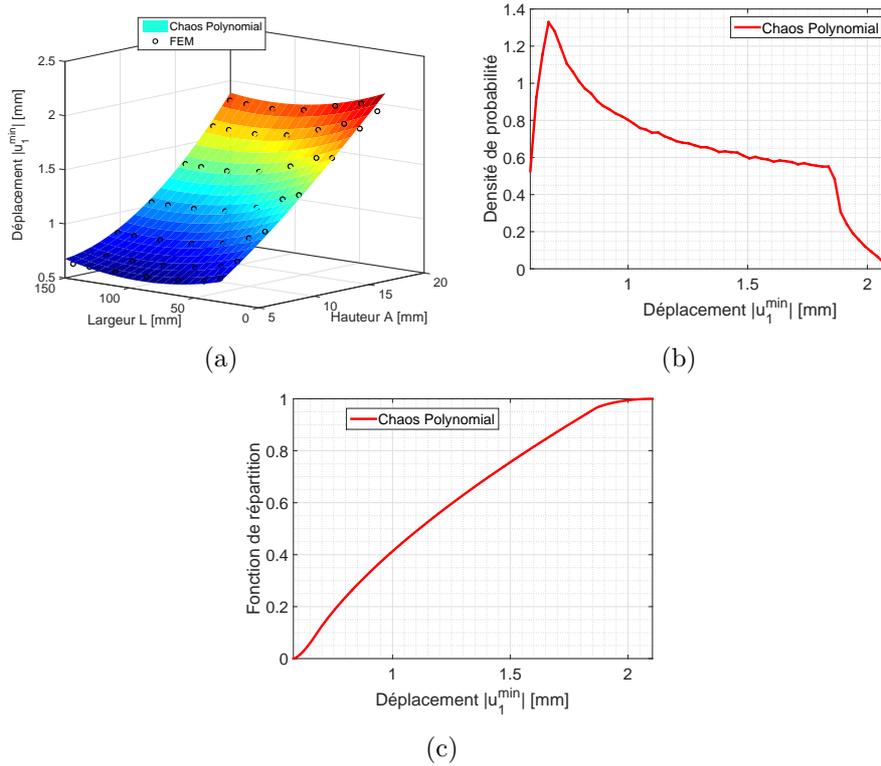


FIGURE 4.34 – (a) Surface de réponse du déplacement  $|u_1^{min}|$  en fonction de la hauteur  $A$  et la largeur  $L$  du plissement (b) PDF du déplacement  $|u_1^{min}|$  (c) CDF de  $|u_1^{min}|$ .

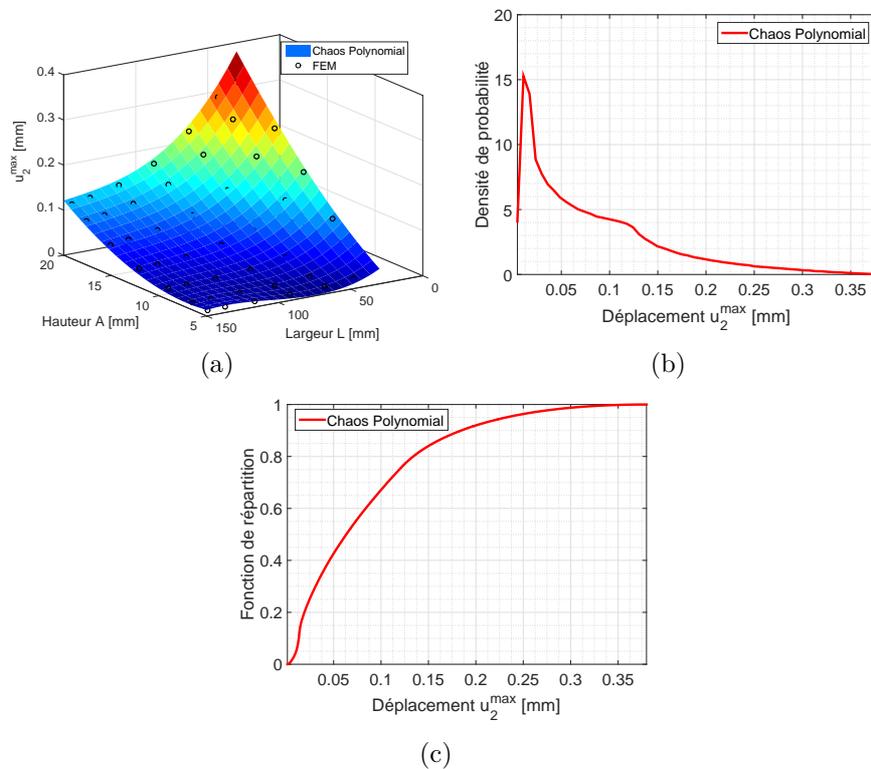


FIGURE 4.35 – (a) Surface de réponse du déplacement  $u_2^{max}$  en fonction de la hauteur  $A$  et la largeur  $L$  du plissement (b) PDF du déplacement  $u_2^{max}$  (c) CDF de  $u_2^{max}$ .

### 4.3. Études du défaut de plissement

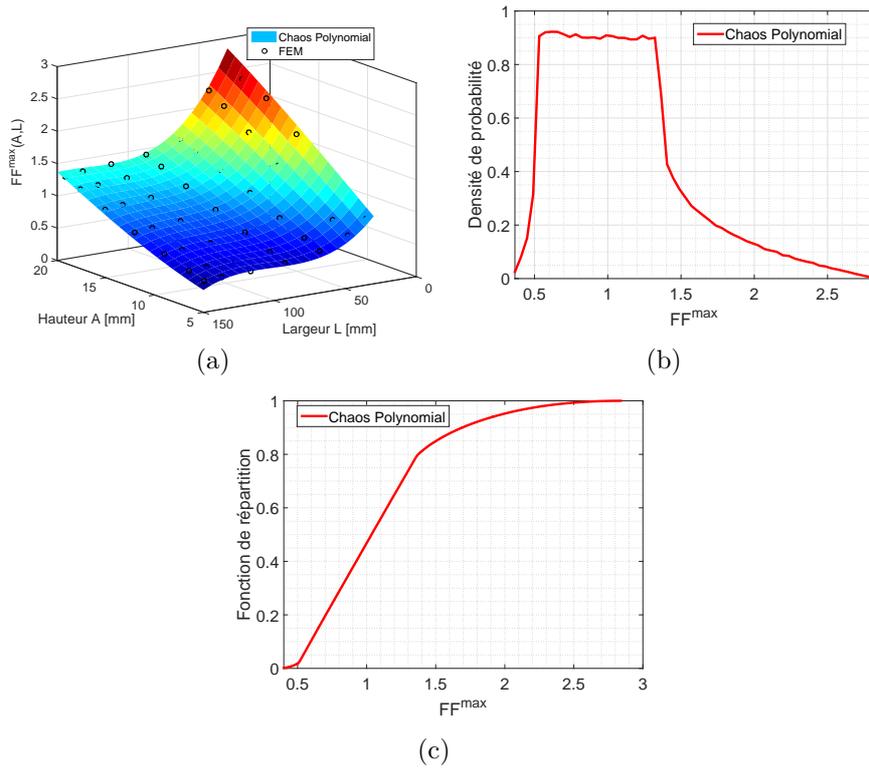


FIGURE 4.36 – (a) Surface de réponse du critère de rupture de Puck pour les fibres (FF) (b) Fonction de densité de probabilité de FF (c) fonction de répartition de FF.

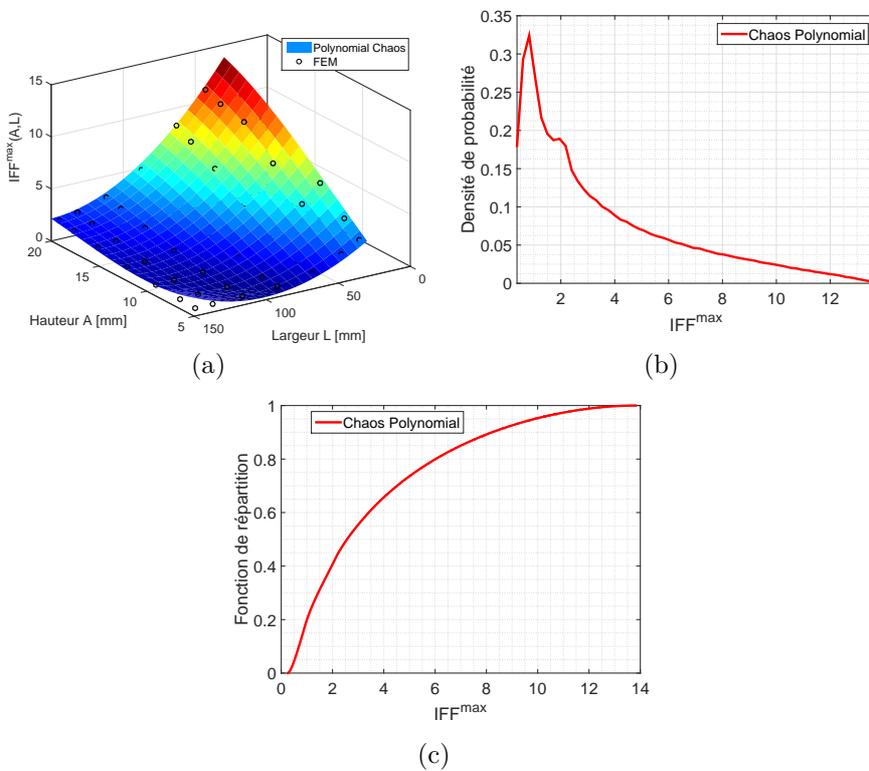


FIGURE 4.37 – (a) Surface de réponse du critère de rupture de Puck pour la matrice (IFF) (b) Fonction de densité de probabilité de IFF (c) fonction de répartition de IFF.

viennent de la littérature et sont données dans le tableau 4.5.

	$R_{\parallel}^t/R_{\parallel}^c$ [MPa]	$R_{\perp}^t/R_{\perp}^c$ [MPa]	$R_{\perp}^A$ [MPa]	$P_{\perp\parallel}^c$	$P_{\perp\perp}^c$
<i>UD(carbone/époxy)</i>	1384 / 810	23 / 120	10	0.3	0.3

Tableau 4.5 – Propriétés matériau utilisées pour le critère de rupture de Puck [Leong *et al.*, 2012, Puck et Schürmann, 1998].

Les figures 4.36 et 4.37 illustrent les résultats probabilistes de ce critère. La surface de réponse figure 4.36(a) révèle que la rupture au sein des fibres a lieu quand la hauteur du plissement augmente et la largeur diminue. La probabilité de trouver une rupture des fibres est  $P(FF \geq 1) = 0.53$  (*cf.* figures 4.36(b) et 4.36(c)). Le coefficient de variation de cette quantité est égal à 40%, ce qui représente une variabilité importante et légèrement plus élevée que celle des variables aléatoires d'entrée.

En ce qui concerne la rupture matricielle, nous observons à partir de la surface de réponse figure 4.37(a) que le comportement de cette quantité est semblable à celui de la contrainte  $\sigma_{12}^{max}$ . La fonction de densité de probabilité et la fonction de répartition indiquent que nous avons une forte probabilité d'avoir une rupture matricielle avec  $P(IFF \geq 1) = 0.8$ . Enfin, il convient de noter la variabilité très importante pour ce mode de rupture avec un coefficient de variation de l'ordre de 83%.

