l'université nantes angers le mans
COMMUNAUTÉ D'UNIVERSITÉS ET ÉTABLISSEMENTS

UNIVERSITÉ DE NANTES

Thèse de Doctorat

Virgile ROBBE

Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université de Nantes
sous le label de l'Université de Nantes Angers Le Mans

École doctorale : Sciences et technologies de l'information, et mathématiques

Discipline : Mathématiques et leurs interactions, section CNU 25,26
Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL)

Soutenue le 28 août 2015

Étude semi-classique de quelques équations cinétiques à basse température

JURY

Rapporteurs :	**M. Luc HILLAIRET**, Professeur des Universités, Université d'Orléans
	M. Gilles LEBEAU, Professeur des Universités, Université de Nice
Examinateurs :	**M. Clément MOUHOT**, Professeur des Universités, University of Cambridge
	M. Karel PRAVDA-STAROV, Professeur des Universités, Université de Rennes
	M. Johannes SJÖSTRAND, Directeur de Recherche, Université de Bourgogne
	M. Joseph VIOLA, Maître de conférences, Université de Nantes
	M. Xue-Ping WANG, Professeur des Universités, Université de Nantes
Directeur de thèse :	**M. Frédéric HÉRAU**, Professeur des Universités, Université de Nantes

À Hélène

Remerciements

Je tiens à adresser mes premiers remerciements à Frédéric Hérau qui m'a proposer un sujet passionnant et a su me guider au cours de mes errances et égarements avec patience et bienveillance. Merci aussi Fred, pour le temps que tu as libéré pour moi tout au long de la thèse, mais particulièrement durant cette fin de troisième année pour répondre à mes impératifs temporels chinois.

Je remercie également les rapporteurs de ma thèse, Luc Hillairet et Gilles Lebeau, d'avoir accepté ce rôle chronophage et de m'avoir fait part de leurs sentiments sur mon travail. Je suis aussi très honoré d'avoir eu la chance de compter comme membres de mon jury, Clément Mouhot, Karel Pravda-Starov, Johannes Sjöstrand, Xue-Ping Wang et Joe Viola et qu'ils aient pris le temps de s'intéresser à mon travail. Un merci tout particulier à Joe, pour les relectures d'articles et les discussions qui ont contribué à rendre cette thèse présentable, ainsi que pour l'amitié qu'il m'a témoignée ces trois années.

Je suis sincèrement reconnaissant à l'ensemble du laboratoire Jean Leray pour la qualité de son accueil qui font des années passées ici un excellent moment. Cette machine ne saurait tourner rond sans la gentillesse et l'efficacité de Brigitte Joubert, Annick Egurbide, Stéphanie Benoît, Colette Boulard, Anaïs Goulian et Katerin Schlau, et toutes nos machines ne sauraient tourner sans le concours expert de Saïd El Mamouni et Éric Le Douaran, merci à eux tous. Je remercie bien évidemment tous les thésards du laboratoire sans qui ces trois années de thèses auraient été bien longues et mornes et en premier lieu mes coreligionnaires en taroinche avec qui je tuais le temps à la pause déjeuner. Un petit mot à mes conscrits : Antoine, ce fût un réel plaisir de partager ce bureau avec toi, de te voir toujours vaillant durant les exposés les plus soporifiques (bien-sûr je ne citerai aucun nom) et de discuter de tout et de rien pendant ta pause-clope (mais ces temps-là sont révolus...) ; Christophe, tes extravagances et ta bonhomie amènent joie et convivialité là où tu passes (c'est quand même mieux qu'Attila) ; l'autre moitié du couple infernal, Moudhaffar, désolé de t'avoir infligé plusieurs fois notre couscous et merci de nous avoir fait goûter la

vrai gastronomie et la gentillesse tunisiennes. Au passage, merci beaucoup à vous deux pour tous les services rendus et en particulier pour les séances de baby-sitting ; Ilaria, j'ai beaucoup apprécié nos longues discussions culturelles (la culture étant plutôt de ton coté) et les séances de cinéma partagées. Guoguang, bravo pour ton apprentissage du français ; je ne sais pas si je ferai aussi bien en Chinois. Tài xièxie nǐ le (désolé, je n'ai pas réussi à l'écrire en idéogramme ce sera donc du pinyin). Passons maintenant aux anciens et mes premiers mots s'adresseront à celui qui s'éternise, Thomas, tes anecdotes insolites (d'autres auraient sûrement choisi un autre adjectif) animent un grand nombre des discussions au RU et ailleurs. Pas avare en conseils LaTeXou autres et toujours partant pour aller boire un coup, tu es le compagnon idéal du thésard. Vincent, dommage que tu n'aies pas plus été à Nantes ces dernières années : chacune de nos entrevues fût bien sympathique. Tant que tu seras là, Gilberto, raclette et ananas seront bannis des pizzas et c'est tant mieux. Les jeux de mots tordus et les blagues inattendues d'Alex feront toujours rire les thésards, même les plus aigris. Vivien, chaque jour tu venais avec un nouveau jeu ou une nouvelle connaissance à ajouter à notre bibliothèque. Salim, détournant une de tes citations : mettre un peu de Salim dans un labo, c'est comme mettre un peu de beurre dans les patates, ça donne un bon petit goût de sel. Merci à Céline pour le sourire permanent qu'elle affichait (sauf peut-être quand Christophe la faisait chuter à la taroinche) et pour les soirées passées chez elle. Alex, tu ne pourrais toujours pas faire tes cent cinquante kilomètres quotidiens de vélos : le projet de douche du laboratoire a été retoqué. Carlos, ton léger accent te trahi, mais ton français impeccable en ferait rêver plus d'un. Bon courage pour ton emploi du temps qui risque d'être chargé cette année. Il me reste à remercier les plus jeunes : tout d'abord merci à Florian de nous avoir prêté son appartement la semaine avant la soutenance. En bon ingénieur tu ne supportes pas les maths théoriques, mais je ne t'en veux pas trop. Son comparse numéricien, Victor, attention les prochaines années risquent d'être longues dans un pays sans fromage et sans saucisson. Tiens bon ! Damien, toujours en conf' à droite à gauche, il fallait partir avec toi pour avoir la chance de te croiser autour d'un verre ou d'un sablé. Pierre, je vais faire mon coquin, mais cèçuiquidiquiyè. Valentin, n'oublie pas qu'en conférence les rangs du fond sont les plus confortables. Noémie, devenue experte en origami en un été, rien ne saurait te résister. Guillaume, nos petits retours en logique m'ont fait du bien et en même temps un peu peur (ça doit être inhérent à la matière). Olivier, dommage que le sur-mesure n'ouvre que tard dans l'après-midi : ça t'aurait fait un second bureau. Thomas et Thomas, mieux vaux ne manger que des handballeurs que traîner dans des vestiaires de légumes : ça donne le teint un peu pâle, mais ça diminue la beaufitude (ces remerciements sont vraiment bourrés de néologismes ! ! !). Victor, j'ai croisé B. S. : il est vraiment très heureux de t'avoir rencontré au Chili et va t'acheter ton livre à quinze centimes. Caroline, bon courage pour cette thèse débutant à peine et qui sera sans aucun doute grandiose.

Je souhaite aussi témoigner toute ma gratitude à l'ensemble des professeurs que j'ai croisé au fil des ans et qui m'ont amené là où je suis aujourd'hui. Merci également à tous mes amis pour tous les bons moments passés ensembles, les longues soirées à refaire le monde ou à refaire une coupe du monde, les barbecues ici ou là, et j'en passe. Je remercie toute ma famille de m'avoir fait grandir chaque jour dans la joie et de m'avoir toujours soutenu et épaulé.

Et je finirai par celles qui réchauffent mon cœur à chaque instant : Marinette, merci pour la joie et la bonne humeur que tu amènes à la maison. Hélène, je ne saurais te remercier assez de partager ma vie par grand vent comme par calme plat. Je te dois, au milieu d'une myriade d'autres choses merveilleuses, ces trois années pleines de bonheur à Nantes et te voue un éternel amour.

Table des matières

1

Introduction

1.1 Équations cinétiques

Généralités

On va s'intéresser tout au long de cette thèse à des équations aux dérivées partielles dites cinétiques. La théorie cinétique est un pan de la mécanique statistique qui entend décrire l'évolution d'un gaz (raréfié) à une échelle mésoscopique, c'est-à-dire entre le microscopique et le macroscopique (on pourra consulter [85] pour une introduction à ce sujet). Le fondement de la théorie cinétique des gaz remonte à Maxwell dans [60] et [61] et a été fortement développée par Boltzmann dans son traité [7].

On décrit donc un gaz par sa densité de particules $f(t, x, v)$ sur l'espace des phases $\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_v$. Pour tout $(t, x, v) \in [0, T] \times \mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_v$, la quantité $f(t, x, v)\mathrm{d}x\mathrm{d}v$ donne la densité de particules au temps t dans un l'élément de volume $\mathrm{d}x\mathrm{d}v$ centré en (x, v) (on peut aussi interprété $f(t, x, v)$ comme une densité de probabilité au temps t de présence de particules en (x, v)). Par conséquent, on demande en général $f(t, ., .) \in L^1(\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_v)$. Le modèle cinétique le plus simple consiste en un nuage de particules qui ne sont soumises à aucune force et n'interagissant pas entre elles. Dans ce cas, la densité f satisfait l'équation de transport libre (on choisit dans un premier temps de fixer toutes les constantes physiques à 1) :

$$\begin{cases} \partial_t f + v.\partial_x f = 0, \\ f_{|t=0} = f_0. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

La solution de cette équation est donnée par $f(t, x, v) = f_0(x - tv, v)$. Les équations de Newton correspondantes pour chaque particule sont

$$\begin{cases} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = v, \\ \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 0, \end{cases}$$

et les particules suivent des lignes droites. Les solutions de l'équation de Newton sont les courbes caractéristiques de l'équation de transport libre (1.1.1) et peuvent être interprétées comme les solutions de

$$\begin{cases} (\mathrm{d}X/\mathrm{d}t)\,(t) = H_\phi(X(t)), \quad X \in \mathbb{R}^{2d} \\ X_{|t=0} = (x, v), \end{cases}$$

où $\phi(x, v) = v^2/2$ est l'énergie d'une particule (ici réduite à son énergie cinétique) et $H_\phi = (\partial\phi/\partial v, -\partial\phi/\partial x)$ est le champ de vecteur hamiltonien associé à ϕ.

Si, maintenant, on considère que le gaz est soumis à un champs de force extérieur $F(x) = -\nabla_x V(x)$ (on considère uniquement ici une force dérivant d'un potentiel), l'équation vérifiée par f est modifiée de la façon suivante :

$$\begin{cases} \partial_t f + v.\partial_x f - \nabla_x V(x).\partial_v f = 0, \\ f_{|t=0} = f_0. \end{cases}$$

L'équation de Newton s'écrit alors

$$\begin{cases} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = v, \\ \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = -\nabla_x V(x), \end{cases}$$

et les courbes intégrales décrivant l'évolution des particules sont les courbes intégrales du champ de vecteur hamiltonien H_ϕ avec $\phi(x, v) = v^2/2 + V(x)$.

La prise en compte de l'interaction des particules entre elles (ou avec le milieu) fait apparaître un opérateur $\mathcal{Q}$, dît opérateur de collision, qui peut être quadratique ou linéaire et qui n'agît que dans la variable de vitesse. L'équation s'écrit alors

$$\begin{cases} \partial_t f + v.\partial_x f - \nabla_x V(x).\partial_v f = \mathcal{Q}(f), \\ f_{|t=0} = f_0. \end{cases}$$

On travail donc dans le cadre des équations cinétiques inhomogènes, c'est-à-dire que les solutions dépendent à la fois de la vitesse, de la position et du temps (homogènes signifiant qu'elles ne dépendent que de la vitesse et du temps). Pour ce qui est du potentiel V, on se place dans le cadre d'un potentiel dit confinant (d'autres types de potentiels sont envisageable, voir par exemple [88] pour des potentiels dits courte portée). Avant de donner plus précisément les hypothèses sur le potentiel, on rappelle la définition suivante :

Définition 1.1.1. *On appelle fonction de Morse, une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty$ qui possède un nombre fini de points critiques et dont tous les points critiques sont non dégénérés.*

Dans toute la thèse, on suppose que le potentiel V est de Morse. En particulier, la régularité assure de ne pas avoir de problème de définition de nos opérateurs. Pour résumer on prend un potentiel satisfaisant les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1.1.2. *Le potentiel V est une fonction de Morse avec n_0 minima locaux et dont les dérivées d'ordre 2 et plus sont bornées. De plus, V est dit confinant, i.e.* $\mathrm{e}^{-\frac{V}{h}} \in L^1$ *et il existe $C > 0$ tel que* $|\nabla V(x)| \geq \dfrac{1}{C}$ *pour $|x| > C$.*

Dans la suite, on s'intéressera uniquement à des opérateurs de collisions linaires. Deux exemples typiques sont donnés par l'équation de (Kramers)-Fokker-Planck et l'équation de relaxation linéaire.

Pour l'équation de Fokker-Planck, l'opérateur de collision est un opérateur différentiel (donc local) donné par

$$\mathcal{Q}_{FP} f = \partial_v(\partial_v + v) f,$$

et l'équation complète s'écrit donc

$$\begin{cases} \partial_t f + v.\partial_x f - \nabla_x V(x).\partial_v f = \partial_v(\partial_v + v) f, \\ f_{|t=0} = f_0. \end{cases}$$

On remarque que du point de vue des équations aux dérivées partielles, il y a un changement de nature radical : dans les exemples précédents, on avait des équations hyperboliques, tandis que l'équation de Fokker-Planck est plutôt une équation de la chaleur dégénérée. En revanche, l'équation de Newton associée à chaque particule est de la forme

$$\begin{cases} \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = v, \\ \mathrm{d}v/\mathrm{d}t = -\nabla_x V(x) - v + \mathrm{d}W, \end{cases}$$

où W est un mouvement brownien normal centré. Cette description probabiliste permet de voir que les particules évoluent encore selon un transport hyperbolique, mais avec un terme de friction et de diffusion supplémentaire.

Pour l'équation de relaxation linéaire, l'opérateur de collision est très simple, mais non-local. Il est donné par

$$\mathcal{Q}_{RL} f = \left[\left(\int_{\mathbb{R}^d_v} f(t,x,v)\,\mathrm{d}v \right) \mathrm{m} - f \right],$$

où

$$\mathrm{m}(v) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}}.$$

L'équation complète s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t f + v.\partial_x f - \nabla_x V(x).\partial_v f = \left[\left(\int_{\mathbb{R}^d_v} f(t,x,v)\,\mathrm{d}v \right) \mathrm{m} - f \right], \\ f_{|t=0} = f_0. \end{cases}$$

Ici, le terme de collision est une simple relaxation vers les états d'équilibres locaux $\left(\int_{\mathbb{R}^d_v} f(t,x,v)\,\mathrm{d}v \right) \mathrm{m}$ et l'équation reste de type hyperbolique.

Équations semi-classiques

Jusqu'à maintenant, on a fixé tous les paramètre physiques à 1, mais comme indiqué dans le titre, on va s'intéresser au régime des basses températures pour ces équations cinétiques. Si on prend maintenant en compte la dépendance par rapport à la température, on obtient pour l'équation de Fokker-Planck

$$\begin{cases} \partial_t f + v.\partial_x f - \nabla_x V(x).\partial_v f = \partial_v(\frac{1}{\beta}\partial_v + v)f, \\ f_{|t=0} = f_0. \end{cases}$$

avec $\beta = 1/kT$ où k est la constante de Boltzmann et T la température. On pose $h = 1/\beta$ et on multiplie l'équation par h pour obtenir finalement

$$\begin{cases} h\partial_t f + v.h\partial_x f - \nabla_x V(x).h\partial_v f = h\partial_v(h\partial_v + v)f, \\ f_{|t=0} = f_0. \end{cases}$$

On va se placer dans le cadre hilbertien, on introduit la maxwellienne globale

$$\mathcal{M}_h(x,v) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{V(x)+v^2/2}{h}}}{(2\pi h)^{d/2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d_x} \mathrm{e}^{-\frac{V(x)}{h}}\,\mathrm{d}x}.$$

Et on pose l'espace de Hilbert naturel suivant, dans lequel la partie collision devient symétrique :

$$B^2 = \left\{ f \in \mathcal{D}' \text{ t. q. } \mathcal{M}_h^{-1/2} f \in L^2 \right\} \subset L^1(\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_v, \mathrm{d}x\mathrm{d}v),$$

On a alors l'équation après changement de variable pour $u = \mathcal{M}_h^{-1/2} f \in L^2$

$$\begin{cases} h\partial_t u + v.h\partial_x u - \nabla_x V(x).h\partial_v u = -(-h\partial_v + \frac{v}{2})(h\partial_v + \frac{v}{2})u, \\ u_{|t=0} = u_0. \end{cases} \tag{1.1.2}$$

On remarquera que le terme de collision est maintenant l'oscillateur harmonique semi-classique en vitesse :

$$H_0 = -h^2\Delta_v + \frac{v^2}{4} - \frac{hd}{2}.$$

L'équation de relaxation linéaire semi-classique s'écrit (avec encore $h = kT$)

$$\begin{cases} \partial_t f + v.\partial_x f - \nabla_x V(x).\partial_v f = \left[\left(\int_{\mathbb{R}^d_v} f(t,x,v)\,\mathrm{d}v\right)\mu_h - f\right], \\ f_{|t=0} = f_0, \end{cases}$$

où

$$\mu_h(v) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2h}}}{(2\pi h)^{\frac{d}{2}}}.$$

Si on multiplie l'équation par h et qu'on se place dans le même espace B^2 que pour l'équation de Fokker-Planck, on obtient l'équation après changement de variable pour $u = \mathcal{M}_h^{-1/2} f \in L^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} h\partial_t u + v.h\partial_x u - \nabla_x V(x).h\partial_v u = h(\Pi_h - \mathrm{Id})u, \\ u_{|t=0} = u_0, \end{array} \right. \tag{1.1.3}$$

où Π_h est le projecteur orthogonal dans B^2 sur l'espace des états d'équilibres locaux $E_h = \left\{ \rho\mu_h^{\frac{1}{2}},\ \rho \in L^2(\mathbb{R}_x^d) \right\}$.

On va maintenant introduire un nouveau modèle qui sera étudié au chapitre 3, qu'on appellera équation de Boltzmann linéaire avec relaxation douce (ou équation de relaxation douce). On se place directement dans le cadre semi-classique et dans l'espace B^2. L'équation s'écrit alors pour $u \in L^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} h\partial_t u + v.h\partial_x u - \nabla_x V(x).h\partial_v u = -(\mathrm{Id} + H_0)^{-1} H_0 u, \\ u_{|t=0} = u_0, \end{array} \right. \tag{1.1.4}$$

où H_0 est l'oscillateur harmonique semi-classique en vitesse, i.e. $H_0 = (-h\partial_v + \frac{v}{2})(h\partial_v + \frac{v}{2}) = -h^2\Delta_v + \frac{v^2}{4} - \frac{dh}{2}$.

Comparaison des modèles

On va maintenant essayer d'établir les points communs entre les trois modèles semi-classiques présentés plus haut. On note respectivement les opérateurs de collisions pour l'équation de Fokker-Planck, l'équation de relaxation linéaire et l'équation de relaxation douce, Q_{FP}, Q_{LR} et Q_{RD}, avec

$$Q_{FP} = H_0\ ; \tag{1.1.5}$$
$$Q_{LR} = h(\mathrm{Id} - \Pi_h)\ ; \tag{1.1.6}$$
$$Q_{RD} = (\mathrm{Id} + H_0)^{-1} H_0. \tag{1.1.7}$$

Bien évidemment, comme tout opérateur de collisions, seule la variable de vitesse intervient dans ces opérateurs. On ne considère donc, pour la comparaison des modèles, que des fonctions ne dépendant pas de la position. On remarque tout d'abord que ces trois opérateurs annulent la maxwellienne $\mu_h(v) = (2\pi h)^{-d/2} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2h}}$, i.e. pour tout $i \in \{FP,\ LR,\ RD\}$,

$$Q_i \mu_h = 0.$$

De plus, pour les trois modèles, 0 est une valeur propre simple isolée. Et les trois opérateurs sont autoadjoints avec le reste du spectre plus grand que $\mathcal{O}(h)$. En outre, ce sont tous les trois des fonctions de l'oscillateur harmonique. En effet,

$$\begin{aligned} Q_{FP} &= H_0\ ; \\ Q_{LR} &= h(1 - \mathbb{1}_{[0,h[})(H_0)\ ; \\ Q_{RD} &= f(H_0). \end{aligned}$$

avec $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$. On voit que l'opérateur de relaxation douce, coupe moins violemment les premiers modes de l'oscillateur harmonique que l'opérateur de relaxation linéaire ce qui justifie la terminologie.

Pour ce qui est des différences entre les modèles, on peut tout d'abord remarquer que les opérateurs de relaxation linéaire et de relaxation douce sont bornés tandis que l'opérateur de collision dans Fokker-Planck ne l'est pas. On remarque également que ni Q_{LR}, ni Q_{RD} n'améliore la régularité de la solution, tandis que Q_{FP} est elliptique d'ordre 2 (voir section 1.3 pour plus de précisions sur le gain de régularité dans l'équation de Fokker-Planck complète). Une des différences essentielles entre les équations de relaxation linéaire et de relaxation douce est structurelle : l'équation de relaxation douce présente une structure supersymétrique (à l'instar de Fokker-Planck), tandis que l'équation de relaxation linéaire semble plus difficile à écrire sous cette forme. Le but de la prochaine section est d'introduire cette notion de supersymétrie.

1.2 Supersymétrie

Ici, on entend par supersymétrie le fait que notre opérateur peut se mettre sous la forme d'un laplacien de Hodge $\mathrm{d}\mathrm{d}^* + \mathrm{d}^*\mathrm{d}$, où d est le complexe de de Rham agissant sur l'ensemble des k-formes différentielles et d^* son adjoint formel. C'est une structure qui permet d'étudier avec une grande précision les petites valeurs propres de l'opérateur. Dans le cas, autoadjoint du laplacien de Witten, cette structure a été exploitée par Witten [89] et Helffer-Sjöstrand [36] (on pourra aussi se référer aux livres [12] ou [29]) pour l'étude des petites valeurs propres et de l'effet tunnel et cette étude a été complétée plus récemment dans [10, 11] (avec une approche probabiliste), [31] et encore [52, 53, 54, 55, 56] (on se reportera à la section 1.6 pour plus de précisions sur ces résultats).

On va rappeler la construction de l'opérateur à la fois dans ce cadre autoadjoint du laplacien de Witten et dans le cadre non autoadjoint de Fokker-Planck. On va travailler sur le fibré extérieur ΛT^*M d'une variété différentielle M riemannien de dimension n (en fait on s'intéressera seulement dans la suite de la thèse à l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}x)$, mais il est possible de définir l'opérateur sur des variétés plus générales). On rappelle que $\Lambda T^*M = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k T^*M$ où $\Lambda^k T^*M$ est l'ensemble des k-formes différentielles sur l'espace cotangent de M. Sur les fonctions (0-formes), le laplacien de Witten semi-classique (le paramètre semi-classique apparaît déjà chez Witten et est essentiel dans sa démarche afin de démontrer les inégalités de Morse généralisées) prend la forme suivante dans $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta^{(0)}_{\phi,h} = -h^2\Delta + |\nabla\phi(x)|^2 - h\Delta\phi(x),$$

où $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ est une fonction de Morse (voir définition 1.1.1). On considère donc une variété différentielle (lisse) M. On notera d la différentielle extérieure sur $\mathcal{C}_0^\infty(M, \Lambda T^*M)$. Plus précisément, on a

$$\mathrm{d}^{(k)} : \mathcal{C}_0^\infty(M, \Lambda^k T^*M) \to \mathcal{C}_0^\infty(M, \Lambda^{k+1} T^*M),$$

où on a noté $\mathcal{C}_0^\infty(M,\Lambda^k T^*M)$ l'espace des sections $\mathcal{C}_0^\infty$ du fibré $\Lambda^k T^*M$. On notera de la même façon $\mathcal{C}^\infty(M,\Lambda^k T^*M)$, $L^2(M,\Lambda^k T^*M)$, ... les espaces des sections $\mathcal{C}^\infty$, L^2, ... de ces fibrés. L'adjoint formel donné par le produit scalaire L^2 provenant de la structure riemannienne est noté d^* et

$$\mathrm{d}^{(k),*} \,:\, \mathcal{C}_0^\infty(M,\Lambda^{k+1}T^*M) \to \mathcal{C}_0^\infty(M,\Lambda^k T^*M).$$

Pour écrire la structure supersymétrique du laplacien de Witten, on introduit alors le complexe de Witten (de Rham) tordu pour $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ et un petit paramètre $h > 0$:

$$\mathrm{d}_\phi = \mathrm{e}^{-\phi/h} \circ h\mathrm{d} \circ \mathrm{e}^{\phi/h} = h\mathrm{d} + (\mathrm{d}\phi)^\wedge,$$

où $^\wedge$ désigne l'opérateur usuel de produit extérieur (à gauche). Plus précisément, on a encore

$$\mathrm{d}_\phi^{(k)} \,:\, \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n;\Lambda^k T^*\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n;\Lambda^{k+1}T^*\mathbb{R}^n).$$

On peut remarquer que $\mathrm{d}_\phi^2 = (\mathrm{d}_\phi^*)^2 = 0$ (où d_ϕ^* est l'adjoint formel de d_ϕ) et en outre, ce complexe définit la même cohomologie (les formes fermées, mais non-exactes sont les mêmes - à multiplication par un facteur exponentiel près - pour d et d_ϕ). Le laplacien de Witten est alors défini par

$$\Delta_{\phi,h} = \mathrm{d}_\phi^*\mathrm{d}_\phi + \mathrm{d}_\phi\mathrm{d}_\phi^*,$$

ce qui signifie plus précisément

$$\Delta_{\phi,h}^{(k)} = \mathrm{d}_\phi^{(k),*}\mathrm{d}_\phi^{(k)} + \mathrm{d}_\phi^{(k)}\mathrm{d}_\phi^{(k),*} \,:\, \mathcal{C}_0^\infty(M,\Lambda^k T^*M) \to \mathcal{C}_0^\infty(M,\Lambda^k T^*M).$$

Le fait que $\mathrm{d}_\phi^2 = (\mathrm{d}_\phi^*)^2 = 0$ permet d'écrire les relations d'entrelacement suivantes :

$$\mathrm{d}_\phi^{(k)}\Delta_{\phi,h}^{(k)} = \Delta_{\phi,h}^{(k+1)}\mathrm{d}_\phi^{(k)}\,; \tag{1.2.1}$$

$$\Delta_{\phi,h}^{(k)}\mathrm{d}^{(k),*} = \mathrm{d}^{(k),*}\Delta_{\phi,h}^{(k+1)}. \tag{1.2.2}$$

Ces relations sont essentielles pour le calcul de la matrice d'interaction et des petites valeurs propres de ce type d'opérateurs.

Exprimons maintenant la différentielle extérieure dans un système de coordonnées locales $x_1, ..., x_n$, on obtient

$$\mathrm{d}_\phi = \sum_{j=1}^n (h\partial_{x_j} + \partial_{x_j}\phi) \otimes \mathrm{d}x_j^\wedge.$$

Dans le cas $M = \mathbb{R}^n$, comme $(h\partial_{x_j} + \partial_{x_j}\phi)$ et $\mathrm{d}x_j^\wedge$ commutent, l'adjoint formel de d_ϕ est donné par

$$\mathrm{d}_\phi^* = \sum_{j=1}^n (-h\partial_{x_j} + \partial_{x_j}\phi) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^\rfloor,$$

où $\rfloor$ désigne l'opérateur usuel de produit intérieur (à gauche). On obtient finalement pour le laplacien de Witten dans $\mathbb{R}^n$

$$\Delta_{\phi,h} = \Delta^{(0)}_{\phi,h} \otimes \mathrm{Id} + 2h \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i}\partial_{x_j}\phi(x) \otimes \mathrm{d}x_i^{\wedge} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^{\rfloor}.$$

On remarquera que l'opérateur sur les k-formes ($k \geq 1$) ne diffère de celui sur les 0-formes que par un terme de d'ordre h.

Cette approche a été étendue assez récemment au cas non-autoadjoint (et non-elliptique) notamment dans [5] et [6] (voir aussi [57]) et a permis l'étude de l'effet tunnel pour des équations de type (Kramers)-Fokker-Planck dans [41, 42, 43]. On aborde ici la supersymétrie en terme de formes différentielles ; pour un point de vue plus spécifiquement supersymétrique, on pourra voir [82]. Pour prendre en compte le caractère non-autoadjoint de l'opérateur, il faut modifier le produit scalaire usuel hérité de la structure riemannienne en une forme bilinéaire non symétrique (ou non hermitienne) pour obtenir de la supersymétrie. Soit donc

$$A \,:\, T^*M \to TM,$$

une application linéaire inversible des covecteurs dans les vecteurs (on peut éventuellement faire dépendre A de la position ce que nous ne ferrons pas ici). On définit alors la forme bilinéaire non dégénérée induite par A sur les k-formes, qu'on note

$$(u|v)_A = v\left(\Lambda^k A(u)\right), \quad u,\ v \in \Lambda^k T^*M, \tag{1.2.3}$$

où $\Lambda^k A$ est définie par récurrence comme suit : sur les 0-formes

$$\Lambda^0 A = \mathrm{Id}.$$

Si u est une $(k+1)$-forme non nulle, il existe un champ de vecteur X tel que $X^{\rfloor}u \neq 0$. Si on note $w = X^{\rfloor}u$ et ω la 1-forme duale de X, on a

$$\omega \wedge w = u.$$

On pose donc

$$\Lambda^{k+1}Au = \Lambda^{k+1}A(\omega \wedge w) = (A\omega, \Lambda^k Aw).$$

On obtient de l'inversibilité de A que la forme définie en (1.2.3) est non dégénérée. Si $a \,:\, \Lambda^k T^*M \to \Lambda^l T^*M$ est une application linéaire, on définit l' "adjoint" $a^{A,*} \,:\, \Lambda^l TM \to \Lambda^k TM$ par

$$(au|v)_A = (u|a^{A,*}v)_A.$$

Par exemple, si ω est une 1-forme, alors pour toute k-forme u et toute $(k+1)$-forme v, on a par application de la définition

$$(\omega \wedge u|v)_A = v\left(A\omega, \Lambda^k A(u)\right) = (A\omega)^{\rfloor}v\left(\Lambda^k A(u)\right) = (u|(A\omega)^{\rfloor}v)_A. \tag{1.2.4}$$

On a donc obtenu

$$(\omega^{\wedge})^{A,*} = (A\omega)^{\lrcorner}. \tag{1.2.5}$$

Si u et v sont des k-formes régulières avec $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} v$ compact, on définit alors la forme bilinéaire suivante :

$$(u, v)_A = \int (u(x), v(x))_A \, \mu(\mathrm{d}x),$$

où $\mu(\mathrm{d}x)$ est associé à la structure riemannienne de M. On note encore, pour un opérateur $a \ : \ \mathcal{C}_0^\infty(M; \Lambda^k T^* M) \to \mathcal{D}'(M, \Lambda^l T^* M)$, $a^{A,*}$ son adjoint formel. Par exemple, dans la cas de l'espace euclidien $(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}x)$, si on considère l'opérateur de différentiation

$$\partial_{x_j} \ : \ \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n; \Lambda^k T^* \mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n; \Lambda^k T^* \mathbb{R}^n),$$

qui agit uniquement sur les coefficients, un calcul direct nous donne (comme A ne dépend pas de la position)

$$(h\partial_{x_j})^{A,*} = -h\partial_{x_j}. \tag{1.2.6}$$

Si maintenant on prend l'adjoint par rapport à la nouvelle forme bilinéaire pour le complexe de Witten, on obtient un nouvel opérateur

$$\Delta_A = \mathrm{d}_\phi^{A,*}\mathrm{d}_\phi + \mathrm{d}_\phi \mathrm{d}_\phi^{A,*}. \tag{1.2.7}$$

Comme on a

$$(\mathrm{d}_\phi^{A,*})^2 = (\mathrm{d}_\phi^2)^{A,*} = 0,$$

on a encore les relations d'entrelacement (1.2.1) et (1.2.2) comme dans le cas autoadjoint.

On se place maintenant dans l'espace euclidien muni des coordonnées canoniques $x_1, ..., x_n$, on obtient alors l'expression en coordonnées

$$\Delta_A = \sum_{i,j=1}^n (-h\partial_{x_j} + \partial_{x_j}\phi) A_{i,j} (h\partial_{x_i} + \partial_{x_i}\phi) + 2h \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i}\partial_{x_j}\phi \otimes \mathrm{d}x_i^{\wedge} \, (A\mathrm{d}x_j)^{\lrcorner}.$$

Pour retrouver l'équation de Fokker-Planck, on se place dans $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_v^d$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.2.8}$$

et

$$\phi(x, v) = \frac{1}{2}\left(V(x) + \frac{v^2}{2}\right). \tag{1.2.9}$$

1.3 Hypoellipticité

Cette théorie développée notamment par Hörmander [48] (on peut citer aussi [50] et [72] parmi beaucoup d'autres) s'intéresse à des opérateurs qui n'ont pas d'ellipticité globale dans la mesure où la partie elliptique de l'opérateur est dégénérée (typiquement pour des équations cinétiques telles que Fokker-Planck, on a de l'ellipticité dans la variable de vitesse, mais pas dans la variable de position). Cependant, l'équation globale possède un effet régularisant dû à une interaction entre la partie elliptique et la partie transport.

Afin d'illustrer un peu ces notions, on s'intéresse à l'équation de Kolmogorov

$$\partial_t f + v.\partial_x f - \Delta_v f = 0,$$

décrivant l'évolution de la densité de probabilité de présence $f(t,x,v)$ d'un système de particules diffusées par un bain de chaleur (voir [48] ou [49]). C'est l'une des équations qui est à l'origine du développement des méthodes de commutateurs en analyse microlocale. D'un point de vue microlocal l'opérateur associé a le double inconvénient de n'être ni elliptique ni autoadjoint. C'est d'ailleurs une difficulté qui se retrouve dans tous les modèles cinétiques. Cependant, on remarque tout d'abord que cet opérateur a une structure particulière du type

$$X_0 + X_1^* X_1,$$

avec ici $X_0 = v.\partial_x$ et $X_1 = \partial_v$. De plus, $[X_1, X_0] = \partial_x$, donc $(X_1, [X_1, X_0])$ engendre tout l'espace tangent et $[X_1, X_0]^*[X_1, X_0] + X_1^* X_1 = -\Delta_x - \Delta_v$ est elliptique. En fait, pour les opérateurs différentiels d'ordre 2, c'est la situation typique de l'hypoellipticité de type 2 décrite par Hörmander dans [48]. D'une part, il montre que les opérateurs différentiels hypoelliptiques d'ordre 2 sont nécessairement de la forme

$$\sum_{i=1}^{r} X_i^* X_i + X_0 + c$$

où $X_0, X_1, ..., X_r$ sont des opérateurs différentiels d'ordre 1 et $c \in \mathcal{C}^\infty$. D'autre part, s'il existe des crochets (itérés un certain nombre de fois) de commutation entre les $X_0, X_1, ..., X_r$ qui engendrent tout l'espace tangent, alors l'opérateur est hypoelliptique. De plus, si on a besoin d'itérer k crochets pour obtenir l'espace tangent tout entier alors le gain (optimal) d'hypoellipticité est $\frac{2}{2k+1}$, c'est-à-dire qu'on gagne $\frac{2}{2k+1}$ dérivées dans les directions qui ne sont pas elliptiques a priori.

Le cas des modèles cinétiques inhomogènes avec une force extérieure dérivant d'un potentiel entre typiquement dans ce cadre lorsque l'opérateur de collision présente de l'ellipticité. On considère ici les équations cinétiques inhomogènes du type suivant

$$\partial_t f + X_0 f = \mathcal{Q}(f),$$

avec $X_0 = v.\partial_x f - \nabla V(x).\partial_v$ et $\mathcal{Q}$ est le noyau de collision et n'agit qu'en vitesse. Par exemple, si on regarde l'équation de Fokker-Planck

$$\partial_t f + X_0 f = \partial_v(\partial_v + v) f,$$

on peut montrer l'hypoellipticité de cette équation (voir [44] et [32] ou, encore [21]) avec un gain (optimal) de $\frac{2}{3}$ dérivées ([45]). Cependant, cette notion d'hypoellipticité n'est pas toujours adaptée aux équations cinétiques dans la mesure où le noyau de collisions ne présente pas toujours d'effet régularisant (dans les équations qu'on étudiera dans ce document, ce n'est même jamais le cas). Ceci dit, les méthodes de commutateurs se sont avérées efficaces également pour des modèles sans hypoellipticité, ce qui a conduit à l'introduction de la notion d'hypocoercivité discutée dans la prochaine partie.

1.4 Hypocoercivité

Le terme d'hypocoercivité est apparu il y a une petite dizaine d'années en référence à l'hypoellipticité (voir par exemple [86]). Dans la théorie hypoelliptique, on s'intéresse aux effets de régularisation de l'équation bien que la partie elliptique soit dégénérée. Dans la théorie hypocoercive, on s'intéresse plutôt à des propriétés spectrales et au retour à l'équilibre (et à quel taux ce retour à lieu), bien que la partie dissipative de l'équation soit également dégénérée. Les deux notions sont liées mais disjointes. En effet, dans de nombreux cas - par exemple pour l'équation de Fokker-Planck avec potentiel confinant - la propriété de régularisation s'accompagne d'une propriété de retour à l'équilibre. Cependant, il se peut que le retour à l'équilibre ait lieu sans que l'équation ait une quelconque propriété de régularisation. On peut notamment penser dans le cadre cinétique au cas où l'opérateur de collisions $\mathcal{Q}(f)$ est "d'ordre 0" (ce qui sera le cas pour l'ensemble des équations traitées ici). Il n'y a alors pas d'effet régularisant de l'équation, mais les solutions de l'équation convergent vers la maxwellienne à un taux exponentiel. Inversement, on peut aussi avoir des cas où on a bien de l'hypoellipticité, mais pas de retour à l'équilibre (par exemple quand la maxwellienne n'est pas une densité).

On peut distinguer deux types de méthodes hypocoercives : d'une part des méthodes complètement non linéaires (mais avec de bonnes estimations a priori sur la solution), basées sur la dissipation d'entropie (voir [17],[13],[16],...). D'autre part des méthodes hilbertiennes basées sur des idées issues de l'analyse microlocale qui permettent d'obtenir un taux de retour exponentiel vers l'équilibre (voir [44],[64], [39],[86],[43],[19],[20],...). On peut mentionner qu'on peut voir ces dernières comme des méthodes d'entropies sur un espace de Hilbert (typiquement un espace L^2 à poids) avec comme entropie la norme au carré. Les méthodes hilbertiennes permettent de traiter le cas des équations cinétiques linéaires ou bien non linéaires, mais dans le cadre perturbatif. On va préciser ici le cadre hilbertien linéaire. Un troisième type de méthodes (ou de point de vue) consiste en l'approche probabiliste et on renvoie à [63] et aux références qu'il contient pour plus de détails.

On peut donner la définition abstraite suivante pour l'hypocoercivité hilbertienne (voir [40] étendue par Gualdani *et al.* au cas Banach [27]) :

Définition 1.4.1. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et P un opérateur maximal accrétif* *non borné sur $\mathcal{H}$ de domaine $D(P)$. Soit aussi $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ un autre espace de Hilbert muni d'une autre norme hilbertienne $\|.\|_{\mathcal{K}}$ tel que la restriction de $\|.\|_{\mathcal{H}}$ à $\mathcal{K}$ est équivalente à $\|.\|_{\mathcal{K}}$. On dit que l'opérateur est P est hypocoercif si on a les deux propriétés suivantes :*

i) $\mathcal{K}$ est stable par P et la restriction de P à $\mathcal{K}$ équipée du domaine $D(P) \cap \mathcal{K}$ est un opérateur maximal accrétif.

ii) Il existe une constante $\lambda > 0$, telle que pour tout $u \in D(P) \cap \mathcal{K}$ on ait

$$\mathrm{Re}\,(Pu, u)_{\mathcal{K}} \geq \lambda \|u\|_{\mathcal{K}}^2. \tag{1.4.1}$$

Dans la pratique, le but est de trouver à la fois l'espace et la norme qui nous donnent cette propriété $ii)$ qui n'est rien d'autre que la coercivité de P dans $\mathcal{K}$. En général, on cherche aussi à avoir des méthodes constructives explicites pour trouver λ, ainsi que la norme sur $\mathcal{K}$ afin de pouvoir quantifier le taux de retour à l'équilibre. En effet, si $\|.\|_{\mathcal{K}}$ vérifie

$$C^{-1}\|.\|_{\mathcal{H}} \leq \|.\|_{\mathcal{K}} \leq C\|.\|_{\mathcal{H}},$$

on peut montrer

Proposition 1.4.2. *Soit P un opérateur hypocoercif sur $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$ vérifiant l'inégalité (1.4.1). Alors pour tout $u \in D(P) \cap \mathcal{K}$, on a*

$$\left\|\mathrm{e}^{-tP}u\right\|_{\mathcal{H}} \leq C^2 \mathrm{e}^{-\lambda t}\|u\|_{\mathcal{H}}. \tag{1.4.2}$$

Preuve : La preuve est immédiate grâce à l'équivalence des normes et au lemme de Gronwall appliqué à l'inégalité

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u\|_{\mathcal{K}}^2 = -2\mathrm{Re}\,(Pu, u)_{\mathcal{K}} \leq -2\lambda\|u\|_{\mathcal{K}}^2,$$

pour $u \in \mathscr{S} \cap \mathcal{K}$. □

On peut aussi remarquer que, pourvu que la résolvante existe, (1.4.1) donne facilement une estimation de résolvante permettant d'appliquer le théorème de Gearhart-Prüss (voir dans l'appendice le théorème D.11).

Dans le cadre des équation cinétiques linéaires telles que Fokker-Planck ou la relaxation linéaire avec un potentiel confinant ou la relaxation douce (avec le paramètre $h = 1$), les méthodes hypocoercives sont efficaces avec

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_v^d, \mathrm{d}x\mathrm{d}v) \text{ et } \mathcal{K} = \left\{\mathcal{M}^{1/2}\right\}^{\perp}.$$

On remarquera que l'espace engendré par $\mathcal{M}^{1/2}$ ainsi que son orthogonal son stable par P et que la projection (spectrale) sur $\mathrm{Vect}\,\mathcal{M}^{1/2}$ est orthogonale bien que P ne soit pas autoadjoint.

On s'intéresse à des équations à basse température, il faut donc préciser la dépendance en h dans la définition d'hypocoercivité. Dans le cadre semi-classique, on dira que P_h est hypocoercif si, comme dans le cas sans petit paramètre, il existe un sous espace hilbertien $\mathcal{K}_h$ muni d'une norme hilbertienne $\|.\|_{\mathcal{K}_h}$ tel qu'il existe $C > 0$ (indépendante de h) telle que

$$C^{-1}\|.\|_{\mathcal{H}} \leq \|.\|_{\mathcal{K}_h} \leq C\|.\|_{\mathcal{H}},$$

et il existe $\lambda > 0$, indépendant de h, tel que P_h vérifie l'estimation hypocoercive suivante pour tout $u \in D(P_h) \cap \mathcal{K}_h$:

$$\operatorname{Re}(P_h u, u)_{\mathcal{K}_h} \geq h\lambda\|u\|_{\mathcal{K}_h}. \tag{1.4.3}$$

Comme l'équivalence des normes est uniforme en h, on peut éventuellement oublier la dépendance de $\mathcal{K}$ par rapport à h. Une des difficultés qui apparaît lorsqu'on travaille à basse température est que les projecteurs spectraux associés aux petites valeurs propres ne sont plus orthogonaux.

1.5 Difficultés dans le monde non autoadjoint

La principale difficulté à gérer dans l'étude des problèmes non autoadjoints provient de l'absence de théorème spectral. Cette difficulté se décline sous différentes formes à commencer par l'impossibilité de définir le calcul fonctionnel comme dans le cas autoadjoint. Cela pose notamment des problèmes pour définir le semi-groupe associé à un opérateur (voir l'appendice D à ce sujet) et les projecteurs spectraux (en tant qu'opérateurs bornés de notre espace de Hilbert). Une étude précise de la résolvante permet de contourner ce problème.

Dans le cas autoadjoint, le théorème spectral nous donne la bonne estimation de résolvante

$$\|(P-z)^{-1}\| = \frac{1}{d(z,\sigma(P))},$$

où $\sigma(P)$ désigne le spectre de P. Alors que dans le cas non autoadjoint, la norme de la résolvante $\|(P-z)^{-1}\|$ peut être très grande même si z se situe très loin du spectre (voir à ce sujet la notion de pseudospectre dans les livres [84], [30], l'article [51] pour des liens avec la $\mathscr{PT}$-symétrie et la thèse de R. Henry [38]). Un sujet relié à cette estimation de résolvante est l'estimation de la décroissance du semi-groupe. Dans le cas autoadjoint, si le spectre de P est inclus dans le demi-plan complexe $\{\operatorname{Re} z \geq \lambda_0\}$, alors le semi-groupe associé à P vérifie l'estimation

$$\left\|\mathrm{e}^{-tP}\right\| \leq \mathrm{e}^{-\lambda_0 t}.$$

Dans le cas non autoadjoint, cette localisation du spectre ne suffit plus et il faut aussi un contrôle de la résolvante pour conclure à la décroissance du semi-groupe grâce au théorème de Gearhart-Prüss (cf. appendice D).

L'instabilité spectrale liée au pseudospectre donne lieu à une grande quantité de problèmes numériques (voir notamment [84]) que nous n'aborderons pas ici, mais aussi à des problèmes théoriques. En effet, elle rend la localisation du spectre extrêmement difficile. Souvent quand on veut déterminer le spectre d'un opérateur (et particulièrement en analyse semi-classique), on essaie de construire des fonctions propres approchées ou quasimodes. C'est-à dire qu'on cherche à construire une fonction u_h et un complexe λ_h tels que

$$\|(P - \lambda_h)u_h\| \leq \varepsilon(h)\|u_h\|,$$

avec $\varepsilon(h)$ qui tend vers 0 quand h tend vers 0. Quand P est autoadjoint, on conclut qu'il existe une valeur propre (et bien sûr une fonction propre associée) qui est proche de λ_h. Dans le cas où P n'est pas autoadjoint, on est dans l'impossibilité de conclure sans information supplémentaire, notamment sur les projecteurs spectraux ou sur la résolvante.

Dans la cas autoadjoint, les projecteurs spectraux sont orthogonaux et donc de norme égale à 1. Quand l'opérateur n'est pas autoadjoint, on peut se servir, là encore, d'une estimation de résolvante pour borner (grâce à la formule de Cauchy) la norme du projecteur spectral. Malgré ces difficultés, il est possible de montrer des résultats très précis en ce qui concerne la norme de la résolvante ou des projecteurs spectraux, on pourra voir par exemple [87] pour des opérateurs incluant celui de Fokker-Planck avec potentiel quadratique. Dans la suite, nous rencontrerons tous les problèmes liés au caractère non autoadjoint avec les différents modèles étudiés dans cette thèse.

1.6 Valeurs propres exponentiellement petites en mécanique statistique

Dans cette section, on va rappeler les résultats sur le valeurs propres exponentiellement petites du laplacien de Witten semi-classique. Ce n'est pas à proprement parler un opérateur venu de la théorie cinétique (en particulier il est elliptique), mais il relève bien de de la mécanique statistique des gaz et joue un rôle central dans l'étude des petites valeurs propres de l'équation de Fokker-Planck, ainsi que dans notre étude des équations de relaxation linéaire et de relaxation douce.

On rappelle que le laplacien de Witten semi-classique sur $\mathbb{R}^n$ est donné par

$$-h\Delta + |\nabla\phi(x)|^2 - h\Delta\phi(x), \tag{1.6.1}$$

où on suppose que ϕ est une fonction de Morse possédant n_0 minima locaux. Cet opérateur a été introduit par Witten dans [89] où il initie l'étude de ses valeurs propres exponentiellement petites. Le résultat de Witten est ensuite montré de façon plus rigoureuse par Helffer-Sjöstrand dans [36] (on pourra voir aussi [74],[75] [35],[12] pour une étude des petites valeurs propres d'opérateurs de Schrödinger plus généraux). Ces résultats ont été complétés beaucoup plus récemment d'abord par des méthodes probabilistes ([10],[11]...) puis une asymptotique complète des valeurs propres exponentiellement petites $\lambda_k(h)$ est donnée dans [31] dont nous extrayons le résultat suivant (on renvoie le lecteur à cet article pour plus de précisions) :

$$\forall j \in \{1, ..., n_0\}, \quad \lambda_j(h) \sim hA_j \mathrm{e}^{-2S_j/h}. \tag{1.6.2}$$

où $S_j = \phi(s_{l(j)}) - \phi(x_j)$ avec x_j un minimum local et $s_{l(j)}$ un point critique d'indice 1 associé à x_j suivant une procédure naturelle et où A_j est explicitement fonction de la hessienne de ϕ aux points critiques x_j et $s_{l(j)}$. En fait, il existe un développement asymptotique complet pour ces valeurs propres.

Le résultat mentionné ci-dessus est valable dans $\mathbb{R}^n$ ou sur une variété compacte sans bord. Le cas avec bord est traité par Helffer-Nier dans [33] pour des conditions de Dirichlet et par Le Peutrec dans [55] pour des conditions de Neumann (on pourra aussi voir [52, 53, 54, 56] pour le problème des petites valeurs propres de Witten).

On va maintenant aborder le sujet des petites valeurs propres pour l'opérateur de Fokker-Planck. On rappelle que l'équation s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t f + v.\partial_x f - \nabla_x V(x).\partial_v f = \partial_v(\partial_v + v)f, \\ f_{|t=0} = f_0. \end{cases}$$

Le lien entre opérateur de Fokker-Planck et laplacien de Witten a été fait dans [44] et [32]. L'étude à proprement parler de l'équation de Fokker-Planck à basse température commence dans [45] dans lequel les auteurs obtiennent une estimation de résolvante et une description précise de l'ensemble du spectre à l'aide de celui de l'approximation quadratique de l'opérateur.

Théorème (Hérau-Sjöstrand-Stolk)**.** *Il existe des constantes $c, C' > 0$ telles que pour tout $C > 1$:*

a) Pour tout voisinage fixé Ω des valeurs propres de l'approximation quadratique de $P_{h=1}$ au points critiques, il existe $h_0, C'' > 0$ telles que pour tout $0 < h \leq h_0$, $|z| \leq C$, $z \ni \Omega$,

$$h\|u\| \leq C'' \|(P - hz)u\|.$$

b) Il existe $h_1 > 0$, tel que pour $0 < h \leq h_1$, $\mathrm{Re}\, z \leq c|z|^{1/3}h^{2/3}$ et $|z| \geq Ch$,

$$|z|^{1/3}h^{2/3}\|u\| \leq C' \|(P - z)u\|.$$

Par ailleurs, les auteurs montrent que pour tout $C > 0$, il existe $h_0 > 0$ tel que pour $0 < h \leq h_0$, le spectre de P dans le disque $D(0, Ch)$ est discret et les valeurs propres sont de la forme

$$\lambda_{j,k}(h) \sim h\left(\mu_{j,k} + h^{1/N_{j,k}}\mu_{j,k,1} + h^{2/N_{j,k}}\mu_{j,k,2} + ...\right),$$

où les $\mu_{j,k}$ sont les valeurs propres dans $D(0, C)$ (répétées selon leurs multiplicités) de l'approximation quadratique de $P_{|h=1}$ au point critique ρ_k et $N_{j,k}$ est la dimension de l'espace propre généralisé correspondant. Pour les opérateurs concernés dans cette thèse, on ne s'intéressera qu'aux valeurs propres proches de 0 et pas aux "groupes" suivants, bien que le résultat ci-dessus doive s'étendre au cas de la relaxation douce (pour l'équation de relaxation linéaire, le spectre doit être beaucoup plus complexe).

Ces résultats sur l'opérateur de Fokker-Planck ont été complétés par la suite par Hérau-Hitrik-Sjöstrand dans la série d'articles [41, 42, 43], pour aboutir à l'instar du laplacien de Witten à un développement asymptotique complet des valeurs propres exponentiellement petites. Nous rappelons uniquement ici le premier terme du développement (qui est de la même forme que pour le laplacien de Witten) :

$$\forall j \in \{1, ..., n_0\}, \quad \lambda_j(h) \sim h A_j \mathrm{e}^{-2S_j/h}. \tag{1.6.3}$$

où $S_j = \frac{1}{2}\left(V(s_{l(j)}) - V(x_j)\right)$ avec x_j un minimum local et $s_{l(j)}$ un point critique d'indice 1 associé à x_j suivant une procédure naturelle et où A_j est explicitement fonction de la hessienne de V aux points critiques x_j et $s_{l(j)}$.

Les opérateurs concernés dans les théorèmes précédents sont tous locaux. Pour ce qui est de ce genre de résultat avec des opérateurs non locaux, on peut citer [8] dans lequel les auteurs obtiennent un résultat similaire pour les valeurs propres proche de 1 pour une marche aléatoire semi-classique. En ce qui concerne l'équation de relaxation linéaire de Boltzmann à basse température, il n'existe pas de littérature à ce sujet et les résultats obtenus dans cette thèse (ainsi que dans [69]) sont les premiers dans cette direction.

1.7 Résultats

On conclut cette introduction en donnant les résultats qui figurent dans cette thèse. On rappelle qu'on étudie l'équation de relaxation linéaire de Boltzmann semi-classique (ici écrite dans un bon espace fonctionnel) :

$$\begin{cases} h\partial_t u + v.h\partial_x u - \nabla_x V(x).h\partial_v u + h(\mathrm{Id} - \Pi_h)u = 0, \\ u_{|t=0} = u_0, \end{cases}$$

où on note l'opérateur qui lui est associé

$$P_h = v.h\partial_x - \nabla V(x).h\partial_v + h(\mathrm{Id} - \Pi_h). \tag{1.7.1}$$

Et on étudie également l'équation de relaxation douce

$$\begin{cases} h\partial_t u + v.h\partial_x u - \nabla_x V(x).h\partial_v u + h(1 + H_0)^{-1}H_0 u = 0, \\ u_{|t=0} = u_0, \end{cases}$$

où H_0 est l'oscillateur harmonique semi-classique en vitesse, i.e. $H_0 = -h^2\Delta_v + v^2 - dh$. Et l'opérateur associé est

$$P = v.h\partial_x - \nabla_x V(x).h\partial_v + h(1 + H_0)^{-1}H_0. \tag{1.7.2}$$

Pour ces deux opérateurs (qu'on notera tous les deux P dans cet énoncé), on montre le théorème et la proposition suivants :

Théorème. *Supposons que V satisfasse les hypothèses 1.1.2. Considérons P donné soit en (1.7.1) soit en (1.7.2). Alors, P a 0 comme valeur propre simple et il existe $h_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ tels que :*

i) pour tout $h \in]0, h_0]$, $\operatorname{Spec} P \cap B(0, \delta_0 h)$ est constitué de n_0 valeurs propres réelles (comptées avec multiplicité) qui sont exponentiellement petites par rapport à $\frac{1}{h}$;

ii) pour tout $\delta > 0$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $h \in]0, h_0]$, si $\delta h \leq |z| \leq \delta_0 h$ alors
$$\|(P - z)^{-1}\| \leq \frac{C}{h}.$$

Si on note μ_j les valeurs propres exponentiellement petites de l'opérateur (répétées selon leurs multiplicités), on obtient aussi la proposition suivante sur la décroissance du semi-groupe :

Proposition. *Il existe $c > 0$ et $\alpha > 0$ telles que pour tout , $t \geq 0$ et h suffisamment petit*
$$\mathrm{e}^{-tP} = \sum_{j=1}^{n_0} \mathrm{e}^{-t\mu_j} \Pi_j + \mathcal{O}(e^{-cht}),$$
avec $\|\Pi_j\| = \mathcal{O}(1)$ et $\mu_j = \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}})$.

Dans le cas de l'équation de relaxation linéaire, ce résultat est paru aux "Annales Henri Poincaré" [69]. Pour les deux modèles, on montre le même théorème. Cependant, les techniques utilisées sont extrêmement différentes. Dans le chapitre 2, on montre ce théorème avec des méthodes hypocoercives. Bien que les idées soient microlocales dans le cas de l'équation de relaxation linéaire, on utilise pas l'arsenal technique propre à l'analyse semi-classique (voir à ce sujet les remarques à la fin des Généralités du chapitre 2), alors que celui-ci est très fortement utilisé dans le chapitre 3 pour montrer le théorème dans le cas de l'équation de relaxation douce. On remarquera que, contrairement au cas de Fokker-Planck, dans l'équation de relaxation douce, il n'y a pas de gain en terme de puissance de h. Ce qui complique considérablement l'étude (notamment du point de vue du recollement des estimations dans les différentes parties de l'espace des phases) puisque h est critique.

Le chapitre 4 s'intéresse à la structure de l'équation de relaxation douce et on y montre que cette équation est supersymétrique.

Théorème. *L'opérateur de relaxation linéaire $P = v.h\partial_x - \partial_x V(x).h\partial_v + (1 + H_0)^{-1} H_0$ coïncide sur les fonctions avec l'opérateur supersymétrique suivant (défini sur l'ensemble des k-formes) :*
$$\mathcal{P} = \tilde{\mathrm{d}}^{A,*}\tilde{\mathrm{d}} + \tilde{\mathrm{d}}\tilde{\mathrm{d}}^{A,*},$$
où $\tilde{\mathrm{d}} = (1 + 2h + H)^{1/2} a + (1 + H)^{-1/2} b$, avec H l'oscillateur harmonique semi-classique sur les formes et a et b définis en (4.2.1).

Dans ce chapitre, on montrera également la proposition suivante concernant le symbole de notre opérateur sur les k-formes :

Proposition. *Soit x_0 un point critique de V, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ du point critique $(x_0, 0)$ du symbole p et une fonction de phase $\phi_+ \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ qui vérifie l'équation eikonale :*

$$p_p(x, v; i\nabla\phi_+(x, v)) = 0.$$

De plus, le symbole sous-principal effectif donné par

$$\frac{1}{2}\widetilde{\mathrm{tr}} F_q + S_P,$$

où S_P est la linéarisation du symbole sous-principal près de $(x_0, 0; 0, 0)$ et $\widetilde{\mathrm{tr}} F_q$ est défini en (4.4.10), s'annule sur les k-formes si et seulement si x_0 est un point critique d'indice k.

Un certain nombre d'outils utilisés tout au long du texte sont présentés (brièvement) dans l'appendice et on renvoie le lecteur aux références contenues dans l'appendice pour plus de détails.

1.8 Perspectives

Le but final de l'étude entreprise ici serait d'obtenir le développement asymptotique des valeurs propres exponentiellement petites pour les équations de relaxation linéaire et de relaxation douce. Les résultats obtenus (et présentés dans la partie précédente) sont les premiers pas vers un calcul plus précis de ces valeurs propres. Cependant, il reste de nombreux obstacles à affronter pour y arriver :

I. Des difficultés apparaissant pour exhiber la structure supersymétrique dans le cas de l'équation de relaxation linéaire, cela complique sérieusement la tâche, puisque, jusqu'à maintenant, le calcul explicite des exponentiellement petits a été fait en évaluant les valeurs singulières de la "différentielle extérieur".

II. En ce qui concerne l'équation de relaxation douce, il faudrait obtenir des informations sur le spectre près de 0 de l'opérateur sur toutes les k-formes (en tout cas, au moins sur les 1-formes). Même si on arrivait à construire des solutions BKW pour l'équation de relaxation douce sur les k-formes (voir à ce sujet la fin du chapitre 4), il faudrait encore montrer une estimation de résolvante du même type que celle sur les fonctions pour qu'elles correspondent bien à des fonctions propres approchées. Malheureusement, cela semble difficile car, sur les k-formes, on voit apparaître un opérateur d'ordre 2 en position dans le symbole sous-principal qui ne peut pas être contrôlé par la partie principale. De plus, cette partie du terme sous-principal semble ne même pas être bornée inférieurement et ne se gère donc pas facilement. On pourrait quand même envisager d'étudier l'effet tunnel sans la supersymétrie à l'aide de la méthode classique d'Helffer-Sjöstrand [35].

III. Pour obtenir le développement asymptotique des valeurs propres exponentiellement petites, il faut aussi un très bon contrôle de la localisation des fonctions propres grâce à des estimations d'Agmon (cf. [35] ou [18]). Bien que l'opérateur considéré pour l'équation de relaxation douce soit non-local, une piste à envisager est l'article de Nakamura [65], dans lequel l'auteur obtient des estimations de type Agmon pour des opérateurs qui ne sont pas nécessairement locaux. Cependant, l'adaptation n'est pas immédiate dans la mesure où l'on travaille avec des symboles qui ne sont pas elliptiques dans $\mathcal{S}(1)$.

Dans toute la thèse, on utilisera les notations suivantes :
Notations :

- Pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$, on écrit $\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1}...\partial_{x_d}^{\alpha_d}$ (et de manière similaire pour v).
- On note aussi $u = \widetilde{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}})$ pour $u \in L^2$ s'il existe $C,\, N > 0$ tels que
$$\|u\| \leq h^{-N}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}}$$
.

2

Équation de relaxation linéaire de Boltzmann

Ce travail a été publié dans les "Annales Henri Poincaré" (dans une version anglaise légèrement différente [69]) et peut être trouvé à l'adresse suivante : `http://link.springer.com/article/10.1007/s00023-015-0410-4`

2.1 Généralités

L'étude spectrale d'équations cinétiques inhomogènes et le retour à l'équilibre des systèmes de particules correspondants est un sujet d'étude naturel et un certain nombre de progrès a été fait durant la dernière décennie dans ce qui a été nommée hypocoercivité. Nous sommes ici intéressés par l'étude à basse température d'un modèle linéaire simple du point de vue cinétique, mais compliqué du point de vue de l'analyse spectrale, où les collisions entre particules ne sont pas de type diffusif, mais de l'ordre de la relaxation (non-locaux). Ce système a déjà été étudié par Hérau dans [39] avec des améliorations par Dolbeault *et al.* dans [19, 20], mais à température fixée.
L'objectif final serait d'étudier l'existence d'états métastables et un éventuel effet tunnel pour le système, ce qui implique un temps de retour à l'équilibre très long. Nous établissons ici les premiers résultats spectraux sur les petites valeurs propres et le retour à l'équilibre à basse température pour le système simple de relaxation linéaire de Boltzmann suivant (qu'on écrit ici avec les paramètres physiques) :

$$\begin{cases} \partial_t f + v.\partial_x f - \frac{1}{m}\partial_x V.\partial_v f = \mathcal{Q}(f), \\ f_{|t=0} = f_0, \end{cases}$$

où l'inconnu $f(t,x,v)$ correspond à la densité de probabilité du système de particules au temps $t \in \mathbb{R}_+$, position $x \in \mathbb{R}^d$ et vitesse $v \in \mathbb{R}^d$. On supposera que pour tout $t \geq 0$, $f(t,.,.)$ est dans L^2. Ici, l'opérateur de collisions qui modélise les interactions entre les particules dans le gaz est donné par

$$\mathcal{Q}(f) = \gamma \left[\left(\int_{\mathbb{R}^d_v} f(t,x,v)\,\mathrm{d}v \right) \mathrm{m}_\beta - f \right],$$

où

$$\mathrm{m}_\beta(v) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{m\beta v^2}{2}}}{\left(\frac{2\pi}{m\beta}\right)^{\frac{d}{2}}},$$

est la maxwellienne (normalisée dans L^1) dans la direction des vitesses, avec $\beta = 1/kT$ où k est la constante de Boltzmann, T la température du système et γ le coefficient de friction. Le potentiel $V \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d_x, \mathbb{R})$ ne dépend que de la variable de position x. On s'intéresse au régime des basses températures pour le système et on va donc se placer dans un cadre semi-classique. On note $h = kT = 1/\beta$, et on fixe les autres paramètres $m = 1$ et $\gamma = 1$ et on pose

$$\mu_h = \mathrm{m}_{1/h} = \frac{1}{(2\pi h)^{d/2}} \mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2h}}.$$

On introduit également la maxwellienne spatiale et la maxwellienne globale données par

$$\rho_h(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{V(x)}{h}}}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d_x} \mathrm{e}^{-\frac{V(x)}{h}}\,\mathrm{d}x}. \qquad \mathcal{M}_h(x,v) = \rho_h(x)\mu_h(v).$$

On vérifie de manière immédiate que $\mathcal{M}_h$ est l'unique état stationnaire, au sens des distributions, du système (à renormalisation près). Cette équation décrit un système composé d'un grand nombre de particules, qui sont soumises à une force extérieure dérivant du potentiel V et qui interagissent entre elles selon l'opérateur de collisions $\mathcal{Q}$, dont l'effet est une simple relaxation sur la maxwellienne locale $\left(\int_{\mathbb{R}^d_{v'}} f(t,x,v')\,\mathrm{d}v' \right) \mathrm{m}_\beta(v)$.

On multiplie notre équation par h, ce qui nous donne

$$\begin{cases} h\partial_t f + v.h\partial_x f - \partial_x V.h\partial_v f = h\mathcal{Q}(f), \\ f_{|t=0} = f_0. \end{cases}$$

La limite semi-classique $h \to 0$ correspond au régime basse température pour le système. On rappelle les hypothèses faites sur le potentiel.

Hypothèse. *Le potentiel V est une fonction de Morse avec n_0 minima locaux et dont les dérivées d'ordre 2 et plus sont bornées. De plus, $\mathrm{e}^{-\frac{V}{h}} \in L^1$ et il existe $C > 0$ tel que $|\nabla V(x)| \geq \frac{1}{C}$ pour $|x| > C$.*

Un espace de Hilbert naturel pour l'étude de l'équation dépendant du temps est l'espace pondéré suivant :

$$B^2 = \left\{ f \in \mathcal{D}' \text{ t. q. } \mathcal{M}_h^{-1/2} f \in L^2 \right\} \subset L^1(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_v^d, \mathrm{d}x\mathrm{d}v),$$

et on remarque par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'hypothèse 1.1.2 que B^2 est un sous-ensemble de $L^1(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_v^d, \mathrm{d}x\mathrm{d}v)$. Il est donc plus commode de travailler avec une nouvelle fonction inconnue

$$u(t,x,v) = \mathcal{M}_h^{-1/2} f(t,x,v) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^2),$$

(la continuité sera une conséquence d'une propriété du semi-groupe associé) et l'équation sur u s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} h\partial_t u + v.h\partial_x u - \partial_x V.h\partial_v u + h(\mathrm{Id} - \Pi_h)u = 0; \\ u_{|t=0} = u_0, \end{array} \right.$$

où Π_h est le projecteur orthogonal dans B^2 (avec t comme paramètre) sur l'espace des états d'équilibres locaux $E_h = \left\{ \rho\mu_h^{\frac{1}{2}},\ \rho \in L^2(\mathbb{R}_x^d) \right\}$ (on remarque que E_h est fermé). En effet, on a

$$\mathcal{Q}(\mathcal{M}_h^{1/2} u) = \mathcal{M}^{1/2}(u - \langle u, \mu_h \rangle_{L^2(\mathbb{R}_v^d)} \mu_h),$$

et

$$\rho_h(x)^{-1/2} v.\partial_x \rho_h^{1/2}(x) - \mu_h(v)^{-1/2} \partial_x V.\partial_v \mu_h^{1/2}(v) = 0.$$

L'opérateur indépendant du temps s'écrit alors

$$\begin{array}{rcl} P_h & = & v.h\partial_x - \partial_x V.h\partial_v + h(\mathrm{Id} - \Pi_1) \\ & = & X_0^h + h(\mathrm{Id} - \Pi_h), \end{array}$$

et le but de ce chapitre est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.1.1. *Supposons que V satisfasse les hypothèses 1.1.2. Alors P_h a 0 comme valeur propre simple et il existe $h_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ tel que :*

i) pour tout $h \in]0, h_0]$, $\mathrm{Spec}\, P_h \cap B(0, \delta_0 h)$ est constitué de n_0 valeurs propres réelles (comptées avec multiplicité) qui sont exponentiellement petites par rapport à $\frac{1}{h}$;

ii) pour tout $\delta > 0$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $h \in]0, h_0]$, si $\delta h \leq |z| \leq \delta_0 h$ alors

$$\|(P_h - z)^{-1}\| \leq \frac{C}{h}.$$

Ce travail est la première étape pour obtenir un développement semi-classique des petites valeurs propres de notre opérateur dans l'esprit de Helffer *et al.* dans [31] pour le laplacien de Witten et de Hérau *et al.* dans [45, 41, 42, 43] pour l'opérateur de Kramers-Fokker-Planck. Dans ces quatre derniers papiers, les auteurs ont obtenu un développement asymptotique complet des petites valeurs propres de l'opérateur grâce à des techniques pseudodifférentielles. Ici, un des plus gros problèmes est que la partie de projection Π_h dans P_h n'a pas un bon comportement symbolique uniformément par rapport à h. Pour contourner ce problème, on utilise une mise à l'échelle S_h - qui sera définie plus avant - et une estimation hypocoercive indépendante de h dans l'esprit de [39, 19, 20] pour l'équation de relaxation linéaire de Boltzmann ou de [44] pour l'équation de Fokker-Planck. Comme on travaille dans un cadre non autoadjoint, on doit utiliser des outils spécifiques. On doit d'abord obtenir une estimation de résolvante qui nous permettra de contrôler la norme du projecteur spectral sur l'espace propre généralisé associé aux valeurs propres de module plus petit que $\delta_0 h$. On a également besoin de la notion de $\mathscr{PT}$-symétrie (cf. [2, 3, 4] ou [43]), qui est un outil puissant qu'on utilise comme dans [43] afin de montrer qu'il n'y a pas de bloc de Jordan dans les espaces propres généralisés associés aux petites valeurs propres. Dans un contexte non autoadjoint, passer de résultats spectraux à des estimations sur le semi-groupe n'est pas trivial, mais, dans la mesure où l'on travaille dans un espace de Hilbert, on peut utiliser un théorème de Gearhart-Prüss pour obtenir le taux de convergence du semi-groupe (voir appendice D).