### 4.3.2 Bilan des études réalisées

Dans cette partie, nous avons présenté deux études numériques prenant en compte l'aléa de la géométrie du défaut de plissement à travers sa hauteur et sa largeur afin de déterminer l'impact que cet aléa pouvait potentiellement avoir sur le comportement du composite. Le premier exemple, concernant un composite avec un seul plissement aléatoire, nous a permis de montrer que ces deux paramètres jouaient un rôle important sur le comportement mécanique de la pièce composite. Nous avons constaté une variabilité importante sur les déplacements et les contraintes locales confirmant le constat précédent. Enfin, d'un point de vue rupture, seule la rupture matricielle a été relevé dans cet exemple avec une probabilité  $P = 0.21$ .

Le deuxième exemple numérique, présentant plusieurs plissements à géométries aléatoires dans un composite, nous a permis d'illustrer l'effet que pouvait avoir le cumul de défauts de plissement dans ce composite. Nous avons constaté une variabilité très importante sur les contraintes locales dans la direction transverse à la sollicitation, et une variabilité importante sur les contraintes locales dans la direction de la sollicitation. Nous avons également constaté une variabilité très importante sur les déplacements dans la direction de la sollicitation et une variabilité importante sur les déplacements dans la direction transverse à la sollicitation. De plus, l'application du critère de Puck à ce problème a conduit à une forte probabilité de rupture des fibres et de rupture matricielle en fonction de la largeur et de la hauteur des plissements.

## 4.4 Conclusion intermédiaire

Nous avons présenté dans ce chapitre des études dans un cadre stochastique qui nous ont permis de mettre en évidence l'impact de l'aléa des défauts étudiés sur le comportement mécanique du matériau composite. La modélisation probabiliste, permettant de considérer les incertitudes sur le taux de porosités et la forme du plissement, est basée sur une vision paramétrique du problème. Le calcul probabiliste est basé sur la technique de décomposition spectrale avec la méthode de projection L2.

Nous nous sommes tout d'abord intéressés aux défauts de porosités. Nous avons proposé une analyse de l'impact de l'aléa du taux de porosités sur le comportement du matériau à l'échelle microscopique et à l'échelle macroscopique. Cette étude stochastique a conduit à la caractérisation des propriétés apparentes, car aléatoires, du milieu équivalent. Cette étude a montré que l'aléa sur ces propriétés apparentes était nettement plus faible que sur le taux de porosités aléatoire d'entrée.

Nous nous sommes ensuite intéressés aux macroporosités représentées par une ellipse. Nous avons mené une étude stochastique à l'échelle macroscopique prenant en compte l'aléa sur la géométrie de la macroporosité en considérant la longueur de son axe horizontale et le rapport entre les longueurs des deux axes comme des variables aléatoires indépendantes. Nous avons ainsi pu relever une variabilité importante sur les quantités locales telles que les déplacements dans la direction de la sollicitation et la direction transverse à la sollicitation. Nous avons également constaté une variabilité importante sur la contrainte globale suivant le sens de la sollicitation comparée à la variabilité imposée sur le taux de porosité en entrée. De plus, nous avons constaté une forte probabilité d'aboutir à une rupture matricielle dans le composite. Ceci confirme donc l'importance de la prise en compte de l'aléa des macroporosités sur le comportement du composite.

En ce qui concerne le défaut de plissement, l'étude a été réalisée à l'échelle du pli ou du stratifié. L'étude proposée a montré à travers les deux exemples que les performances mécaniques du composite pouvaient être impactées significativement par ce défaut. En effet, pour le premier exemple, nous avons constaté une variabilité assez importante sur les déplacements et une variabilité importante sur les contraintes locales. Pour le deuxième exemple numérique, nous avons constaté d'une part une variabilité très importante sur les contraintes locales dans la direction transverse à la sollicitation et les déplacements dans cette même direction, et d'autre part une variabilité importante sur les contraintes locales et les déplacements dans la direction de la sollicitation. L'utilisation du critère de rupture de Puck pour ce problème a conduit aux mêmes conclusions avec des probabilités de rupture importantes. En outre, cette probabilité de rupture devient plus importante en présence de plusieurs plissements comme l'a montré le second exemple.

Ainsi, l'impact des défauts sur le comportement du composite est bien présent et varie en fonction de l'importance de l'échelle à laquelle on se place mais aussi de la configura-

## **Chapitre 4. Études numériques des défauts de porosités et de plissement dans un cadre incertain**

---

tion choisie (un ou plusieurs plissements/ macroporosités ou microporosités). La prise en compte des différentes sources d'aléa en entrée dans le modèle est donc nécessaire pour garantir des résultats fiables.

# Conclusion générale

## 4.5 Conclusions

L'objectif scientifique principal de cette étude est de proposer des méthodes robustes permettant de caractériser l'impact de l'aléa des défauts de porosités et de plissement sur la tenue mécanique d'une pièce/structure composite utilisée dans des applications aéronautique ou EMR. Ces avancées permettront de favoriser la réduction du nombre de pièces déclassées ou rebutées pour cause de taux de porosités trop important ou pour présence de plissements. À terme, cela permettra de diminuer les coûts de production et de répondre aux principales interrogations industrielles sur la conformité d'une pièce structurale composite : quels défauts sont admissibles à l'issue de la fabrication pour assurer, en service, l'intégrité de la pièce ?

Nous avons dressé un état de l'art nous permettant de comprendre les causes et les conséquences de la présence de défauts de plissement et de porosités issus des procédés d'élaboration des matériaux composites. Nous avons constaté que le défaut de porosités est lié essentiellement à l'emprisonnement de poches d'air durant le procédé de fabrication. En effet, les paramètres du procédé tels que la température ou la vitesse d'infusion de la résine influent sur le nombre et la taille de ces poches.

Le défaut de plissement est lié au drapage de grandes pièces composites. La vitesse de drapage ou la géométrie de la pièce sont des paramètres qui jouent un rôle important dans ce mécanisme. La prédiction du développement des défauts est alors très complexe d'autant plus qu'ils sont souvent soumis à une variabilité significative. En outre, les propriétés mécaniques peuvent être fortement affectées par la présence de ces défauts. La prise en compte des effets de la variabilité des défauts sur le comportement de la pièce composite est alors indispensable.

Nous nous sommes ainsi concentrés sur la modélisation mécano-probabiliste des défauts. Nous avons adopté une vision paramétrique des incertitudes consistant à représenter le contenu probabiliste à travers un ensemble fini de variables aléatoires. De plus, nous nous sommes particulièrement intéressés à la propagation des incertitudes basée sur des méthodes spectrales stochastiques telles que la méthode de projection  $L2$  qui fait partie des techniques dites non intrusives. Ces méthodes ne nécessitent que l'utilisation de solveurs déterministes, tels que les logiciels classiques basés sur une approximation éléments finis,

## Chapitre 4. Études numériques des défauts de porosités et de plissement dans un cadre incertain

---

et permettent facilement le calcul parallèle ce qui les rend très attractives. On notera aussi l'effort important qui a été fourni afin de mettre en place une procédure de couplage du logiciel Matlab<sup>®</sup>, pilotant la partie probabiliste, et du logiciel éléments finis Abaqus<sup>®</sup>, permettant de résoudre le problème mécanique. La communication entre ces deux logiciels se fait alors via des scripts Python.

Chaque défaut a nécessité des développements différents en fonction de ses spécificités. Pour le problème de porosités, nous avons proposé une étude stochastique partant de l'échelle microscopique permettant ainsi de quantifier l'impact des porosités, représentées par des vides, contrôlées par un taux aléatoire, sur les champs mécaniques. Les essais expérimentaux réalisés dans le cadre du projet SIMSCEF nous ont permis d'identifier cette variable aléatoire et la loi log-normale s'est révélée être une bonne candidate.

Les résultats de l'étude à cette échelle ont révélé que les coefficients de variation des différentes quantités mécaniques locales et globales étaient assez faibles comparées à ceux que nous avons pour le taux de porosités d'entrée. Ceci indique que, pour le problème considéré et le modèle associé, l'influence de la porosité est modeste à cette échelle.

Afin de prédire le comportement du matériau à une échelle supérieure, pour laquelle la représentation des deux constituants devient difficile, nous avons montré comment se ramener à un Milieu Homogène Equivalent dans lequel les propriétés effectives sont déterminées par homogénéisation numérique. Les résultats obtenus dans le cas déterministe ont démontré le bon comportement de l'approche. Par la suite, pour prendre en compte le caractère aléatoire des porosités, nous avons réalisé une étude stochastique en se basant sur le même problème mécanique. Ceci a conduit à la simulation des propriétés apparentes aléatoires, du milieu équivalent. Cette étude, où les incertitudes sont modélisées par des variables aléatoires et leur propagation effectuée par une approche spectrale, a montré une variabilité très importante sur le coefficient de Poisson apparent comparée à celle sur le taux de porosités aléatoire d'entrée. En revanche, nous avons obtenu une variabilité très faible sur le module de Young qui pouvait être considéré déterministe.

Nous nous sommes focalisés dans un deuxième temps sur les macroporosités aléatoires et leurs effets sur le comportement d'un pli composite unidirectionnel à 90°. Le travail a été réalisé cette fois à l'échelle des plis et l'aléa portait sur la géométrie de la macroporosité. Nous avons utilisé une représentation paramétrique de l'ellipse vide représentant la macroporosité où les longueurs de ses deux axes ont été modélisées par des variables aléatoires identifiées à l'aide des résultats expérimentaux obtenus au cours du projet SIMSCEF.

Cette étude numérique, prenant en compte l'aléa sur la géométrie de la macroporosité, a dévoilé une variabilité importante sur les différentes quantités mécaniques. De plus, nous avons constaté, à l'aide du critère de Puck, une forte probabilité d'avoir une rupture matricielle dans le composite au voisinage du vide représentant la macroporosité.

Pour le problème de plissement, l'étude a été réalisée à l'échelle du pli ou du stratifié. Nous avons proposé une représentation explicite du plissement paramétré par son ampli-

tude et sa largeur et suivant une forme sinusoïdale. Par ailleurs, nous avons proposé une décomposition en sous-domaines de la zone proche du plissement afin de tenir compte de la désorientation des fibres engendrée par la présence de ce défaut. La modélisation probabiliste, permettant de considérer les incertitudes sur la forme du plissement, était également basée sur une vision paramétrique du problème. L'étude proposée a montré que les champs mécaniques pouvaient être impactés significativement par ce défaut, en particulier si son amplitude était importante et sa largeur faible. L'application du critère de Puck a révélé un risque de rupture matricielle important dans les zones situées à proximité du plissement.

## 4.6 Perspectives

Pour conclure ce mémoire, nous proposons de discuter plusieurs pistes de réflexion qui pourront servir à améliorer le présent travail dans de futurs travaux.

Dans ce mémoire, nous avons travaillé dans le cadre de l'élasticité linéaire. En effet, dans une première phase de conception, la théorie élastique linéaire permet d'effectuer le dimensionnement des structures composites. Néanmoins, il faut bien noter que le comportement mécanique des structures composites stratifiées n'est pas toujours linéaire jusqu'à la phase ultime de la rupture. En particulier, les empilements constitués de couches désorientées présentent généralement un comportement non linéaire dès que le chargement dépasse une valeur critique à partir de laquelle les dégradations s'accroissent. Une première piste serait donc d'étendre les études réalisées dans le cadre de ce mémoire dans le cadre de comportement non linéaire.