Ce chapitre se décompose comme suit : dans la deuxième partie, on prouve un résultat d'hypocoercivité duquel on déduit une estimation de résolvante. Dans la troisième partie, on fini de montrer le résultat principal en utilisant la propriété de $\mathscr{PT}$-symétrie. La dernière partie est consacrée, dans l'esprit du théorème H de Boltzmann, à obtenir un résultat de convergence des solutions de l'équation de relaxation linéaire de Boltzmann vers l'espace propre généralisé associé aux petites valeurs propres.

2.2 Hypocoercivité hilbertienne

La notion d'hypocoercivité hilbertienne (on pourra voir la section 1.4 et [19, 39, 86]) désigne des manières d'obtenir des estimations coercives en utilisant une légère modification du produit scalaire ambiant ou bien de l'opérateur étudié. Nous allons d'abord discuter de l'accrétivité maximale de notre opérateur, de manière à pouvoir appliquer nos résultats spectraux aux propriétés du semi-groupe. Comme P_h est la somme d'un opérateur autoadjoint positif (un projecteur orthogonal) et d'un opérateur antiadjoint, P_h est accrétif. Si on équipe P_h du domaine $D = \left\{u \in L^2 / \ X_0^h u \in L^2\right\}$, on obtient alors un opérateur accrétif maximal. En effet, X_0^h est accrétif maximal sur D et $\mathrm{Id} - \Pi_h$ est un opérateur borné sur L^2. Donc $P_h = X_0^h + h(\mathrm{Id} - \Pi_h)$ est accrétif maximal.

Comme annoncé dans l'introduction, la démonstration de notre estimation repose sur un argument de mise à l'échelle. Si on conjugue P_h avec l'opérateur de dilatation

$$S_h \;:\left\{\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_v) & \to & L^2(\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_v) \\ u & \mapsto & h^{-d/2}u(\frac{\cdot}{\sqrt{h}}, \frac{\cdot}{\sqrt{h}}) \end{array}\right. . \tag{2.2.1}$$

on obtient alors $F_h^{-1}P_hF_h = hP$ où P est l'opérateur

$$\begin{aligned} P &= v.\partial_x - \partial_x V_h(x).\partial_v + (\mathrm{Id} - \Pi_1) \\ &= X_0 + (\mathrm{Id} - \Pi_1), \end{aligned}$$

avec $V_h(x) = \frac{1}{h}V(\sqrt{h}x)$. On remarque que P dépend de h, car V_h dépend de h. Néanmoins, nous avons choisi une notation indépendante de h, dans la mesure où on aura des estimations pour P qui seront uniformes en h. Plus précisément, ces estimations dépendront uniquement de la norme L^∞ des dérivées secondes et supérieures de V_h. En utilisant que les dérivées d'ordre deux ou plus de V sont bornées, on a (si $h \leq 1$) pour $k \geq 2$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha| = k$,

$$\|\partial^\alpha V_h\|_\infty = h^{\frac{k-2}{2}}\|\partial^\alpha V\|_\infty \leq \|\partial^\alpha V\|_\infty.$$

On obtient ainsi l'uniformité des estimations par rapport à h sur les normes L^∞ des dérivées secondes ou d'ordre supérieur de V_h.

On va maintenant suivre [39] pour obtenir une estimation hypocoercive pour P. On introduit maintenant les deux opérateurs différentiels auxiliaires suivants :

$$a_j = (\partial_{x_j} + \partial_{x_j}V_h/2)\;; \qquad b_j = (\partial_{v_j} + v_j/2)\;\;,$$

ainsi que leurs adjoints formels

$$a_j^* = (-\partial_{x_j} + \partial_{x_j}V_h/2)\;; \qquad b_j^* = (-\partial_{v_j} + v_j/2)\;\;.$$

On pose

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}\;; \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix}\;,$$

et

$$\Lambda^2 = a^*a + b^*b + 1.$$

On remarquera que $a^*a = -\Delta_x + |\partial_x V_h(x)|^2/4 - \Delta V_h(x)/2$ n'est autre que le laplacien de Witten (en position) et $b^*b = -\Delta_v + v^2/4 - d/2$ l'oscillateur harmonique (en vitesse). Sous nos hypothèses (cf. [32]), on peut montrer que $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2d})$ est un noyau pour Λ^2 que Λ^r est bien défini pour tout $r \in \mathbb{R}$ et que les opérateurs a, b et Λ^2 sont continus sur $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}'$. On a la relation suivante entre a, b, et P :

$$P = b^*a - a^*b + (\mathrm{Id} - \Pi_1).$$

Rappelons maintenant les relations de commutations entre a, b, et X_0 (voir [44] par exemple) :

$$[b_j, b_k] = [b_j^*, b_k^*] = 0\,; \quad [b_j, b_k^*] = \delta_{jk}\,;$$

$$[a_j, a_k] = [a_j^*, a_k^*] = 0\,; \quad [a_j, a_k^*] = \partial^2_{x_jx_k}V_h.$$

On a aussi clairement que les a_j et a_j^* commutent avec les b_k et b_k^*. Il convient de noter que les a_j et les a_j^* sont dans l'algèbre de Lie engendrée par les b_j, les b_j^* et le champs de vecteur X_0. Ce qui se traduit dans les relations

$$[b, X_0] = a\,; \qquad [b^*, X_0] = a^*.$$

Réciproquement, on peut déduire b et b^* de a, a^* et X_0 grâce aux relations

$$[a, X_0] = -\mathrm{Hess}\, V b\,; \qquad [a^*, X_0] = -b^*\mathrm{Hess}\, V_h.$$

Par combinaisons, on obtient

$$[\Lambda^2, X_0] = -b^*(\mathrm{Hess}\, V_h - \mathrm{Id})a - a^*(\mathrm{Hess}\, V_h - \mathrm{Id})b\,;$$

$$b^*(a^*a) = (a^*a)b^*\,; \qquad a^*(a^*a) = (a^*a)a^* - a^*\mathrm{Hess}\, V_h\,;$$

$$a^*(b^*b) = (b^*b)a^*\,; \qquad b^*(b^*b) = (b^*b)b^* - b^*.$$

On introduit maintenant l'opérateur de mise à l'échelle semi-classique agissant sur les fonctions ne dépendant que de x (voir aussi (2.2.1)), i.e.

$$T_h\ :\left\{\begin{array}{ccc} L^2(\mathbb{R}^d_x) & \to & L^2(\mathbb{R}^d_x) \\ u & \mapsto & h^{-d/4}u(\frac{\cdot}{\sqrt{h}}) \end{array}\right. ,$$

On remarque que $W_h = hT_h a^* a T_h^{-1}$ est le laplacien de Witten semi-classique

$$W_h = -h^2\Delta_x + |\partial_x V(x)|^2/4 - h\Delta V(x)/2.$$

Sous nos hypothèses 1.1.2 sur V, et d'après [31], le laplacien de Witten semi-classique W_h a n_0 valeurs propres réelles et exponentiellement petites et il existe $0 < \tau \leq 1$, qu'on fixe à partir de maintenant, tel que le reste du spectre est inclus dans $[\tau h, +\infty[$ pour $h \in]0, 1]$. On rappelle de [31] qu'il existe des fonctions de troncature bien choisies $\chi_j \in \mathcal{C}_0^\infty$, $1 \leq j \leq n_0$ qui localisent chacune dans un petit voisinage du $j^{\text{ième}}$ minimum de V telles que

$$\psi_j^{(0)}(x) = \left\|\chi_j(x)\mathrm{e}^{-\frac{V(x)-V(x_j)}{2h}}\right\|^{-1}\chi_j(x)\mathrm{e}^{-\frac{V(x)-V(x_j)}{2h}}, \tag{2.2.2}$$

sont des quasimodes du laplacien de Witten semi-classique W_h, dans le sens que, pour $c > 0$,

$$W_h\psi_j^{(0)} = \widetilde{O}(\mathrm{e}^{-\frac{c}{h}}), \quad 1 \leq j \leq n_0.$$

On définit les quasimodes non semi-classiques associés

$$f_j(x) = T_h^{-1}\psi_j^{(0)}(x), \qquad g_j(x, v) = f_j(x)\mu_1^{1/2}(v),$$

(qui dépendent encore de h) et on introduit les espaces vectoriels associés

$$F = \mathrm{Vect}\,\{f_j\,,\ j \in [\![1...n_0]\!]\} \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^d_x),$$
$$G = \mathrm{Vect}\,\{g_j\,,\ j \in [\![1...n_0]\!]\} \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^d_x \times \mathbb{R}^d_v).$$

On pose aussi pour tout j

$$g_j^h = S_h g_j. \tag{2.2.3}$$

D'après l'expression des quasimodes dans (2.2.2), on a

$$g_j^h(x,v) = \psi_j^{(0)}(x)\mu_h^{1/2}(v) = \left\| \chi_j(x) e^{-\frac{V(x)-V(x_j)}{2h}} \right\|^{-1} \chi_j(x) e^{-\frac{V(x)-V(x_j)}{2h}} e^{-\frac{v^2}{4h}}.$$

On a le lemme suivant :

Lemme 2.2.1. *La famille $(g_j^h)_j$ est presque orthonormale et est composée de quasimodes exponentiellement petits P_h (respectivement P_h^*), c'est-à-dire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout j, $k \in [\![1...n_0]\!]$, $j \neq k$,*

$$(g_j^h, g_k^h) = \delta_{j,k} + \mathcal{O}(e^{-\frac{\alpha}{h}}),$$

et pour tout $j \in [\![1...n_0]\!]$,

$$P_h g_j^h = \widetilde{O}(e^{-\frac{\alpha}{h}}),$$

(respectivement $P_h^* g_j^h = \widetilde{O}(e^{-\frac{\alpha}{h}})$).

Preuve : On déduit immédiatement la relation de presque orthogonalité et normalisation de la famille $(g_j^h)_j$ de celle de $(\psi_j^{(0)})_j$ (voir Proposition (6.1) dans [31]). À la vue de l'expression des g_j^h, on en déduit que $P_h g_j^h = X_0^h g_j^h = v.\nabla\chi_j e^{-\frac{V(x)}{2h}} e^{-\frac{v^2}{4h}}$. D'après les estimations sur χ_j (voir la preuve de la Proposition (6.1) dans [31]), on obtient que $\|X_0^h g_j^h\| = \mathcal{O}(e^{-\frac{\alpha}{h}})$, ce qui montre l'assertion sur P_h. Comme $P_h^* = -X_0^h + h(1-\Pi_h)$, on obtient le même résultat sur P_h^*. □

La proposition suivante est le cœur de l'hypocoercivité hilbertienne et exprime une propriété de coercivité pour l'opérateur P qui utilise une petite perturbation impliquant l'opérateur auxiliaire fondamental

$$L = \Lambda^{-2} a^* b.$$

Proposition 2.2.2. *Il existe ε, A, $h_0 > 0$ tels que pour tout $h \leq h_0$ et $u \in \mathcal{S} \cap G^\perp$:*

$$\mathrm{Re}\,(Pu, (\mathrm{Id} + \varepsilon(L + L^*))u) \geq \frac{1}{A}\|u\|^2,$$

où A peut être choisie dépendant explicitement des dérivées deuxièmes et troisièmes de V et $\|\varepsilon L\| \leq 1$.

Remarque 2.2.3. Dans [39], on traite le cas d'un espace G unidimensionnel. Ici, V_h vérifie le même genre d'hypothèses, mais le gap spectral est dramatiquement (exponentiellement) petit car les minima de V_h sont à une distance d'ordre $\frac{1}{\sqrt{h}}$ les uns des autres. En utilisant $G^\perp$, on réussit à avoir une borne inférieure uniforme par rapport à h dans la proposition 2.2.2.

Preuve : On suit en partie [39] et on s'occupe de la dépendance uniforme par rapport à h. Soient $u \in L^2$ et $\varepsilon > 0$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\,(Pu, (\mathrm{Id} + \varepsilon(L + L^*))u) \\
&= \mathrm{Re}\,((\mathrm{Id} - \Pi_1)u, (\mathrm{Id} + \varepsilon(L + L^*))u) + \mathrm{Re}(X_0 u, (\mathrm{Id} + \varepsilon(L + L^*))u) \\
&= \|(\mathrm{Id} - \Pi_1)u\|^2 + \varepsilon \mathrm{Re}\,((\mathrm{Id} - \Pi_1)u, (L + L^*)u) + \varepsilon \mathrm{Re}\,(X_0 u, (L + L^*)u) \\
&= I + II + III,
\end{aligned}$$

où on a utilisé pour le dernier terme que X_0 est antiadjoint. On obtient tout d'abord une borne inférieure grossière pour les deux premiers termes à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$I + II \geq \frac{1}{2}\|(\mathrm{Id} - \Pi_1)u\|^2 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\|(L + L^*)u\|^2 \geq \frac{1}{2}\|(\mathrm{Id} - \Pi_1)u\|^2 - \varepsilon^2\|L\|^2\|u\|^2.$$

Étudions maintenant le dernier terme plus attentivement

$$III = \varepsilon \mathrm{Re}\,(X_0 u, (L + L^*)u) = \varepsilon \mathrm{Re}\,([L, X_0]u, u),$$

car X_0 est antiadjoint. En utilisant la définition de $L = \Lambda^{-2}a^*b$ et les relations de commutations entre a, b, Λ^2 et X_0, on obtient

$$\begin{aligned}
[L, X_0] &= [\Lambda^{-2}a^*b, X_0] \\
&= [\Lambda^{-2}, X_0]a^*b + \Lambda^{-2}[a^*, X_0]b + \Lambda^{-2}a^*[b, X_0] \\
&= -\Lambda^{-2}[\Lambda^2, X_0]\Lambda^{-2}a^*b - \Lambda^{-2}b^*\mathrm{Hess}\,V_h b + \Lambda^{-2}a^*a.
\end{aligned}$$

On a utilisé la relation algébrique $[A, B^{-1}] = -B^{-1}[A, B]B^{-1}$. On pose

$$\mathcal{A} = -\Lambda^{-2}[\Lambda^2, X_0]\Lambda^{-2}a^*b - \Lambda^{-2}b^*\mathrm{Hess}\,V b.$$

On va maintenant montrer deux lemmes intermédiaires.

Lemme 2.2.4. *Les opérateurs $\mathcal{A}$ et L sont bornés sur L^2 (uniformément en h). De plus, leurs normes peuvent être bornées explicitement en fonction des dérivées d'ordre deux et trois de V.*

Remarque 2.2.5. En fait, les bornes sur les opérateurs sont établies en fonction des dérivées deuxièmes et troisièmes de V_h, mais elles sont uniformes en h, puisque les dérivées deuxièmes et troisièmes de V_h sont bornées uniformément par rapport à h.

Preuve : On rappelle juste quelques idées de preuve à partir de [39]. On se souvient que $L = \Lambda^{-2}a^*b$. Pour $\mathcal{A}$, on utilise l'expression du commutateur

$$[\Lambda^2, X_0] = -b^*(\mathrm{Hess}\,V_h - \mathrm{Id})a - a^*(\mathrm{Hess}\,V_h - \mathrm{Id})b,$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} = \ &\Lambda^{-2}b^*(\mathrm{Hess}\,V_h - \mathrm{Id})a\Lambda^{-2}a^*b + \Lambda^{-2}a^*(\mathrm{Hess}\,V_h - \mathrm{Id})b\Lambda^{-2}b^*a \\
&-\Lambda^{-2}b^*\mathrm{Hess}\,V_h b.
\end{aligned}$$

On voit qu'il suffit de montrer que pour toute matrice réelle $M(x)$ de taille $d \times d$, qui ne dépend que de x et qui est bornée ainsi que sa dérivée première, les opérateurs suivants :

$$\Lambda^{-2}b^*M(x)a, \quad \Lambda^{-2}b^*M(x)b, \quad \Lambda^{-2}a^*M(x)b,$$

sont bornés sur L^2. On va le montrer uniquement pour le premier dans la mesure où la preuve pour les autres est similaire et plus facile. Il nous suffit de le démontrer pour l'adjoint $a^*M(x)b\Lambda^{-2}$. Pour $u \in \mathscr{S}$, on écrit

$$\begin{aligned}
\|a^*M(x)b\Lambda^{-2}u\| &\leq \sum_{j,k}\|a_j^*M_{j,k}(x)b_k\Lambda^{-2}u\| \\
&\leq \sum_{j,k}\|M_{j,k}(x)a_j^*b_k\Lambda^{-2}u\| + \sum_{j,k}\|(\partial_j M_{j,k}(x))b_k\Lambda^{-2}u\| \\
&\leq (\|M\|_{L^\infty} + \|\nabla M\|_{L^\infty}) \\
&\quad \times\sum_{j,k}(\|a_j^*b_k\Lambda^{-2}u\| + \|b_k\Lambda^{-2}u\|),
\end{aligned}$$

où on a utilisé que

$$[a_j^*, M_{j,k}] = -\partial_j M_{j,k}.$$

Comme $b^*b \leq \Lambda^2$ et $1 \leq \Lambda^2$, on vérifie facilement que $\|b_k\Lambda^{-2}u\| \leq \|u\|$. Pour le terme $\|a_j^*b_k\Lambda^{-2}u\|$, on écrit

$$\begin{aligned}
&\|a_j^*b_k\Lambda^{-2}u\|^2 = (a_ja_j^*b_k\Lambda^{-2}u, b_k\Lambda^{-2}u) \\
&\leq (a_j^*a_jb_k\Lambda^{-2}u, b_k\Lambda^{-2}u) + ((\partial_j^2 V_h)b_k\Lambda^{-2}u, b_k\Lambda^{-2}u) \\
&\leq (\Lambda^2 b_k\Lambda^{-2}u, b_k\Lambda^{-2}u) + \|\mathrm{Hess}\, V_h\|_{L^\infty}(b_k\Lambda^{-2}u, b_k\Lambda^{-2}u).
\end{aligned}$$

On utilise maintenant que $[\Lambda^2, b_k] = -b_k$ et on continue à dériver nos inégalités :

$$\begin{aligned}
&(\Lambda^2 b_k\Lambda^{-2}u, b_k\Lambda^{-2}u) + \|\mathrm{Hess}\, V_h\|_{L^\infty}(b_k\Lambda^{-2}u, b_k\Lambda^{-2}u) \\
&\leq (b_ku, b_k\Lambda^{-2}u) + (\|\mathrm{Hess}\, V_h\|_{L^\infty} + 1)(b_k\Lambda^{-2}u, b_k\Lambda^{-2}u) \\
&\leq (\|\mathrm{Hess}\, V_h\|_{L^\infty} + 2)\|u\|^2,
\end{aligned}$$

car $b_k^*b_k \leq \Lambda^2$ et $1 \leq \Lambda^2$. Ce qui termine la preuve de notre lemme grâce à la remarque 2.2.5. □

Retournons à la preuve de la proposition 2.2.2, on a $E_1 \subset \ker b$ car b est l'opérateur d'annihilation en vitesse. Comme il apparaît à droite dans l'expression de $\mathcal{A}$, on obtient donc

$$E_1 \subset \ker \mathcal{A}.$$

On peut ainsi écrire $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathrm{Id} - \Pi_1)$ et on a pour $u \in G^\perp \cap \mathscr{S}$

$$\begin{aligned}
III &= \varepsilon \mathrm{Re}\,(\mathcal{A}(\mathrm{Id} - \Pi_1)u, u) + \varepsilon \mathrm{Re}\,(\Lambda^{-2}a^*au, u) \\
&\geq -\tfrac{1}{4}\|(\mathrm{Id} - \Pi_1)u\|^2 - \varepsilon^2\|\mathcal{A}\|^2\|u\|^2 + \varepsilon \mathrm{Re}\,(\Lambda^{-2}a^*au, u).
\end{aligned}$$

Il est clair que Λ^2, a^*a et Π_1 commutent et on peut écrire

$$\begin{array}{rcl}\varepsilon\mathrm{Re}\,(\Lambda^{-2}a^*au,u) & = & \varepsilon\mathrm{Re}\,(\Lambda^{-2}a^*a\Pi_1u,u)+\varepsilon\mathrm{Re}\,(\Lambda^{-2}a^*a(\mathrm{Id}-\Pi_1)u,u)\\ & = & \varepsilon\mathrm{Re}\,(\Lambda^{-2}a^*a\Pi_1u,\Pi_1u)\\ & & +\varepsilon\mathrm{Re}\,(\Lambda^{-2}a^*a(\mathrm{Id}-\Pi_1)u,(\mathrm{Id}-\Pi_1)u)\\ & \geq & \varepsilon\mathrm{Re}\,(\Lambda^{-2}a^*a\Pi_1u,\Pi_1u)-\varepsilon\|(\mathrm{Id}-\Pi_1)u\|^2,\end{array}\tag{2.2.4}$$

où on a utilisé que $a^*a\leq\Lambda^2$. Ici, on s'écarte légèrement de [39] : on va travailler avec les quasimodes du laplacien de Witten plutôt qu'avec le premier vecteur propre de Λ^2 et cela va nous laisser des restes exponentiellement petits dans nos estimations. On a maintenant besoin d'un lemme intermédiaire.

Lemme 2.2.6. *Soit $u\in G^\perp\cap\mathscr{S}$, alors* $\mathrm{Re}\,(\Lambda^{-2}a^*a\Pi_1u,\Pi_1u)\geq\frac{\tau}{4}\|\Pi_1u\|^2$.

Preuve : On note $\mathbb{P}_h$ la projection spectrale sur les espaces propres associés aux n_0 valeurs propres les plus petites du laplacien de Witten $W_h = hT_ha^*aT_h^{-1}$ (qui sont les mêmes que celles de ha^*a). D'après [31] et [35], on a pour tout $w\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d_x)$

$$(hT_ha^*aT_h^{-1}[1-\mathbb{P}_h]T_hw,[1-\mathbb{P}_h]T_hw)\geq\tau h\|(1-\mathbb{P}_h)T_hw\|^2.$$

On pose alors $\mathbb{P}=T_h^{-1}\mathbb{P}_hT_h$ la projection (orthogonale) sur le sous-espace spectral associé aux n_0 valeurs propres les plus petites du laplacien de Witten a^*a, l'inégalité précédente se réécrit (car T_h est unitaire)

$$(a^*a[1-\mathbb{P}]w,[1-\mathbb{P}]w)\geq\tau\|(1-\mathbb{P})w\|^2.$$

De plus, on a

$$\begin{array}{rcl}(a^*aw,w) & = & (a^*a[1-\mathbb{P}+\mathbb{P}]w,[1-\mathbb{P}+\mathbb{P}]w)\\ & = & (a^*a[1-\mathbb{P}]w,[1-\mathbb{P}]w)+(a^*a\mathbb{P}w,\mathbb{P}w)\\ & & +(a^*a[1-\mathbb{P}]w,\mathbb{P}w)+(a^*a\mathbb{P}w,[1-\mathbb{P}]w)\\ & = & (a^*a[1-\mathbb{P}]w,[1-\mathbb{P}]w)+(a^*a\mathbb{P}w,\mathbb{P}w).\end{array}$$

Dans la mesure où les images de $1-\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}$ sont stables par rapport à a^*a. Par définition de $\mathbb{P}$, on obtient qu'il existe $\alpha>0$ tel que pour tout j

$$(a^*a\mathbb{P}w,\mathbb{P}w)=\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}})\|w\|^2.$$

Si on prend maintenant $w\in F^\perp$, on a $\|(1-\mathbb{P})w\|^2=\|w\|^2+\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}})\|w\|^2$.
On obtient alors

$$(a^*aw,w)\geq\tau\|w\|^2+\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}})\|w\|^2$$

Comme $(a^*a+1)^{-1/2}w\in F^\perp$, on obtient par le principe du max-min (puisque a^*a est autoadjoint)

$$(a^*a(a^*a+1)^{-1/2}w,(a^*a+1)^{-1/2}w)\geq\frac{\tau}{1+\tau}\|w\|^2+\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}})\|w\|^2.$$

De plus, on a clairement
$$1 \geq \frac{\tau}{1+\tau} \geq \frac{\tau}{2},$$
car $\tau \leq 1$. On obtient alors le résultat en prenant pour w la fonction définie pour presque tout v par $x \mapsto \Pi_1 u(x,v)$ et h suffisamment petit, puisque $\Pi_1 u \in E_1$ et $\Pi_1 u(\,\cdot\,, v) \in F^{\perp}$. □

Fin de la démonstration de la Proposition 2.2.2 : On peut maintenant intégrer le résultat du lemme 2.2.6 dans l'inégalité (2.2.4) et on obtient

$$\varepsilon \mathrm{Re}\,(\Lambda^{-2} a^* a u, u) \geq \varepsilon \frac{\tau}{4} \|\Pi_1 u\|^2 - \varepsilon \|(\mathrm{Id} - \Pi_1) u\|^2.$$

On obtient alors

$$III \geq -\frac{1}{4} \|(\mathrm{Id} - \Pi_1) u\|^2 - \varepsilon^2 \|\mathcal{A}\|^2 \|u\|^2 + \varepsilon \frac{\tau}{4} \|\Pi_1 u\|^2 - \varepsilon \|(\mathrm{Id} - \Pi_1) u\|^2.$$

En rassemblant les estimations pour $I + II$ et III, cela donne

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\,(Pu, (\mathrm{Id} + \varepsilon(L + L^*))u) \\
&\geq \tfrac{1}{2} \|(\mathrm{Id} - \Pi_1) u\|^2 - \varepsilon^2 \|L\|^2 \|u\|^2 \\
&-\tfrac{1}{4} \|(\mathrm{Id} - \Pi_1) u\|^2 - \varepsilon^2 \|\mathcal{A}\|^2 \|u\|^2 + \varepsilon \tfrac{\tau}{4} \|\Pi_1 u\|^2 - \varepsilon \|(\mathrm{Id} - \Pi_1) u\|^2 \\
&\geq \tfrac{1}{8} \|(\mathrm{Id} - \Pi_1) u\|^2 + \varepsilon \tfrac{\tau}{4} \|\Pi_1 u\|^2 - \varepsilon^2 (\|\mathcal{A}\|^2 + \|L\|^2) \|u\|^2.
\end{aligned}$$

en prenant $\varepsilon \leq 1/8$. On utilise que Π_1 est un projecteur orthogonal et que $\varepsilon \leq 1/8$ pour obtenir

$$\mathrm{Re}\,(Pu, (\mathrm{Id} + \varepsilon(L + L^*))u) \geq \left(\varepsilon \frac{\tau}{4} - \varepsilon^2 (\|\mathcal{A}\|^2 + \|L\|^2) \right) \|u\|^2.$$

On prend alors ε / τ suffisamment petit et on obtient pour une constante A assez grande (uniforme en h)

$$\mathrm{Re}\,(Pu, (\mathrm{Id} + \varepsilon(L + L^*))u) \geq \frac{\tau^2}{A} \|u\|^2.$$

Ce qui termine la preuve de la proposition. □

Corollaire 2.2.7. *Il existe $c > 0$ tel que pour tout $h \in [0, h_0[$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}\, z \leq ch$ et $v \in \mathscr{S} \cap (S_h G)^{\perp}$:*

$$\|(P_h - z) v\| \geq ch \|v\|. \tag{2.2.5}$$

Preuve : On vient de prouver que pour tout $u \in \mathscr{S} \cap G^{\perp}$

$$\mathrm{Re}\,(Pu, (\mathrm{Id} + \varepsilon(L + L^*))u) \geq \frac{\tau^2}{A} \|u\|^2.$$

On obtient alors en multipliant l'inégalité par h et en posant $v = S_h u$

$$\mathrm{Re}\,(P_h v, S_h (\mathrm{Id} + \varepsilon(L + L^*))u) \geq \frac{\tau^2 h}{A} \|u\|^2.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on peut écrire

$$\mathrm{Re}\,((P_h - z)v, S_h(\mathrm{Id} + \varepsilon(L + L^*))u) \geq \frac{\tau^2 h}{A}\|u\|^2 - \mathrm{Re}\,(z(v, S_h(\mathrm{Id} + \varepsilon(L + L^*))u)).$$

On remarque tout d'abord que si on choisit $\varepsilon < \dfrac{1}{2\|L\|}$, on obtient alors $(v, S_h(\mathrm{Id}+ \varepsilon(L + L^*))u) \geq 0$. Ainsi, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\|(P_h - z)v\|\,\|S_h(\mathrm{Id} + \varepsilon(L + L^*))u\| \geq \frac{\tau^2 h}{A}\|u\|^2 - \min(0, \mathrm{Re}\,z)\,\|v\|\,\|S_h(\mathrm{Id} + \varepsilon(L + L^*))u\|\,.$$

Puisque S_h est unitaire et L est borné, on obtient $\forall v \in \mathscr{S} \cap (S_h G)^{\perp}$

$$\|(P_h - z)v\|\,(1 + \varepsilon(\|L^*\| + \|L\|))\,\|v\| \geq \frac{\tau^2 h}{A}\|v\|^2 - \min(0, \mathrm{Re}\,z)(1 + 2\varepsilon\|L\|)\,\|v\|^2\,.$$

Ainsi en prenant $\mathrm{Re}\,z \leq ch = \dfrac{\tau^2 h}{2(1 + 2\varepsilon\|L\|)A}$, on a alors

$$\|(P_h - z)v\| \geq ch\|v\|.$$

$\square$

Comme on travaille avec un opérateur non autoadjoint, il faut être prudent pour obtenir une estimation de résolvante sur l'espace tout entier. Grâce au lemme 2.2.1, on remarque que P_h annule $S_h G = \mathrm{Vect}\, g_j^h$ à un $\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}})$ près et que $(S_h G)^{\perp}$ est stable sous P_h à un $\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}})$ près. Plus précisément, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $u \in S_h G$ et $v \in (S_h G)^{\perp}$,

$$P_h u = \widetilde{\mathcal{O}}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}})\|u\|,$$

et il existe $v' \in L^2$ avec $v' = \widetilde{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}})\|v\|$ tel que

$$P_h v - v' \in (S_h G)^{\perp}.$$

En notant Π la projection orthogonale sur $S_h G$, les deux relations précédentes et le théorème de Pythagore nous permettent d'écrire que pour tout $u \in L^2$

$$\|(P_h - z)(\mathrm{Id} - \Pi)u + (P_h - z)\Pi u\|^2 = \|(P_h - z)(\mathrm{Id} - \Pi)u\|^2 + \|(P_h - z)\Pi u\|^2 + \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{2\alpha}{h}})\|u\|^2.$$

On a alors pour tout $u \in L^2$

$$\begin{aligned}
\|(P_h - z)u\|^2 &= \|(P_h - z)(\mathrm{Id} - \Pi)u + (P_h - z)\Pi u\|^2 \\
&= \|(P_h - z)(\mathrm{Id} - \Pi)u\|^2 + \|(P_h - z)\Pi u\|^2 \\
&\quad + \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{2\alpha}{h}})\|u\|^2 \\
&\geq \tfrac{c^2 h^2}{2}\|(\mathrm{Id} - \Pi)u\|^2 + \|(P_h - z)\Pi u\|^2 + \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{2\alpha}{h}})\|u\|^2,
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'estimation (2.2.5) et choisi z plus petit que $\frac{c}{\sqrt{2}}$ (en module). Grâce à l'inégalité triangulaire et le fait que $P_h \Pi u = \widetilde{O}(e^{-\frac{\alpha}{h}})$ par définition de Π, on obtient

$$\begin{aligned} \|(P_h - z)u\|^2 &\geq \tfrac{c^2h^2}{2}\|(1-\Pi)u\|^2 + |z|^2\|\Pi u\|^2 + \mathcal{O}(e^{-\frac{2\alpha}{h}})\|u\|^2 \\ &\geq \min(\tfrac{c^2h^2}{2}, |z|^2)(\|(1-\Pi)u\|^2 + |z|^2\|\Pi u\|^2). \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\delta < \frac{c}{2}$, si on prend $\delta h \leq |z| \leq \frac{c}{2}h$ et h suffisamment petit, on obtient

$$\|(P_h - z)u\| \geq \frac{\delta}{2}\|u\|$$

On en conclut qu'il existe $\delta_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \delta \leq \delta_0$, si $\delta h \leq |z| \leq \delta_0 h$, on a l'estimation de résolvante

$$\|(P_h - z)^{-1}\| \leq \frac{C_\delta}{h}.$$

Ce qui complète la preuve du point *ii)* du Théorème 2.1.1.

2.3 $\mathscr{PT}$-symétrie

Soit H l'espace propre généralisé associé aux valeurs propres plus petites en module que $\delta_0 h$ (où δ_0 est une constante fixée assez petite comme dans le théorème 2.1.1), c'est-à-dire l'image du projecteur spectral $\Pi_0 = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}(0,\delta_0 h)}(z - P_h)^{-1}\,\mathrm{d}z$. On peut écrire la proposition suivante :

Proposition 2.3.1. *On a* $\dim H = n_0$*, où* n_0 *est le nombre de minima locaux du potentiel* V*.*

Preuve : D'après la proposition 2.2.2, on a une estimation coercive sur l'orthogonal d'un sous espace de dimension n_0 ce qui nous donne que $\dim H \leq n_0$. De plus, grâce au lemme 2.2.1, on a $(z - P_h)g_j^h = zg_j^h + \widetilde{O}(e^{-\frac{\alpha}{h}})$; pour $z \in \mathcal{C}(0, \delta_0 h)$, on obtient ainsi : $(z - P_h)^{-1}g_j^h = \frac{1}{z}g_j^h + \widetilde{O}(e^{-\frac{\alpha}{h}})$. En intégrant le long du cercle de centre 0 et de rayon $\delta_0 h$, on obtient finalement

$$\Pi_0 g_j^h = g_j^h + \widetilde{O}(e^{-\frac{\alpha}{2h}}).$$

Comme les g_j^h sont presque orthonormaux (cf. lemme 2.2.1), ils sont indépendants. On en déduit que $\dim H \geq n_0$ et donc $\dim H = n_0$. □

Il nous reste à montrer que H ne contient pas de bloc de Jordan pour P_h en utilisant une propriété de symétrie supplémentaire de notre opérateur qui est appelée dans la littérature $\mathscr{PT}$-symétrie : $\mathscr{P}$ se rapportant à la parité (ici au renversement des vitesses) et $\mathscr{T}$ au renversement du temps. Ce genre de symétrie est d'abord apparue en physique quantique il y a quelques dizaines d'années quand des physiciens (cf. [3, 4] pour les premiers articles ou encore [2] pour une introduction à ce sujet) se sont aperçus qu'on pouvait avoir un hamiltonien non hermitien, mais qui présente quand même des niveaux d'énergie réels. Ils ont introduit la notion d'hamiltonien $\mathscr{PT}$-symétrique comme un moyen de relâcher les hypothèses d'hermiticité , mais qui permet à ces hamiltoniens d'avoir de bonnes chances d'avoir des valeurs propres réelles. Il est également important afin que les valeurs propres soient réelles que les fonctions propres associées présentent aussi une $\mathscr{PT}$-symétrie (les physiciens disent que la $\mathscr{PT}$-symétrie est "spontanément brisée" quand ce n'est pas le cas ; on pourra encore se référer à [2, 3, 4]).

On va maintenant modifier le produit scalaire sur L^2 en prenant en compte cette symétrie afin que notre opérateur devienne autoadjoint (au moins sur H). Soit $\kappa : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^{2d}$ donné par $\kappa(x,v) = (x - v)$. On pose alors $U_\kappa u = u \circ \kappa$, $u \in L^2$, de telle sorte que U_κ est unitaire et autoadjoint et peut être vu comme l'opérateur de $\mathscr{PT}$-symétrie. Celle-ci s'écrit alors

$$P_h^* = U_\kappa^{-1} P_h U_\kappa. \tag{2.3.1}$$

On introduit également la forme hermitienne non définie positive (qui sera notre produit scalaire modifié sur H)

$$(u,v)_\kappa = (U_\kappa u, v), \ u,\, v \in L^2. \tag{2.3.2}$$

Ainsi, d'après (2.3.1) et (2.3.2), P_h est formellement autoadjoint par rapport à la forme hermitienne $(.,.)_\kappa$.

Proposition 2.3.2. *Pour h assez petit, la restriction de $(.,.)_\kappa$ à $H \times H$ est définie positive uniformément par rapport à h.*

Preuve : On va d'abord vérifier que la $\mathscr{PT}$-symétrie n'est pas "spontanément brisée". Dans notre cas, on vérifie que les quasimodes sont bien $\mathscr{PT}$-symétriques. On rappelle que $g_j^h(x,v) = \chi_j(x)\mathcal{M}_h^{1/2}(x,v)$ et que $\Pi_0 g_j^h = g_j^h + \widetilde{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2h}})$. Ainsi $g_j^h \circ \kappa = g_j^h$ et la famille $(g_j^h)_{1\le j\le n_0}$ est presque orthogonale pour la forme $(.,.)_\kappa$. Il existe donc une base $(g_{0,j})_{1\le j\le n_0}$ de H telle que

$$(g_{0,j}, g_{0,j})_\kappa = 1 + \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}}), \quad (g_{0,j}, g_{0,j'})_\kappa = \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}}) \text{ pour } j \neq j'.$$

Ainsi pour $H \ni u = \displaystyle\sum_{k=1}^{n_0} u_k g_{0,k}$, on obtient

$$(u,u)_\kappa = \sum_{k=1}^{n_0} (1 + \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}}))|u_k|^2 \geq \|u\|^2/C.$$

Ce qui termine la démonstration. $\square$

Comme P_h est formellement autoadjoint par rapport à $(.,.)_\kappa$, on obtient donc la proposition suivante :

Proposition 2.3.3. *Pour h assez petit, la restriction de $P_h : H \to H$ est autoadjointe par rapport au produit scalaire (sur H) $(.,.)_\kappa$. De plus, P_h a exactement n_0 valeurs propres réelles plus petites que $\delta_0 h$ et elles sont toutes $\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}})$.*

Ce qui implique en particulier le point *i)* du Théorème 2.1.1.

2.4 Retour à l'équilibre

Pour conclure ce chapitre, on va traduire nos estimations spectrales en estimations de décroissance du semi-groupe. On rappelle que le corollaire 2.2.7 nous donne pour tout $u \in \mathscr{S} \cap (S_h G)^\perp$ et $\operatorname{Re} z \leq ch$

$$\|(P_h - z)u\| \geq ch\|u\|.$$

Notons Π_0 le projecteur spectral sur les espaces propres associés aux n_0 valeurs propres les plus petites. On transcrit maintenant notre estimation de résolvante précédente en une estimation sur $(\mathrm{Id} - \Pi_0)L^2$. On remarque tout d'abord que les $(g_j)_j$ sont des quasimodes à la fois pour P_h et P_h^*. On a donc pour tout j

$$\Pi_0 g_j = g_j + \widetilde{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}}) = \Pi_0^* g_j.$$

Ainsi, si on prend $u \in L^2$, on obtient pour tout j

$$(g_j, (\mathrm{Id} - \Pi_0)u) = ((\mathrm{Id} - \Pi_0^*)g_j, (\mathrm{Id} - \Pi_0)u) = \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}})\|(\mathrm{Id} - \Pi_0)u\|.$$

On en conclut qu'on peut écrire pour tout $u \in L^2$

$$(\mathrm{Id} - \Pi_0)u = v + \sum_j a_j g_j,$$

avec $v \in G^\perp$, $\|v\| = \|(\mathrm{Id} - \Pi_0)u\| + \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}})\|(\mathrm{Id} - \Pi_0)u\|$ et pour tout j, $|a_j| = \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}})\|(\mathrm{Id} - \Pi_0)u\|$. On a donc pour $\operatorname{Re} z \leq ch$, grâce à notre estimation de résolvante précédente

$$\|(P_h - z)(\mathrm{Id} - \Pi_0)u\| \geq ch\|v\| - \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}})\|(\mathrm{Id} - \Pi_0)u\|.$$

En prenant h suffisamment petit et une nouvelle constante c, on obtient l'estimation de résolvante suivante sur $(\mathrm{Id} - \Pi_0)L^2$ avec $\operatorname{Re} z \leq ch$:

$$\|(P_h - z)^{-1}\| \leq \frac{1}{ch}.$$

On a ainsi obtenu une estimation de résolvante uniforme sur le demi-plan complexe $\{\operatorname{Re} z \leq ch\}$. On rappelle ici le théorème de Gearhart-Prüss (voir le théorème D.11 dans l'appendice) qu'on va utiliser pour obtenir une estimation de semi-groupe.

Théorème (Gearhart-Prüss). *Soit A un opérateur fermé à domaine dense $D(A)$ qui génère un semi-groupe fortement continu $T(t)$, et soit $\omega \in \mathbb{R}$. On suppose que $\left\|(z - A)^{-1}\right\|$ est uniformément bornée dans le demi-plan complexe $\operatorname{Re} z \leq \omega$. Alors il existe une constante M telle que*

$$\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{-\omega t},\ t \geq 0.$$

Comme $\Pi_0 L^2$ et $(\mathrm{Id} - \Pi_0)L^2$ sont stables sous l'action de P_h (par définition de Π_0), le théorème précédent pour $P_{h\,|(\mathrm{Id}-\Pi_0)L^2}$ nous permet d'écrire que pour tout $t > 0$

$$\mathrm{e}^{-tP_h} = \mathrm{e}^{-tP_h}\Pi_0 + \mathcal{O}(e^{-cht}).$$

Bien que le projecteur ne soit pas orthogonal, comme $\Pi_0 = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}(0,\delta_0 h)}(z - P_h)^{-1}\,\mathrm{d}z$, notre estimation de résolvante nous donne $\|\Pi_0\| = \mathcal{O}(1)$. Si on note maintenant $(\mu_j)_{j=1\dots n_0}$ les valeurs propres exponentiellement petites (répétées selon leurs multiplicités) et Π_j les projecteurs spectraux associés, on a que $\|\Pi_j\| = \mathcal{O}(1)$. En effet, on a vu que la restriction $P_{h\,|H}$ est autoadjointe par rapport à $(.,.)_\kappa$ qui est équivalent (sur H) au produit scalaire ambiant, donc les projections sont bornées. Ainsi, on peut regrouper tout cela dans la proposition suivante :

Proposition 2.4.1. *Il existe $c > 0$ et $\alpha > 0$ telles que pour tout , $t \geq 0$ et h suffisamment petit*

$$\mathrm{e}^{-tP_h} = \sum_{j=1}^{n_0} \mathrm{e}^{-t\mu_j}\Pi_j + \mathcal{O}(e^{-cht}),$$

avec $\|\Pi_j\| = \mathcal{O}(1)$ et $\mu_j = \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}})$.

3

Équation de Boltzmann linéaire avec relaxation douce

Dans le chapitre précédent, on a étudié l'équation de relaxation linéaire de Boltzmann dans le régime des basses températures. Malheureusement, il semble qu'il est difficile d'écrire l'opérateur associé de manière supersymétrique (voir l'introduction). On s'intéresse alors à l'équation de Boltzmann linéaire semi-classique suivante qui, par contre, a cette propriété (cf. chapitre 4) :

$$\begin{cases} h\partial_t u + v.h\partial_x u - \partial_x V(x).h\partial_v u + (1+H_0)^{-1}H_0 u = 0, \\ u_{|t=0} = u_0, \end{cases}$$

où H_0 est l'oscillateur harmonique semi-classique en vitesse, i.e. $H_0 = -h^2\Delta_v + v^2 - dh$ et on a déjà fixé tous les paramètres physiques à l'exception de la température h. On remarquera qu'on a choisi une mise à l'échelle légèrement différente de celle de l'introduction afin de simplifier les expressions (cette mise à l'échelle sera valable tout au long de ce chapitre et dans le chapitre 4). On s'intéresse donc à l'opérateur

$$\begin{aligned} P &= v.h\partial_x - \partial_x V(x).h\partial_v + (1+H_0)^{-1}H_0 \\ &= X_0 + (1+H_0)^{-1}H_0. \end{aligned}$$

On rappelle que le potentiel V satisfait les hypothèses 1.1.2 :

Hypothèse. *Le potentiel V est une fonction de Morse avec n_0 minima locaux et dont les dérivées d'ordre 2 et plus sont bornées. De plus, $\mathrm{e}^{-\frac{V}{h}} \in L^1$ et il existe $C > 0$ tel que $|\nabla V(x)| \geq \frac{1}{C}$ pour $|x| > C$.*

Dans ce chapitre, on se propose de démontrer le résultat spectral suivant sur l'opérateur P :

Théorème 3.0.2. *Supposons que V satisfasse les hypothèses 1.1.2. Alors P a 0 comme valeur propre simple et il existe $h_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ tels que :*

i) pour tout $h \in]0, h_0]$, $\operatorname{Spec} P \cap B(0, \delta_0 h)$ est constitué de n_0 valeurs propres réelles (comptées avec multiplicité) qui sont exponentiellement petites par rapport à $\frac{1}{h}$;

ii) pour tout $\delta > 0$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $h \in]0, h_0]$, si $\delta \leq |z| \leq \delta_0$ alors

$$\left\|(P - hz)^{-1}\right\| \leq \frac{C}{h}.$$

iii) Si Π_0 désigne le projecteur spectral sur l'espace propre associé aux valeurs propres exponentiellement petites, alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $h \in]0, h_0]$, et $\operatorname{Re} z \leq \delta_0$ alors

$$\left\|(P_{|(\mathrm{Id}-\Pi_0)L^2} - zh)^{-1}\right\| \leq \frac{C}{h}.$$

3.1 Estimation de résolvante

Contrairement à l'opérateur dans le premier chapitre, celui que nous étudions à présent a de bonnes propriétés symboliques. On va donc dans cette partie utiliser des techniques pseudodifférentielles afin d'obtenir une estimation de résolvante nous permettant un contrôle du projecteur spectral associé aux petites valeurs propres de notre opérateur. Le but de cette partie est de montrer le théorème suivant correspondant au point $ii)$ de théorème 3.0.2 :

Théorème 3.1.1. *Il existe $\tau_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \tau < \tau_0$, il existe $c > 0$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\tau < |z| < \tau_0$, on a*

$$ch \|u\| \leq \|(P - hz)u\| . \tag{3.1.1}$$

De plus, $(P - hz)^{-1}$ existe.

Preuve : La partie la plus difficile de ce résultat est l'estimation (3.1.1) et sera démontrée dans les deux prochaines sous-parties. En ce qui concerne l'existence de la résolvante, on peut prouver de la même manière que P^* satisfait une estimation du type (3.1.1). On obtient donc que l'extension maximale de $P - hz$ est inversible. Il reste donc à montrer que P est accrétif maximal pour conclure. Le même argument que celui donné pour l'équation de relaxation linéaire fonctionne ici. En effet, P est la somme d'un opérateur de transport X_0 et d'un opérateur borné, donc en équipant P du domaine $D = \left\{u \in L^2 / \ X_0 u \in L^2\right\}$, on obtient un opérateur accrétif maximal. □

3.1.1 Loin des points critiques

Dans les deux sous-parties qui suivent, on va démontrer l'estimation (3.1.1) à l'aide du calcul symbolique de Weyl et de la transformée FBI (voir appendices A et C).

Preuve : Le symbole correspondant à notre opérateur de Boltzmann modifié possède le développement suivant dans $\mathcal{S}(\langle\langle(x, v, \xi, \eta)\rangle\rangle)$ (voir l'appendice A pour la définition des classes de symboles et des rappels sur le calcul symbolique semi-classique) :

$$\begin{aligned} p &= \frac{v^2+\eta^2-hd}{1+v^2+\eta^2-hd} + i(v.\xi - V'(x).\eta) + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \frac{v^2+\eta^2}{1+v^2+\eta^2} + i(v.\xi - V'(x).\eta) - \frac{hd}{(1+v^2+\eta^2)^2} + \mathcal{O}(h^2) \\ &= p_0 + ip_1 + hp_2 + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

En fait, la partie imaginaire $\operatorname{Im} p$ est vraiment donnée par $p_1 = (v.\xi - V'(x).\eta)$ et la partie réelle possède le développement asymptotique suivant dans $\mathcal{S}(1)$:

$$\operatorname{Re} p = p_0 + hp_2 + \mathcal{O}(h^2).$$

Le champ hamiltonien associé à la partie imaginaire du symbole est donné par

$$H_{p_1} = v.\partial_x - V'(x).\partial_v + \eta.V''(x).\partial_\xi - \xi.\partial_\eta.$$

On remarquera que, si on note $q_0 = v^2 + \eta^2 - hd$, alors $H_{p_1}q_0$ est exactement le terme qui fait gagner de l'ellipticité loin des points critiques pour l'opérateur de (Kramers)-Fokker-Planck (voir [45]). On pose alors pour $\alpha > 0$ (qui sera fixé suffisamment grand plus tard)

$$g(x, v; \xi, \eta) = -\frac{\sqrt{\alpha}v.V'(x) + \sqrt{\alpha}\eta.\xi}{2(1+|V'(x)|^2+\alpha v^2+\xi^2+\alpha\eta^2)}. \tag{3.1.3}$$

Par les inégalités de Cauchy-Schwarz et d'Young, on remarque que g est dans $\mathcal{S}(1)$ et est bornée par $\frac{1}{2}$. On calcule alors

$$\begin{aligned} H_{p_1}g &= \sqrt{\alpha}\,\frac{-vV''(x)v - \eta V''(x)\eta + V'(x)^2 + \xi^2}{2(1+V'(x)^2+\xi^2+\alpha v^2+\alpha\eta^2)} \\ &\quad -\sqrt{\alpha}(v.V'(x)+\eta.\xi)\frac{vV''(x)V'(x)+\eta V''(x)\xi - \alpha V'(x).v - \alpha\xi.\eta}{(1+V'(x)^2+\xi^2+\alpha v^2+\alpha\eta^2)^2} \\ &= \frac{\sqrt{\alpha}}{2}\,\frac{\alpha v^2+\alpha\eta^2+V'(x)^2+\xi^2}{1+V'(x)^2+\xi^2+\alpha v^2+\alpha\eta^2} + R_\alpha(x, v, \xi, \eta). \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

avec

$$\begin{aligned}R_\alpha = &-\alpha^{3/2}\frac{v^2+\eta^2}{2(1+V'(x)^2+\xi^2+\alpha v^2+\alpha\eta^2)}\\&-\sqrt{\alpha}\,\frac{-vV''(x)v-\eta V''(x)\eta}{2(1+V'(x)^2+\xi^2+\alpha v^2+\alpha\eta^2)}\\&-\sqrt{\alpha}(v.V'(x)+\eta.\xi)\frac{vV''(x)V'(x)+\eta V''(x)\xi-\alpha V'(x).v-\alpha\xi.\eta}{(1+V'(x)^2+\xi^2+\alpha v^2+\alpha\eta^2)^2}.\end{aligned}$$

Les deux premiers termes de R_α sont majorés par $C(\alpha)p_0$. Pour le troisième terme on a

$$\begin{aligned}&\left|\sqrt{\alpha}(v.V'(x)+\eta.\xi)\frac{vV''(x)V'(x)+\eta V''(x)\xi-\alpha V'(x).v-\alpha\xi.\eta}{(1+V'(x)^2+\xi^2+\alpha v^2+\alpha\eta^2)^2}\right|\\&\quad\leq\left|\frac{vV''(x)V'(x)+\eta V''(x)\xi-\alpha V'(x).v-\alpha\xi.\eta}{(1+V'(x)^2+\xi^2+\alpha v^2+\alpha\eta^2)}\right|\\&\quad\leq C\frac{(1+\alpha^2)v^2+(1+\alpha^2)\eta^2+V'(x)^2+\xi^2}{(1+V'(x)^2+\xi^2+\alpha v^2+\alpha\eta^2)}\\&\quad\leq C(\alpha)\frac{v^2+\eta^2}{1+v^2+\eta^2}+C\frac{V'(x)^2+\xi^2}{(1+V'(x)^2+\xi^2+\alpha v^2+\alpha\eta^2)}.\end{aligned}$$

En prenant α tel que $\frac{\sqrt{\alpha}}{2}\geq 2C$, on obtient

$$\begin{aligned}H_{p_1}g\geq &\frac{\sqrt{\alpha}}{4}\,\frac{\alpha v^2+\alpha\eta^2+V'(x)^2+\xi^2}{1+V'(x)^2+\xi^2+\alpha v^2+\alpha\eta^2}\\&-C(\alpha)p_0.\end{aligned}$$

On a donc pour la partie réelle du symbole du composé de $(p-hz)^w$ et de $(1-g)^w$

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,((p-hz)\#(1-g)) = &(p_0-\mathrm{Re}\,hz)(1-g)+h\{p_1,g\}/2\\&+hp_2+\mathcal{O}(h^2)\\&\geq p_0-C(\alpha)hp_0\\&+\frac{h\sqrt{\alpha}}{4}\,\frac{\alpha v^2+\alpha\eta^2+V'(x)^2+\xi^2}{1+V'(x)^2+\xi^2+\alpha v^2+\alpha\eta^2}\\&-(d+|\mathrm{Re}\,z|)h+\mathcal{O}_\alpha(h^2).\end{aligned}$$

On fixe à partir de maintenant une fonction $\varphi\in\mathcal{C}_0^\infty$ indépendante de α qui vaut 1 près des points critiques. En dehors du support de φ

$$\frac{\alpha v^2+\alpha\eta^2+V'(x)^2+\xi^2}{1+V'(x)^2+\xi^2+\alpha v^2+\alpha\eta^2}\geq c.$$

uniformément par rapport à α. Il existe donc α tel que pour tout z tel que $\mathrm{Re}\,z\leq 1$, on ait $\frac{\sqrt{\alpha}c}{4}\geq 3(d+|\mathrm{Re}\,z|)$. À partir de maintenant α est fixé et on omet la dépendance par rapport à α, on obtient alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,((p-hz)\#(1-g))\geq &p_0-C(\alpha)hp_0+2(d+|\mathrm{Re}\,z|)(1-\varphi)^2h\\&+\mathcal{O}(h^2).\end{aligned}$$

On prend alors h assez petit et on obtient l'inégalité suivante sur le symbole $\operatorname{Re}((p-hz)\#(1-g)) \in \mathcal{S}(1)$:

$$\operatorname{Re}((p-hz)\#(1-g)) \geq (d+|\operatorname{Re} z|)(1-\varphi)^2 h.$$

En utilisant l'inégalité de Fefferman-Phong dans la classe de symbole $\mathcal{S}(1)$ et le fait que $\left((1-\varphi)^2\right)^w = ((1-\varphi)^w)^2 + \mathcal{O}(h^2)$, on obtient alors

$$\operatorname{Re}(((p-hz)\#(1-\varepsilon g))^w u, u) \geq (d+|\operatorname{Re} z|)h \,\|(1-\varphi)^w u\|^2 + \mathcal{O}(h^2)\|u\|^2.$$

Ce qui se réécrit

$$\operatorname{Re}(((p-hz)^w u, (1-\varepsilon g))^w u) \geq (d+|\operatorname{Re} z|)h \,\|(1-\varphi)^w u\|^2 + \mathcal{O}(h^2)\|u\|^2.$$

Comme g^w est borné, on obtient finalement,

$$h\,\|(1-\varphi)^w u\|^2 \leq C\operatorname{Re}((P-hz)u,u) + \mathcal{O}(h^2)\,\|u\|^2\,. \tag{3.1.5}$$

Ce qui donne, par l'inégalité d'Young, pour une constante $B>0$ arbitrairement grande

$$h\,\|(1-\varphi)^w u\|^2 \leq C(B)h^{-1}\,\|(P-hz)u\|^2 + B^{-1}h\,\|u\|^2 + \mathcal{O}(h^2)\,\|u\|^2\,,$$

d'où en multipliant par h

$$h^2\,\|(1-\varphi)^w u\|^2 \leq C(B)\,\|(P-hz)u\|^2 + \frac{h^2}{B}\,\|u\|^2 + \mathcal{O}(h^3)\,\|u\|^2\,. \tag{3.1.6}$$

3.1.2 Près des points critiques

Près des points critiques, notre opérateur a le même développement symbolique que l'opérateur de (Kramers)-Fokker-Planck. En particulier, il vérifie l'hypothèse **(H1)** de [45] ; à savoir, le symbole principal $p_p = p_0 + ip_1$ (voir (3.1.2)) de notre opérateur vérifie qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, près des points critiques,

$$p_0 + \varepsilon_0 H_{p_1}^2 p_0 \sim \delta^2. \tag{\textbf{H1}}$$

où δ est équivalent à la distance aux points critiques, bien que dans notre cas, p_0 ne corresponde pas à un opérateur différentiel. On suppose dans cette partie pour simplifier les notations que notre opérateur a un unique point critique en $(0,0,0,0)$.

On peut donc construire, près des points critiques, la même fonction poids que dans [45] (cf. appendice B). Dans la suite, on va travailler du coté FBI. On renvoie donc le lecteur à l'appendice C (et aux références contenues dedans) pour une introduction rapide à ce sujet. On va utiliser la transformée de FBI de Bargmann donnée par

$$Tu(z) = 2^{-n/2}(\pi h)^{-3n/4}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\frac{(z-y)^2}{2h}}u(y)\,\mathrm{d}y.$$

On rappelle que dans ce cas, T est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^n)$ dans H_Φ, où $\Phi(z) = \frac{1}{2}|\mathrm{Im}\, z|^2$. On notera $(.,.)_\Phi$ le produit scalaire coté FBI (c'est-à-dire le produit scalaire de $L^2(\mathbb{C}^n; \mathrm{e}^{-2\Phi/h}\mathrm{d}z)$), $\|.\|_\Phi$ la norme associée, et $\mathfrak{P}$ la réalisation de notre opérateur du coté FBI.

Remarque 3.1.2. En fait, on va plutôt travailler avec le produit scalaire $(.,.)_{\Phi_\varepsilon}$ et la norme $\|.\|_{\Phi_\varepsilon}$ (voir l'appendice C pour la définition de Φ_ε), puisque c'est dans ce produit scalaire qu'on obtient les propriétés d'hypocoercivité de notre opérateur. En revanche, comme ces normes sont équivalentes uniformément par rapport à h (cf. (C.4)), on peut traduire toutes les inégalités obtenues dans la norme $\|.\|_\Phi$.

On veut dériver une estimation du type de l'estimation (6.14) de [45] (on pourra aussi consulter [47] pour l'ensemble de cette partie). On prend $\chi \circ \kappa$ une fonction de troncature près des points critiques à support plus grand que φ (il s'agit de la fonction de troncature introduite dans la partie précédente), et $\chi_0 \circ \kappa$ une fonction similaire, qui nous permettra de microlocaliser dans un voisinage de taille $\sqrt{Ah}$ (avec $A > 0$ qu'on choisira grande) dans lequel l'opérateur est proche de son approximation quadratique, où κ est la transformation canonique associée à Φ et donc χ et χ_0 sont des fonctions de troncature du coté FBI. On pose

$$\Lambda^2 = h + \min(\delta^2, (\delta A h)^{2/3}), \tag{3.1.7}$$

où par abus de notations, on note de la même façon δ du coté réel et $\delta \circ \kappa$ du coté FBI. Cette fonction est le bon objet pour mesurer l'hypoellipticité (dans Fokker-Planck) ou l'hypocoercivité et est adaptée au découpage de l'espace des phases qu'on met en place. Pour obtenir l'estimation souhaitée, on part de la formule (C.5) de quantification contre multiplication du coté FBI. Pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on a

$$(\chi \mathfrak{P} T u, T u)_{\Phi_\varepsilon} = \int p_\epsilon |Tu|^2 \chi(x) \mathrm{e}^{-2\Phi(x)/h} L(\mathrm{d}x) + \mathcal{O}(h) \|Tu\|^2_{\Phi_\varepsilon}.$$

Ainsi que de l'estimation hypoelliptique (4.3) de [45] qui s'écrit comme suit : sur un compact incluant le support de χ, on a

$$\mathrm{Re}\, p_\varepsilon(\rho) \geq \frac{1}{C_0} \min(\delta(\rho)^2, (Ah)^{\frac{2}{3}} \delta(\rho)^{\frac{2}{3}}). \tag{3.1.8}$$

On prend K une constante arbitrairement grande (indépendante de h et A) qu'on fixera un peu plus loin. On a alors une nouvelle constante C_1 telle que

$$\mathrm{Re}\, p_\varepsilon(\rho) + K\Lambda^2 \chi_0^2 \left(\frac{\delta(\rho)^2}{Ah} \right) \geq \frac{1}{C_1} (\min(A, K) h + \min(\delta(\rho)^2, (Ah)^{\frac{2}{3}} \delta(\rho)^{\frac{2}{3}})). \tag{3.1.9}$$

On peut alors écrire grâce à (C.5)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re}\,(\chi(\mathfrak{P}-hz+K\Lambda^2\chi_0^2\left(\frac{\delta(\rho)^2}{Ah})\right)Tu,Tu)_{\Phi_\varepsilon}+\mathcal{O}(h)\|u\|^2_{\Phi_\varepsilon}\\
&\quad\geq\frac{1}{C_1}\Big(\min(A,K)h(\chi Tu,Tu)_{\Phi_\varepsilon}\\
&\quad+\int\min(\delta(\rho)^2,(Ah)^{\frac{2}{3}}\delta(\rho)^{\frac{2}{3}})|Tu|^2\chi(x)\mathrm{e}^{-2\Phi(x)/h}L(\mathrm{d}x)\\
&\quad-|z|h(\chi Tu,Tu)_{\Phi_\varepsilon}\Big).
\end{aligned}\tag{3.1.10}$$

En prenant K assez grand (et $A\geq K$), ainsi que $|z|\leq 1$, on obtient ce qui correspond à l'estimation (6.14) de [45] avec une constante C indépendante de A et de h :

$$\begin{aligned}
\|\Lambda Tu\|^2_{\Phi_\varepsilon}\leq &C\mathrm{Re}\,(\chi(\mathfrak{P}-hz)Tu,Tu)_{\Phi_\varepsilon}+C\left(\chi_0^2\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)\Lambda Tu,\Lambda Tu\right)_{\Phi_\varepsilon}\\
&+C\left\|(1-\chi)\Lambda Tu\right\|_{\Phi_\varepsilon}\left\|\Lambda Tu\right\|_{\Phi_\varepsilon}.
\end{aligned}\tag{3.1.11}$$

En appliquant cette estimation à $\varphi^w u$ (on rappelle que φ est une fonction de troncature qui a été fixée dans la partie précédente), on obtient

$$\begin{aligned}
\|\Lambda T\varphi^w u\|^2_{\Phi_\varepsilon}\leq &C\mathrm{Re}\,\left(\chi(\mathfrak{P}-hz)T\varphi^w u,T\varphi^w u\right)_{\Phi_\varepsilon}\\
&+C\left(\chi_0^2\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)\Lambda T\varphi^w u,\Lambda T\varphi^w u\right)_{\Phi_\varepsilon}\\
&+C\left\|(1-\chi)\Lambda T\varphi^w u\right\|_{\Phi_\varepsilon}\left\|\Lambda T\varphi^w u\right\|_{\Phi_\varepsilon}.
\end{aligned}\tag{3.1.12}$$

On va étudier chaque terme de cette inégalité. On garde d'abord le terme de gauche tel quel

$$\|\Lambda T\varphi^w u\|^2_{\Phi_\varepsilon}.\tag{3.1.13}$$

Regardons ensuite le premier terme de droite de (3.1.12) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,(\chi(\mathfrak{P}-hz)T\varphi^w u,T\varphi^w u)_{\Phi_\varepsilon}=&\mathrm{Re}\,((\mathfrak{P}-hz)T\varphi^w u,T\varphi^w u)_{\Phi_\varepsilon}\\
&+\mathcal{O}(h^\infty)\left\|Tu\right\|^2_{\Phi_\varepsilon},
\end{aligned}\tag{3.1.14}$$

où on a utilisé que φ et $(1-\chi)\circ\kappa$ ont des supports microlocaux disjoints et on peut appliquer le lemme C.2. On repasse alors du coté de la quantification de Weyl (la transformée FBI est unitaire donc conserve le produit scalaire). On rappelle que pour la quantification de Weyl, on a pour un symbole a

$$\varphi\#a\#\varphi=a\varphi^2+\mathcal{O}(h^2).$$

On obtient donc en utilisant l'inégalité de Fefferman-Phong (seule la partie autoadjointe de P est concernée puisqu'on prend la partie réelle)

$$\mathrm{Re}\left((P-hz)\varphi^w u, \varphi^w u\right) \leq \mathrm{Re}\left((P-hz)u, u\right) + \mathcal{O}(h^2)\left\|u\right\|^2. \tag{3.1.15}$$

En repassant du coté FBI et en réinjectant dans 3.1.12, on obtient

$$\begin{aligned}\|\Lambda T\varphi^w u\|_{\Phi_\varepsilon}^2 \leq{}& C\mathrm{Re}\left((\mathfrak{P}-hz)Tu, Tu\right)_{\Phi_\varepsilon} \\ &+ C\left(\chi_0^2\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)\Lambda T\varphi^w u, \Lambda T\varphi^w u\right)_{\Phi_\varepsilon} \\ &+ C\left\|(1-\chi)\Lambda T\varphi^w u\right\|_{\Phi_\varepsilon}\left\|\Lambda T\varphi^w u\right\|_{\Phi_\varepsilon} + \mathcal{O}(h^2)\left\|u\right\|_{\Phi_\varepsilon}^2.\end{aligned} \tag{3.1.16}$$

Pour le deuxième terme de droite de (3.1.16), on suit la procédure employée dans [45]. On commence par se débarrasser de la microlocalisation φ^w en utilisant le même argument de support que précédemment (le support de $1-\varphi$ et celui de $\chi_0\left(\frac{\cdot}{\sqrt{Ah}}\right)\circ\kappa$ sont disjoints), on a donc

$$\left\|\Lambda\chi_0\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)T\varphi^w u\right\|_{\Phi_\varepsilon} \leq \left\|\Lambda\chi_0\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)Tu\right\|_{\Phi_\varepsilon} + \mathcal{O}(h^\infty)\|Tu\|_{\Phi_\varepsilon}. \tag{3.1.17}$$

On va utiliser l'approximation quadratique P_0 de notre opérateur P. On remarque que l'opérateur de Fokker-Planck étudié dans [45] et notre opérateur de relaxation douce ont exactement la même approximation quadratique donnée par

$$P_0 = \left(v^2 + \eta^2 - i(v.\xi - x.B.\eta)\right)^w \tag{3.1.18}$$

où B est une matrice symétrique réelle. On note $\mathfrak{P}_0$ l'approximation quadratique de P du coté FBI. Pour cette approximation quadratique, il est montré dans [45] le lemme suivant :

Lemme 3.1.3. *Pour tout voisinage compact K de* $\operatorname{supp}\chi_0$*, pour tout $c > 0$ (suffisamment petit) et tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $\tau, C > 0$ telles que pour tout $ch \leq |z| \leq \tau h$, on a pour tout $u \in H_{\Phi_\varepsilon}$*

$$\begin{aligned}\left\|\Lambda^{1-k}\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)Tu\right\|_{\Phi_\varepsilon} \leq{}& C\left\|\Lambda^{-k}\chi_0\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)(\mathfrak{P}_0-hz)Tu\right\|_{\Phi_\varepsilon} \\ &+ \frac{C}{\sqrt{A}}\left\|\Lambda^{1-k}\mathbb{1}_K\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)Tu\right\|_{\Phi_\varepsilon}.\end{aligned} \tag{3.1.19}$$

On a également besoin d'une estimation qui contrôle la distance de P à son approximation quadratique (du coté FBI) :

Lemme 3.1.4. *Pour tout $u \in H_{\Phi_\varepsilon}$:*

$$\left\|\Lambda^{-1}\chi_0\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)(\mathfrak{P}-\mathfrak{P}_0)Tu\right\|_{\Phi_\varepsilon} \leq C(A)h^{\frac{1}{2}}\left\|\Lambda Tu\right\|_{\Phi_\varepsilon}. \tag{3.1.20}$$

Preuve : La démonstration est exactement la même que dans le cas de l'équation de Fokker-Planck et on réfère à [45] pour les détails. On mentionne juste ici que le premier terme du développement de Taylor de la partie non-locale $\frac{v^2+\eta^2}{1+v^2+\eta^2}$ du symbole de notre opérateur près des points critiques correspond exactement à la partie réelle du symbole pour Fokker-Planck. □

En fait, on peut améliorer très légèrement cette estimation en introduisant φ^w dans le terme de droite. En effet, on a par l'inégalité triangulaire

$$\left\|\Lambda^{-1}\chi_0\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)(\mathfrak{P}-\mathfrak{P}_0)Tu\right\|_{\Phi_\varepsilon} \leq \left\|\Lambda^{-1}\chi_0\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)(\mathfrak{P}-\mathfrak{P}_0)T\varphi^w u\right\|_{\Phi_\varepsilon} + \left\|\Lambda^{-1}\chi_0\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)(\mathfrak{P}-\mathfrak{P}_0)T(1-\varphi^w)u\right\|_{\Phi_\varepsilon}$$