Nous nous intéressons à présent au défaut de porosités. A l'échelle microscopique, nous avons considéré une répartition uniforme des porosités et des fibres dans la microstructure. Cependant, dans la réalité, cette répartition peut être très aléatoire et le matériau composite peut comporter des zones riches ou pauvres en fibres et en porosités dues à son procédé de fabrication. D'un point de vue global, la réponse du composite est la même. D'un point de vue local, la répartition aléatoire peut engendrer des zones de concentration de contrainte qui pourraient favoriser la rupture de la matrice. De plus, nous avons fait le choix de représenter les porosités sous forme de vides circulaires. Une autre alternative intéressante serait de prendre en compte des formes aléatoires observées usuellement dans ces matériaux.

Concernant l'étude à l'échelle macroscopique, nous avons proposé une étude avec une seule macroporosité aléatoire. Or, il semblerait intéressant d'étudier le cas plus réaliste où plusieurs porosités peuvent interagir.

Dans le cas du défaut de plissement, pour avoir les résultats les plus précis et réalistes, il sera nécessaire de prendre en considération les effets de "compression" locale qui peuvent

## Chapitre 4. Études numériques des défauts de porosités et de plissement dans un cadre incertain

---

apparaître conduisant à des fractions volumiques de fibres plus importantes dans certaines zones et notamment dans la zone située au-dessus du plissement.

En outre, les résultats de la caractérisation expérimentale du défaut de plissement sont arrivés tardivement dans le projet SIMSCEF. Il ne nous a alors pas été possible de confronter et de corrélérer ces résultats à ceux obtenus par les simulations numériques déterministes et stochastiques. Ce point important pourra être réalisé prochainement puisque l'ensemble des données et des méthodes sont disponibles.

Des résultats de caractérisation en fatigue pour les deux types de défauts ont aussi été fournis, cette étude pourra donc être étendue en fatigue. Une étude permettant de déterminer la durée de vie des pièces structurales intégrant des défauts issus des procédés d'élaboration pourra donc être menée.

On outre, dans le cadre du projet, nous nous sommes intéressés uniquement au comportement mécanique du composite, il serait pertinent de s'intéresser au comportement hygro-mécanique ou thermo-mécanique des matériaux composites avec défauts. Une description complète du comportement de la structure pourra être obtenue grâce à ces études et permettra de mieux juger l'intégrité des pièces.

Pour conclure, il reste énormément de travail à accomplir afin de mieux appréhender le comportement des matériaux composites avec défauts de fabrication comme nous avons pu le constater dans cette partie. Les éléments proposés pour poursuivre les recherches sur cette thématique ne sont fournis qu'à titre indicatif et ne sont en aucun cas une liste exhaustive. Le travail réalisé dans le cadre de ce mémoire a permis de fournir une base solide qui pourra servir ensuite dans d'autres études. Cependant, la prise en compte de tous ces sujets simultanément risque d'être une tâche ardue occupant la communauté scientifique encore de nombreuses années.

# Bibliographie

- [Adams et Hyer, 1993] ADAMS, D. O. et HYER, M. (1993). Effects of layer waviness on the compression strength of thermoplastic composite laminates. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 12(4):414–429. (cité p. 17, 18, 19, 22, 55, 141)
- [Asp et Brandt, 1997] ASP, L. E. et BRANDT, F. (1997). A carbon/epoxy composite. In *Proceedings of the 11th International Conference on Composite Materials : Fatigue, Fracture and Ceramic Matrix Composites*, volume 2, page 322. Woodhead Publishing. (cité p. 12)
- [Azzi et Tsai, 1965] AZZI, V. et TSAI, S. (1965). Anisotropic strength of composites. *Experimental mechanics*, 5(9):283–288. (cité p. 39)
- [Babuška et Chatzipantelidis, 2002] BABUŠKA, I. et CHATZIPANTELIDIS, P. (2002). On solving elliptic stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(37):4093–4122. (cité p. 78)
- [Babuška et Chleboun, 2002] BABUŠKA, I. et CHLEBOUN, J. (2002). Effects of uncertainties in the domain on the solution of neumann boundary value problems in two spatial dimensions. *Mathematics of Computation*, 71(240):1339–1370. (cité p. 79)
- [Beakou *et al.*, 2011] BEAKOU, A., CANO, M., LE CAM, J.-B. et VERNEY, V. (2011). Modelling slit tape buckling during automated prepreg manufacturing : A local approach. *Composite structures*, 93(10):2628–2635. (cité p. 18)
- [Berthelot, 1999] BERTHELOT, J.-M. (1999). Matériaux composites. *Edition TEC et DOC, Paris*,. (cité p. 6, 147)
- [Berveiller, 2005] BERVEILLER, M. (2005). Stochastic finite elements : intrusive and non intrusive methods for reliability analysis. *Unpublished doctoral dissertation, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand*. (cité p. 82)
- [Binétruy, 2004] BINÉTRUY, C. (2004). Physique du moulage des composites avancés : aspects théoriques. *Techniques de l'ingénieur. Plastiques et composites*. (cité p. 8, 9, 141)
- [Blatman, 2009] BLATMAN, G. (2009). *Adaptive sparse polynomial chaos expansions for uncertainty propagation and sensitivity analysis*. Thèse de doctorat, Clermont-Ferrand 2. (cité p. 82)
- [Blatman et Sudret, 2008] BLATMAN, G. et SUDRET, B. (2008). Sparse polynomial chaos expansions and adaptive stochastic finite elements using a regression approach. *Comptes Rendus Mécanique*, 336(6):518–523. (cité p. 82)

## Bibliographie

---

- [Bloom *et al.*, 2013] BLOOM, L., WANG, J. et POTTER, K. (2013). Damage progression and defect sensitivity : an experimental study of representative wrinkles in tension. *Composites Part B : Engineering*, 45(1):449–458. (cité p. 20)
- [Bornert, 2001] BORNERT, M. (2001). Homogénéisation des milieux aléatoires : bornes et estimations. (cité p. 33)
- [Bossi *et al.*, 1990] BOSSI, R. H., COOPRIDER, K. K. et GEORGESON, G. E. (1990). X-ray computed tomography of composites. Rapport technique, DTIC Document. (cité p. 21)
- [Bowles et Frimpong, 1992] BOWLES, K. J. et FRIMPONG, S. (1992). Void effects on the interlaminar shear strength of unidirectional graphite-fiber-reinforced composites. *Journal of composite materials*, 26(10):1487–1509. (cité p. 11)
- [Bradley *et al.*, 1998] BRADLEY, D. J., ADAMS, D. O. et GASCOIGNE, H. E. (1998). Interlaminar strains and compressive strength reductions due to nested layer waviness in composite laminates. *Journal of reinforced plastics and composites*, 17(11):989–1011. (cité p. 19, 23, 24, 142)
- [Breard *et al.*, 2003] BREARD, J., SAOUAB, A. et BOUQUET, G. (2003). Numerical simulation of void formation in lcm. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 34(6):517–523. (cité p. 9, 14)
- [Cafilisch, 1998] CAFLISCH, R. E. (1998). Monte carlo and quasi-monte carlo methods. *Acta numerica*, 7:1–49. (cité p. 72, 75)
- [Caiazzo *et al.*, 2001] CAIAZZO, A., ORLET, M., MCSHANE, H., STRAIT, L. et RACHAU, C. (2001). The effects of marcel defects on composite structural properties. *In Composite structures : theory and practice*. ASTM International. (cité p. 18)
- [Cameron et Martin, 1947] CAMERON, R. H. et MARTIN, W. T. (1947). The orthogonal development of non-linear functionals in series of fourier-hermite functionals. *Annals of Mathematics*, pages 385–392. (cité p. 82)
- [Campbell, 2004] CAMPBELL, F. (2004). *Manufacturing processes for advanced composites*. Elsevier Science. (cité p. 7)
- [Chambers *et al.*, 2006] CHAMBERS, A., EARL, J., SQUIRES, C. et SUHOT, M. (2006). The effect of voids on the flexural fatigue performance of unidirectional carbon fibre composites developed for wind turbine applications. *International Journal of Fatigue*, 28(10):1389–1398. (cité p. 12)
- [Chamis, 1969] CHAMIS, C. (1969). Failure criteria for filamentary composites. *In Composite Materials : Testing and Design*. ASTM International. (cité p. 39)
- [Chekanov *et al.*, 1995] CHEKANOV, Y. A., KOROTKOV, V., ROZENBERG, B., DHZAVADYAN, E. et BOGDANOVA, L. (1995). Cure shrinkage defects in epoxy resins. *Polymer*, 36(10):2013–2017. (cité p. 8)
- [Chen *et al.*, 2015] CHEN, D., ARAKAWA, K. et XU, C. (2015). Reduction of void content of vacuum-assisted resin transfer molded composites by infusion pressure control. *Polymer Composites*, 36(9):1629–1637. (cité p. 9)

- [Chiao, 1996] CHIAO, R. Y. (1996). System and method for detecting ply wrinkling in a laminated composite. US Patent 5,554,808. (cité p. 21)
- [Choi *et al.*, 2004a] CHOI, S.-K., GRANDHI, R. V. et CANFIELD, R. A. (2004a). Structural reliability under non-gaussian stochastic behavior. *Computers & structures*, 82(13): 1113–1121. (cité p. 81)
- [Choi *et al.*, 2004b] CHOI, S.-K., GRANDHI, R. V., CANFIELD, R. A. et PETTIT, C. L. (2004b). Polynomial chaos expansion with latin hypercube sampling for estimating response variability. *AIAA journal*, 42(6):1191–1198. (cité p. 81)
- [Christensen *et al.*, 2013] CHRISTENSEN, E., SJØLUND, J. et GLUD, J. (2013). *Formulation of Cohesive Finite Element for Analysing Strength of Wrinkles in Glass-Epoxy Laminates*. Thèse de doctorat, M. Sc. Thesis, Department of Mechanical and Manufacturing Engineering, Aalborg University, Denmark. (cité p. 24)
- [Çinar et Ersoy, 2015] ÇINAR, K. et ERSOY, N. (2015). Effect of fibre wrinkling to the spring-in behaviour of l-shaped composite materials. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 69:105–114. (cité p. 19)
- [Cinquin *et al.*, 2007] CINQUIN, J., TRIQUENAU, V. et ROUSNE, Y. (2007). Porosity influence on organic composite material mechanical properties. *In Proceedings of 16th International Conference on Composite Material, Japan*. (cité p. 11)
- [Clement, 2008] CLEMENT, A. (2008). *Éléments finis stochastiques étendus pour le calcul de structures à géométrie aléatoire : application à la prise en compte de la corrosion de structures en région littorale*. Thèse de doctorat, Université de Nantes. (cité p. 83, 144)
- [Cloetens *et al.*, 1997] CLOETENS, P., PATEYRON-SALOMÉ, M., BUFFIERE, J., PEIX, G., BARUCHEL, J., PEYRIN, F. et SCHLENKER, M. (1997). Observation of microstructure and damage in materials by phase sensitive radiography and tomography. *Journal of Applied Physics*, 81(9):5878–5886. (cité p. 14)
- [Costa *et al.*, 2001] COSTA, M. L., DE ALMEIDA, S. f. M. et REZENDE, M. C. (2001). The influence of porosity on the interlaminar shear strength of carbon/epoxy and carbon/-bismaleimide fabric laminates. *Composites Science and Technology*, 61(14):2101–2108. (cité p. 10, 11, 12)
- [Croft *et al.*, 2011] CROFT, K., LESSARD, L., PASINI, D., HOJJATI, M., CHEN, J. et YOUSEFPOUR, A. (2011). Experimental study of the effect of automated fiber placement induced defects on performance of composite laminates. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 42(5):484–491. (cité p. 18)
- [Day *et al.*, 1992] DAY, A. R., SNYDER, K., GARBOCZI, E. et THORPE, M. (1992). The elastic moduli of a sheet containing circular holes. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40(5):1031–1051. (cité p. 14)
- [De Almeida et Neto, 1994] DE ALMEIDA, S. F. M. et NETO, Z. d. S. N. (1994). Effect of void content on the strength of composite laminates. *Composite structures*, 28(2):139–148. (cité p. 11, 12)

## Bibliographie

---

- [De Parscau du Plessix *et al.*, 2016] DE PARSCAU DU PLESSIX, B., JACQUEMIN, F., LE-FÉBURE, P. et LE CORRE, S. (2016). Characterization and modeling of the polymerization-dependent moisture absorption behavior of an epoxy-carbon fiber-reinforced composite material. *Journal of Composite Materials*, 50(18):2495–2505. (cité p. 17)
- [Deb *et al.*, 2001] DEB, M. K., BABUŠKA, I. M. et ODEN, J. T. (2001). Solution of stochastic partial differential equations using galerkin finite element techniques. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(48):6359–6372. (cité p. 80, 82)
- [Demmel, 1997] DEMMEL (1997). Applied numerical linear algebra. (cité p. 80)
- [Dhatt *et al.*, 2005] DHATT, G., TOUZOT, G. et LEFRANÇOIS, E. (2005). *Méthode des éléments finis*. Lavoisier. (cité p. 68)
- [Di Paola, 2010] DI PAOLA, F. (2010). *Modélisation multi-échelles du comportement thermoélastique de composites à particules sphériques*. Thèse de doctorat, Thèse de Doctorat, Ecole Centrale Paris.[59]. (cité p. 36)
- [Diao *et al.*, 2016] DIAO, H., ROBINSON, P., WISNOM, M. R. et BISMARCK, A. (2016). Unidirectional carbon fibre reinforced polyamide-12 composites with enhanced strain to tensile failure by introducing fibre waviness. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 87:186–193. (cité p. 57)
- [Ditlevsen et Madsen, 1996] DITLEVSEN, O. et MADSEN, H. O. (1996). *Structural reliability methods*, volume 178. Wiley New York. (cité p. 72)
- [Divinis *et al.*, 2004] DIVINIS, N., KARAPANTSIOS, T. D., KOSTOGLU, M., PANOUTSOS, C., BONTOZOGLU, V., MICHELS, A., SNEEP, M., DE BRUIJN, R. et LOTZ, H. (2004). Bubbles growing in supersaturated solutions at reduced gravity. *AIChE journal*, 50(10):2369–2382. (cité p. 9)
- [Divinis *et al.*, 2005] DIVINIS, N., KOSTOGLU, M., KARAPANTSIOS, T. et BONTOZOGLU, V. (2005). Self-similar growth of a gas bubble induced by localized heating : the effect of temperature-dependent transport properties. *Chemical engineering science*, 60(6):1673–1683. (cité p. 21)
- [Dodwell *et al.*, 2014] DODWELL, T., BUTLER, R. et HUNT, G. (2014). Out-of-plane ply wrinkling defects during consolidation over an external radius. *Composites Science and Technology*, 105:151–159. (cité p. 18)
- [El-Hajjar et Petersen, 2011] EL-HAJJAR, R. F. et PETERSEN, D. R. (2011). Gaussian function characterization of unnotched tension behavior in a carbon/epoxy composite containing localized fiber waviness. *Composite structures*, 93(9):2400–2408. (cité p. 19)
- [Fernández-López *et al.*, 2014] FERNÁNDEZ-LÓPEZ, A., LARRAÑAGA-VALSERO, B. et GUEMES, A. (2014). Wrinkle detection with ultrasonic phased array technology. In *Proceedings of 6th International Symposium on NDT in Aerospace 2014*, pages 41–50. (cité p. 21, 141)

- [Frauenfelder *et al.*, 2005] FRAUENFELDER, P., SCHWAB, C. et TODOR, R. A. (2005). Finite elements for elliptic problems with stochastic coefficients. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 194(2):205–228. (cité p. 80)
- [Fu *et al.*, 2011] FU, S.-Y., MAI, Y.-W., DU, S.-Y., PARK, C. H. et WOO, L. (2011). Modeling void formation and unsaturated flow in liquid composite molding processes : a survey and review. *Journal of reinforced plastics and composites*, 30(11):957–977. (cité p. 9)
- [Garala, 1987] GARALA, H. (1987). Experimental evaluation of graphite-epoxy composite cylinders subjected to external hydrostatic compressive loading. In *Proceedings of the 1987 SEM Spring Conference on Experimental Mechanics*, pages 948–951. (cité p. 18)
- [Garala, 1989] GARALA, H. J. (1989). Structural evaluation of 8-inch diameter graphite-epoxy composite cylinders subjected to external hydrostatic compressive loading. *David Taylor Research Center, Report No. DTRC-89/016*. (cité p. 18)
- [Garnich et Karami, 2004] GARNICH, M. R. et KARAMI, G. (2004). Finite element micromechanics for stiffness and strength of wavy fiber composites. *Journal of Composite Materials*, 38(4):273–292. (cité p. 24)
- [Garnier *et al.*, 2011] GARNIER, C., PASTOR, M.-L., EYMA, F. et LORRAIN, B. (2011). The detection of aeronautical defects in situ on composite structures using non destructive testing. *Composite structures*, 93(5):1328–1336. (cité p. 12)
- [Gauthier, 2017] GAUTHIER, E. (2017). *Comportement mécano-fiabiliste de structures composites – approche matériaux*. Thèse de doctorat, Laboratoire Angevin de Mécanique, Procédés et innovAtion. (cité p. 25, 26, 41, 42, 49, 50, 92, 101, 142, 143)
- [Gay, 2005] GAY, D. (2005). *Matériaux composites*. Hermes science, 5 édition. (cité p. 7)
- [Gazo-Hanna *et al.*, 2009] GAZO-HANNA, E., CASARI, P., PERRONNET, A., LE LOCH, S. et POITOU, A. (2009). Caractérisation du procédé d’estampage de composites thermoplastiques à fibres longues= characterization of the thermostamping process of long fibres composites laminates. In *JNC 16*, pages 8–p. AMAC. (cité p. 20, 141)
- [Gélébart *et al.*, 2009] GÉLÉBART, L., CHATEAU, C. et BORNERT, M. (2009). Conditions aux limites mixtes normales. *19ème Congrès Français de Mécanique*, pages 24–28. (cité p. 37)
- [Ghanem et Spanos, 1991] GHANEM, R. et SPANOS, P. (1991). *Stochastic finite elements : a spectral approach*. Springer, Berlin. (cité p. 70, 78, 79, 82)
- [Grunenfelder et Nutt, 2010] GRUNENFELDER, L. et NUTT, S. (2010). Void formation in composite prepregs–effect of dissolved moisture. *Composites Science and Technology*, 70(16):2304–2309. (cité p. 17)
- [Hagstrand *et al.*, 2005] HAGSTRAND, P.-O., BONJOUR, F. et MÅNSON, J.-A. (2005). The influence of void content on the structural flexural performance of unidirectional glass fibre reinforced polypropylene composites. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 36(5):705–714. (cité p. 10, 11)

## Bibliographie

---

- [Hallander *et al.*, 2013] HALLANDER, P., AKERMO, M., MATTEI, C., PETERSSON, M. et NYMAN, T. (2013). An experimental study of mechanisms behind wrinkle development during forming of composite laminates. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 50:54–64. (cité p. 17, 18, 22, 25, 55, 141)
- [Harrison *et al.*, 2012] HARRISON, P., ABDIWI, F., GUO, Z., POTLURI, P. et YU, W. (2012). Characterising the shear–tension coupling and wrinkling behaviour of woven engineering fabrics. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 43(6): 903–914. (cité p. 19)
- [Hashin, 1980] HASHIN, Z. (1980). Failure criteria for unidirectional fiber composites. *Journal of applied mechanics*, 47(2):329–334. (cité p. 39)
- [Hashin et Rotem, 1973] HASHIN, Z. et ROTEM, A. (1973). A fatigue failure criterion for fiber reinforced materials. *Journal of composite materials*, 7(4):448–464. (cité p. 39)
- [Hasofer et Lind, 1974] HASOFER, A. M. et LIND, N. C. (1974). Exact and invariant second-moment code format. *Journal of the Engineering Mechanics division*, 100(1): 111–121. (cité p. 73)
- [Hayman *et al.*, 2007] HAYMAN, B., BERGGREEN, C. et PETERSSON, R. (2007). The effect of face sheet wrinkle defects on the strength of frp sandwich structures. *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 9(4):377–404. (cité p. 18, 22, 23, 27, 28, 142)
- [Hazanov et Amieur, 1995] HAZANOV, S. et AMIEUR, M. (1995). On overall properties of elastic heterogeneous bodies smaller than the representative volume. *International Journal of Engineering Science*, 33(9):1289–1301. (cité p. 36, 37)
- [Hazanov et Huet, 1994] HAZANOV, S. et HUET, C. (1994). Order relationships for boundary conditions effect in heterogeneous bodies smaller than the representative volume. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 42(12):1995–2011. (cité p. 36)
- [Hernández *et al.*, 2011] HERNÁNDEZ, S., SKET, F., MOLINA-ALDAREGUI, J., GONZÁLEZ, C., LLORCA, J. *et al.* (2011). Effect of curing cycle on void distribution and interlaminar shear strength in polymer-matrix composites. *Composites science and technology*, 71(10):1331–1341. (cité p. 11, 25)
- [Hill, 1963] HILL, R. (1963). Elastic properties of reinforced solids : some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11(5):357–372. (cité p. 34, 36)
- [Hoa et Tsai, 2003] HOA, G. et TSAI, S. (2003). Sw composite materials : design and applications. (cité p. 6, 147)
- [Hoffman, 1967] HOFFMAN, O. (1967). The brittle strength of orthotropic materials. *Journal of Composite Materials*, 1(2):200–206. (cité p. 39)
- [Hsiao et Daniel, 1996] HSIAO, H. et DANIEL, I. (1996). Elastic properties of composites with fiber waviness. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 27(10): 931–941. (cité p. 22)