Comme les supports de $\chi_0\left(\frac{\cdot}{\sqrt{Ah}}\right)\circ\kappa$ et de $1-\varphi$ sont disjoints on obtient en utilisant le lemme C.2 que le deuxième terme du membre de droite est $\mathcal{O}(h^\infty)\|u\|$. Pour le premier terme, on applique l'estimation du lemme 3.1.4 et on a

$$\left\|\Lambda^{-1}\chi_0\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)(\mathfrak{P}-\mathfrak{P}_0)Tu\right\|_{\Phi_\varepsilon} \leq C(A)h^{\frac{1}{2}}\left\|\Lambda T\varphi^w u\right\|_{\Phi_\varepsilon} + \mathcal{O}(h^\infty)\|Tu\|_{\Phi_\varepsilon}, \tag{3.1.21}$$

et on a obtenu l'inégalité souhaitée. En combinant les estimations des lemmes 3.1.3 et 3.1.4 et l'estimation (3.1.17), on obtient alors

$$\begin{aligned}\left\|\Lambda\chi_0\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)T\varphi^w u\right\|^2_{\Phi_\varepsilon} \leq& \left\|\Lambda^{-1}\chi_0\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)(\mathfrak{P}-hz)Tu\right\|^2_{\Phi_\varepsilon} \\ &+\frac{C}{A}\left\|\Lambda\mathbb{1}_K\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)Tu\right\|^2_{\Phi_\varepsilon} + \mathcal{O}(h^\infty)\left\|Tu\right\|^2_{\Phi_\varepsilon} \\ &\leq C(A)h^{-1}\left\|(\mathfrak{P}-hz)Tu\right\|^2_{\Phi_\varepsilon} + \frac{C}{A}\left\|\Lambda T\varphi^w u\right\|^2_{\Phi_\varepsilon} \\ &+\widetilde{C}(A)h\left\|\Lambda T\varphi^w u\right\|^2_{\Phi_\varepsilon} + \mathcal{O}(h^\infty)\left\|Tu\right\|^2_{\Phi_\varepsilon},\end{aligned} \tag{3.1.22}$$

où on a utilisé que le support de $\mathbb{1}_K\left(\frac{\cdot}{\sqrt{Ah}}\right)$ et de $1-\varphi$ sont microlocalement disjoints, ce qui nous permet d'écrire, grâce au lemme C.2 , $\left\|\Lambda\mathbb{1}_K\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)Tu\right\|_{\Phi_\varepsilon} = \|\Lambda T\varphi^w u\|^2_{\Phi_\varepsilon} + \mathcal{O}(h^\infty)\|u\|^2_{\Phi_\varepsilon}$. Pour le dernier terme de (3.1.16), le même argument de support donne

$$C\left\|(1-\chi)\Lambda T\varphi^w u\right\|_{\Phi_\varepsilon}\left\|\Lambda T\varphi^w u\right\|_{\Phi_\varepsilon} \leq \mathcal{O}(h^\infty)\left\|Tu\right\|^2_{\Phi_\varepsilon}.$$

En réunissant toutes ces estimations dans (3.1.16), on a donc obtenu

$$\begin{aligned}\left\|\Lambda T\varphi^w u\right\|^2_{\Phi_\varepsilon} \leq& \mathrm{Re}\left((\mathfrak{P}-hz)Tu, Tu\right)_{\Phi_\varepsilon} + C(A)h^{-1}\left\|(\mathfrak{P}-hz)Tu\right\|^2_{\Phi_\varepsilon} \\ &+\frac{C}{A}\left\|\Lambda T\varphi^w u\right\|^2_{\Phi_\varepsilon} + \mathcal{O}(h^2)\left\|Tu\right\|^2_{\Phi_\varepsilon}.\end{aligned} \tag{3.1.23}$$

En utilisant encore une fois l'inégalité d'Young, et en prenant A assez grand (fixé à partir de maintenant), on obtient ainsi, pour tout $D > 0$,

$$\begin{aligned} \|\Lambda T\varphi^w u\|^2_{\Phi_\varepsilon} &\leq Dh^{-1}\|(\mathfrak{P} - hz)Tu\|^2_{\Phi_\varepsilon} + D^{-1}h\|Tu\|^2_{\Phi_\varepsilon} \\ &+ C(A)h^{-1}\|(\mathfrak{P} - hz)Tu\|^2_{\Phi_\varepsilon} + \mathcal{O}(h^2)\|Tu\|^2_{\Phi_\varepsilon}. \end{aligned} \tag{3.1.24}$$

On peut alors minorer Λ par h et on obtient

$$\begin{aligned} h\|T\varphi^w u\|^2_{\Phi_\varepsilon} &\leq Dh^{-1}\|(\mathfrak{P} - hz)Tu\|^2_{\Phi_\varepsilon} + D^{-1}h\|Tu\|^2_{\Phi_\varepsilon} \\ &+ C(A)h^{-1}\|(\mathfrak{P} - hz)Tu\|^2_{\Phi_\varepsilon} + \mathcal{O}(h^2)\|Tu\|^2_{\Phi_\varepsilon}. \end{aligned} \tag{3.1.25}$$

Comme la norme $\|.\|_{\Phi_\varepsilon}$ du coté FBI est équivalente à la norme usuelle sur L^2, on obtient donc pour tout $D > 0$ et pour tout $u \in L^2$

$$h^2\|\varphi^w u\|^2 \leq C(D)\|(P - hz)u\|^2 + \frac{h^2}{D}\|u\|^2 + \mathcal{O}(h^3)\|u\|^2. \tag{3.1.26}$$

En regroupant les estimations (3.1.6) et (3.1.26), on obtient grâce à l'inégalité triangulaire

$$h^2\|u\|^2 \leq (C(B) + C(D))\|(P - hz)u\|^2 + \left(\frac{h^2}{B} + \frac{h^2}{D}\right)\|u\|^2 + \mathcal{O}(h^3)\|u\|^2. \tag{3.1.27}$$

En prenant B et D assez grands puis h assez petit, on obtient alors l'estimation de résolvante recherchée :

$$h\|u\| \leq C\|(P - hz)u\|. \tag{3.1.28}$$

Ce qui montre l'estimation (3.1.1) et achève la démonstration du théorème 3.1.1. □

3.2 Problème de Grushin

On rappelle que le potentiel V possède n_0 minima locaux. On pose pour tout $j \in [\![0, n_0]\!]$

$$g_j^h(x, v) = \frac{1}{\|\chi_j(x)\mathcal{M}(x, v)\|}\chi_j(x)\mathcal{M}(x, v),$$

où χ_j est une fonction de troncature (bien choisie) près du $j^{\text{ième}}$ minimum local de V et $\mathcal{M}(x, v) = \mathrm{e}^{-\left(\frac{v^2}{2h} + \frac{V(x)}{h}\right)}$ est la maxwellienne globale.

Remarque 3.2.1. La partie non-locale de notre opérateur étant uniquement en vitesse et la fonction de troncature ne dépendant que de la variable d'espace, il n'y aura pas d'interaction entre ces deux parties qui aurait pu poser problème.

On a d'ailleurs le lemme suivant :

Lemme 3.2.2. *Il existe $\alpha > 0$ tel que*

- *Pour tout j, k, $(g_j^h, g_k^h) = \delta_{j,k} + \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}})$.*
- *Pour tout j, $\left\| P g_j^h \right\| = \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}})$.*

Ainsi, les g_j^h sont des quasimodes pour P associés à des valeurs propres exponentiellement petites.

Remarque 3.2.3. Il s'agit exactement des mêmes quasimodes que ceux définis en (2.2.3) pour l'équation de relaxation linéaire.

Démontrons maintenant les parties $i)$ et $iii)$ du théorème 3.0.2.

Preuve : Grâce à ces quasimodes, on peut en conclure que l'espace propre généralisé associé aux petites valeurs propres de P (c'est-à-dire celles plus petites que $\delta_0 h$) est de dimension au moins n_0. Afin d'obtenir que P a exactement n_0 valeurs propres exponentiellement petites, on considère le problème de Grushin suivant (voir [80] pour la terminologie) :

$$\mathcal{P}(z) = \begin{pmatrix} P - hz & R_- \\ R_+ & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{D}(P) \times \mathbb{C}^N \to L^2 \times \mathbb{C}^N,$$

où $R_- u_- = \sum u_-(j) g_j^h$ et $R_+ u = ((u, g_j^h)) \in \mathbb{C}^N$.
On note

$$\mathcal{P}(z) \begin{pmatrix} u \\ u_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ v_+ \end{pmatrix}.$$

Le but de cette partie est de démontrer la proposition suivante :

Proposition 3.2.4. *Il existe $C > 0$, $\delta_0 > 0$ et $h_0 > 0$ tels que pour tout $0 < h < h_0$, $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}\, z \leq \delta_0$ et $u \in L^2$, on a*

$$h \, \|u\| + |u_-| \leq C \|v\| + C h |v_+|.$$

On va essentiellement procéder comme dans la section précédente pour montrer cette estimation.

3.2.1 Loin des points critiques

On repart de l'estimation (3.1.5) :

$$ch \left\| (1 - \varphi)^w u \right\|^2 \leq \mathrm{Re}\left((P - hz)u, u\right) + \mathcal{O}(h^2) \left\| u \right\|^2.$$

Avec les notations du problème de Grushin on a

$$v = (P - hz)u + R_- u_-.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz associée à l'inégalité triangulaire donne alors

$$h \left\| (1 - \varphi)^w u \right\|^2 \leq \|v\| \|u\| + C \|R_- u_-\| \|u\| + \mathcal{O}(h^2) \left\| u \right\|^2.$$

En appliquant l'inégalité d'Young, on obtient pour une constante B arbitrairement grande

$$h\left\|(1-\varphi)^w u\right\|^2 \leq \frac{C(B)}{h}\|v\|^2 + \frac{h}{B}\|u\|^2 + \frac{C(B)}{h}\|R_- u_-\|^2 + \mathcal{O}(h^2)\left\|u\right\|^2. \tag{3.2.1}$$

Ce qui nous donne en multipliant par h et en prenant la racine

$$h\left\|(1-\varphi)^w u\right\| \leq C(B)\|v\| + C(B)\|R_- u_-\| + \frac{h}{B}\|u\| + \mathcal{O}(h^{3/2})\left\|u\right\|. \tag{3.2.2}$$

Ce qui constitue la première partie de notre inégalité.

3.2.2 Approximation quadratique

Comme dans la sous-partie 3.1.2, on a d'abord besoin d'une estimation sur l'approximation quadratique de P du coté FBI. On rappelle donc le résultat de [45] pour le problème de Grushin lié à l'approximation quadratique P_0 de l'opérateur de Fokker-Planck (qui, on le rappelle, est aussi l'approximation quadratique de notre opérateur de relaxation douce) :

Lemme 3.2.5. *Il existe* $\delta_0 > 0$ *tel que pour tout* $\operatorname{Re} z \leq \delta_0$, $u \in L^2$, $u_- \in \mathbb{C}^N$ *on ait*

$$\begin{aligned} &\left\|\Lambda^{1-k}\chi_0\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)Tu\right\|_{\Phi_\varepsilon} + h^{-k}|u_-| \\ &\qquad \leq C\left(\left\|\Lambda^{-k}\chi_0\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)Tv_0\right\|_{\Phi_\varepsilon} + h^{1-k}|v_+| \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{\sqrt{A}}\left\|\Lambda^{1-k}\mathbb{1}_K\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)Tu\right\|_{\Phi_\varepsilon}\right), \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

avec $v_0 = (P_0 - hz)u + R_- u_-$ *et* $v_+ = R_+ u$.

Remarque 3.2.6. Cette estimation est montrée dans [45] avec seulement $|z| \leq \delta_0$, mais une lecture attentive de la preuve permet directement d'obtenir le résultat pour $\operatorname{Re} z \leq \delta_0$.

On rappelle que

$$\Lambda^2 = h + \min(d^2, (dAh)^{2/3}).$$

On va utiliser l'estimation du lemme 3.2.5 pour $k = \frac{1}{2}$ et remplacer u par $\varphi^w u$. On a alors

$$\begin{aligned} &\left\|\Lambda\chi_0\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)T\varphi^w u\right\|_{\Phi_\varepsilon} + h^{-1/2}|u_-| \\ &\qquad \leq C\left(\left\|\Lambda^{-1}\chi_0\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)T((P_0 - hz)\varphi^w u + R_- u_-)\right\|_{\Phi_\varepsilon}\right. \\ &\qquad \left. + h^{1/2}|v_+| + \frac{1}{\sqrt{A}}\left\|\Lambda\mathbb{1}_K\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)\varphi^w u\right\|_{\Phi_\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
&\left\|\Lambda\chi_0\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)T\varphi^w u\right\|_{\Phi_\varepsilon} + h^{-1/2}|u_-| \\
&\qquad \leq C\Bigg(\left\|\Lambda^{-1}\chi_0\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)T((P_0-hz)u+R_-u_-)\right\|_{\Phi_\varepsilon} \\
&\qquad\quad + \left\|\Lambda^{-1}\chi_0\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)T(P_0-hz)(1-\varphi^w)u\right\|_{\Phi_\varepsilon} \\
&\qquad\quad + h^{1/2}|v_+| + \frac{1}{\sqrt{A}}\left\|\Lambda \mathbb{1}_K\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)\varphi^w u\right\|_{\Phi_\varepsilon}\Bigg).
\end{aligned}$$

Grâce au lemme C.2, comme les supports de $\chi_0\left(\frac{\cdot}{\sqrt{Ah}}\right)\circ\kappa$ et $1-\varphi$ sont disjoints, on a

$$\|\Lambda^{-1}\chi_0\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)(P_0-hz)(1-\varphi^w)u\| = \mathcal{O}(h^\infty)\|u\|.$$

On rappelle qu'on note $v=(P-hz)u+R_-u_-$, on a donc finalement

$$\begin{aligned}
&\left\|\Lambda\chi_0\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)T\varphi^w u\right\|_{\Phi_\varepsilon} + h^{-1/2}|u_-| \\
&\qquad \leq C\Bigg(\left\|\Lambda^{-1}\chi_0\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)Tv\right\|_{\Phi_\varepsilon} + h^{1/2}|v_+| \\
&\qquad\quad + \left\|\Lambda^{-1}\chi_0\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)T(P-P_0)u\right\|_{\Phi_\varepsilon} \\
&\qquad\quad + \frac{1}{\sqrt{A}}\left\|\Lambda \mathbb{1}_K\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)\varphi^w u\right\|_{\Phi_\varepsilon} + \mathcal{O}(h^\infty)\|Tu\|_{\Phi_\varepsilon}\Bigg).
\end{aligned}$$

On a utilise maintenant l'estimation sur la distance de P à son approximation quadratique du lemme 3.1.4 et on obtient

$$\begin{aligned}
&\left\|\Lambda\chi_0\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)T\varphi^w u\right\|_{\Phi_\varepsilon} + h^{-1/2}|u_-| \\
&\quad \leq C\Bigg(\left\|\Lambda^{-1}\chi_0\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)Tv\right\|_{\Phi_\varepsilon} + h^{1/2}|v_+| + C(A)h^{1/2}\|\Lambda T\varphi^w u\|_{\Phi_\varepsilon} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{A}}\left\|\Lambda \mathbb{1}_K\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)\varphi^w u\right\|_{\Phi_\varepsilon} + \mathcal{O}(h^\infty)\|Tu\|_{\Phi_\varepsilon}\Bigg).
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

3.2.3 Près des points critiques

On repart de l'estimation (3.1.16) :

$$\begin{aligned}\|\Lambda T\varphi^w u\|^2_{\Phi_\varepsilon} \leq &C\mathrm{Re}\,(\chi(\mathfrak{P}-hz)Tu,Tu)_{\Phi_\varepsilon}\\ &+C\left(\chi_0^2\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)\Lambda T\varphi^w u,\Lambda T\varphi^w u\right)_{\Phi_\varepsilon}\\ &+C\left\|(1-\chi)\Lambda T\varphi^w u\right\|_{\Phi_\varepsilon}\left\|\Lambda T\varphi^w u\right\|_{\Phi_\varepsilon}+\mathcal{O}(h^2)\left\|u\right\|^2_{\Phi_\varepsilon}.\end{aligned}$$

On a donc, en utilisant que $(P-hz)u = v - R_-u_-$,

$$\begin{aligned}\|\Lambda T\varphi^w u\|^2_{\Phi_\varepsilon} \leq &C\mathrm{Re}\,(\chi Tv,Tu)_{\Phi_\varepsilon}+C\left\|\chi_0\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)\Lambda T\varphi^w u\right\|^2_{\Phi_\varepsilon}\\ &+C\left\|(1-\chi)\Lambda T\varphi^w u\right\|_{\Phi_\varepsilon}\left\|\Lambda T\varphi^w u\right\|_{\Phi_\varepsilon}+\mathcal{O}(h^2)\left\|u\right\|^2_{\Phi_\varepsilon}.\end{aligned}\tag{3.2.5}$$

D'après le lemme C.2, on sait que

$$\|(1-\chi)\Lambda T\varphi^w u\|_{\Phi_\varepsilon} = \mathcal{O}(h^\infty)\|u\|_{\Phi_\varepsilon}.$$

Ce qui nous donne en utilisant l'inégalité d'Young et en prenant la racine carré (combinés au fait que $\|R_-u_-\| \leq |u_-|$)

$$\begin{aligned}\|\Lambda T\varphi^w u\|_{\Phi_\varepsilon} \leq &\frac{C(D)}{h^{1/2}}\|Tv\|_{\Phi_\varepsilon}+\frac{C(D)}{h^{1/2}}|u_-|+\frac{h^{1/2}}{D}\|Tu\|_{\Phi_\varepsilon}\\ &+C\left\|\chi_0\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)\Lambda T\varphi^w u\right\|_{\Phi_\varepsilon}+\mathcal{O}(h)\left\|Tu\right\|_{\Phi_\varepsilon}.\end{aligned}\tag{3.2.6}$$

Si on y injecte (3.2.2) on obtient l'inégalité (en utilisant que les normes $\|.\|_\Phi$ et $\|.\|_{\Phi_\varepsilon}$ sont équivalentes et que la transformée FBI est unitaire)

$$\begin{aligned}&h^{1/2}\|T(1-\varphi)^w u\|^2_{\Phi_\varepsilon}+\|\Lambda T\varphi^w u\|_{\Phi_\varepsilon}\\ &\qquad\leq \frac{C(B)+C(D)}{h^{1/2}}\|Tv\|_{\Phi_\varepsilon}+\frac{C(B)+C(D)}{h^{1/2}}|u_-|\\ &\qquad+\left(\frac{h^{1/2}}{B}+\frac{h^{1/2}}{D}\right)\|Tu\|_{\Phi_\varepsilon}+C\left\|\chi_0\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)\Lambda T\varphi^w u\right\|_{\Phi_\varepsilon}\\ &\qquad+\mathcal{O}(h)\left\|Tu\right\|_{\Phi_\varepsilon}.\end{aligned}\tag{3.2.7}$$

Après avoir ajouté $h^{-1/2}|u_-|$ de part et d'autre de l'inégalité, on utilise (3.2.4) pour obtenir

$$\begin{aligned}
h^{1/2}&\|T(1-\varphi)^w u\|^2_{\Phi_\varepsilon} + \|\Lambda T\varphi^w u\|_{\Phi_\varepsilon} \\
&\leq \frac{C(B)+C(D)}{h^{1/2}}\|Tv\|_{\Phi_\varepsilon} + \left(\frac{h^{1/2}}{B}+\frac{h^{1/2}}{D}\right)\|Tu\|_{\Phi_\varepsilon} \\
&+ C\left\|\Lambda^{-1}\chi_0\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)Tv\right\|_{\Phi_\varepsilon} + h^{1/2}|v_+| \\
&+ \frac{1}{\sqrt{A}}\left\|\Lambda 1\!\!1_K\left(\frac{x}{\sqrt{Ah}}\right)\varphi^w u\right\|_{\Phi_\varepsilon} + C(A)h^{1/2}\|\Lambda T\varphi^w u\|_{\Phi_\varepsilon} \\
&+ \mathcal{O}(h)\left\|Tu\right\|_{\Phi_\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Comme $h^{1/2} \leq \Lambda \leq (Ah)^{1/3}$ sur le support de $\varphi \circ \kappa^{-1}$, on obtient en prenant A assez grand

$$\begin{aligned}
h^{1/2}&\|T(1-\varphi)^w u\|^2_{\Phi_\varepsilon} + \|\Lambda T\varphi^w u\|_{\Phi_\varepsilon} \\
&\leq \frac{C(A)+C(B)+C(D)}{h^{1/2}}\|Tv\|_{\Phi_\varepsilon} + h^{1/2}|v_+| \\
&+ \left(\frac{h^{1/2}}{B}+\frac{h^{1/2}}{D}\right)\|Tu\|_{\Phi_\varepsilon} + C(A)h^{5/6}\|T\varphi^w u\|_{\Phi_\varepsilon} \\
&+ \mathcal{O}(h)\left\|Tu\right\|_{\Phi_\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

On a, par l'inégalité triangulaire et la définition de Λ,

$$h^{1/2}\left\|u\right\| \leq h^{1/2}\left\|(1-\varphi)^w u\right\|^2 + \left\|\Lambda\varphi^w u\right\|.$$

Ce qui nous donne finalement en repassant du coté réel

$$\begin{aligned}
h^{1/2}\left\|u\right\| + h^{-1/2}|u_-| &\leq \frac{C(D)+C(B)+C(A)}{h^{1/2}}\|v\| + Ch^{1/2}|v_+| \\
&+ \left(\frac{h^{1/2}}{D}+\frac{h^{1/2}}{B}\right)\|u\| + C(A)h^{5/6}\|\,u\| + \mathcal{O}(h)\left\|u\right\|.
\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

En multipliant par $h^{1/2}$ et en prenant successivement B et D assez grand et h assez petit, on obtient finalement l'estimation voulue pour $\operatorname{Re} z \leq \delta_0$:

$$h\left\|u\right\| + |u_-| \leq C\|v\| + Ch|v_+|. \tag{3.2.11}$$

Cette inégalité nous donne que le problème de Grushin est injectif. En fait, l'estimation précédent suffit à montrer que le problème de Grushin est bien bien posé, i.e. que $\mathcal{P}(z)$ est inversible d'inverse borné. En effet, comme P est maximal accrétif, il existe $z_0 < 0$ tel que $(P - hz_0)$ est inversible d'inverse borné. C'est donc un opérateur de Fredholm d'indice 0. Ainsi,

$$\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} (P - hz_0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathcal{D}(P) \times \mathbb{C}^N \to L^2 \times \mathbb{C}^N,$$

a aussi cette propriété. Donc $\mathcal{P}(z_0)$ est un opérateur de Fredholm d'indice 0 comme perturbation de rang fini de Q. L'injectivité donnée par (3.2.11) entraîne donc l'inversibilité de $\mathcal{P}(z_0)$. Soit maintenant $\operatorname{Re} z \leq \delta_0$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(z) &= \mathcal{P}(z_0) + \begin{pmatrix} (z - z_0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\mathrm{Id} + \begin{pmatrix} (z - z_0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{P}(z_0)^{-1} \right) \mathcal{P}(z_0). \end{aligned}$$

Si on prend $|z - z_0| < \frac{1}{C}$, on a que $\mathrm{Id} + \begin{pmatrix} (z - z_0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{P}(z_0)^{-1}$ est inversible et que $\mathcal{P}(z_0)^{-1} \left(\mathrm{Id} + \begin{pmatrix} (z - z_0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{P}(z_0)^{-1} \right)^{-1}$ est un inverse à droite pour $\mathcal{P}(z)$, donc $\mathcal{P}(z)$ est surjectif. L'inégalité (3.2.11) donnant l'injectivité de $\mathcal{P}(z)$, on conclut à son inversibilité. Comme $\{\operatorname{Re} z \leq \delta_0\}$ est convexe, un argument de bootstrap donne l'inversibilité de $\mathcal{P}$ sur tout le demi-plan complexe.

3.3 Petites valeurs propres et retour à l'équilibre

3.3.1 Spectre près de 0

Comme pour l'équation de relaxation linéaire, l'existence de quasimodes n'entraîne pas automatiquement l'existence des valeurs propres et de leurs vecteurs propres associés. Ici c'est grâce au problème de Grushin qu'on va conclure à l'existence des petites valeurs propres.

Soit H l'espace propre généralisé associé aux valeurs propres de module plus petit que $\delta_0 h$ (où δ_0 est une constante fixée suffisamment petite donnée dans le théorème (3.1.1)), i.e. l'image du projecteur spectral $\Pi_0 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}(0,\delta_0 h)} (z - P_h)^{-1} \, \mathrm{d}z$. On peut écrire la proposition suivante :

Proposition 3.3.1. *On a* $\dim H = n_0$*, où* n_0 *est le nombre de minima locaux du potentiel* V*.*

Preuve : On a déjà vu que pour $z \in \mathcal{C}(0, \delta_0 h)$, on a

$$(z - P_h) g_j^h = z g_j^h + \widetilde{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}}).$$

On remarquera que le fait que la fonction de troncature apparaissant dans les quasimodes ne dépende que de x est très important pour obtenir l'égalité précédente malgré le caractère non-local (en vitesse) de notre opérateur. L'égalité précédente se réécrit

$$(z - P_h)^{-1} g_j^h = \frac{1}{z} g_j^h + \widetilde{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}}).$$

En intégrant le long du cercle de centre 0 et de rayon $\delta_0 h$, on a finalement

$$\Pi_0 g_j^h = g_j^h + \widetilde{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2h}}).$$

Comme les g_j^h sont presque orthonormaux (voir le lemme 3.2.2), ils forment une famille libre. On en déduit que $\dim H \geq n_0$. D'après la proposition 3.2.4, si on prend une fonction $u \in (\mathrm{Id} - \Pi_0)L^2$ et $u_- = 0$ et pour tout $\mathrm{Re}\, z \leq \delta_0$, on obtient l'estimation suivante :

$$h \|u\| \leq C \|(P - hz)u\| + Ch \left\| \sum_{j=1}^{n_0} (u, g_j^h) g_j^h \right\|.$$

Comme $u = (\mathrm{Id} - \Pi_0)u$, on a

$$h \|u\| \leq C \|(P - hz)u\| + Ch \left\| \sum_{j=1}^{n_0} (u, (\mathrm{Id} - \Pi_0^*) g_j^h) g_j^h \right\|.$$

Comme on a aussi $P^* g_j^h = \widetilde{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}})$, ainsi qu'une estimation de résolvante sur P^* similaire à celle sur P, on sait que

$$\Pi_0^* g_j^h = g_j^h + \widetilde{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2h}}).$$

On obtient donc l'estimation suivante :

$$h \|u\| \leq C \|(P - hz)u\| + \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2h}}) \|u\|.$$

En prenant h assez petit, on obtient l'estimation de résolvante suivante pour tout $u \in (\mathrm{Id} - \Pi_0)L^2$, pour tout $\mathrm{Re}\, z \leq \delta_0$,

$$h \|u\| \leq C \|(P - hz)u\|.$$

On a donc montrer le point $iii)$ du théorème 3.0.2 et que l'espace propre généralisé h est de dimension plus petite que n_0, donc $\dim H = n_0$. □

Il reste à montrer que H ne contient pas de bloc de Jordan pour P en utilisant une propriété de symétrie supplémentaire pour notre opérateur. Soit $\kappa : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}^{2d}$ donné par $\kappa(x, v) = (x, -v)$. On pose alors $U_\kappa u = u \circ \kappa$, $u \in L^2$, de sorte que U_κ est unitaire et autoadjoint. On introduit également la forme hermitienne suivante :

$$(u, v)_\kappa = (U_\kappa u, v), \; u, \; v \in L^2.$$

On peut noter que

$$P^* = U_\kappa^{-1} P U_\kappa.$$

Ainsi, P est formellement autoadjoint par rapport à la forme hermitienne $(.,.)_\kappa$.

Proposition 3.3.2. *La restriction de $(.,.)_\kappa$ à $H \times H$ est définie positive uniformément par rapport à h, pour h suffisamment petit.*

Preuve : On rappelle que $g_j^h(x,v) = \frac{1}{\|\chi_j(x)\mathcal{M}(x,v)\|}\chi_j(x)\mathcal{M}(x,v)$ et on a vu que $\Pi_0 g_j^h = g_j^h + \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2h}})$. Ainsi, $g_j^h \circ \kappa = g_j^h$ et la famille $(g_j^h)_{1\leq j\leq n_0}$ est presque orthonormale pour la forme hermitienne $(.,.)_\kappa$. Il existe donc une base $(g_{0,j})_{1\leq j\leq n_0}$ de H telle que

$$(g_{0,j}, g_{0,j})_\kappa = 1 + \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}}), \quad (g_{0,j}, g_{0,j'})_\kappa = \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}}) \text{ pour } j \neq j'.$$

Ainsi pour $H \ni u = \sum_{k=1}^{n_0} u_k g_{0,k}$, on obtient

$$(u,u)_\kappa = \sum_{k=1}^{n_0}(1 + \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}}))|u_k|^2 \geq \|u\|^2/C.$$

Ce qui termine la démonstration. $\square$

On obtient alors la proposition suivante grâce au fait que P est formellement autoadjoint par rapport à $(.,.)_\kappa$:

Proposition 3.3.3. *La restriction de $P : H \to H$ est autoadjointe par rapport au produit scalaire (sur H) $(.,.)_\kappa$. De plus, P a exactement n_0 valeur propres (comptées avec multiplicité) réelles plus petites que $\delta_0 h$ et elles sont toutes $\mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}})$.*

Ce qui achève la preuve du point $i)$ du théorème 3.0.2. $\square$

3.3.2 Retour à l'équilibre

Comme on l'a fait pour l'équation de relaxation linéaire, on va utiliser le théorème de Gearhart-Prüss (voir le théorème D.11 dans l'appendice) pour obtenir une estimation de semi-groupe. Le point $iii)$ du théorème principal nous donne une estimation de résolvante uniforme sur le demi-plan complexe $\{\mathrm{Re}\, z \leq ch\}$ pour $P_{(\mathrm{Id}-\Pi_0)L^2}$:

$$\left\|(P_{|(\mathrm{Id}-\Pi_0)L^2} - z)^{-1}\right\| \leq \frac{C}{h}.$$

Comme $\Pi_0 L^2$ et $(\mathrm{Id} - \Pi_0)L^2$ sont stables sous l'action de P (par définition de Π_0), le théorème de Gearhart-Prüss pour $P_{|(\mathrm{Id}-\Pi_0)L^2}$ nous permet d'écrire que pour tout $t > 0$

$$\mathrm{e}^{-tP} = \mathrm{e}^{-tP}\Pi_0 + \mathcal{O}(e^{-cht}).$$

Bien que le projecteur ne soit pas orthogonal, comme $\Pi_0 = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{C}(0,\delta_0 h)}(z - P_h)^{-1}\, \mathrm{d}z$, notre estimation de résolvante nous donne $\|\Pi_0\| = \mathcal{O}(1)$. Si on note maintenant $(\mu_j)_{j=1\ldots n_0}$ les valeurs propres exponentiellement petites (répétées selon leur multiplicité) et Π_j les projecteurs spectraux associés, on a que $\|\Pi_j\| = \mathcal{O}(1)$. En effet, on a vu que la restriction $P_{|H}$ est autoadjointe par rapport à $(.,.)_\kappa$ qui est équivalent (sur H) au produit scalaire ambiant, donc les projections sont bornées. On obtient alors la proposition suivante :

Proposition 3.3.4. *Il existe* $c > 0$ *et* $\alpha > 0$ *telles que pour tout ,* $t \geq 0$ *et* h *suffisamment petit*

$$\mathrm{e}^{-tP} = \sum_{j=1}^{n_0} \mathrm{e}^{-t\mu_j} \Pi_j + \mathcal{O}(e^{-cht}),$$

avec $\|\Pi_j\| = \mathcal{O}(1)$ *et* $\mu_j = \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{h}})$.

4

Structure supersymétrique pour l'équation de Boltzmann avec relaxation douce

4.1 Introduction

Afin d'exhiber la structure supersymétrique de l'équation de relaxation douce et d'étendre l'action de l'opérateur à toutes les k-formes, on va introduire dans ce chapitre une nouvelle "différentielle extérieure" (qui sera non locale puisque notre opérateur est non local) et on va modifier le produit scalaire en une forme bilinéaire (ou hermitienne dans le cas complexe) non symétrique. On rappelle que dans le cadre autoadjoint, cette approche a été introduite par Witten [89] (voir aussi [36]) et étendue au cas non autoadjoint, notamment pour l'équation de (Kramers)-Fokker-Planck (voir par exemple [41, 42, 43]) et aussi [5, 6, 57] pour le laplacien hypoelliptique. On rappelle d'abord les hypothèses sur le potentiel V :

Hypothèse. *Le potentiel V est une fonction de Morse avec n_0 minima locaux et dont les dérivées d'ordre 2 et plus sont bornées. De plus, $\mathrm{e}^{-\frac{V}{h}} \in L^1$ et il existe $C > 0$ tel que $|\nabla V(x)| \geq \dfrac{1}{C}$ pour $|x| > C$.*

Remarque. L'hypothèse importante pour cette partie est le fait que le potentiel soit une fonction de Morse, c'est-à-dire que V possède un nombre fini de points critiques qui sont tous non dégénérés.

La première partie de ce chapitre est consacrée à exhiber la structure supersymétrique de l'équation de relaxation douce, ce que l'on consigne dans le théorème suivant :

Théorème 4.1.1. *L'opérateur de relaxation douce* $P = v.h\partial_x - \partial_x V(x).h\partial_v + (1+H_0)^{-1}H_0$ *coïncide sur les fonctions avec l'opérateur supersymétrique suivant (défini sur l'ensemble des k-formes) :*

$$\mathcal{P} = \tilde{\mathrm{d}}^{A,*}\tilde{\mathrm{d}} + \tilde{\mathrm{d}}\tilde{\mathrm{d}}^{A,*},$$

où $\tilde{\mathrm{d}} = (1+2h+H)^{1/2}a + (1+H)^{-1/2}b$, *avec* H *l'oscillateur harmonique semi-classique sur les formes et* a *et* b *définis en* (4.2.1).

Dans ce chapitre, on va également montrer la proposition suivante concernant le symbole de notre opérateur sur les k-formes :

Proposition 4.1.2. *Soit* x_0 *un point critique de* V*, il existe un voisinage* $\mathcal{V}$ *du point critique* $(x_0, 0)$ *du symbole* p *et une fonction de phase* $\phi_+ \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{V})$ *qui vérifie l'équation eikonale :*

$$p_p(x, v; i\nabla\phi_+(x, v)) = 0. \tag{4.1.1}$$

De plus, le symbole sous-principal effectif donné par

$$\frac{1}{2}\widetilde{\mathrm{tr}}F_q + S_P, \tag{4.1.2}$$

où S_P *est la linéarisation du symbole sous-principal près de* $(x_0, 0; 0, 0)$ *et* $\widetilde{\mathrm{tr}}F_q$ *est défini en* (4.4.10)*, s'annule sur les* k*-formes si et seulement si* x_0 *est un point critique d'indice* k*.*

Ce chapitre se décompose comme suit : dans la deuxième partie, on introduit les différents objets nécessaires pour exhiber la structure supersymétrique et on montre que notre opérateur de relaxation douce peut bien s'écrire comme un laplacien de Hodge. La troisième partie est dédiée au calcul du symbole de Weyl de l'opérateur sur les k-formes différentielles. Enfin, on montrera la proposition 4.1.2 dans la quatrième et dernière partie de ce chapitre.