- [Huang et Talreja, 2005] HUANG, H. et TALREJA, R. (2005). Effects of void geometry on elastic properties of unidirectional fiber reinforced composites. *Composites Science and Technology*, 65(13):1964–1981. (cité p. 10)
- [Hyer et Fuchs, 1988] HYER, M W., M. et FUCHS, H. P. (1988). "the influence of layer waviness on the stress state in hydrostatically loaded cylinders, . *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 7(11):601–613. (cité p. 18)
- [Isida et Igawa, 1991] ISIDA, M. et IGAWA, H. (1991). Analysis of a zig-zag array of circular holes in an infinite solid under uniaxial tension. *International Journal of Solids and Structures*, 27(7):849–864. (cité p. 14)
- [Judd et Wright, 1978] JUDD, N. C. et WRIGHT, W. (1978). Voids and their effects on the mechanical properties of composites- an appraisal. *Sampe Journal*, 14:10–14. (cité p. 11)
- [Kang et al., 2000] KANG, M. K., LEE, W. I. et HAHN, H. T. (2000). Formation of microvoids during resin-transfer molding process. *Composites Science and Technology*, 60(12):2427–2434. (cité p. 9)
- [Kantharaju, 2012] KANTHARAJU, H. (2012). *Analysis of fiber waviness in laminated composites subjected to compressive loads*. Thèse de doctorat, Wichita State University. (cité p. 22)
- [Karbhari, 2013] KARBHARI, V. M. (2013). *Non-destructive evaluation (NDE) of polymer matrix composites*. Elsevier. (cité p. 12)
- [Kardos et al., 1986] KARDOS, J., DUDUKOVIĆ, M. et DAVE, R. (1986). Void growth and resin transport during processing of thermosetting—matrix composites. *Epoxy resins and composites IV*, pages 101–123. (cité p. 10, 17)
- [Kern et al., 2016] KERN, W. T., KIM, W., ARGENTO, A., LEE, E. C. et MIELEWSKI, D. F. (2016). Finite element analysis and microscopy of natural fiber composites containing microcellular voids. *Materials & Design*, 106:285–294. (cité p. 14)
- [Kugler et Moon, 2002] KUGLER, D. et MOON, T. J. (2002). Identification of the most significant processing parameters on the development of fiber waviness in thin laminates. *Journal of composite Materials*, 36(12):1451–1479. (cité p. 18)
- [Ladeveze et Florentin, 2006] LADEVEZE, P. et FLORENTIN, E. (2006). Verification of stochastic models in uncertain environments using the constitutive relation error method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 196(1):225–234. (cité p. 80)
- [Ladeveze et al., 2006] LADEVEZE, P., PUEL, G. et ROMEUF, T. (2006). Lack of knowledge in structural model validation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195(37):4697–4710. (cité p. 68)
- [Le Maire et al., 2004a] LE MAITRE, O., KNIO, O., NAJM, H. et GHANEM, R. (2004a). Uncertainty propagation using wiener–haar expansions. *Journal of computational Physics*, 197(1):28–57. (cité p. 82)

## Bibliographie

---

- [Le Maire *et al.*, 2004b] LE MAITRE, O., NAJM, H., GHANEM, R. et KNIO, O. (2004b). Multi-resolution analysis of wiener-type uncertainty propagation schemes. *Journal of Computational Physics*, 197(2):502–531. (cité p. 82)
- [Leclerc et Ruiz, 2008] LECLERC, J. S. et RUIZ, E. (2008). Porosity reduction using optimized flow velocity in resin transfer molding. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 39(12):1859–1868. (cité p. 9)
- [Ledru, 2009] LEDRU, Y. (2009). *Etude de la porosité dans les matériaux composites stratifiés aéronautiques*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse. (cité p. 11, 141)
- [Ledru *et al.*, 2010] LEDRU, Y., BERNHART, G., PIQUET, R., SCHMIDT, F. et MICHEL, L. (2010). Coupled visco-mechanical and diffusion void growth modelling during composite curing. *Composites Science and Technology*, 70(15):2139–2145. (cité p. 17)
- [Ledru *et al.*, 2009] LEDRU, Y., PIQUET, R., MICHEL, L., SCHMIDT, F. et BERNHART, G. (2009). Quantification 2-D et 3-D de la porosité par analyse d’images dans les matériaux composites stratifiés aéronautiques = 2-D and 3-D void quantification with analyses in aeronautic composite laminates. In et JACQUES LAMON, P. O., éditeur : *JNC 16*, page 11 p., Toulouse, France. AMAC. (cité p. 25, 27, 142)
- [Lee et Soutis, 2007] LEE, J. et SOUTIS, C. (2007). A study on the compressive strength of thick carbon fibre–epoxy laminates. *Composites science and technology*, 67(10):2015–2026. (cité p. 19)
- [Leong *et al.*, 2012] LEONG, M., OVERGAARD, L. C., THOMSEN, O. T., LUND, E. et DANIEL, I. M. (2012). Investigation of failure mechanisms in gfrp sandwich structures with face sheet wrinkle defects used for wind turbine blades. *Composite Structures*, 94(2):768–778. (cité p. 18, 19, 23, 24, 52, 57, 108, 114, 115, 120, 142, 147)
- [Li *et al.*, 2010] LI, B., WANG, B. et REID, S. (2010). Effective elastic properties of randomly distributed void models for porous materials. *International Journal of Mechanical Sciences*, 52(5):726–732. (cité p. 15)
- [Liebig *et al.*, 2013] LIEBIG, W., LEOPOLD, C. et SCHULTE, K. (2013). Photoelastic study of stresses in the vicinity of a unique void in a fibre-reinforced model composite under compression. *Composites Science and Technology*, 84:72–77. (cité p. 12)
- [Lightfoot *et al.*, 2013] LIGHTFOOT, J. S., WISNOM, M. R. et POTTER, K. (2013). A new mechanism for the formation of ply wrinkles due to shear between plies. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 49:139–147. (cité p. 18)
- [Lim *et al.*, 2016] LIM, J. H., HENRY, M., HWANG, D.-S. et SOHN, D. (2016). Numerical prediction of fiber mechanical properties considering random microstructures using inverse analysis with quasi-analytical gradients. *Applied Mathematics and Computation*, 273:201–216. (cité p. 14, 16, 141)
- [Lim *et al.*, 2000] LIM, S. T., KANG, M. K. et LEE, W. (2000). Modeling of void formation during resin transfer molding process. In *Proceedings of the 2nd Asian-Australasian*

- Conference on Composite Materials, Kyongju, Korea*, pages 185–190. DTIC Document. (cité p. 9)
- [Liu *et al.*, 2006a] LIU, L., ZHANG, B.-M., WANG, D.-F. et WU, Z.-J. (2006a). Effects of cure cycles on void content and mechanical properties of composite laminates. *Composite Structures*, 73(3):303–309. (cité p. 9, 10, 11, 141)
- [Liu *et al.*, 2006b] LIU, S., GUO, E., LEVIN, V., LIU, F., PETRONYUK, Y. S. et ZHANG, Q. (2006b). Application of pulse acoustic microscopy technique for 3d imaging bulk microstructure of carbon fiber-reinforced composites. *Ultrasonics*, 44:e1037–e1044. (cité p. 12, 13, 141)
- [Loève, 1978] LOÈVE (1978). *Probability Theory*. Springer, New York. Fourth Edition, Part II. (cité p. 70)
- [Loève, 1977] LOÈVE, M. (1977). *Probability Theory, 4th ed.* Springer, New York. Fourth Edition, Part I. (cité p. 70)
- [Madsen et Lilholt, 2003] MADSEN, B. et LILHOLT, H. (2003). Physical and mechanical properties of unidirectional plant fibre composites—an evaluation of the influence of porosity. *Composites Science and Technology*, 63(9):1265–1272. (cité p. 10)
- [Makeev et Nikishkov, 2011] MAKEEV, A. et NIKISHKOV, Y. (2011). Fatigue life assessment for composite structure. *ICAF 2011 Structural Integrity : Influence of Efficiency and Green Imperatives*, pages 119–134. (cité p. 21, 23, 25, 142)
- [Makeev *et al.*, 2010] MAKEEV, A., SEON, G. et LEE, E. (2010). Failure predictions for carbon/epoxy tape laminates with wavy plies. *Journal of composite materials*, 44(1):95–112. (cité p. 19, 22, 55)
- [Mathelin et Le Maître, 2007] MATHELIN, L. et LE MAÎTRE, O. (2007). Dual-based a posteriori error estimate for stochastic finite element methods. *Communications in Applied Mathematics and Computational Science*, 2(1):83–115. (cité p. 80)
- [Matthies et Keese, 2005] MATTHIES, H. G. et KEESE, A. (2005). Galerkin methods for linear and nonlinear elliptic stochastic partial differential equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 194(12):1295–1331. (cité p. 76, 79, 80, 81)
- [McMillan, 2012] MCMILLAN, A. J. (2012). Material strength knock-down resulting from multiple randomly positioned voids. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 31(1):13–28. (cité p. 10, 14)
- [Michel *et al.*, 1999] MICHEL, J., MOULINEC, H. et SUQUET, P. (1999). Effective properties of composite materials with periodic microstructure : a computational approach. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 172(1-4):109–143. (cité p. 33)
- [Micol, 2007] MICOL, A. (2007). *Approche probabiliste dans la conception des modules de puissance*. Thèse de doctorat, Université de Toulouse, Université Toulouse III-Paul Sabatier. (cité p. 74, 144)
- [Mukhopadhyay *et al.*, 2013] MUKHOPADHYAY, S., JONES, M. I. et HALLETT, S. R. (2013). Modelling of out-of-plane fibre waviness; tension and compression tests. *In*

## Bibliographie

---

- Proc. 4th ECCOMAS Thematic Conf. on the Mechanical Response of Composites, Azores.* (cité p. 17, 22, 55, 141)
- [Mukhopadhyay *et al.*, 2015a] MUKHOPADHYAY, S., JONES, M. I. et HALLETT, S. R. (2015a). Compressive failure of laminates containing an embedded wrinkle; experimental and numerical study. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 73:132–142. (cité p. 22)
- [Mukhopadhyay *et al.*, 2015b] MUKHOPADHYAY, S., JONES, M. I. et HALLETT, S. R. (2015b). Tensile failure of laminates containing an embedded wrinkle; numerical and experimental study. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 77:219–228. (cité p. 19, 22, 23, 142)
- [Negoita *et al.*, 1978] NEGOITA, C., ZADEH, L. et ZIMMERMANN, H. (1978). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy sets and systems*, 1(3-28):61–72. (cité p. 68)
- [Nelson *et al.*, 2017] NELSON, J. W., RIDDLE, T. W. et CAIRNS, D. S. (2017). Characterization and mechanical testing of manufacturing defects common to composite wind turbine blades. *Wind Energy Science Discussions*, 2017:1–17. (cité p. 27, 28, 29, 142)
- [Niederreiter, 1992] NIEDERREITER, H. (1992). *Random number generation and quasi-Monte Carlo methods*. SIAM. (cité p. 72, 76)
- [Njionhou *et al.*, 2013] NJIONHOU, A., BERTHET, F. et CASTANIÉ, B. (2013). Effects of process parameters on the mechanical properties and morphology of stitched and non-stitched carbon/epoxy liquid resin-infused ncf laminate, out of autoclave and out of oven. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 65(9-12):1289–1302. (cité p. 9)
- [Olivier *et al.*, 1995] OLIVIER, P., COTTU, J. et FERRET, B. (1995). Effects of cure cycle pressure and voids on some mechanical properties of carbon/epoxy laminates. *Composites*, 26(7):509–515. (cité p. 9, 10, 11, 12)
- [Pandey *et al.*, 1999] PANDEY, R. et SUN, C. (1999). Mechanisms of wrinkle formation during the processing of composite laminates. *Composites science and technology*, 59(3):405–417. (cité p. 18)
- [Papadrakakis *et al.*, 1996] PAPADRAKAKIS, M. et PAPADOPOULOS, V. (1996). Robust and efficient methods for stochastic finite element analysis using monte carlo simulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 134(3-4):325–340. (cité p. 72)
- [Paris *et al.*, 2001] PARIS, F. et JACKSON, K. E. (2001). A study of failure criteria of fibrous composite materials. (cité p. 38)
- [Park *et al.*, 2011] PARK, C. H., LEBEL, A., SAOUAB, A., BRÉARD, J. et LEE, W. I. (2011). Modeling and simulation of voids and saturation in liquid composite molding processes. *Composites Part A : Applied science and manufacturing*, 42(6):658–668. (cité p. 14)