4.2 Objets géométriques pour la supersymétrie

Dans cette section, on introduit les objets géométriques naturels qui vont servir à la construction et à l'extension de notre opérateur de relaxation douce et qui permettront la preuve du théorème 4.1.1. On veut exhiber la structure supersymétrique de l'opérateur associé à l'équation de relaxation douce. On rappelle (et on renvoie à l'introduction pour plus de précisions sur les objets manipulés) que le complexe Witten (de Rham) tordu (pour une fonction de Morse $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$) est défini (voir par exemple [89] ou [36]) par

$$\mathrm{d}_\phi = \mathrm{e}^{-\phi/h} \circ h\mathrm{d} \circ \mathrm{e}^{\phi/h} = h\mathrm{d} + (\mathrm{d}\phi)^\wedge,$$

où d est la différentielle extérieure usuelle. Plus précisément, on a

$$\mathrm{d}_\phi^{(k)} : \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n;\Lambda^k T^*\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n;\Lambda^{k+1}T^*\mathbb{R}^n).$$

On peut remarquer que $\mathrm{d}_\phi^2 = 0$. Exprimé en coordonnées, on obtient

$$\mathrm{d}_\phi = \sum_{j=1}^n (h\partial_{x_j} + \partial_{x_j}\phi) \otimes \mathrm{d}x_j^\wedge,$$

Comme $(h\partial_{x_j} + \partial_{x_j}\phi)$ et $\mathrm{d}x_j^\wedge$ commutent, l'adjoint formel de d_ϕ est donné par

$$\mathrm{d}_\phi^* = \sum_{j=1}^n (-h\partial_{x_j} + \partial_{x_j}\phi) \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^\rfloor,$$

On introduit alors les deux opérateurs suivants (qui sont des complexes de Witten avec des potentiels particuliers) ainsi que leurs adjoints formels :

$$a = (h\mathrm{d} + (\mathrm{d}V)^\wedge)\;; \qquad b = (h\mathrm{d} + (\mathrm{d}\varphi)^\wedge)\;. \tag{4.2.1}$$

où a et b agissent respectivement sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_x^d;\Lambda^k T^*\mathbb{R}_x^d)$ et $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_v^d;\Lambda^k T^*\mathbb{R}_v^d)$ avec $\varphi(v) = v^2/2$. Si on note maintenant

$$a_j = (h\partial_{x_j} + \partial_{x_j}V(x))\;; \qquad b_j = (h\partial_{v_j} + v_j)\;,$$

et leurs adjoints formels

$$a_j^* = (-h\partial_{x_j} + \partial_{x_j}V_h(x))\;; \qquad b_j^* = (-h\partial_{v_j} + v_j)\;.$$

On a alors l'expression en coordonnées

$$a = \sum_{j=1}^d a_j \otimes \mathrm{d}x_j^\wedge\;; \quad b = \sum_{j=1}^d b_j \otimes \mathrm{d}v_j^\wedge,$$

et

$$a^* = \sum_{j=1}^d a_j^* \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^\rfloor\;; \quad b^* = \sum_{j=1}^d b_j^* \otimes \left(\frac{\partial}{\partial v_j}\right)^\rfloor.$$

Cette expression nous permet de voir a et b comme agissant en fait sur $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}_v^d \times \mathbb{R}_x^d;\Lambda^k T^*\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_v^d)$. Rappelons maintenant les relations de commutations entre a_j, b_k (voir [44] par exemple) :

$$\begin{aligned}&[b_j,b_k] = [b_j^*,b_k^*] = [a_j,a_k] = [a_j^*,a_k^*] = 0\,;\\ &[b_j,b_k^*] = 2h\delta_{jk}\,; \qquad [a_j,a_k^*] = 2h\partial^2_{x_jx_k}V.\end{aligned}$$

On a aussi clairement que les a_j et a_j^* commutent avec les b_k et b_k^*.

On définit l'oscillateur harmonique semi-classique en vitesse sur les k-formes par

$$H = b^*b + bb^* = H_0 \otimes \mathrm{Id} + 2h \sum_{j=1}^{d} \mathrm{d}v_j^{\wedge} \left(\frac{\partial}{\partial v_j} \right)^{\rfloor}, \tag{4.2.2}$$

où $H_0 = -h^2\Delta_v + v^2 - hd$ est l'oscillateur harmonique sur les fonctions (0-formes). On remarquera que l'opérateur H n'agit seulement en vitesse. De plus, comme a n'agit qu'en position, H commute avec a et

$$bH = bb^*b + bbb^* = bb^*b = b^*bb + bb^*b = Hb, \tag{4.2.3}$$

où on a utilisé que $b^2 = 0$. Donc H commute avec a et b. On pose alors, si $\alpha(h) \geq \alpha > 0$ pour un certain α,

$$\Lambda^2_{\alpha(h)} = H + \alpha(h). \tag{4.2.4}$$

On remarque tout d'abord que, comme $\alpha(h) \geq \alpha > 0$, $\Lambda^2_{\alpha(h)}$ est autoadjoint positif, ce qui nous permet de définir $\Lambda^r_{\alpha(h)}$ pour tout $r \in \mathbb{R}$. De plus, $\Lambda^2_{\alpha(h)}$ commute avec a et b, et on a les relations de commutations suivantes :

$$\Lambda^2_{\alpha(h)}(a_j \otimes \mathrm{Id}) = (a_j \otimes \mathrm{Id})\Lambda^2_{\alpha(h)} \ ; \qquad \Lambda^2_{\alpha(h)}(a_j^* \otimes \mathrm{Id}) = (a_j^* \otimes \mathrm{Id})\Lambda^2_{\alpha(h)} \ ;$$

$$\Lambda^2_{\alpha(h)}(b_j \otimes \mathrm{Id}) = (b_j \otimes \mathrm{Id})\Lambda^2_{\alpha(h)} - 2h(b_j \otimes \mathrm{Id}) = (b_j \otimes \mathrm{Id})\Lambda^2_{\alpha(h)-2h} \ ;$$

$$\Lambda^2_{\alpha(h)}(b_j^* \otimes \mathrm{Id}) = (b_j^* \otimes \mathrm{Id})\Lambda^2_{\alpha(h)} + 2h(b_j^* \otimes \mathrm{Id}) = (b_j^* \otimes \mathrm{Id})\Lambda^2_{\alpha(h)+2h}.$$

On obtient donc finalement que pour tout $r \in \mathbb{R}$, $\Lambda^r_{\alpha(h)}$ commute avec les opérateurs a, b, $(a_j \otimes \mathrm{Id})$ et $(a_j^* \otimes \mathrm{Id})$ et que

$$\begin{aligned} \Lambda^r_{\alpha(h)}(b_j \otimes \mathrm{Id}) &= (b_j \otimes \mathrm{Id})\Lambda^r_{\alpha(h)-2h} \ ; \\ \Lambda^r_{\alpha(h)}(b_j^* \otimes \mathrm{Id}) &= (b_j^* \otimes \mathrm{Id})\Lambda^r_{\alpha(h)+2h}. \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

À l'aide des opérateurs auxiliaires définis précédemment, on peut maintenant introduire une nouvelle "différentielle extérieure" (mais celle-ci sera non locale) qui nous permettra de construire l'extension supersymétrique aux k-formes recherchée pour notre opérateur. On pose donc

$$\tilde{\mathrm{d}} = \Lambda_{1+2h} a + \Lambda_1^{-1} b.$$

On notera que comme pour d_ϕ, on a

$$\tilde{\mathrm{d}}^{(k)} \ : \ \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n; \Lambda^k T^*\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n; \Lambda^{k+1} T^*\mathbb{R}^n).$$

Comme Λ_1 et Λ_{1+2h} commutent avec a et b (voir notamment (4.2.3)), on obtient directement

$$\tilde{\mathrm{d}}^{\,2} = 0.$$

Notre opérateur étant non autoadjoint, on va utiliser la construction établie pour l'équation de (Kramers)-Fokker-Planck dans [41, 42, 43]. Dans ce cas, il faut modifier le produit scalaire en une forme bilinéaire non symétrique (ou non hermitienne) pour obtenir de la supersymétrie. Soit donc

$$A : T^*\mathbb{R}^n \to T\mathbb{R}^n,$$

une application linéaire inversible des covecteurs dans les vecteurs. On définit alors la forme bilinéaire non dégénérée induite par A sur les k-formes :

$$(u|v)_A = v\left(\Lambda^k A(u)\right), \quad u,\ v \in \Lambda^k T^*\mathbb{R}^n.$$

Si $a : \Lambda^k T^*\mathbb{R}^n \to \Lambda^l T^*\mathbb{R}^n$ est une application linéaire, on définit l' "adjoint" $a^{A,*} : \Lambda^l T^*\mathbb{R}^n \to \Lambda^k T^*\mathbb{R}^n$ par

$$(au|v)_A = (u|a^{A,*}v)_A.$$

Par exemple, si ω est une 1-forme, on a

$$(\omega^\wedge)^{A,*} = (A\omega)^\rfloor, \tag{4.2.6}$$

où $^\wedge$ et $^\rfloor$ désigne les opérateurs usuels de produit extérieur et produit intérieur (à gauche). Si u et v sont des k-formes régulières avec $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} v$ compact, on définit alors la forme bilinéaire suivante :

$$(u, v)_A = \int (u(x), v(x))_A \,\mathrm{d}x,$$

et on note encore, pour un opérateur $a : \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n; \Lambda^k T^*\mathbb{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n, \Lambda^l T^*\mathbb{R}^n)$, $a^{A,*}$ son adjoint formel. On considère

$$\partial_{x_j} : \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n; \Lambda^k T^*\mathbb{R}^n) \to \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n; \Lambda^k T^*\mathbb{R}^n),$$

qui agit sur les coefficients, et un calcul direct donne

$$(h\partial_{x_j})^{A,*} = -h\partial_{x_j}. \tag{4.2.7}$$

Nous allons maintenant vérifier que P coïncide avec $\tilde{\mathrm{d}}^{A,*}\tilde{\mathrm{d}} + \tilde{\mathrm{d}}\tilde{\mathrm{d}}^{A,*}$ sur les fonctions pour

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose donc

$$\mathcal{P} = \tilde{\mathrm{d}}^{A,*}\tilde{\mathrm{d}} + \tilde{\mathrm{d}}\tilde{\mathrm{d}}^{A,*}. \tag{4.2.8}$$

D'après (4.2.6) et (4.2.7), on a les formules suivantes :

$$a^{A,*} = \textstyle\sum_{j=1}^d a_j^* \otimes (A\mathrm{d}x_j)^\rfloor = -\displaystyle\sum_{j=1}^d a_j^* \otimes \left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v_j}\right)^\rfloor ;$$

$$b^{A,*} = \textstyle\sum_{j=1}^d b_j^* \otimes (A\mathrm{d}v_j)^\rfloor = \displaystyle\sum_{j=1}^d b_j^* \otimes \left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial v_j}\right)^\rfloor .$$

On obtient donc sur les fonctions

$$\begin{array}{ll} a^{A,*}a = 0\ ; & b^{A,*}b = \displaystyle\sum_{j=1}^{d} b_j^* b_j \otimes \mathrm{Id} = H_0 \otimes \mathrm{Id}\ ; \\ a^{A,*}b = -\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{d} a_j^* b_j \otimes \mathrm{Id}\ ; & b^{A,*}a = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{d} b_j^* a_j \otimes \mathrm{Id}. \end{array}$$

Ce qui nous donne

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}^{(0)} = \tilde{\mathrm{d}}^{A,*}\tilde{\mathrm{d}} & = & \Lambda_{1+2h}^{A,*} a^{A,*} a \Lambda_{1+2h} + \Lambda_{1+2h}^{A,*} a^{A,*} b \Lambda_1^{-1} \\ & & +(\Lambda_1^{-1})^{A,*} b^{A,*} a \Lambda_{1+2h} + (\Lambda_1^{-1})^{A,*} b^{A,*} b \Lambda_1^{-1} \\ & = & -\Lambda_{1+2h}^{A,*}\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{d} a_j^* b_j \otimes \mathrm{Id}\right)\Lambda_1^{-1} \\ & & +(\Lambda_1^{-1})^{A,*}\left(\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{j=1}^{d} b_j^* a_j \otimes \mathrm{Id}\right)\Lambda_{1+2h} \\ & & +(\Lambda_1^{-1})^{A,*}\left(H_0 \otimes \mathrm{Id}\right)\Lambda_1^{-1}. \end{array}$$

Or sur les fonctions, on a d'après (4.2.2) et (4.2.4)

$$\Lambda_{\alpha(h)}^{A,*,(0)} = (\alpha(h) + H_0 \otimes \mathrm{Id})^{A,*} = \alpha(h) + H_0 \otimes \mathrm{Id} = \Lambda_{\alpha(h)}^{(0)},$$

i.e. $\Lambda_{\alpha(h)}^{(0)}$ est A-autoadjoint. Donc, en utilisant les relations de commutations

(4.2.5), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^{(0)} =& \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} b_j^* a_j \otimes \mathrm{Id} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} a_j^* b_j \otimes \mathrm{Id} + \left(\Lambda_1^{-2} H_0 \otimes \mathrm{Id}\right)\\
=& \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} (-h\partial_{v_j} + v_j)(h\partial_{x_j} + \partial_{x_j} V(x)) \otimes \mathrm{Id}\\
& - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} (-h\partial_{x_j} + \partial_{x_j} V(x))(h\partial_{v_j} + v_j) \otimes \mathrm{Id} + \left(\Lambda_1^{-2} H_0 \otimes \mathrm{Id}\right)\\
=& \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} (v_j h\partial_{x_j} - \partial_{x_j} V(x) h\partial_{x_j}) \otimes \mathrm{Id}\\
& + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} (-h^2\partial_{v_j}\partial_{x_j} + v_j\partial_{x_j} V(x)) \otimes \mathrm{Id}\\
& - \left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} (-v_j h\partial_{x_j} + \partial_{x_j} V(x) h\partial_{x_j}) \otimes \mathrm{Id}\right.\\
& \left. + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d} (-h^2\partial_{v_j}\partial_{x_j} + v_j\partial_{x_j} V(x)) \otimes \mathrm{Id}\right]\\
& + \left(\Lambda_1^{-2} H_0 \otimes \mathrm{Id}\right)\\
=& \sum_{j=1}^{d} (v_j h\partial_{x_j} - \partial_{x_j} V(x) h\partial_{x_j}) \otimes \mathrm{Id} + \left(\Lambda_1^{-2} H_0 \otimes \mathrm{Id}\right)\\
=& P.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du théorème 4.1.1.

4.3 Symbole principal et sous-principal sur les k-formes

Dans cette section, on va montrer la proposition 4.1.2. On rappelle que sur les fonctions, notre opérateur s'écrit

$$P = v.h\partial_x - \partial_x V(x).h\partial_v + (1 + H_0)^{-1} H_0,$$

avec $H_0 = -h^2\Delta_v + v^2 - dh$. C'est un opérateur pseudodifférentiel ayant pour symbole de Weyl

$$\begin{aligned}
p =& \frac{v^2 + \eta^2 - hd}{1 + v^2 + \eta^2 - hd} + i(v.\xi - V'(x).\eta) + \mathcal{O}(h^2)\\
=& \frac{v^2 + \eta^2}{1 + v^2 + \eta^2} + i(v.\xi - V'(x).\eta) - \frac{hd}{(1 + v^2 + \eta^2)^2} + \mathcal{O}(h^2).
\end{aligned}$$

On remarque que les points critiques de p sont de la forme $(x_0, 0; 0, 0)$ où x_0 est un point critique de V. On va maintenant calculer le symbole de l'opérateur supersymétrique $\mathcal{P}$ du théorème 4.1.1 (voir (4.2.8)) sur l'ensemble des k-formes. Grâce au calcul fonctionnel pour les opérateurs pseudodifférentiels (voir par exemple [18] pour la formule d'Helffer-Sjöstrand ou [34, 70] ainsi que l'appendice A) on obtient que les opérateurs Λ_{1+2h} (respectivement Λ_1^{-1}) sont des opérateurs pseudodifférentiels de symbole λ (respectivement $\widetilde{\lambda}$) ayant le développement symbolique suivant :

$$\Lambda_{1+2h} = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k h^k \ ; \tag{4.3.1}$$

$$\Lambda_1^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \widetilde{\lambda}_k h^k, \tag{4.3.2}$$

avec

$$\lambda_0 = (1 + v^2 + \eta^2)^{1/2} \ ; \tag{4.3.3}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(1 + v^2 + \eta^2)^{-1/2} \left(2 - d + \sum_{j=1}^{d} dv_j^{\wedge} \left(\frac{\partial}{\partial v_j} \right)^{\rfloor} \right), \tag{4.3.4}$$

et

$$\widetilde{\lambda}_0 = (1 + v^2 + \eta^2)^{-1/2} \ ; \tag{4.3.5}$$

$$\widetilde{\lambda}_1 = -\frac{1}{2}(1 + v^2 + \eta^2)^{-3/2} \left(-d + \sum_{j=1}^{d} dv_j^{\wedge} \left(\frac{\partial}{\partial v_j} \right)^{\rfloor} \right), \tag{4.3.6}$$

Pour un symbole matriciel p (entre $\Lambda^k T^*\mathbb{R}^n$ et $\Lambda^p T^*\mathbb{R}^n$), on note $\overline{p}^A$ le symbole matricielle de l'adjoint formel, composé des coefficients complexes conjugués et transposé par rapport au produit scalaire modifié $(.,.)_A$. Si, par exemple, on a un symbole de la forme

$$p(x, v; \xi, \eta) = \sum_{i=0}^{d} \left(p_{x_i}(x, v; \xi, \eta) dx_i^{\wedge} + p_{v_i}(x, v; \xi, \eta) dv_i^{\wedge} \right),$$

alors

$$\begin{aligned} \overline{p}^A(x, v; \xi, \eta) &= \sum_{i=0}^{d} \left(\overline{p_{x_i}(x, v; \xi, \eta)} (dx_i^{\wedge})^{A,*} + \overline{p_{v_i}(x, v; \xi, \eta)} (dv_i^{\wedge})^{A,*} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{d} \left[\overline{(p_{x_i}(x, v; \xi, \eta)} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v_j} \right)^{\rfloor} \right. \\ &\qquad \left. + \overline{p_{v_i}(x, v; \xi, \eta)} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial v_j} \right)^{\rfloor} \right]. \end{aligned}$$

Si on dénote de la même façon les opérateurs a, b et leurs symboles, on a

$$
\begin{aligned}
a &= \sum_{j=1}^{d} (-i\xi_j + \partial_{x_j} V(x)) \otimes dx_j^{\wedge} \ ; \\
b &= \sum_{j=1}^{d} (-i\eta_j + v_j) \otimes dv_j^{\wedge} \ ; \\
\overline{a}^A &= \sum_{j=1}^{d} (i\xi_j + \partial_{x_j} V(x)) \otimes \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v_j}\right)^{\rfloor} \ ; \\
\overline{b}^A &= \sum_{j=1}^{d} (i\eta_j + v_j) \otimes \left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial v_j}\right)^{\rfloor}.
\end{aligned}
\tag{4.3.7}
$$

On a aussi les adjoints de λ_1 et $\widetilde{\lambda}_1$ par rapport au produit scalaire modifié :

$$
\begin{aligned}
\overline{\lambda_1}^A &= \frac{1}{2}(1+v^2+\eta^2)^{-1/2} \left(2 - d + \sum_{j=1}^{d} dx_j^{\wedge} \left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial v_j}\right)^{\rfloor}\right); \\
\overline{\widetilde{\lambda}_1}^A &= -\frac{1}{2}(1+v^2+\eta^2)^{-3/2} \left(-d + \sum_{j=1}^{d} dx_j^{\wedge} \left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial v_j}\right)^{\rfloor}\right).
\end{aligned}
\tag{4.3.8}
$$

On obtient par le calcul symbolique

$$
\lambda \# a = \lambda_0 a + h\left((\lambda_1 a + \frac{i}{2}\{\lambda_0, a\}\right) + \mathcal{O}(h^2) \ ; \tag{4.3.9}
$$

$$
\widetilde{\lambda} \# b = \widetilde{\lambda}_0 b + h\left((\widetilde{\lambda}_1 b + \frac{i}{2}\left\{\widetilde{\lambda}_0, b\right\}\right) + \mathcal{O}(h^2). \tag{4.3.10}
$$

Calculons maintenant les symboles principaux et sous-principaux de notre opérateur. On remarque d'abord que $\{\lambda_0, a\} = 0$ puisque λ_0 et a n'ont pas de variable en commun. On obtient le symbole suivant pour $\mathcal{P}$:

$$
\begin{aligned}
p &= a\overline{b}^A + \overline{b}^A a + \lambda_0^2 \left(a\overline{a}^A + \overline{a}^A a\right) + b\overline{a}^A + \overline{a}^A b + \widetilde{\lambda}_0^2 \left(b\overline{b}^A + \overline{b}^A b\right) \\
&\quad + h\Big[\lambda_0\lambda_1 a\overline{a}^A + \lambda_0\overline{a}^A\lambda_1 a + \lambda_0\widetilde{\lambda}_1 b\overline{a}^A + \lambda_0\overline{a}^A\widetilde{\lambda}_1 b + \widetilde{\lambda}_0\lambda_1 a\overline{b}^A + \widetilde{\lambda}_0\overline{b}^A\lambda_1 a \\
&\quad + \widetilde{\lambda}_0\widetilde{\lambda}_1 b\overline{b}^A + \widetilde{\lambda}_0\overline{b}^A\widetilde{\lambda}_1 b + \lambda_0 a\overline{(\lambda_1 a)}^A + \lambda_0\overline{(\lambda_1 a)}^A a + \widetilde{\lambda}_0 b\overline{(\lambda_1 a)}^A \\
&\quad + \widetilde{\lambda}_0\overline{(\lambda_1 a)}^A b + \lambda_0 a\overline{(\widetilde{\lambda}_1 b)}^A + \lambda_0\overline{(\widetilde{\lambda}_1 b)}^A a + \widetilde{\lambda}_0 b\overline{(\widetilde{\lambda}_1 b)}^A + \widetilde{\lambda}_0\overline{(\widetilde{\lambda}_1 b)}^A b \\
&\quad + \frac{i}{2}\lambda_0\left\{\widetilde{\lambda}_0, b\right\}\overline{a}^A + \frac{i}{2}\lambda_0\overline{a}^A\left\{\widetilde{\lambda}_0, b\right\} + \frac{i}{2}\widetilde{\lambda}_0\left\{\widetilde{\lambda}_0, b\right\}\overline{b}^A + \frac{i}{2}\widetilde{\lambda}_0\overline{b}^A\left\{\widetilde{\lambda}_0, b\right\} \\
&\quad - \frac{i}{2}\widetilde{\lambda}_0 b\overline{\left\{\widetilde{\lambda}_0, b\right\}}^A - \frac{i}{2}\widetilde{\lambda}_0\overline{\left\{\widetilde{\lambda}_0, b\right\}}^A b - \frac{i}{2}\lambda_0 a\overline{\left\{\widetilde{\lambda}_0, b\right\}}^A - \frac{i}{2}\lambda_0\overline{\left\{\widetilde{\lambda}_0, b\right\}}^A a \\
&\quad + \frac{i}{2}\left\{\lambda_0 a, \overline{\lambda_0 a}^A\right\} + \frac{i}{2}\left\{\overline{\lambda_0 a}^A, \lambda_0 a\right\} + \frac{i}{2}\left\{\widetilde{\lambda}_0 b, \overline{\widetilde{\lambda}_0 b}^A\right\} + \frac{i}{2}\left\{\overline{\widetilde{\lambda}_0 b}^A, \widetilde{\lambda}_0 b\right\} \\
&\quad + \frac{i}{2}\left\{\lambda_0 a, \overline{\widetilde{\lambda}_0 b}^A\right\} + \frac{i}{2}\left\{\overline{\widetilde{\lambda}_0 b}^A, \lambda_0 a\right\} + \frac{i}{2}\left\{\widetilde{\lambda}_0 b, \overline{\lambda_0 a}^A\right\} + \frac{i}{2}\left\{\overline{\lambda_0 a}^A, \widetilde{\lambda}_0 b\right\}\Big] \\
&\quad + \mathcal{O}(h^2) \\
&= a\overline{b}^A + \overline{b}^A a + \lambda_0^2 \left(a\overline{a}^A + \overline{a}^A a\right) + b\overline{a}^A + \overline{a}^A b + \widetilde{\lambda}_0^2 \left(b\overline{b}^A + \overline{b}^A b\right) \\
&\quad + h\Big[\frac{i}{2}\left\{\lambda_0 a, \overline{\lambda_0 a}^A\right\} + \frac{i}{2}\left\{\overline{\lambda_0 a}^A, \lambda_0 a\right\} + \frac{i}{2}\left\{\widetilde{\lambda}_0 b, \overline{\widetilde{\lambda}_0 b}^A\right\} + \frac{i}{2}\left\{\overline{\widetilde{\lambda}_0 b}^A, \widetilde{\lambda}_0 b\right\}\Big] \\
&\quad + hR_0(x, v; \eta, \xi) + \mathcal{O}(h^2),
\end{aligned}
\tag{4.3.11}
$$

où R_0 s'annule aux points critiques. Le symbole principal est donc donné par

$$
\begin{aligned}
&a\overline{b}^A + \overline{b}^A a + \lambda_0^2 \left(a\overline{a}^A + \overline{a}^A a\right) + b\overline{a}^A + \overline{a}^A b + \widetilde{\lambda}_0^2 \left(b\overline{b}^A + \overline{b}^A b\right) \\
&\qquad = \left(\frac{v^2 + \eta^2}{1 + v^2 + \eta^2} + i(v.\xi - V'(x).\eta)\right) \otimes \mathrm{Id}.
\end{aligned}
\tag{4.3.12}
$$

De plus, on a

$$
\begin{aligned}
\frac{i}{2}\left\{\lambda_0 a, \overline{\lambda_0 a}^A\right\} + \frac{i}{2}\left\{\overline{\lambda_0 a}^A, \lambda_0 a\right\} &= \lambda_0^2\left(\frac{i}{2}\left\{a, \overline{a}^A\right\} + \frac{i}{2}\left\{\overline{a}^A, a\right\}\right) \\
&= \lambda_0^2\left(\sum_{j,k}\partial_{x_j}\partial_{x_k}V(x)dx_j^{\wedge}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v_k}\right)^{\rfloor}\right),
\end{aligned}
\tag{4.3.13}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\frac{i}{2}\left\{\widetilde{\lambda}_0 b, \overline{\widetilde{\lambda}_0 b}^A\right\} + \frac{i}{2}\left\{\overline{\widetilde{\lambda}_0 b}^A, \widetilde{\lambda}_0 b\right\} &= \widetilde{\lambda}_0^2\left(\frac{i}{2}\left\{b, \bar{b}\right\} + \frac{i}{2}\left\{\bar{b}, b\right\}\right) \\
&+ \widetilde{\lambda}_0\left(\frac{i}{2} b\left\{\widetilde{\lambda}_0, \bar{b}^A\right\} + \frac{i}{2}\left\{\bar{b}^A, \widetilde{\lambda}_0\right\} b\right) \\
&+ \widetilde{\lambda}_0\left(\frac{i}{2}\bar{b}^A\left\{\widetilde{\lambda}_0, b\right\} + \frac{i}{2}\left\{b, \widetilde{\lambda}_0\right\}\bar{b}^A\right) \\
&= \widetilde{\lambda}_0^2\left(-d + \sum_{j,k} dv_j^\wedge\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial v_k}\right)^\rfloor\right) \\
&+ \widetilde{\lambda}_0^4\left(\bar{b}^A b - b\bar{b}^A\right),
\end{aligned}
\tag{4.3.14}
$$

car $\frac{i}{2}\left\{\widetilde{\lambda}_0, b\right\} = \frac{\widetilde{\lambda}_0^3}{2} b$. On obtient finalement

$$
\begin{aligned}
p = &\left(\frac{v^2+\eta^2}{1+v^2+\eta^2} + i(v.\xi - V'(x).\eta)\right)\otimes \mathrm{Id} \\
&+ h\Big[\lambda_0^2\left(\sum_{j,k}\partial_{x_j}\partial_{x_k}V(x)dx_j^\wedge\left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v_k}\right)^\rfloor\right) \\
&+ \widetilde{\lambda}_0^2\left(-d + \sum_{j,k} dv_j^\wedge\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial v_k}\right)^\rfloor\right)\Big] \\
&+ hR_1(x,v;\eta,\xi) + \mathcal{O}(h^2),
\end{aligned}
\tag{4.3.15}
$$

où R_1 s'annule aux points critiques. On va maintenant montrer la proposition 4.1.2.

4.4 Équation eikonale et symbole sous-principal effectif

Pour obtenir le symbole sous-principal effectif, étudions le symbole de notre opérateur près des points critiques. On a donc le symbole principal

$$
p_p(x,v;\xi,\eta) = \frac{v^2+\eta^2}{1+v^2+\eta^2} + i(v.\xi - V'(x).\eta), \tag{4.4.1}
$$

ainsi que le symbole réel correspondant

$$
q(x,v;\xi,\eta) = -p_p(x,v;i\xi,i\eta) = \frac{\eta^2-v^2}{1+v^2-\eta^2} + v.\xi - V'(x).\eta. \tag{4.4.2}
$$

Si on pose $\Phi(x,v) = \frac{v^2}{2} + V(x)$, alors q s'annule sur les sous-espaces lagrangiens $\Lambda_{\pm\Phi}$. On pose

$$
\nu_\pm = H_{q_{|\Lambda_{\pm\Phi}}}, \tag{4.4.3}
$$

la projection sur $\mathbb{R}^{2d}$ du champ hamiltonien associé à q sur $\Lambda_{\pm\Phi}$. On a, en coordonnées,

$$\nu_{\pm}(x,v) = v.\frac{\partial}{\partial x} - V'(x).\frac{\partial}{\partial v} \pm 2v.\frac{\partial}{\partial v} \pm 2v^2 v.\frac{\partial}{\partial v}. \tag{4.4.4}$$

Ce qu'on peut réécrire

$$\nu_{+}(x,v) = 2A\Phi'(x,v).\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} + 2v^2 v.\frac{\partial}{\partial v}\,; \tag{4.4.5}$$

$$\nu_{-}(x,v) = -2A^t\Phi'(x,v).\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} - 2v^2 v.\frac{\partial}{\partial v}. \tag{4.4.6}$$

À un point critique non dégénéré $(x_0,0)$ de Φ (où x_0 est un point critique non dégénéré de V), les sous variétés lagrangiennes $\Lambda_{+\Phi}$ et $\Lambda_{-\Phi}$ s'intersectent transversalement. Le spectre de la linéarisation F_q de H_q au point $(x_0,0\,;0,0)$ est donc égal à l'union des spectre des linéarisations de ν_+ et ν_- en $(x_0,0)$.

$$\nu_{+}^{0}(x,v) = (2A\Phi''(x_0,0)(x,v)).\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix}\,; \tag{4.4.7}$$

$$\nu_{-}^{0}(x,v) = (-2A^t\Phi''(x_0,0)(x,v)).\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix}. \tag{4.4.8}$$

Calculons cette trace pour trouver où notre opérateur dégénère. On s'intéresse donc aux valeurs propres des matrices $A\Phi''$ et $A^t\Phi''$. On remarque d'abord que $A^t\Phi'' = \Phi''^{-1}(A\Phi'')^t\Phi''$ a les mêmes valeurs propres que $A\Phi''$ et de même, $\Phi''A$ et $\Phi''A^t$ ont le même spectre que $A\Phi''$. Ainsi, les valeurs propres de F_q sont données par $\pm 2\mu_j$, où $\mu_1,\mu_2,...,\mu_n$ sont les valeurs propres de $A\Phi''$. On peut donc appliquer le théorème de la variété stable (voir par exemple [18]) qui nous donne qu'il existe, dans un voisinage du point critique $(x_0,0)$, une variété lagrangienne Λ_+ telle que la fonction génératrice ϕ_+ de cette variété vérifie l'équation eikonale :

$$q(x,v;\nabla\phi_+) = 0. \tag{4.4.9}$$

On introduit maintenant la trace positive de F_q que l'on note $\widetilde{\mathrm{tr}}F_q$ et qui est définie par

$$\widetilde{\mathrm{tr}}F_q = \sum_{\substack{\mu\in\sigma(F_q)\\ \mathrm{Re}\,\mu>0}} \mu, \tag{4.4.10}$$

où chaque valeur propre est comptée avec multiplicité. Cette trace positive est l'objet naturel pour mesurer la positivité d'un opérateur pseudodifférentiel (voir [62] et [76]). Si on ordonne les valeurs propres de F_q de manière à ce qu'on ait $\mathrm{Re}\,\mu_j > 0$ pour tout $1 \le j \le n_+$ et $\mathrm{Re}\,\mu_j < 0$, pour tout $n_+ + 1 \le j \le n = n_+ + n_-$, la trace positive de F_q s'écrit alors

$$\widetilde{\mathrm{tr}}F_q = \sum_{j=1}^{n_+} 2\mu_j - \sum_{j=n_++1}^{n} 2\mu_j. \tag{4.4.11}$$

On va maintenant étudier le symbole sous-principal de notre opérateur. On remarque tout d'abord que près des points critiques de Φ, tous les termes du symbole sous-principal s'annulent sauf les deux calculés précédemment en (4.3.13) et (4.3.14). On se place près d'un point critique $(x_0, 0; 0, 0)$. Le symbole sous-principal s'écrit donc

$$\begin{aligned} &\lambda_0^2 \left(\sum_{j,k} \partial_{x_j} \partial_{x_k} V(x) dx_j^\wedge \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v_k} \right)^\rfloor \right) \\ &+ \widetilde{\lambda}_0^2 \left(-d + \sum_{j,k} dv_j^\wedge \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial v_k} \right)^\rfloor \right) \\ &+ R_1(x, v), \end{aligned} \tag{4.4.12}$$

où R_1 s'annule en $(x_0, 0; 0, 0)$. On peut le réécrire, près de $(x_0, 0; 0, 0)$, à l'aide de la matrice A :

$$2 \sum_j (\Phi'' \circ A^t dx_j^\wedge) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^\rfloor - \operatorname{tr}(A\Phi'') + R_2 = S_P + R_2, \tag{4.4.13}$$

car $\lambda_0(x_0, 0; 0, 0) = \widetilde{\lambda}_0(x_0, 0; 0, 0) = 1$. Grâce à 4.4.11, on obtient le symbole sous-principal effectif près du point critique $(x_0, 0; 0, 0)$ pour notre opérateur

$$\frac{1}{2} \widetilde{\operatorname{tr}} F_q + S_P = -2 \sum_{j=n_+ + 1}^{n} \mu_j + 2 \sum_j (\Phi'' \circ A^t dx_j^\wedge) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^\rfloor, \tag{4.4.14}$$

car $\operatorname{tr}(A\Phi'') = \sum_{j=1}^n \mu_j$.

Au point $(x_0, 0)$, on remarque que $\Phi'' \circ A^t : T_{x_0}^* \mathbb{R}^{2d} \to T_{x_0}^* \mathbb{R}^{2d}$ est défini de manière invariante par rapport à la base et donc $\sum_j (\Phi'' \circ A^t dx_j^\wedge) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^\rfloor$ aussi. On obtient donc la même chose si on remplace $dx_1^\wedge, ..., dx_d^\wedge$, $dv_1^\wedge, ..., dv_d^\wedge$ et $\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^\rfloor, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x_d} \right)^\rfloor$, $\left(\frac{\partial}{\partial v_1} \right)^\rfloor, ..., \left(\frac{\partial}{\partial v_d} \right)^\rfloor$ par $\omega_1, ..., \omega_{2d}$ et $\omega_1^*, ..., \omega_{2d}^*$ où les formes différentielles $\omega_1, ..., \omega_{2d}$ constituent une base quelconque de l'espace cotangent et $\omega_1^*, ..., \omega_{2d}^*$ est la base duale associée. Si on choisit une base de vecteurs propres $\omega_1, ..., \omega_{2d}$ de $\Phi'' \circ A^t$, de sorte que

$$\Phi'' \circ A^t \omega_j = \mu_j \omega_j. \tag{4.4.15}$$

On obtient alors

$$\sum_j (\Phi'' \circ A^t dx_j^\wedge) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)^\rfloor = \sum_j \mu_j \omega_j \omega_j^*. \tag{4.4.16}$$

Une base de formes propres pour cet opérateur est donnée par les $\omega_{j_1} \wedge ... \wedge \omega_{j_k}$ avec $1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_m \leq 2d$ et avec pour valeurs propres associées

$\mu_{j_1} + ... + \mu_{j_k}$. Les valeurs propres de $\frac{1}{2}\widetilde{\mathrm{tr}} F_q + S_P$ agissant sur les k-formes sont donc

$$2(\mu_{j_1} + ... + \mu_{j_k} - \sum_{j=n_+ +1}^{n} \mu_j), \quad 1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_k \leq 2d. \qquad (4.4.17)$$

On en conclut que si k est différent de n_-, toutes les valeurs propres sont de partie réelle strictement positive et si $m = n_-$, alors on a exactement une valeur propre égale à 0 tandis que les autres ont une partie réelle strictement positive. De plus, le noyau est l'espace unidimensionnel engendré par $\omega_{n_+ +1} \wedge ... \wedge \omega_n$.

L'analyse qu'on vient d'effectuer est un premier pas vers la construction de solutions approchées à $\mathcal{O}(h^2)$. Il est en effet envisageable que la décomposition de notre symbole en la somme du terme principal, du sous-principal effectif, d'un terme sous-principal s'annulant près des points critiques et d'un terme en $\mathcal{O}(h^2)$ nous permette de commencer la construction BKW. Bien que la précision de telles solutions ne soit pas très bonne, elle suffit à obtenir l'équivalent dans le développement asymptotique des valeurs propres exponentiellement petites comme cela a été exploité par Bony *et al.* dans [8] pour une marche aléatoire semi-classique.

Appendice

A Calcul de Weyl semi-classique

Cette section a pour but de faire quelques rappels à propos du calcul pseudodifférentiel semi-classique. Il existe de nombreux livres introductifs à ce calcul, on peut citer notamment les livres classiques [71], [28], ainsi que [18],[59] et [91] pour le calcul pseudodifférentiel avec un petit paramètre h et le traité de L. Hörmander [49] ou [1], [73] et [26] pour l'analyse microlocale sans petit paramètre.

Commençons par rappeler les classes de symboles utilisées.

Définition A.1. *On dit que $m : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ est une fonction d'ordre s'il existe $C > 0$ et $N > 0$ tels que $m(x) \leq C\langle x - y\rangle^N m(y)$.*

Définition A.2. *Soit m une fonction d'ordre. On appelle classe des symboles d'ordre m, et on note $\mathcal{S}(m)$ l'ensemble des fonctions $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe $C_\alpha > 0$ telle que*

$$|\partial^\alpha a| \leq C_\alpha m.$$

On pose aussi $\mathcal{S}^r(m) = h^{-r}\mathcal{S}(m)$ pour $r \in \mathbb{R}$.

Dans la suite, m est une fonction d'ordre arbitraire fixée. On peut noter que les symboles peuvent dépendre de h, mais nous ne notons pas cette dépendance de manière explicite ici. Cependant, les constantes apparaissant dans la définition des classes de symboles doivent être uniforme en h si le symbole dépend effectivement de h. Notamment, un cas particulier de dépendance en h est le développement asymptotique semi-classique :

Définition A.3. *Soient un symbole $a \in \mathcal{S}(m)$ et une suite de symboles $a_j \in \mathcal{S}(m)$. On dit que a a pour développement asymptotique semi-classique la somme formelle $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} h^j a_j$ et on écrit*

$$a \sim \sum_{j=0}^{\infty} h^j a_j,$$

si pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe $C_{N,\alpha} > 0$ tel que

$$\left| \partial^\alpha \left(a - \sum_{j=0}^{N} h^j a_j \right) \right| \leq C_{N,\alpha} h^{N+1} m.$$

On notera que la série n'est pas nécessairement convergente. En revanche, grâce à un argument de resommation de Borel, on peut construire un symbole ayant un développement asymptotique semi-classique donné.

On va maintenant associer un opérateur à un symbole par le biais de la quantification de Weyl qui est donnée pour un symbole $p \in \mathcal{S}(m)$ par la formule

$$p^w(x,hD)u(x) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \iint p(\frac{x+y}{2},\xi)\mathrm{e}^{i\langle x-y,\xi\rangle/h}u(y), \mathrm{d}y\mathrm{d}\xi, \tag{A.1}$$

pour $u \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Un des avantages de la quantification de Weyl par rapport aux autres quantifications est qu'elle associe aux symboles réels des opérateurs symétriques. Un autre avantage est l'inégalité de Fefferman-Phong pour les symboles positifs (voir la proposition A.9).

On rappelle d'abord la formule de composition des opérateurs pseudodifférentiels dans la cas de la quantification de Weyl : pour $a \in \mathcal{S}(m_1)$ et $b \in \mathcal{S}(m_2)$, la composée des opérateurs pseudodifférentiels a^w et b^w est un opérateur pseudodifférentiel dont le symbole, noté $a\#b$, appartient à $\mathcal{S}(m_1m_2)$ et possède le développement asymptotique semi-classique suivant :

$$\begin{aligned} a\#b &= \mathrm{e}^{ih(D_\eta D_x - D_y D_\xi)}a(y,\eta)b(x,\xi)\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=\xi}} \\ &\sim \sum_{\alpha,\beta} \frac{h^{|\alpha+\beta|}(-1)^{|\alpha|}}{(2i)^{|\alpha+\beta|}\alpha!\beta!}\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a(x,\xi)\partial_\xi^\alpha\partial_x^\beta b(x,\xi). \end{aligned} \tag{A.2}$$

En particulier, les termes principaux et sous-principaux s'écrivent

$$a\#b = ab + \frac{ih}{2}\{a,b\} + \mathcal{O}(h^2), \tag{A.3}$$

où $\{a,b\}$ est le crochet de Poisson entre a et b et est donné par

$$\{a,b\} = \frac{\partial a}{\partial\xi}\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial\xi}.$$

On rappelle le théorème classique de continuité sur L^2 :

Théorème A.4 (Calderon-Vaillancourt)**.** *Soit $p \in \mathcal{S}(1)$. Alors, p^w est continu sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\|p^w\| \leq C\left(\sum_{\alpha\leq M}\|\partial^\alpha p\|_{L^\infty}\right)$, où C et M sont des constantes strictement positives qui ne dépendent que de la dimension.*

Intéressons nous maintenant à l'inversibilité des opérateurs pseudodifférentiels.

Définition A.5. *On dit que $p \in \mathcal{S}(m)$ est elliptique s'il existe $\gamma > 0$ indépendant de h tel que*

$$|p| \geq \gamma m.$$

Théorème A.6 (Inverses de symboles elliptiques)**.** *. On suppose que $p \in \mathcal{S}(m)$ est elliptique.*

i) Si $m \geq 1$, il existe $h_0 > 0$ et $C > 0$ tel que

$$\|p^w(x, hD)u\| \geq C \|u\|,$$

quelque soit $u \in \mathscr{S}$ et $0 < h \leq h_0$.

ii) Si $m = 1$, il existe $h_0 > 0$ tel que $a^w(x, hD)^{-1}$ existe et est borné pour $0 < h \leq h_0$.

Si on suppose maintenant que $p \in \mathcal{S}(1)$ est réel et elliptique, on a alors l'inégalité de Gårding

Proposition A.7 (Inégalité de Gårding)**.** *Soit un symbole réel $p \in \mathcal{S}(1)$ elliptique vérifiant*

$$p \geq \gamma > 0.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h_0 > 0$ dépendant de ε tel que

$$(p^w(x, hD)u, u) \geq (\gamma - \varepsilon) \|u\|^2,$$

pour tout $0 < h \leq h_0$ et pour tout $u \in L^2$.

En fait, on peut montrer un peu mieux :

Proposition A.8 (Inégalité de Gårding précisée)**.** *Soit un symbole réel $p \in \mathcal{S}(1)$ elliptique vérifiant*

$$p \geq 0.$$

Alors il existe $C > 0$ et $h_0 > 0$ tel que

$$(p^w(x, hD)u, u) \geq -Ch \|u\|^2,$$

pour tout $0 < h \leq h_0$ et pour tout $u \in L^2$.

Cette inégalité est en fait valide quelque soit la quantification utilisée. Pour la quantification de Weyl, on a encore une amélioration connue sous le nom d'inégalité de Fefferman-Phong (voir [24],[9], [83] ou [58]).

Proposition A.9. *[Inégalité de Fefferman-Phong] Soit un symbole réel $p \in \mathcal{S}(1)$ elliptique vérifiant*

$$p \geq 0.$$

Alors il existe $C > 0$ et $h_0 > 0$ tel que

$$p^w(x, hD)u, u) \geq -Ch^2 \|u\|^2, \tag{A.4}$$

pour tout $0 < h \leq h_0$ et pour tout $u \in L^2$.

On conclut cette partie de l'appendice par un théorème de calcul fonctionnel pour les opérateurs pseudodifférentiels (on pourra aussi voir, par exemple, [18] pour une autre approche du calcul fonctionnel via la formule d'Helffer-Sjöstrand). Ce théorème est tiré de [70] et permet notamment le calcul fonctionnel en particulier pour les fonctions puissances. Soient f une fonction de la variable réelle à valeurs complexes telle que $f \in \mathcal{S}^r(1)$ et un symbole réel $a \in \mathcal{S}^s(1)$ ayant pour développement asymptotique dans $\mathcal{S}^s(1)$:

$$a \sim \sum_{i=0}^{\infty} a_i h^i.$$

On a alors

Théorème A.10. *$f(a^w)$ définit par le calcul fonctionnel est un opérateur pseudodifférentiel dont le symbole $a_f \in \mathcal{S}^{sr}(1)$ admet le développement asymptotique suivant :*

$$a_f \sim \sum_{i=0}^{\infty} a_{f,i} h^i,$$

avec

(i) $a_{f,0} = a_0$ *;*

(ii) $a_{f,1} = a_1 f'(a_0)$ *;*

(iii) *pour* $j \geq 2$*,*

$$a_{f,j} = \sum_{k=1}^{2j-1} \frac{d_{j,k}}{k!} f^{(k)}(a_0),$$

où les $d_{j,k}$ *ne dépendent que de* a*.*

B Construction d'une fonction poids

On rappelle rapidement dans cette section la construction de la fonction poids près des points critiques faite dans [45] (on peut aussi voir [47] pour une construction similaire). On suppose qu'on a un symbole $p = p_1 + ip_2$ tel que p_1 est positif et possédant un nombre fini de points critiques, $\rho_1, ..., \rho_N$. On suppose également $p(\rho_j) = 0$ pour simplifier l'écriture. Soit $\delta(\rho) \geq 0$ une fonction équivalente à la distance à $\mathcal{C} = \{\rho_1, ..., \rho_N\}$, avec $\delta^2 \in \mathcal{C}^\infty$. On fait l'hypothèse supplémentaire sur le symbole (qui assurera l'hypoellipticité près des points critiques) que le symbole p vérifie dans un voisinage $\mathcal{B}$ fixé autour de $\mathcal{C}$

$$p_1 + \varepsilon_0 H_{p_2}^2 p_1 \sim \delta^2. \tag{H1}$$

pour ε_0 suffisamment petit. On peut alors montrer la proposition suivante (Proposition 2.1 de [45]) :

Proposition B.1. *On suppose que* p *satisfait l'hypothèse* ***(H1)****. Il existe alors une constante* C *et une fonction* $G \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{B})$ *telles qu'on ait (uniformément en* $h, \varepsilon > 0$ *suffisamment petits)*

$$\begin{aligned} &\partial^k G = O\left(\delta^{(2-k)_+}\right) \quad \textit{pour } \delta \leq h^{1/2}, \\ &\partial^k G = O\left(h(\delta h)^{-k/3}\right) \quad \textit{dans } \left\{\rho \in \mathcal{B},\ \delta \geq (h)^{1/2}\right\}. \end{aligned} \tag{B.1}$$

De plus, si on note encore p *une extension presque analytique de* p *et si on pose* $\tilde{p}(\rho) = p(\rho + i\varepsilon H_G(\rho)) = \tilde{p}_1 + i\tilde{p}_2$*, alors on a dans* $\mathcal{B}$

$$\tilde{p}_1 \geq \frac{\varepsilon}{C}\min\left(\delta^2, (\delta h)^{2/3}\right), \quad \tilde{p}_2 = \mathcal{O}(\delta^2). \tag{B.2}$$

Construction à distance $\mathrm{h}^{1/2}$ des points critiques

La construction est effectuée dans un voisinage fixé des points critiques, mais ne servira que pour $\delta^2 \leq h$. On fixe $T > 0$. Dans le voisinage d'un point critique ρ_j, on pose

$$G_t = \int_T k(t) p_1 \circ \exp(tH_{p_2})\,\mathrm{d}t,$$

où $k_T(t) = k(\frac{t}{T})$ et $k \in \mathcal{C}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ est la fonction impaire donnée par $k(t) = 0$ pour $|t| \geq \frac{1}{2}$ et $k'(t) = -1$ pour $0 < |t| < \frac{1}{2}$. G_T est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ qui vérifie

$$H_{p_2}G_T = \langle p_1\rangle_T - p_1,\ G_t = \mathcal{O}(\delta^2),\ \nabla G_t = \mathcal{O}(\delta),$$

où

$$\langle p_1\rangle_T = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} p_1 \circ \exp(tH_{p_2})\,\mathrm{d}t.$$

On considère le symbole dilaté

$$\tilde{p}(\rho) = p(\rho + i\varepsilon H_G(\rho)) = p(\rho) - i\varepsilon H_p G(\rho) + \mathcal{O}(\varepsilon^2|\nabla G|^2),$$

dont les parties réelles et imaginaires sont

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 &= p_1(\rho) + \varepsilon H_{p_2}G(\rho) + \mathcal{O}(\varepsilon^2|\nabla G|^2) \\ &= (1-\varepsilon)p_1 + \varepsilon\langle p_1\rangle_T + O_T(\varepsilon^2\delta^2), \\ \tilde{p}_2 &= p_2(\rho) - \varepsilon H_{p_1}G(\rho) + \mathcal{O}(\varepsilon^2|\nabla G|^2). \end{aligned}$$

Grâce à **(H1)**, on voit que si on fixe $\varepsilon > 0$ assez petit, dépendant de T, alors dans un voisinage des points critiques dépendant de ε et T , on a

$$\tilde{p}_1 \geq \frac{\varepsilon}{C}\delta^2,\ \tilde{p}_2 = \mathcal{O}(\delta^2). \tag{B.3}$$

Construction à distance plus grande que $\mathbf{h^{1/2}}$ des points critiques

On travaille donc maintenant dans la région $\{\rho \in \mathcal{B},\ \delta \geq h^{1/2}\}$. On considère la fonction G définie par

$$G = h\frac{H_{p_2}p_1}{\delta^{4/3}h^{1/3}}\psi\left(\frac{Mp_1}{(h\delta)^{2/3}}\right). \tag{B.4}$$

On se reportera à [45] pour les estimations sur G. Pour $\tilde{p}(\rho) = p(\rho + i\varepsilon H_G(\rho)) = \tilde{p}_1 + i\tilde{p}_2$, dans $\mathcal{B}$, on a

$$\tilde{p}_1 = p_1(\rho) + \varepsilon H_{p_2}G(\rho) + \mathcal{O}(\varepsilon^2|\nabla G|^2)\,;$$
$$\tilde{p}_2 = p_2(\rho) - \varepsilon H_{p_1}G(\rho) + \mathcal{O}(\varepsilon^2|\nabla G|^2).$$

On va estimer les termes d'erreur. D'après (B.1), on sait qu'à une distance plus grande que $h^{1/2}$ des points critiques, on a $\nabla G = \mathcal{O}(h^{2/3}\delta^{-1/3})$. On en déduit ainsi que

$$\mathcal{O}(\varepsilon^2|\nabla G|^2) = \varepsilon^2\mathcal{O}(h^{4/3}\delta^{-2/3}) \leq \varepsilon^2\mathcal{O}((h\delta)^{2/3}),$$

puisque $h^{4/3}\delta^{-2/3} = \mathcal{O}((h\delta)^{2/3})$ quand $\delta \geq h^{1/2}$. Étudions maintenant les deux premiers termes dans l'expression de $\tilde{p}_1$ suivant la taille de p_1.
Quand p_1 est grand, c'est-à-dire qu'on travaille dans la région elliptique

$$Mp_1 \geq (h\delta)^{2/3}.$$

D'après (B.1), et le fait que $H_{p_2} = \mathcal{O}(\delta)$, on obtient

$$H_{p_2}G = \mathcal{O}(h\delta)^{2/3}.$$

On rappelle qu'on est dans $\mathcal{B}$ et que le terme d'erreur dans $\tilde{p}_1$ est $\varepsilon^2\mathcal{O}((h\delta)^{2/3})$. En choisissant ε suffisamment petit, on obtient

$$\tilde{p}_1 \geq \frac{(h\delta)^{2/3}}{CM}.$$

D'autre part, on obtient en utilisant la borne sur le reste et sur H_G que

$$\tilde{p}_2 = \mathcal{O}(\delta^2).$$

Si on se place maintenant dans la région où p_1 est petit, c'est-à-dire dans l'ensemble $\{\rho \in \mathcal{B},\ \delta \geq h^{1/2}\}$, on peut écrire

$$G = h\frac{H_{p_2}p_1}{\delta^{4/3}h^{1/3}}.$$

On a donc

$$p_1 + \varepsilon H_{p_2}G = p_1 + \varepsilon h\frac{H_{p_2}^2 p_1}{\delta^{4/3}h^{1/3}} + \varepsilon h(H_{p_2}p_1)H_{p_2}\left(\delta^{-4/3}h^{-1/3}\right).$$

Comme la dérivée seconde de p_1 est bornée, on utilise le fait que $|\nabla p_1| \leq Cp_1 \leq C\frac{(h\delta)^{1/3}}{\sqrt{M}}$ ainsi que $|\nabla p_2| \leq C\delta$ pour majorer le troisième terme, ce qui nous donne

$$\varepsilon h(H_{p_2}p_1)H_{p_2}\left(\delta^{-4/3}h^{-1/3}\right) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}Oh = \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\mathcal{O}((h\delta)^{2/3}),$$

car $\delta \leq h^{1/2}$. Étudions maintenant la somme des deux premiers termes. On observe d'abord que

$$\frac{h}{\delta^{4/3}h^{1/3}} \leq 1,$$

et on obtient grâce à **(H1)**, pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$

$$p_1 + \varepsilon h\frac{H_{p_2}^2 p_1}{\delta^{4/3}h^{1/3}} \geq \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\frac{h}{\delta^{4/3}h^{1/3}}(p_1 + \varepsilon_0 H_{p_2}^2 p_1) \geq \frac{\varepsilon\varepsilon_1}{\varepsilon_0}(h\delta)^{2/3}.$$

En choisissant M assez grand (fixé à partir de maintenant), on obtient

$$p_1 + \varepsilon H_{p_2}G \geq \frac{\varepsilon}{C}(h\delta)^{2/3}.$$

Puisque le terme de reste est $\varepsilon^2\mathcal{O}((h\delta)^{2/3})$, en choisissant ε suffisamment petit, on obtient finalement sur $\mathcal{B}$

$$\tilde{p}_1 \geq \frac{\varepsilon}{C}(h\delta)^{2/3}.$$

Pour plus de détails et notamment pour ce qui est du recollement des deux parties, on se référera à la deuxième partie de [45].

C Transformée FBI

On va maintenant rappeler les définitions ainsi que quelques propriétés de la transformée FBI. On peut conseiller entre autres [77], [79], [91] ou encore [15] et [59] pour de plus amples informations sur le sujet. Un des principaux avantages de la transformée FBI est son efficacité à mesurer la différence entre l'opérateur induit par la quantification d'un symbole et la multiplication par ce même symbole (voir la formule (C.5)).

Soit φ une forme quadratique complexe vérifiant

$$\operatorname{Im}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\ \text{est une matice définie positive},$$

et

$$\det\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} \neq 0.$$

La transformée FBI associée à φ est alors définie sur $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ par

$$T_\varphi u(z) = c_\varphi h^{-3n/4}\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\frac{i}{h}\varphi(z,y)}u(y)\,\mathrm{d}y, \tag{C.1}$$

où $c_\varphi = 2^{-n/2}\pi^{-3n/4}(\det \partial_x^2 \varphi)^{-1/4}|\det \partial_x\partial_z\varphi|$.

Par exemple, on peut prendre $\varphi(z,x) = \frac{i}{2}(z-x)^2$ et $c_\varphi = 2^{-n/2}\pi^{-3n/4}$, on obtient alors la transformée de Bargmann standard. Dans ce cas, on peut réécrire T_φ de la manière suivante :

$$T_\varphi u(z) = c_\varphi h^{-3n/4} \mathrm{e}^{\Phi(z)/h} \mathrm{e}^{-\frac{i}{h}\langle \mathrm{Im}\, z, \mathrm{Re}\, z\rangle} \mathcal{F}_h \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2h}(x-\mathrm{Re}\, z)^2} u(x) \right) (-\mathrm{Im}\, z),$$

avec $\Phi(z) = \max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} -\mathrm{Im}\, \varphi(z,x)$. On voit qu'à un poids exponentiel en Φ et à un facteur près, $T_\varphi u$ est donné par

$$\mathcal{F}_h \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2h}(x-\mathrm{Re}\, z)^2} u(x) \right) (-\mathrm{Im}\, z).$$

On voit qu'on localise donc en espace grâce à la gaussienne autour de $\mathrm{Re}\, z$ et on prend la transformée de Fourier au point $-\mathrm{Im}\, z$. On espère donc que $T_\varphi u$ se comporte près du point $z = x - i\xi$ comme u près du point de l'espace des phase (x,ξ).

Pour une forme quadratique générale, on introduit également (en gardant les mêmes notations) $\Phi(z) = \max\limits_{x\in\mathbb{R}^n} -\mathrm{Im}\, \varphi(z,x)$. On définit alors H_Φ le sous espace de l'espace de Lebesgue pondéré $L^2(\mathbb{C}^n; \mathrm{e}^{-2\Phi/h}\mathrm{d}z)$ composé des fonctions holomorphes, on peut alors montrer le théorème suivant :

Théorème C.1. $T_\varphi : L^2(\mathbb{R}^n) \to H_\Phi$ *est une transformation unitaire.*

On introduit maintenant la transformation canonique

$$\kappa_\varphi : (x, -\partial_x \varphi(z,x)) \mapsto (z, \partial_z \varphi(z,x)).$$

On a alors l'IR-espace associé :

$$\kappa_\varphi(\mathbb{R}^{2n}) = \Lambda_\Phi,$$

où $\Lambda_\Phi = \left\{(z, \frac{2}{i}\partial_z \Phi(z))\right\}$ est le sous espace I-lagrangien généré par Φ. Si, par exemple, on prend $\varphi(z,x) = \frac{i}{2}(z-x)^2$, alors $\kappa_\varphi(x,\xi) = (z - i\xi, \xi)$. Dans ce cas, du coté FBI, la quantification de Weyl prend la forme d'une intégrale de contour. On va d'abord définir une quantification pour $\mathfrak{p} \in S(\Lambda_\Phi)$ un symbole de la variable complexe,

$$\mathfrak{p}_\Phi^w u(z) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\theta = \frac{2}{i}\partial_z \Phi\left(\frac{z+w}{2}\right)} \mathrm{e}^{\frac{i}{h}\langle z-w, \theta\rangle} \mathfrak{p}\left(\tfrac{z+w}{2}\right) u(w)\, \mathrm{d}w \mathrm{d}\theta. \tag{C.2}$$

On a alors la relation exacte avec la quantification de Weyl (A.1), pour $p \in S$:

$$T_\varphi p^w T_\varphi^{-1} = (p \circ \kappa_\varphi^{-1})_\Phi^w.$$

On note $\mathfrak{p} = p \circ \kappa_\varphi^{-1}$ le symbole complexe associé au symbole p. On rappelle maintenant un lemme standard (qu'on peut trouver en particulier dans [45]) :

Lemme C.2. *Pour deux symboles $a, b \in \mathcal{S}(1)$ avec* $\operatorname{supp} a \cap \operatorname{supp} b = \emptyset$*, on a pour tout $u \in L^2$*

$$\|\mathfrak{a}_\Phi^w T_\varphi b^w u\|_\Phi = \mathcal{O}(h^\infty)\|u\|. \tag{C.3}$$

On appelle extension presque analytique de f, une fonction $\tilde{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n)$ vérifiant

$$\tilde{f}_{|\mathbb{R}^n} = f,$$
$$\forall N \in \mathbb{N},\, \exists C_N > 0 \,/\, \forall z \in \mathbb{C}^n, \quad |\overline{\partial} f(z)| \leq C_N |\operatorname{Im} z|^N.$$

On va procéder à une première déformation du contour d'intégration dans la formule (C.2). Dans la suite, on va travailler avec une extension presque analytique des symboles complexes et on dénotera de la même façon un symbole et une extension presque analytique de ce symbole. On introduit d'abord une fonction $\psi_0 \in \mathcal{C}^\infty$ valant 1 près de 0, par le théorème de la phase stationnaire, on obtient pour $u \in H_\Phi$

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}_\Phi^w u(z) =& \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\theta = \frac{2}{i}\partial_z \Phi\left(\frac{z+w}{2}\right)} \mathrm{e}^{\frac{i}{h}\langle z-w, \theta\rangle} \psi_0(z-w)\mathfrak{p}\left(\tfrac{z+w}{2}\right) u(w)\, \mathrm{d}w \mathrm{d}\theta \\ &+ R_0 u(z),\end{aligned}$$

où l'opérateur $R_0 = \mathcal{O}(h^\infty) \,:\, L^2(\mathbb{C}^n; \mathrm{e}^{-2\Phi/h}\mathrm{d}z) \to L^2(\mathbb{C}^n; \mathrm{e}^{-2\Phi/h}\mathrm{d}z)$. Procédons maintenant à la déformation de contour proprement dite. On pose pour $t_0 > 0$,

$$\Gamma_t = \left\{\theta = \frac{2}{i}\partial_z \Phi\left(\frac{z+w}{2}\right) + it\overline{(z-w)}\right\},\ 0 \leq t \leq t_0.$$

La formule de Stokes nous donne alors

$$\begin{aligned}p_\Phi^w u(z) =& \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\Gamma_{t_0}} \mathrm{e}^{\frac{i}{h}\langle z-w, \theta\rangle} \psi_0(z-w)\mathfrak{p}\left(\tfrac{z+w}{2}\right)\, \mathrm{d}w \mathrm{d}\theta \\ &+ \frac{1}{(2\pi h)^n} \iint_{\Gamma_{[0,t_0]}} \mathrm{e}^{\frac{i}{h}\langle z-w, \theta\rangle} u(w) \overline{\partial}_{w,\theta}\left(\psi_0(z-w)\mathfrak{p}\left(\tfrac{z+w}{2}\right)\right) \wedge \mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\theta \\ &+ R_0 u(z),\end{aligned}$$

où $\Gamma_{[0,t_0]}$ est l'union de tous les Γ_t pour $0 \leq t \leq t_0$. On peut montrer (voir [45] ou [79]) que le premier terme nous donne un opérateur uniformément borné de $L^2(\mathbb{C}^n; \mathrm{e}^{-2\Phi/h}\mathrm{d}z)$ et que le second terme est $\mathcal{O}(h^\infty)$. Si on pose

$$\begin{aligned}R_1 u(z) =& \frac{1}{(2\pi h)^n} \iint_{\Gamma_{[0,t_0]}} \mathrm{e}^{\frac{i}{h}\langle z-w, \theta\rangle} u(w) \overline{\partial}_{w,\theta}\left(\psi_0(z-w)\mathfrak{p}\left(\tfrac{z+w}{2}\right)\right) \wedge \mathrm{d}w \wedge \mathrm{d}\theta \\ &+ R_0 u(z),\end{aligned}$$

on a alors

$$R_1 = \mathcal{O}(h^\infty) \,:\, L^2(\mathbb{C}^n; \mathrm{e}^{-2\Phi/h}\mathrm{d}z) \to L^2(\mathbb{C}^n; \mathrm{e}^{-2\Phi/h}\mathrm{d}z).$$

On va introduire une nouvelle fonction pluri-subharmonique Φ_ε associé au poids G construit dans la section B qui va nous permettre de modifier notre produit scalaire pour obtenir de l'hypoellipticité près des points critiques.

Définition et propriétés de Φ_ε

On rappelle que la fonction G satisfait dans un voisinage borné $\mathcal{B}$ des points critiques

$$\partial^k G = O\left(\delta^{(2-k)_+}\right) \quad \text{pour } \delta \leq h^{1/2},$$
$$\partial^k G = O\left(h(\delta h)^{-k/3}\right) \quad \text{dans } \delta \geq h^{1/2}.$$

On en déduit que dans ce voisinage

$$\partial^k G = \mathcal{O}(hr^{-k}),$$

où

$$r(\rho) = h^{1/3}(h^{1/2} + \delta(\rho))^{1/3}.$$

On remarque que

$$h^{1/2} \leq r \leq h^{1/2} + \delta(\rho),$$

de telle sorte que l'ordre de grandeur de $h^{1/2} + \delta(\rho)$ est constant dans une boule $B(\rho_0, \frac{1}{C_0} r(\rho_0))$ (où ρ_0 est un point critique), si $C_0 > 0$ est assez grande et indépendante de ρ_0. Dans $B(\rho_0, \frac{1}{C_0} r(\rho_0))$, on introduit les variables $\tilde{\rho}$ remisent à l'échelle de la façon suivante :

$$\rho = \rho_0 + r_0 \tilde{\rho}, \quad r_0 = r(\rho_0).$$

La fonction remise à l'échelle $G(\rho_0 + r_0 \rho)$ vérifie

$$\nabla^k_{\tilde{\rho}}(G(\rho_0 + r_0 \tilde{\rho})) = \mathcal{O}(h), \quad |\tilde{\rho}| < \frac{1}{C_0}.$$

Soit

$$\Lambda_{\varepsilon G} = \left\{(w, \eta) \in \mathbb{C}^{2n} \;/\; \mathrm{Im}\,(w, \eta) = \varepsilon H_G(\mathrm{Re}\,(w, \eta))\right\}.$$

Alors pour ε suffisamment petit, on a

$$\kappa_\varphi(\Lambda_{\varepsilon G}) = \Lambda_{\Phi_\varepsilon} = \left\{(z, \xi) \in \mathbb{C}^{2n} \;/\; \xi = \frac{2}{i} \partial_z \Phi_\varepsilon(z)\right\},$$

où $\Phi_\varepsilon(z)$ est une valeur critique de

$$\Phi_\varepsilon(z) = \mathrm{v.c.}_{(w,\eta) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^n}(-\mathrm{Im}\,\varphi(z, w) - (\mathrm{Im}\,w).\eta + \varepsilon G(\mathrm{Re}\,w, \eta)).$$

On remarque que, quand $\varepsilon = 0$, l'unique point critique est non-dégénéré.

On est donc en présence du problème général suivant (où on a simplifié les notations), à savoir l'étude de la valeur critique

$$\Phi_\varepsilon = \mathrm{v.c.}_{y \in \mathbb{R}^n} F_\varepsilon(x, y), \quad x \in \mathbb{R}_n,$$

où F_ε est une fonction régulière à valeurs réelles telle que

$$y \mapsto F_0(x, y) \text{ possède un unique point critique non-dégénéré } y_0(x),$$
$$\partial^2_\varepsilon F_\varepsilon(x, y) = 0,$$
$$\partial^\alpha_x \partial^\beta_y \partial_\varepsilon F(x, y) = \mathcal{O}(hr^{-|\beta|}),$$

où $r = h^{1/3}(h^{1/2} + \delta(y))^{1/3}$ et $\delta(y) \geq 0$ est une fonction lipschitzienne. D'après les deux dernières propriétés, on voit que

$$\partial_y F_\varepsilon - \partial_y F_0 = \mathcal{O}(\frac{h\varepsilon}{r}) \ll \varepsilon, \quad \partial_y^2 F_\varepsilon - \partial_y^2 F_0 = \mathcal{O}(\frac{h\varepsilon}{r}) \ll 1,$$

pour $\varepsilon \ll 1$. Ainsi, pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \ll 1$, on voit que $y \mapsto F_\varepsilon(x, y)$ a un unique point critique non-dégénéré $y_\varepsilon(x)$ qui dépend de manière régulière de (x, ε).