- [Patel et Lee, 1995] PATEL, N. et LEE, L. J. (1995). Effects of fiber mat architecture on void formation and removal in liquid composite molding. *Polymer Composites*, 16(5):386–399. (cité p. 9)
- [Payvar, 1987] PAYVAR, P. (1987). Mass transfer-controlled bubble growth during rapid decompression of a liquid. *International journal of heat and mass transfer*, 30(4):699–706. (cité p. 9)
- [Pellissetti et Ghanem, 2000] PELLISSETTI, M. F. et GHANEM, R. G. (2000). Iterative solution of systems of linear equations arising in the context of stochastic finite elements. *Advances in Engineering Software*, 31(8):607–616. (cité p. 80)
- [Péronnet *et al.*, 2011] PÉRONNET, E., EYMA, F., PASTOR, M.-L. et WELEMANE, H. (2011). Caractérisation et comparaison des limites de détection de techniques de contrôle non destructif : méthodes ultrasonores et méthodes optiques. *Contrôles-Essais-Mesures*, 37:63–68. (cité p. 12)
- [Pitchumani *et al.*, 1996] PITCHUMANI, R., RANGANATHAN, S., DON, R., GILLESPIE, J. et LAMONTIA, M. (1996). Analysis of transport phenomena governing interfacial bonding and void dynamics during thermoplastic tow-placement. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 39(9):1883–1897. (cité p. 10)
- [Potter, 2009] POTTER, K. (2009). Understanding the origins of defects and variability in composites manufacture. In *International Conference on Composite Materials (ICCM)-17, Edinburgh, UK*. (cité p. 18, 25, 26, 27, 142)
- [Potter *et al.*, 2008] POTTER, K., KHAN, B., WISNOM, M., BELL, T. et STEVENS, J. (2008). Variability, fibre waviness and misalignment in the determination of the properties of composite materials and structures. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 39(9):1343–1354. (cité p. 25)
- [Puck et Schürmann, 1998] PUCK, A. et SCHÜRMAN, H. (1998). Failure analysis of frp laminates by means of physically based phenomenological models. *Composites Science and Technology*, 58(7):1045–1067. (cité p. 39, 40, 52, 120, 147)
- [Puck et Schürmann, 2002] PUCK, A. et SCHÜRMAN, H. (2002). Failure analysis of frp laminates by means of physically based phenomenological models. *Composites Science and Technology*, 62(12):1633–1662. (cité p. 39, 40, 142)
- [Puel, 2004] PUEL, G. (2004). *Sur une théorie des méconnaissances en dynamique des structures*. Thèse de doctorat, École normale supérieure de Cachan-ENS Cachan. (cité p. 68)
- [Ranganathan *et al.*, 1995] RANGANATHAN, S., ADVANI, S. G. et LAMONTIA, M. A. (1995). A non-isothermal process model for consolidation and void reduction during in-situ tow placement of thermoplastic composites. *Journal of Composite Materials*, 29(8):1040–1062. (cité p. 10)
- [Rosen, 1965] ROSEN, B. W. (1965). Mechanics of composite strengthening. *Fiber Composite Materials*, 72:75. (cité p. 18)

## Bibliographie

---

- [Ruiz et Trochu, 2005] RUIZ, E. et TROCHU, F. (2005). Numerical analysis of cure temperature and internal stresses in thin and thick rtm parts. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 36(6):806–826. (cité p. 9)
- [Ruiz et Trochu, 2006] RUIZ, E. et TROCHU, F. (2006). Multi-criteria thermal optimization in liquid composite molding to reduce processing stresses and cycle time. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 37(6):913–924. (cité p. 9)
- [Saint-Martin, 2003] SAINT-MARTIN, G. (2003). *Etude typologique des défauts structuraux générés au cours de la mise en forme par injection de composites à matrice polymère thermostable renforcés par fibres de verre courtes*. Thèse de doctorat, Paris, ENMP. (cité p. 13, 17)
- [Schell et al., 2006] SCHELL, J., RENGGLI, M., VAN LENTHE, G., MÜLLER, R. et ERMANNI, P. (2006). Micro-computed tomography determination of glass fibre reinforced polymer meso-structure. *Composites Science and Technology*, 66(13):2016–2022. (cité p. 13, 14, 17, 141)
- [Selmi, 2014] SELMI, A. (2014). Void effect on carbon fiber epoxy composites. In *2nd International Conference on Emerging Trends in Engineering and Technology, ICE-TET2014*, pages 179–183. (cité p. 12, 15, 141)
- [Shafer et al., 1976] SHAFER, G. et al. (1976). *A mathematical theory of evidence*, volume 1. Princeton university press Princeton. (cité p. 68)
- [Sjölander et al., 2016] SJÖLANDER, J., HALLANDER, P. et ÅKERMO, M. (2016). Forming induced wrinkling of composite laminates : a numerical study on wrinkling mechanisms. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 81:41–51. (cité p. 24)
- [Smolyak, 1963] SMOLYAK, S. (1963). Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions. In *Soviet Math. Dokl.*, volume 4, pages 240–243. (cité p. 76, 81)
- [Soize, 2000] SOIZE, C. (2000). A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Probabilistic engineering mechanics*, 15(3):277–294. (cité p. 69)
- [Soize, 2001] SOIZE, C. (2001). Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 109(5):1979–1996. (cité p. 69)
- [Soize et Ghanem, 2004] SOIZE, C. et GHANEM, R. (2004). Physical systems with random uncertainties : chaos representations with arbitrary probability measure. *siamcomput*, 26(2):395–410. (cité p. 83)
- [Stabler et al., 1992] STABLER, W. R., TATTERSON, G. B., SADLER, R. L. et EL-SHIEKH, A. H. (1992). Void minimization in the manufacture of carbon fiber composites by resin transfer molding. *SAMPE Quarterly (Society of Aerospace Material and Process Engineers);(United States)*, 23(2). (cité p. 9)
- [Strong, 2008] STRONG, A. B. (2008). *Fundamentals of composites manufacturing : materials, methods and applications*. Society of Manufacturing Engineers. (cité p. 7, 8)

- [Suarez *et al.*, 1993] SUAREZ, J., MOLLEDA, F. et GUEMES, A. (1993). Void content in carbon fibre/epoxy resin composites and its effects on compressive properties. *ICCM/9. Composites : Properties and Applications.*, 6:589–596. (cité p. 10, 11)
- [Sudret, 2008] SUDRET, B. (2008). Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions. *Reliability Engineering & System Safety*, 93(7):964–979. (cité p. 81)
- [Tsai, 1965] TSAI, S. W. (1965). Strength characteristics of composite materials. Rapport technique, DTIC Document. (cité p. 38)
- [Tsai et Wu, 1971] TSAI, S. W. et WU, E. M. (1971). A general theory of strength for anisotropic materials. *Journal of composite materials*, 5(1):58–80. (cité p. 38)
- [Vajari *et al.*, 2014] VAJARI, D. A., GONZÁLEZ, C., LLORCA, J. et LEGARTH, B. N. (2014). A numerical study of the influence of microvoids in the transverse mechanical response of unidirectional composites. *Composites Science and Technology*, 97:46–54. (cité p. 14, 15, 141)
- [Varna *et al.*, 1995] VARNA, J., JOFFE, R., BERGLUND, L. A. et LUNDSTRÖM, T. (1995). Effect of voids on failure mechanisms in rtm laminates. *Composites Science and technology*, 53(2):241–249. (cité p. 8)
- [Veyret *et al.*, 1997] VEYRET, J.-B., PLUNKETT, L. et BULLOCK, E. (1997). Interfaces dans les composites fibreux c/si<sub>3</sub>n<sub>4</sub> et hi-nicalon/si<sub>3</sub>n<sub>4</sub>. *Le Journal de Physique IV*, 7(C6):C6–207. (cité p. 8)
- [Wan et Karniadakis, 2005] WAN, X. et KARNIADAKIS, G. E. (2005). An adaptive multi-element generalized polynomial chaos method for stochastic differential equations. *Journal of Computational Physics*, 209(2):617–642. (cité p. 82)
- [Wang *et al.*, 2012] WANG, J., POTTER, K., HAZRA, K. et WISNOM, M. (2012). Experimental fabrication and characterization of out-of-plane fiber waviness in continuous fiber-reinforced composites. *Journal of Composite Materials*, 46(17):2041–2053. (cité p. 19)
- [Wiener, 1938] WIENER, N. (1938). The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 60(4):897–936. (cité p. 82)
- [Wisnom et Atkinson, 1996] WISNOM, M. R. et ATKINSON, J. W. (1996). Compressive failure due to shear instability : experimental investigation of waviness and correlation with analysis. *Journal of reinforced plastics and composites*, 15(4):420–439. (cité p. 11, 19)
- [Wisnom *et al.*, 1996] WISNOM, M. R., REYNOLDS, T. et GWILLIAM, N. (1996). Reduction in interlaminar shear strength by discrete and distributed voids. *Composites Science and Technology*, 56(1):93–101. (cité p. 11)
- [WU et Dianfu, 2005] WU, L. L. B. Z. Z. et DIANFU, W. (2005). Effects of cure pressure induced voids on the mechanical strength of carbon/epoxy laminates. (cité p. 9, 10)
- [Xiu et Karniadakis, 2002] XIU, D. et KARNIADAKIS, G. E. (2002). The wiener–askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM journal on scientific computing*, 24(2):619–644. (cité p. 83)

## Bibliographie

---

- [Xueshu et Fei, 2016] XUESHU, L. et FEI, C. (2016). A review of void formation and its effects on the mechanical performance of carbon fiber reinforced plastic. *Engineering Transactions*, 64(1):33–51. (cité p. 11)
- [Yoshida *et al.*, 1986] YOSHIDA, H., OGASA, T. et HAYASHI, R. (1986). Statistical approach to the relationship between ilss and void content of cfrp. *Composites Science and Technology*, 25(1):3–18. (cité p. 11)
- [Zaoui, 2001] ZAOUI, A. (2001). Changement d'échelle : motivation et méthodologie. (cité p. 33)
- [Zhang *et al.*, 2016] ZHANG, A., LU, H. et ZHANG, D. (2016). Research on the mechanical properties prediction of carbon/epoxy composite laminates with different void contents. *Polymer Composites*, 37(1):14–20. (cité p. 10)
- [Zhu *et al.*, 2011] ZHU, H., WU, B., LI, D., ZHANG, D. et CHEN, Y. (2011). Influence of voids on the tensile performance of carbon/epoxy fabric laminates. *Journal of Materials Science & Technology*, 27(1):69–73. (cité p. 11)
- [Zienkiewicz et Taylor, 2005] ZIENKIEWICZ, O. C. et TAYLOR, R. L. (2005). *The finite element method for solid and structural mechanics*. Butterworth-heinemann. (cité p. 70)

# Table des figures

1	(a) Illustration d'un parc d'éoliennes <i>offshore</i> (b) photo d'un avion développé par DAHER-AEROSPACE (TBM850) . . . . .	2
1.1	Les trois étapes principales du procédé RTM [Binétruy, 2004]. . . . .	8
1.2	Evolution du taux de porosités en fonction de la pression de polymérisation [Liu <i>et al.</i> , 2006a]. . . . .	9
1.3	Paramètres procédés à l'origine de la formation des porosités. . . . .	10
1.4	Variation relative de l'ILSS en fonction du taux de porosités pour des composites carbone/époxy [Ledru, 2009]. . . . .	11
1.5	Principe de mesure par ultrasons pour un stratifié [Liu <i>et al.</i> , 2006b]. . . . .	13
1.6	Représentation 3D par micro-tomographie d'un composite stratifié verre/époxy, avec à gauche le réseau de fibre et à droite les porosités [Schell <i>et al.</i> , 2006]. . . . .	14
1.7	(a) Observation de la distribution des fibres et des porosités en coupe transverse d'un composite verre/époxy (b) Représentation de la microstructure du composite à partir de l'observation [Vajari <i>et al.</i> , 2014]. . . . .	15
1.8	Modélisation en deux étapes de la microstructure d'un composite verre/époxy avec défaut de porosités [Selmi, 2014]. . . . .	15
1.9	Microstructure avec distribution aléatoire de porosités sous forme carrée [Lim <i>et al.</i> , 2016]. . . . .	16
1.10	Microstructure d'un composite UD T650-35/PMR-15 avec distribution aléatoire de porosités. [Lim <i>et al.</i> , 2016]. . . . .	16
1.11	Paramètres géométriques caractéristiques du plissement [Mukhopadhyay <i>et al.</i> , 2013]. . . . .	17
1.12	Schéma des 3 types de plissements [Hallander <i>et al.</i> , 2013]. . . . .	18
1.13	Paramètres procédés pouvant conduire à la formation de plissements. . . . .	19
1.14	Résistance en compression en fonction de la fraction de plissement dans le pli pour un composite carbone/polysulfone T300/P1700[Adams et Hyer, 1993]. . . . .	19
1.15	Observation de deux échantillons avec plissements à l'aide d'un MEB [Gazo-Hanna <i>et al.</i> , 2009]. . . . .	20
1.16	Caractérisation par ondes ultrasoniques de plissements de différentes intensités [Fernández-López <i>et al.</i> , 2014]. . . . .	21

## Table des figures

---

1.17	Illustration des paramètres nécessaires pour la modélisation du plissement de type "wrinkle" [Hayman <i>et al.</i> , 2007]. . . . .	22
1.18	Modélisation par éléments finis d'un plissement sous forme d'une fonction sinusoïdale [Mukhopadhyay <i>et al.</i> , 2015b]. . . . .	23
1.19	Description paramétrique de la géométrie du plissement obtenue à partir des images et sa modélisation EF (Ansys®) [Hayman <i>et al.</i> , 2007]. . . . .	23
1.20	Résumé des résultats des tests de résistance à la compression d'un composite carbone/époxy avec plissement [Bradley <i>et al.</i> , 1998]. . . . .	24
1.21	(a) Modélisation par éléments finis d'un défaut de plissement et comparaison avec un plissement réel, (b) modèle 3D complet EF (Ansys® 11.0) du composite [Leong <i>et al.</i> , 2012]. . . . .	24
1.22	Comparaison des zones de rupture d'un composite carbone/époxy obtenues par EF et DIC [Makeev et Nikishkov, 2011]. . . . .	25
1.23	Classification des différents types de défauts dans les matériaux composites [Potter, 2009]. . . . .	26
1.24	Observation MEB du défaut de porosités pour un composite verre/époxy [Gauthier, 2017]. . . . .	26
1.25	Histogramme du nombre de porosités en fonction de l'intervalle de taille considéré [Ledru <i>et al.</i> , 2009]. . . . .	27
1.26	Résultats des tests de compression obtenus pour la première configuration (8 plis) [Hayman <i>et al.</i> , 2007]. . . . .	27
1.27	Résultats des tests de compression obtenus pour la deuxième configuration (24 plis) [Hayman <i>et al.</i> , 2007]. . . . .	28
1.28	Densités de probabilité des angles de désalignement hors plan et dans le plan de composite verre/époxy [Nelson <i>et al.</i> , 2017]. . . . .	28
1.29	Contraintes à rupture en compression et en traction en fonction de l'angle de désalignement [Nelson <i>et al.</i> , 2017]. . . . .	29
2.1	Problème modèle en élasticité linéaire. . . . .	33
2.2	Schéma du principe d'homogénéisation appliqué au matériau composite. . . . .	34
2.3	Mécanismes de rupture observés dans les composites. . . . .	38
2.4	Critère de Puck : rupture en mode entre fibres (IFF) [Puck et Schürmann, 2002]. . . . .	40
2.5	Observation MEB du défaut de porosités pour un composite verre/époxy [Gauthier, 2017]. . . . .	42
2.6	Illustration de la microstructure pour le problème de porosité. . . . .	42
2.7	Géométrie et conditions aux limites pour le problème de porosités à l'échelle microscopique. . . . .	43
2.8	Illustration du maillage triangulaire pour un taux de porosités de 2% (a) et pour un taux de porosités de 12.5% (b). . . . .	44

2.9	Illustration des champs de contraintes $\sigma_{11}$ [MPa] (a) pour un composite sain (0% de porosité) (b) pour un taux de porosités de 2% (c) pour un taux de porosités de 12.5%. . . . .	44
2.10	Illustration des champs de contraintes $\sigma_{22}$ [MPa] (a) pour un composite sain (0% de porosité) (b) pour un taux de porosités de 2% (c) pour un taux de porosités de 12.5%. . . . .	45
2.11	Illustration des champs de contraintes $\sigma_{12}$ [MPa] (a) pour un composite sain (0% de porosité) (b) pour un taux de porosités de 2% (c) pour un taux de porosités de 12.5%. . . . .	45
2.12	Algorithme résumant le processus de détermination des propriétés effectives du M.H.E. . . . .	47
2.13	Évolution des dimensions de la microstructure représentant le V.E. en fonction du nombre de fibres. . . . .	48
2.14	Comparaison des modules de Young homogénéisés $E^h$ (a) pour la configuration avec 1% de porosités (b) pour la configuration avec 10% de porosités. . . . .	48
2.15	Comparaison des coefficients de Poisson homogénéisés $\nu^h$ (a) pour la configuration avec 1% de porosités (b) pour la configuration avec 10% de porosités. . . . .	49
2.16	Observation MEB d'une macroporosité pour un composite verre/époxy [Gauthier, 2017]. . . . .	50
2.17	Conditions aux limites pour le problème avec macroporosité. . . . .	51
2.18	Champ de contrainte $\sigma_{11}$ [MPa] (a) pour une cellule saine (b) pour une cellule avec une macroporosité circulaire (c) pour une cellule avec une macroporosité elliptique. . . . .	52
2.19	Champ de contrainte $\sigma_{22}$ [MPa] (a) pour une cellule saine (b) pour une cellule avec une macroporosité circulaire (c) pour une cellule avec une macroporosité elliptique. . . . .	53
2.20	Champ de contrainte $\sigma_{12}$ [MPa] (a) pour une cellule saine (b) pour une cellule avec une macroporosité circulaire (c) pour une cellule avec une macroporosité elliptique. . . . .	53
2.21	Champ de déplacement $u_2$ [mm] (a) pour une cellule saine (b) pour une cellule avec une macroporosité circulaire (c) pour une cellule avec une macroporosité elliptique. . . . .	54
2.22	Critère de rupture de la matrice (IFF) (a) pour une cellule saine (b) pour une cellule avec une macroporosité circulaire (c) pour une cellule avec une macroporosité elliptique. . . . .	55
2.23	Observation d'une coupe transverse dans l'épaisseur d'un composite avec plissement. . . . .	56
2.24	Décomposition en sous-domaines d'un UD [0°] afin de tenir compte de la désorientation des fibres. . . . .	57
2.25	Géométrie et conditions aux limites du problème de plissement. . . . .	58
2.26	Champs de contrainte $\sigma_{11}$ [MPa] (a) configuration 1 (b) configuration 2. . . . .	58
2.27	Champs de contrainte $\sigma_{22}$ [MPa] (a) configuration 1 (b) configuration 2. . . . .	59

2.28	Champs de contrainte $\sigma_{12}$ [MPa] (a) configuration 1 (b) configuration 2. . .	59
2.29	Champ de déplacement $u_1$ [mm] dans la direction de la sollicitation (a) pour la configuration 1 (b) pour la configuration 2. . . . .	60
2.30	Champ de déplacement $u_2$ [mm] dans la direction transverse à la sollicitation (a) pour la configuration 1 (b) pour la configuration 2. . . . .	61
2.31	Critère de rupture de Puck pour la matrice (IFF) (a) configuration 1 (b) configuration 2. . . . .	62
2.32	Critère de rupture de Puck pour la matrice (IFF) (a) configuration 1 (b) configuration 2 où seules les valeurs inférieures et supérieures à l'unité sont données. . . . .	62
3.1	Différentes étapes d'un calcul mécanique. . . . .	69
3.2	Exemple de fonction de défaillance. . . . .	73
3.3	Illustration de la transformation iso-probabiliste de l'espace de base pour définir un espace standard [Micol, 2007]. . . . .	74
3.4	Illustrations de quadrature de Gauss pour $m = 2$ et $r \in \{2, 4, 10\}$ . . . . .	76
3.5	Exemples de polynômes d'Hermite en dimension 2. [Clement, 2008]. . . . .	83
3.6	Principe général du calcul mécano-probabiliste. . . . .	84
3.7	Schéma de la procédure de calcul de la réponse stochastique du système. . .	85
3.8	Géométrie et conditions aux limites du problème de chargement aléatoire. .	86
3.9	(a) Surface de réponse de la contrainte locale $\sigma_{22}^{max}$ en fonction du chargement $F$ (b) fonction de densité de probabilité de $\sigma_{22}^{max}$ (c) fonction de répartition de $\sigma_{22}^{max}$ . . . . .	88
3.10	(a) Surface de réponse du déplacement $u_2^{max}$ en fonction du chargement $F$ (b) fonction de densité de probabilité de $u_2^{max}$ (c) fonction de répartition de $u_2^{max}$ . . . . .	88
4.1	(a) Illustration de la microstructure pour le problème de porosités (b) fonction de densité de probabilité (PDF) du taux de porosités. . . . .	93
4.2	Géométrie et conditions aux limites pour le problème de porosités à l'échelle microscopique. . . . .	94
4.3	(a) Surface de réponse de la contrainte $ \sigma_{11}^{min} $ en fonction du taux de porosités $V_p$ (b) fonction de densité de probabilité (PDF) de $ \sigma_{11}^{min} $ (c) fonction de répartition (CDF) de $ \sigma_{11}^{min} $ . . . . .	94
4.4	(a) Surface de réponse de la contrainte $\sigma_{22}^{max}$ en fonction du taux de porosités (b) fonction de densité de probabilité (PDF) de $\sigma_{22}^{max}$ (c) fonction de répartition (CDF). . . . .	95
4.5	(a) Surface de réponse de la contrainte $\sigma_{12}^{max}$ en fonction du taux de porosités (b) fonction de densité de probabilité (PDF) de $\sigma_{12}^{max}$ (c) fonction de répartition (CDF). . . . .	95
4.6	(a) Surface de réponse de la contrainte globale $\Sigma_{11}$ en fonction du taux de porosités (b) fonction de densité de probabilité de $\Sigma_{11}$ (c) fonction de répartition de $\Sigma_{11}$ . . . . .	97

4.7	(a) Surface de réponse de la contrainte globale $\Sigma_{22}$ en fonction du taux de porosités (b) fonction de densité de probabilité de $\Sigma_{22}$ (c) fonction de répartition de $\Sigma_{22}$ . . . . .	97
4.8	(a) Surface de réponse du coefficient de Poisson apparent $\nu^h$ en fonction du taux de porosités (b) fonction de densité de probabilité (PDF) de $\nu^h$ (c) fonction de répartition (CDF) de $\nu^h$ . . . . .	98
4.9	(a) Surface de réponse du module de Young apparent $E^h$ en fonction du taux de porosités (b) fonction de densité de probabilité (PDF) de $E^h$ (c) fonction de répartition (CDF) de $E^h$ . . . . .	99
4.10	(a) Illustrations de la microstructure pour le problème de porosités (b) et du Milieu Homogène Equivalent (M.H.E.). . . . .	100
4.11	Comparaison entre le modèle hétérogène et le modèle homogène sur la contrainte globale $\Sigma_{22}$ . . . . .	100
4.12	Fonction de densité de probabilité (PDF) (a) de la longueur de l'axe horizontal de la macroporosité $D$ (b) du rapport de la longueur des axes $R = \frac{D}{d}$ .102	
4.13	Conditions aux limites pour le problème avec macroporosité. . . . .	102
4.14	Surface de réponse de la contrainte $ \sigma_{11}^{min} $ en fonction de la longueur $D$ et du rapport $R$ (b) PDF de $ \sigma_{11}^{min} $ (c) CDF de $ \sigma_{11}^{min} $ . . . . .	103
4.15	(a) Surface de réponse de la contrainte $\sigma_{22}^{max}$ en fonction de la longueur $D$ et du rapport $R$ (b) PDF de $\sigma_{22}^{max}$ (c) CDF de $\sigma_{22}^{max}$ . . . . .	103
4.16	(a) Surface de réponse de la contrainte $\sigma_{12}^{max}$ en fonction de la longueur $D$ et du rapport $R$ (b) fonction de densité de probabilité (c) fonction de répartition. . . . .	104
4.17	(a) Surface de réponse de la contrainte $\Sigma_{22}$ en fonction de la longueur $D$ et du rapport $R$ (b) PDF de $\Sigma_{22}$ (c) CDF de $\Sigma_{22}$ . . . . .	105
4.18	(a) Surface de réponse du critère de rupture de Puck pour les fibres (FF) (b) Fonction de densité de probabilité de FF (c) fonction de répartition de FF. . . . .	106
4.19	(a) Surface de réponse du critère de rupture de Puck pour la matrice (IFF) (b) Fonction de densité de probabilité de IFF (c) fonction de répartition de IFF. . . . .	106
4.20	Géométrie et conditions aux limites du problème de plissement. . . . .	108
4.21	(a) Surface de réponse de la contrainte $ \sigma_{11}^{min} $ en fonction de la hauteur $A$ et la largeur $L$ du plissement (b) PDF de $ \sigma_{11}^{min} $ (c) CDF de $ \sigma_{11}^{min} $ . . . . .	109
4.22	(a) Surface de réponse de la contrainte $\sigma_{22}^{max}$ en fonction de la hauteur $A$ et la largeur $L$ du plissement (b) PDF de $\sigma_{22}^{max}$ (c) CDF de $\sigma_{22}^{max}$ . . . . .	109
4.23	(a) Surface de réponse de la contrainte $\sigma_{12}^{max}$ en fonction de la hauteur $A$ et la largeur $L$ du plissement (b) PDF de $\sigma_{12}^{max}$ (c) CDF de $\sigma_{12}^{max}$ . . . . .	110
4.24	(a) Surface de réponse du déplacement $ u_1^{min} $ en fonction de la hauteur $A$ et la largeur $L$ du plissement (b) PDF du déplacement $ u_1^{min} $ (c) CDF de $ u_1^{min} $ . . . . .	111

4.25	(a) Surface de réponse du déplacement $u_2^{max}$ en fonction de la hauteur $A$ et la largeur $L$ du plissement (b) PDF du déplacement $u_2^{max}$ (c) CDF de $u_2^{max}$ .	112
4.26	(a) Surface de réponse du critère de rupture de Puck pour les fibres (FF) (b) Fonction de densité de probabilité de FF (c) fonction de répartition de FF. . . . .	113
4.27	(a) Surface de réponse du critère de rupture de Puck pour la matrice (IFF) (b) Fonction de densité de probabilité de IFF (c) fonction de répartition de IFF. . . . .	113
4.28	Géométrie du problème (a) observation réelle à partir d'une coupe transverse (b) modélisation numérique. . . . .	114
4.29	Conditions aux limites du problème. . . . .	114
4.30	Décomposition en sous-domaines d'un UD $[0^\circ]$ afin de tenir compte de la désorientation des fibres. . . . .	115
4.31	(a) Surface de réponse de la contrainte $ \sigma_{11}^{min} $ (b) fonction de densité de probabilité (c) fonction de répartition. . . . .	116
4.32	(a) Surface de réponse de la contrainte $\sigma_{22}^{max}$ (b) fonction de densité de probabilité (c) fonction de répartition. . . . .	116
4.33	(a) Surface de réponse de la contrainte $\sigma_{12}^{max}$ (b) fonction de densité de probabilité (c) fonction de répartition. . . . .	117
4.34	(a) Surface de réponse du déplacement $ u_1^{min} $ en fonction de la hauteur $A$ et la largeur $L$ du plissement (b) PDF du déplacement $ u_1^{min} $ (c) CDF de $ u_1^{min} $ . . . . .	118
4.35	(a) Surface de réponse du déplacement $u_2^{max}$ en fonction de la hauteur $A$ et la largeur $L$ du plissement (b) PDF du déplacement $u_2^{max}$ (c) CDF de $u_2^{max}$ .	118
4.36	(a) Surface de réponse du critère de rupture de Puck pour les fibres (FF) (b) Fonction de densité de probabilité de FF (c) fonction de répartition de FF. . . . .	119
4.37	(a) Surface de réponse du critère de rupture de Puck pour la matrice (IFF) (b) Fonction de densité de probabilité de IFF (c) fonction de répartition de IFF. . . . .	119

# Liste des tableaux

1.1	Propriétés géométriques et mécaniques des fibres de carbone HR et de verre E [Berthelot, 1999, Hoa et Tsai, 2003]. . . . .	6
1.2	Propriétés mécaniques des résines époxy. . . . .	7
2.1	Résultats de l'étude de la convergence du maillage pour un volume de porosités de 12.5%. . . . .	44
2.2	Résultats du calcul des contraintes globales $\Sigma_{11}$ , $\Sigma_{22}$ et $\Sigma_{12}$ pour un taux de porosités de 0%, 2% et 12.5%. . . . .	46
2.3	Comparaison des modules de Young homogénéisés $E^h$ et des coefficients de Poisson homogénéisés $\nu^h$ obtenus numériquement et expérimentalement pour différents taux de porosités. . . . .	49
2.4	Propriétés élastiques de la cellule. . . . .	51
2.5	Propriétés matériau utilisées pour la rupture [Leong <i>et al.</i> , 2012, Puck et Schürmann, 1998]. . . . .	52
2.6	Propriétés élastiques des matériaux constituant le composite [Leong <i>et al.</i> , 2012]. . . . .	57
3.1	Exemples de polynômes orthogonaux pour différentes lois de probabilité. . . . .	84
4.1	Propriétés élastiques de la cellule. . . . .	92
4.2	Propriétés élastiques de la cellule. . . . .	101
4.3	Propriétés élastiques des matériaux constituant le composite [Leong <i>et al.</i> , 2012]. . . . .	108
4.4	Propriétés élastiques des matériaux constituant le composite carbone/époxy avec trois plissements [Leong <i>et al.</i> , 2012]. . . . .	115
4.5	Propriétés matériau utilisées pour le critère de rupture de Puck [Leong <i>et al.</i> , 2012, Puck et Schürmann, 1998]. . . . .	120



# Thèse de Doctorat

Hassoun ISHAK

## Étude stochastique de l'impact des défauts de porosités et de plissements dans les matériaux composites

Stochastic study of the impact of porosities and wrinkles defects in composite materials

### Résumé

Les matériaux composites à matrice organique sont de plus en plus utilisés dans divers domaines tels que l'aérospatiale ou les énergies marines renouvelables en raison de leurs excellentes propriétés spécifiques. Cependant, les procédés de fabrication des structures composites sont complexes et peuvent conduire à l'apparition de défauts, en particulier de plissement des plis et de porosité, qui affectent les propriétés mécaniques de la structure.

Les pièces composites sont ainsi systématiquement soumises à des contrôles CND long et coûteux. En cas de résultats négatifs par rapport à des critères conservatifs, celles-ci peuvent être rejetées, avec des conséquences économiques non négligeables. L'objectif de cette étude est de quantifier l'impact des défauts observés et des incertitudes associées sur le comportement de pièce composite.

Dans ce travail, nous adoptons une vision paramétrique des incertitudes consistant à représenter le contenu probabiliste à travers d'un ensemble fini de variables aléatoires. Nous nous concentrons sur la propagation des incertitudes basée sur des méthodes stochastiques spectrales.

L'étude portant sur le défaut de porosités se fait à l'échelle microscopique puis macroscopique. Les paramètres aléatoires d'entrée sont liés à la géométrie des porosités et à leur taux. L'étude du défaut plissements à l'échelle mésoscopique est basée sur une représentation paramétrique de la géométrie du plissement. Les paramètres aléatoires d'entrée représentent alors la forme et la taille de ces défauts.

Il est donc possible d'analyser l'impact de ces défauts à l'échelle structurelle par des grandeurs mécaniques classiques et des critères de rupture.

### Mots clés

Défauts de fabrication, Porosité et plissement, Analyse probabiliste, Chaos polynomial, Endommagement et rupture

### Abstract

Composite materials are increasingly used in various fields such as aerospace or renewable marine energies due to their excellent specific properties.

However, the manufacturing processes of the composite structures are complex, which can lead to the appearance of defects, particularly wrinkles and porosities, which affect the mechanical properties of the structure.

Based on conservative criteria, a system of non-destructive testing of composite parts thus makes it possible to judge their conformity. In case of non-conformity, those components are rejected, with non-negligible economic consequences. The objective of this study is to quantify the impact of the defects and associated uncertainties on the behavior of composite parts.

In this work, we adopt a parametric vision of the uncertainties consisting in representing the probabilistic content through a finite set of random variables. We focus on the propagation of uncertainties based on spectral stochastic methods.

The study involving porosity is done at the micro-scale and then at the macro-scale. The random input parameters are related to the geometry of the porosities and their rates. The study of the wrinkle defect, done at the mesoscopic scale, is based on a parametric representation of the geometry of the wrinkle. The random input parameters then represent the shape and size of this defect.

It is therefore possible to analyze the impact of these two manufacturing defects at a structural scale through classical mechanical quantities and check the failure of the structure with failure criteria.

### Key Words

Manufacturing defects, Porosity and wrinkle, Probabilistic analysis, Chaos polynomial, Damage and failure