Afin d'estimer les dérivées de $y_\varepsilon(x)$, on travaille dans un r_0-voisinage d'un point variable $(x_0, y_0) = (x_0, y(x_0))$, $r_0 = r(\delta(y_0))$ et on pose $x = x_0 + r_0\tilde{x}$, $y_\varepsilon(x) = y_0(x_0 + r_0\tilde{x}) + r_0\tilde{y}_\varepsilon(\tilde{x})$, avec $\tilde{y}_0(\tilde{x}) = 0$ et où on espère que $\tilde{y}_\varepsilon = \mathcal{O}(\varepsilon)$. On pose

$$\begin{aligned} G_\varepsilon(\tilde{x}, \tilde{y}) =& \frac{1}{r_0^2}\big(F_\varepsilon(x_0 + r_0\tilde{x}, y_0(x_0 + r_0\tilde{x}) + r_0\tilde{y}) \\ & - F_0(x_0 + r_0\tilde{x}, y_0(x_0 + r_0\tilde{x}))\big). \end{aligned}$$

Alors, $\tilde{y}_\varepsilon(\tilde{x})$ est un point critique de

$$\tilde{y} \mapsto G_\varepsilon(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

avec

$$\begin{gathered} \partial_{\tilde{x}}^\alpha \partial_{\tilde{y}}^\beta G_\varepsilon = \mathcal{O}(1), \quad \partial_{\tilde{x}}^\alpha \partial_{\tilde{y}}^\beta \partial_\varepsilon G_\varepsilon = \mathcal{O}(\frac{h}{r_0^2}), \\ \partial_{\tilde{y}} G_0(\tilde{x}, 0) = 0, \quad \left|\det \partial_{\tilde{y}}^2 G_\varepsilon\right| \geq \frac{1}{C}. \end{gathered}$$

On introduit alors le paramètre remis à l'échelle $\tilde{\varepsilon}$, donné par $\varepsilon = \frac{r_0^2}{h}\tilde{\varepsilon}$, $\partial_{\tilde{\varepsilon}} = \frac{r_0^2}{h}\partial_\varepsilon$, et on obtient des bornes uniformes sur toutes les dérivées de la forme $\partial_{\tilde{x}}^\alpha \partial_{\tilde{y}}^\beta \partial_{\tilde{\varepsilon}}^\gamma G_\varepsilon$, tandis que $\partial_{\tilde{\varepsilon}}^2 G_\varepsilon$ est uniformément non-dégénérée. On en conclut que la même chose est vraie pour $\partial_{\tilde{x}}^\alpha \partial_{\tilde{\varepsilon}}^\gamma \tilde{y}_\varepsilon(\tilde{x})$, donc

$$\begin{gathered} \partial_{\tilde{x}}^\alpha \partial_{\tilde{\varepsilon}}^\gamma \tilde{y}_\varepsilon = O\left(\left(\frac{h}{r_0^2}\right)^\gamma\right), \\ \partial_x^\alpha \partial_\varepsilon^\gamma (y_\varepsilon(x) - y_0(x)) = O\left(r\left(\frac{h}{r_0^2}\right)^\gamma r^{-|\alpha|}\right). \end{gathered}$$

La valeur critique $G_\varepsilon(\tilde{x}, \tilde{y}(\tilde{x}))$ satisfait aussi $\partial_{\tilde{x}}^\alpha \partial_{\tilde{y}}^\beta (G_\varepsilon(\tilde{x}, \tilde{y}_\varepsilon(\tilde{x}))) = \mathcal{O}(1)$, d'où

$$\partial_x^\alpha \partial_\varepsilon^\gamma (F_\varepsilon(x, y_\varepsilon(x)) - F_0(x, y_0(x))) = O\left(r\left(\frac{h}{r_0^2}\right)^\gamma r^{-|\alpha|}\right).$$

On fait le développement de Taylor par rapport à ε et on obtient

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(x, y_\varepsilon(x)) =& F_0(x, y_0(x)) + F_1(x)\varepsilon + F_2(x)\varepsilon^2 + ... + F_{N-1}(x)\varepsilon^{N-1} \\ & + R_N(x, \varepsilon)\varepsilon^N, \end{aligned}$$

où

$$F_1(x) = (\partial_\varepsilon F_\varepsilon)_{|\varepsilon=0}(x, y_0(x)),$$
$$\partial_x^\alpha F_k(x) = O\left(r^2\left(\frac{h}{r^2}\right)^k r^{-|\alpha|}\right),\ k \geq 1,$$
$$\partial_x^\alpha \partial_\varepsilon^\gamma R_N(x,\varepsilon) = O\left(r^2\left(\frac{h}{r^2}\right)^{N+\gamma} r^{-|\alpha|}\right).$$

Si on revient à notre problème de départ avec

$$\Phi_\varepsilon(z) = \text{v.c.}_{(w,\eta)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{R}^n}(-\operatorname{Im}\varphi(z,w) - (\operatorname{Im} w).\eta + \varepsilon G(\operatorname{Re} w, \eta)),$$

on obtient alors

$$\Phi_\varepsilon(x) = \Phi_0(x) + \Phi_1(x)\varepsilon + \Phi_2(x)\varepsilon^2 + ... + \Phi_{N-1}(x)\varepsilon^{N-1} + R_N(x,\varepsilon)\varepsilon^N,$$

où $\Phi_0, ..., \Phi_{N-1}, R_N$ satisfont les mêmes estimations et

$$\Phi_1(x) = G(y(x),\eta(x)), \quad (y(x),\eta(x)) = \kappa_\varphi^{-1}\left(x, \frac{2}{i}\frac{\partial\Phi_0}{\partial x}(x)\right).$$

Étude de P en tant qu'opérateur sur H_{Φ_ε}

On rappelle que l'espace H_{Φ_ε} est le sous-espace de $L^2(\mathbb{C}^n; \mathrm{e}^{-2\Phi_\varepsilon/h}\mathrm{d}z)$ composé des fonctions holomorphes. Comme $\Phi_\varepsilon - \Phi = \mathcal{O}(\varepsilon h)$, on remarque tout d'abord que

$$e^{-C\varepsilon} \leq \frac{\|u\|_{\Phi\varepsilon}}{\|u\|_\Phi} \leq \mathrm{e}^{C\varepsilon}. \tag{C.4}$$

On rappelle que notre opérateur peut s'écrire sur $L^2(\mathbb{C}^n; \mathrm{e}^{-2\Phi/h}\mathrm{d}z)$ de la manière suivante :

$$p_\Phi^w u(z) = \frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{\Gamma_{t_0}} \mathrm{e}^{\frac{i}{h}\langle z-w,\theta\rangle}\psi_0(z-w)\mathfrak{p}\left(\frac{z+w}{2}\right)\mathrm{d}w\mathrm{d}\theta + R_1 u(z).$$

On a alors

$$R_1 = \mathcal{O}(1)\mathrm{e}^{C\varepsilon}h^\infty\ :\ L^2(\mathbb{C}^n; \mathrm{e}^{-2\Phi_\varepsilon/h}\mathrm{d}z) \to L^2(\mathbb{C}^n; \mathrm{e}^{-2\Phi_\varepsilon/h}\mathrm{d}z),$$

et il est possible d'estimer le noyau effectif de l'intégral en tant qu'opérateur sur $L^2(\mathbb{C}^n; \mathrm{e}^{-2\Phi_\varepsilon/h}\mathrm{d}z)$ par

$$\mathcal{O}(h^{-n})\mathrm{e}^{-\frac{t_0}{h}|z-w|^2+2C\varepsilon},$$

ce qui nous donne un opérateur de norme $\mathcal{O}(1)\mathrm{e}^{2C\varepsilon}\ :\ L^2(\mathbb{C}^n; \mathrm{e}^{-2\Phi_\varepsilon/h}\mathrm{d}z) \to L^2(\mathbb{C}^n; \mathrm{e}^{-2\Phi_\varepsilon/h}\mathrm{d}z)$. On fixe maintenant t_0, et on procède à une nouvelle déformation de contour :

$$\Gamma_t^\varepsilon = \left\{\theta = \frac{2}{i}\partial_z(t\Phi + (1-t)\Phi_\varepsilon)\left(\frac{z+w}{2}\right) + it_0\overline{(z-w)}\right\},\ 0 \leq t \leq 1.$$

Le long de ce contour, en utilisant les estimations sur Φ_ε, on a

$$\begin{aligned}\overline{\partial}_{w,\theta}\left(\psi_0(z-w)\mathfrak{p}\left(\frac{z+w}{2}\right)\right) &= \mathcal{O}(1)\left(|z-w| + \varepsilon\frac{h}{r\left(\frac{z+w}{2}\right)}\right)^\infty \\ &\leq \mathcal{O}(1)\left(|z-w| + \varepsilon h^{1/2}\right)^\infty\end{aligned}$$

Par la formule de Stokes, on voit que pour $u \in H_{\Phi_\varepsilon}$

$$\begin{aligned}p_\Phi^w u(z) =& \frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{\theta=\frac{2}{i}\partial_z\Phi_\varepsilon\left(\frac{z+w}{2}\right)+it_0\overline{(z-w)}} \mathrm{e}^{\frac{i}{h}\langle z-w,\theta\rangle}\psi_0(z-w)\mathfrak{p}\left(\tfrac{z+w}{2}\right)\,\mathrm{d}w\mathrm{d}\theta \\ &+ R_\varepsilon u(z),\end{aligned}$$

où

$$R_\varepsilon = \mathcal{O}(1)(\mathrm{e}^{C\varepsilon}h^\infty + h^\infty) \,:\, L^2(\mathbb{C}^n; \mathrm{e}^{-2\Phi_\varepsilon/h}\mathrm{d}z) \to L^2(\mathbb{C}^n; \mathrm{e}^{-2\Phi_\varepsilon/h}\mathrm{d}z).$$

Quantification contre multiplication

On veut établir la formule de quantification contre multiplication. On note $\mathfrak{p}_\varepsilon = \mathfrak{p}\left(x, \frac{2}{i}\frac{\partial\Phi_\varepsilon}{\partial x}(x)\right)$ (où on dénote de la même manière $\mathfrak{p}$ et une extension presque analytique de $\mathfrak{p}$) et on prend χ à dérivées bornées. On a alors

$$(\chi\mathfrak{p}_\Phi^w u, u)_{H_{\Phi_\varepsilon}} = \int \mathfrak{p}_\varepsilon|u|^2\chi(z)\mathrm{e}^{-2\Phi_\varepsilon(z)/h}\mathrm{d}z) + \mathcal{O}(h)\|u\|^2. \tag{C.5}$$

On ne donne qu'une preuve succincte et on se référera à [45] ou [78] pour plus de précisions. On rappelle que

$$\Lambda_{\varepsilon G} = \left\{\rho + i\varepsilon H_G(\rho);\ \rho \in \mathbb{R}^{2n}\right\},$$

et que

$$\kappa_\varphi(\Lambda_{\varepsilon G}) = \Lambda_{\Phi_\varepsilon} = \left\{\xi = \xi_\varepsilon(z) = \frac{2}{i}\partial_z\Phi_\varepsilon(z)\right\}.$$

On commence par écrire le développement de Taylor de $\mathfrak{p}$ au voisinage d'un point de $\Lambda_{\Phi_\varepsilon}$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{p}\left(\frac{z+w}{2},\theta\right) =& \mathfrak{p}(z,\xi_\varepsilon(z)) + \sum \mathfrak{p}^{(j)}(z,\xi_\varepsilon(z))(\theta_j - \xi_{\varepsilon,j}(z)) \\ &+ \sum \mathfrak{p}_{(j)}(z,\xi_\varepsilon(z))\left(\frac{z_j-w_j}{2}\right) + r(z,w,\theta).\end{aligned}$$

Sur $\Gamma_\varepsilon = \left\{\theta = \frac{2}{i}\partial_z\Phi_\varepsilon\left(\frac{z+w}{2}\right) + it_0\overline{(z-w)}\right\}$, on a $\theta_j - \xi_{\varepsilon,j}(z) = iC\overline{(z-w)}$ et $r(x,w,\theta) = \mathcal{O}(|z-w|^2 + h^\infty)$. Le noyau effectif de l'opérateur R correspondant à r peut être estimé par

$$\begin{aligned}|R(z,w)| &= O\left(h^{-n}\mathrm{e}^{-C|z-w|^2/2h}|z-w|^2\tilde{\psi}(z-w)\right) \\ &= O\left(h^{-n}\mathrm{e}^{-C|z-w|^2/2h}|z-w|^2/h\right)h,\end{aligned}$$

pour C suffisamment grand (puisque la dérivée seconde de Φ_ε est bornée). On obtient donc

$$\mathrm{Re}\,(Ru,u)_{\Phi_\varepsilon} = \mathcal{O}(h)\|u\|_{\Phi_\varepsilon}.$$

Pour la contribution du deuxième terme du développement de Taylor, une intégration par partie (cf. [78]) permet de voir que ce terme est un $\mathcal{O}(h)\|u\|_{\Phi_\varepsilon}$. Le troisième terme donne simplement

$$\frac{1}{(2\pi h)^n}\int_{\theta=\frac{2}{i}\partial_z\Phi_\varepsilon\left(\frac{z+w}{2}\right)+it_0\overline{(z-w)}} e^{\frac{i}{h}\langle z-w,\theta\rangle}\left(\sum \mathfrak{p}_{(j)}(z,\xi(z))\left(\tfrac{z_j-w_j}{2}\right)\right)\mathrm{d}w\mathrm{d}\theta$$
$$= \sum \mathfrak{p}_{(j)}(z,\xi(z))\left(\tfrac{z_j-z_j}{2}\right)u(z) = 0.$$

On en déduit (C.5).

D Semi-groupes

On rappelle dans cette section quelques notions et théorèmes de la théorie des semi-groupes. On s'intéressera particulièrement à la transcription de l'information spectrale sur le générateur infinitésimal en des propriétés de décroissance du semi-groupe. Il existe de nombreux ouvrages de référence sur ce sujet ; on peut citer entre autres [46], [68], [90], [66], [22, 23], [81], [14]. On se basera ici plutôt sur la courte présentation donnée au chapitre 13 de [30].

Dans la suite, on travaille sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

Définition D.1. *On appelle semi-groupe fortement continu, une famille d'opérateurs $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

- $T(0) = \mathrm{Id}.$
- $T(s+t) = T(s)\circ T(t), \quad \forall\, t,\, s \geq 0.$
- *Pour tout $x \in \mathcal{H}$, l'application* $\left\{\begin{array}{ccc}[0,+\infty[& \to & \mathcal{H} \\ t & \mapsto & T(t)x\end{array}\right.$ *est continue.* (D.1)

On remarque que si $T(t)$ est un semi-groupe fortement continu, alors il existe $M > 0$ et $\omega_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{\omega_0 t}, \quad t \geq 0. \tag{D.2}$$

On est typiquement intéressé par ce genre d'inégalité avec $\omega_0 < 0$ et une estimation explicite de ω_0.

Définition D.2. *On appelle générateur infinitésimal du semi-groupe T, l'opérateur non-borné A, de domaine $D(A)$ donné par l'ensemble des $x \in \mathcal{H}$ tel que $h^{-1}(T(h)x - x)$ a une limite quand h tend vers 0 (par valeurs supérieures) et la valeur de Ax est donnée par cette limite.*

Pour les semi-groupes fortement continus, on peut tout d'abord énoncer un théorème d'existence et unicité de la solution du problème d'évolution :

Théorème D.3. *On suppose que A génère une semi-groupe fortement continu $T(t)$ sur $\mathcal{H}$. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$, $u(t) = T(t)u_0$ satisfait*

1. $u \in \mathcal{C}^0\left([0,+\infty[, D(A)\right) \cap \mathcal{C}^1\left([0,+\infty[, \mathcal{H}\right)$ *;*
2. $u'(t) = Au(t),\ u(0) = u_0$ *;*
3. $Au(t) = T(t)Au_0$.

De plus, la solution de la deuxième équation est unique.

Étant donné un opérateur non-borné A sur $\mathcal{H}$, le théorème de Hille-Yosida répond à la question de savoir si A est le générateur infinitésimal une semi-groupe fortement continu.

Théorème D.4 (Hille-Yosida)**.** *Soit $(A, D(A))$ un opérateur fermé de $\mathcal{H}$. Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $M > 0$. Alors A génère un semi-groupe fortement continu $T(t)$ satisfaisant $\|T(t)\| \leq M\mathrm{e}^{\omega_0 t}$ si et seulement si*

1. *$D(a)$ est dense dans $\mathcal{H}$*
2. *Tout réel $\lambda > \omega$ est dans l'ensemble résolvant de A et vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
$$\left\|(\lambda \mathrm{Id} - A)^{-n}\right\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}.$$

Remarque D.5. Le théorème de Hille-Yosida est peu utilisable en pratique car il faut une borne sur toutes les puissances de la résolvante. Dans le cas où $M = 1$, il suffit de vérifier l'inégalité pour la résolvante. Si de plus, $\omega = 0$ (i.e. si T vérifie $\|T(t)\| \leq 1$), on dit que T est un semi-groupe de contraction.

Opérateurs accrétifs

Définition D.6. *Un opérateur A de domaine $D(A)$ est dit accrétif si*

$$\mathrm{Re}\,(Ax, x)_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad x \in D(A).$$

On peut montrer la proposition suivante :

Proposition D.7. *Un opérateur $(A, D(A))$ à domaine dense et accrétif est fermable. De plus, son extension fermée $\overline{A}$ est aussi accrétive.*

Il est alors naturel de se demander si cette extension accrétive est unique ce qui nous pousse à introduire la notion suivante :

Définition D.8. *On dit qu'un opérateur accrétif $(A, D(A))$ est accrétif maximal si pour toute extension accrétive $(\tilde{A}, D(\tilde{A}))$, on a $D(A) = D(\tilde{A})$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'extension accrétive stricte de A.*

On a alors la caractérisation suivante de l'accrétivité maximale :

Théorème D.9. *Soit A un opérateur accrétif, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est maximal accrétif.*
2. *Il existe $\lambda_0 > 0$ tel que $A^* + \lambda_0 \mathrm{Id}$ est injectif.*
3. *Il existe $\lambda_1 > 0$ tel que $A + \lambda_1 \mathrm{Id}$ est d'image dense dans $\mathcal{H}$.*

On peut alors écrire une version (simple) du théorème de Hille-Yosida dans le cas des opérateurs accrétifs :

Proposition D.10. *Si un opérateur A est maximal accrétif, alors $-A$ engendre un semi-groupe de contraction.*

On veut maintenant essayer d'obtenir des informations sur l'éventuelle décroissance du semi-groupe

Le théorème de Gearhart-Prüss

On va commencer par donner une version non-quantitative de ce théorème (on peut voir [25] et [67] pour les articles historiques).

Théorème D.11 (Gearhart-Prüss)**.** *Soit A un opérateur fermé à domaine dense $D(A)$ qui génère un semi-groupe fortement continu $T(t)$, et soit $\omega \in \mathbb{R}$. On suppose que $\left\|(z-A)^{-1}\right\|$ est uniformément bornée dans le demi-plan complexe $\mathrm{Re}\, z \leq \omega$. Alors il existe une constante M telle que*

$$\|T(t)\| \leq M \mathrm{e}^{-\omega t}, \quad t \geq 0.$$

Ce théorème répond à la question du taux de décroissance du semi-groupe, mais la constante M n'est pas explicite. Cette constante a été explicitée par Helffer et Sjöstrand dans [37]. On pose

$$\omega_0 = \in \left\{ \omega \in \mathbb{R} \,/\, \{\mathrm{Re}\, z > \omega\} \subset \rho(A) \,\text{et} \sup_{\mathrm{Re}\, z > \omega} \left\|(z\mathrm{Id} - A)^{-1}\right\| < \infty \right\},$$

et pour $\omega > \omega_0$,

$$\frac{1}{r(\omega)} = \sup_{\mathrm{Re}\, z > \omega} \left\|(z\mathrm{Id} - A)^{-1}\right\|.$$

On peut alors écrire le théorème suivant :

Théorème D.12 (Gearhart-Prüss quantitatif)**.** *Soit A un opérateur fermé à domaine dense $D(A)$ qui génère un semi-groupe fortement continu $T(t)$, et soit $\omega \in \mathbb{R}$. On suppose que $\left\|(z-A)^{-1}\right\|$ est uniformément bornée dans le demi-plan complexe $\mathrm{Re}\, z \leq \omega$. Soit $m(t)$ une fonction continue strictement positive telle que*

$$\|T(t)\| \leq m(t), \quad t \geq 0,$$

alors pour tout $t,\ a,\ \tilde{a} > 0$ *tels que* $t = a + \tilde{a}$*, on a*

$$\|T(t)\| \le \frac{\mathrm{e}^{\omega t}}{r(\omega)\|1/m\|_{\mathrm{e}^{\omega \cdot} L^2(]0,a[)}\|1/m\|_{\mathrm{e}^{\omega \cdot} L^2(]0,\tilde{a}[)}}, \quad t \ge 0,$$

où $\|f\|_{\mathrm{e}^{\omega \cdot} L^2(]0,a[)} = \|\mathrm{e}^{\omega \cdot} f(.)\|_{L^2(]0,a[)}$.

Si on applique ce théorème dans le cas d'un semi-groupe de contraction, on obtient

Proposition D.13. *Soit* $T(t)$ *un semi-groupe de contraction. On suppose qu'il existe* $\omega < 0$ *tel que* $r(\omega) > 0$*. Alors*

$$\|T(t)\| \le \left(1 + \frac{2|\omega|}{r(\omega)}\right) \mathrm{e}^{\omega t}.$$

Bibliographie

[1] S. ALINHAC AND P. GÉRARD, *Opérateurs pseudo-différentiels et théorème de Nash-Moser*, Inter-Editions et Editions du CNRS, Paris, 1991. 81

[2] C. M. BENDER, *Introduction to $\mathscr{PT}$-symmetric quantum theory*, Contemporary physics, 46 (2005), pp. 277–292. 34, 43, 44

[3] C. M. BENDER AND S. BOETTCHER, *Real spectra in non-hermitian hamiltonians having $\mathscr{PT}$ symmetry*, Phys. Rev. Lett., 80 (1998), pp. 5243–5246. 34, 43, 44

[4] C. M. BENDER, S. BOETTCHER, AND P. N. MEISINGER, *$\mathscr{PT}$-symmetric quantum mechanics*, Journal of Mathematical Physics, 40 (1999), pp. 2201–2229. 34, 43, 44

[5] J.-M. BISMUT, *The hypoelliptic Laplacian on the cotangent bundle*, Journal of the American Mathematical Society, 18 (2005), pp. 379–476. 18, 67

[6] J.-M. BISMUT AND G. LEBEAU, *The hypoelliptic Laplacian and Ray-Singer metrics*, vol. 167, Princeton University Press, 2008. 18, 67

[7] L. BOLTZMANN, *Vorlesungen über Gastheorie*, Leipzig, J.A. Barth, 1896-1898. Translation by S.G. Brush, *Lectures on gas theory*, Berkeley : University of California Press, 1964. 11

[8] J.-F. BONY, F. HERAU, AND L. MICHEL, *Tunnel effect for semiclassical random walk*, arXiv preprint arXiv :1401.2935, (2014). 26, 80

[9] J.-M. BONY, *Sur l'inégalité de Fefferman-Phong*, Séminaire Équations aux dérivées partielles, 1998 (1998), pp. 1–14. 83

[10] A. BOVIER, M. ECKHOFF, V. GAYRARD, AND M. KLEIN, *Metastability in reversible diffusion processes I : Sharp asymptotics for capacities and exit times*, Journal of the European Mathematical Society, 6 (2004), pp. 399–424. 16, 24

[11] A. BOVIER, V. GAYRARD, AND M. KLEIN, *Metastability in reversible diffusion processes. II. Precise asymptotics for small eigenvalues*, J. Eur. Math. Soc.(JEMS), 7 (2005), pp. 69–99. 16, 24

[12] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, and B. Simon, *Schrödinger operators : with applications to quantum mechanics and global geometry*, Springer Science & Business Media, 1987. 16, 24

[13] M. J. Cáceres, J. A. Carrillo, and T. Goudon, *Equilibration rate for the linear inhomogeneous relaxation-time Boltzmann equation for charged particles*, Communications in Partial Differential Equations, 28 (2003), pp. 969–989. 21

[14] E. B. Davies, *Linear operators and their spectra*, vol. 106, Cambridge University Press, 2007. 94

[15] J.-M. Delort, *FBI transformation*, Springer, 1992. 87

[16] L. Desvillettes and C. Villani, *On the trend to global equilibrium for spatially inhomogeneous kinetic systems : the Boltzmann equation*, Inventiones mathematicae, 159 (2005), pp. 245–316. 21

[17] L. Desvillettes, C. Villani, et al., *On the trend to global equilibrium in spatially inhomogeneous entropy-dissipating systems. part i : the linear Fokker-Planck equation*, Comm. Pure Appl. Math, 54 (2001), pp. 1–42. 21

[18] M. Dimassi and J. Sjöstrand, *Spectral asymptotics in the semi-classical limit*, vol. 268, Cambridge university press, 1999. 29, 74, 78, 81, 84

[19] J. Dolbeault, C. Mouhot, and C. Schmeiser, *Hypocoercivity for kinetic equations with linear relaxation terms*, Comptes Rendus Mathematique, 347 (2009), pp. 511–516. 21, 31, 34

[20] ——, *Hypocoercivity for linear kinetic equations conserving mass*, arXiv preprint arXiv :1005.1495, (2010). 21, 31, 34

[21] J.-P. Eckmann and M. Hairer, *Spectral properties of hypoelliptic operators*, Communications in Mathematical Physics, 235 (2003), pp. 233–253. 21

[22] K.-J. Engel and R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, vol. 194, Springer Science & Business Media, 2000. 94

[23] ——, *A short course on operator semigroups*, Springer Science & Business Media, 2006. 94

[24] C. Fefferman and D. H. Phong, *On positivity of pseudo-differential operators*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 75 (1978), p. 4673. 83

[25] L. Gearhart, *Spectral theory for contraction semigroups on hilbert space*, Transactions of the American Mathematical Society, 236 (1978), pp. 385–394. 96

[26] A. GRIGIS AND J. SJÖSTRAND, *Microlocal analysis for differential operators : an introduction*, vol. 196, Cambridge University Press, 1994. 81

[27] M. P. GUALDANI, S. MISCHLER, AND C. MOUHOT, *Factorization for non-symmetric operators and exponential h-theorem*, arXiv preprint arXiv :1006.5523, (2010). 21

[28] B. HELFFER, *Semi-classical analysis for the Schrödinger operator and applications*, vol. 1336, Springer, 1988. 81

[29] B. HELFFER, *Semiclassical analysis, Witten Laplacians, and statistical mechanis*, World Scientific, 2002. 16

[30] ——, *Spectral theory and its applications*, vol. 139, Cambridge University Press, 2013. 23, 94

[31] B. HELFFER, M. KLEIN, AND F. NIER, *Quantitative analysis of metastability in reversible diffusion processes via a Witten complex approach*, Matemática contemporânea, 26 (2004), pp. 41–86. 16, 24, 34, 36, 37, 40

[32] B. HELFFER AND F. NIER, *Hypoelliptic estimates and spectral theory for Fokker-Planck operators and Witten Laplacians*, vol. 1862, Springer, 2005. 21, 25, 35

[33] B. HELFFER AND F. NIER, *Quantitative analysis of metastability in reversible diffusion processes via a witten complex approach : the case with boundary*, Mémoire de la Société mathématique de France, (2006), pp. 1–89. 25

[34] B. HELFFER AND D. ROBERT, *Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques elliptiques*, Annales de l'institut Fourier, 31 (1981), pp. 169–223. 74

[35] B. HELFFER AND J. SJÖSTRAND, *Multiple wells in the semi-classical limit I*, Communications in Partial Differential Equations, 9 (1984), pp. 337–408. 24, 28, 29, 40

[36] ——, *Puits multiples en mécanique semi-classique IV étude du complexe de Witten*, Communications in partial differential equations, 10 (1985), pp. 245–340. 16, 24, 67, 68

[37] B. HELFFER AND J. SJÖSTRAND, *From resolvent bounds to semigroup bounds*, arXiv preprint arXiv :1001.4171, (2010). 96

[38] R. HENRY, *Spectre et pseudospectre d'opérateurs non-autoadjoints*, PhD thesis, Paris 11, 2013. 23

[39] F. HÉRAU, *Hypocoercivity and exponential time decay for the linear inhomogeneous relaxation Boltzmann equation*, Asymptotic Analysis, 46 (2006), pp. 349–359. 21, 31, 34, 35, 37, 38, 40

[40] ——, *Méthodes microlocales pour les équations cinétiques*, habilitation à diriger des recherches, Université de Reims, 2007. 21

[41] F. HÉRAU, M. HITRIK, AND J. SJÖSTRAND, *Tunnel effect for Kramers–Fokker–Planck type operators*, Annales Henri Poincaré, 9 (2008), pp. 209–274. 18, 26, 34, 67, 71

[42] F. HÉRAU, M. HITRIK, AND J. SJÖSTRAND, *Tunnel effect for Kramers–Fokker–Planck type operators : return to equilibrium and applications*, International Mathematics Research Notices, 2008 (2008), p. rnn057. 18, 26, 34, 67, 71

[43] F. HÉRAU, M. HITRIK, AND J. SJÖSTRAND, *Tunnel effect and symmetries for Kramers–Fokker–Planck type operators*, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, 10 (2011), pp. 567–634. 18, 21, 26, 34, 67, 71

[44] F. HÉRAU AND F. NIER, *Isotropic hypoellipticity and trend to equilibrium for the Fokker-Planck equation with a high-degree potential*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 171 (2004), pp. 151–218. 21, 25, 34, 35, 69

[45] F. HÉRAU, J. SJÖSTRAND, AND C. C. STOLK, *Semiclassical analysis for the Kramers–Fokker–Planck equation*, Communications in Partial Differential Equations, 30 (2005), pp. 689–760. 21, 25, 34, 49, 51, 52, 53, 54, 55, 58, 84, 86, 87, 88, 89, 93

[46] E. HILLE AND R. S. PHILLIPS, *Functional analysis and semi-groups*, vol. 31, American Mathematical Soc., 1957. 94

[47] M. HITRIK AND K. PRAVDA-STAROV, *Semiclassical hypoelliptic estimates for non-selfadjoint operators with double characteristics*, Communications in Partial Differential Equations, 35 (2010), pp. 988–1028. 52, 84

[48] L. HÖRMANDER, *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Mathematica, 119 (1967), pp. 147–171. 20

[49] ——, *The analysis of linear partial differential operators III : Pseudo-differential operators*, vol. 274, Springer Science & Business Media, 2007. 20, 81

[50] J. J. KOHN, *Pseudo-differential operators and hypoellipticity*, Proc. Symp. Pure Math, 23 (1973), pp. 61–69. 20

[51] D. KREJCIRIK, P. SIEGL, M. TATER, AND J. VIOLA, *Pseudospectra in non-Hermitian quantum mechanics*, ArXiv e-prints, (2014). 23

[52] D. LE PEUTREC, *Études de petites valeurs propres du Laplacien de Witten*, PhD thesis, Université Rennes 1, 2009. 16, 25

[53] ——, *Small singular values of an extracted matrix of a Witten complex*, Cubo, A Mathematical Journal, (2009). 16, 25

[54] ——, *Local WKB construction for Witten Laplacians on manifolds with boundary*, Analysis & PDE, 3 (2010), pp. 227–260. 16, 25

[55] ——, *Small eigenvalues of the Neumann realization of the semiclassical Witten Laplacian*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 19 (2010), pp. 735–809. 16, 25

[56] ——, *Small eigenvalues of the Witten Laplacian acting on p-forms on a surface*, Asymptotic Analysis, 73 (2011), pp. 187–201. 16, 25

[57] G. LEBEAU, *Le bismutien*, Séminaire Équations aux dérivées partielles, (2004), pp. 1–15. 18, 67

[58] N. LERNER, *Metrics on the phase space and non-selfadjoint pseudo-differential operators*, vol. 3, Springer Science & Business Media, 2011. 83

[59] A. MARTINEZ, *An introduction to semiclassical and microlocal analysis*, Springer, 2002. 81, 87

[60] J. C. MAXWELL, *On the dynamical theory of gases*, Philosophical transactions of the Royal Society of London, (1867), pp. 49–88. 11

[61] ——, *On stresses in rarified gases arising from inequalities of temperature*, Philosophical Transactions of the royal society of London, (1879), pp. 231–256. 11

[62] A. MELIN, *Lower bounds for pseudo-differential operators*, Arkiv för Matematik, 9 (1971), pp. 117–140. 78

[63] P. MONMARCHÉ, *Hypocoercive relaxation to equilibrium for some kinetic models*, Kinetic and Related Models, 7 (2014), pp. 341–360. 21

[64] C. MOUHOT AND L. NEUMANN, *Quantitative perturbative study of convergence to equilibrium for collisional kinetic models in the torus*, Nonlinearity, 19 (2006), p. 969. 21

[65] S. NAKAMURA, *Agmon-type exponential decay estimates for pseudodifferential operators*, Journal of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 5 (1998), pp. 693–712. 29

[66] A. PAZY, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, vol. 44, Springer New York, 1983. 94

[67] J. PRÜSS, *On the spectrum of C_0-semigroups*, Transactions of the American Mathematical Society, 284 (1984), pp. 847–857. 96

[68] M. REED AND B. SIMON, *Methods of modern mathematical physics. Vol. : 2. : Fourier analysis, self-adjointness*, vol. 20, Academic press New York, 1975. 94

[69] V. ROBBE, *Small eigenvalues of the low temperature linear relaxation Boltzmann equation with a confining potential*, Annales Henri Poincaré, (2015), pp. 1–16. 26, 27, 31

[70] D. ROBERT, *Calcul fonctionnel sur les opérateurs admissibles et application*, Journal of Functional Analysis, 45 (1982), pp. 74 – 94. 74, 84

[71] ——, *Autour de l'approximation semi-classique*, vol. 68, Birkhauser, 1987. 81

[72] L. P. ROTHSCHILD AND E. M. STEIN, *Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups*, Acta Mathematica, 137 (1976), pp. 247–320. 20

[73] X. SAINT RAYMOND, *Elementary introduction to the theory of pseudodifferential operators*, vol. 3, CRC Press, 1991. 81

[74] B. SIMON, *Semiclassical analysis of low lying eigenvalues. I. Non-degenerate minima : Asymptotic expansions*, Annales de l'institut Henri Poincaré (A) Physique théorique, 38 (1983), pp. 295–308. 24

[75] B. SIMON, *Semiclassical analysis of low lying eigenvalues, ii. tunneling*, Annals of Mathematics, (1984), pp. 89–118. 24

[76] J. SJÖSTRAND, *Parametrices for pseudodifferential operators with multiple characteristics*, Arkiv för Matematik, 12 (1974), pp. 85–130. 78

[77] ——, *Singularités analytiques microlocales*, vol. 82, Société mathématique de France, 1982. 87

[78] ——, *Geometric bounds on the density of resonances for semiclassical problems*, Duke Mathematical Journal, 60 (1990), pp. 1–57. 93, 94

[79] ——, *Function spaces associated to global I-lagrangian manifolds*, Structure of solutions of differential equations (Katata/Kyoto, 1995), (1995), pp. 369–423. 87, 89

[80] J. SJÖSTRAND AND M. ZWORSKI, *Elementary linear algebra for advanced spectral problems*, Annales de l'institut Fourier, 57 (2007), pp. 2095–2142. 57

[81] O. STAFFANS, *Well-posed linear systems*, vol. 103, Cambridge University Press, 2005. 94

[82] J. TAILLEUR, S. TĂNASE-NICOLA, AND J. KURCHAN, *Kramers equation and supersymmetry*, Journal of statistical physics, 122 (2006), pp. 557–595. 18

[83] D. TATARU, *On the Fefferman–Phong inequality and related problems*, Comm. Partial Differential Equations, (2002). 83

[84] L. N. TREFETHEN AND M. EMBREE, *Spectra and pseudospectra : the behavior of nonnormal matrices and operators*, Princeton University Press, 2005. 23

[85] C. VILLANI, *A review of mathematical topics in collisional kinetic theory*, Handbook of mathematical fluid dynamics, 1 (2002), pp. 71–74. 11

[86] ——, *Hypocoercivity*, Memoirs of the American Mathematical Society, 202 (2009). 21, 34

[87] J. VIOLA, *Spectral projections and resolvent bounds for partially elliptic quadratic differential operators*, Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications, 4 (2013), pp. 145–221. 24

[88] X. P. WANG, *Large-time asymptotics of solutions to the Kramers-Fokker-Planck equation with a short-range potential*, Communications in Mathematical Physics, (2014), pp. 1–37. 12

[89] E. WITTEN, *Supersymmetry and Morse theory*, Journal of Differential Geometry, 17 (1982), pp. 661–692. 16, 24, 67, 68

[90] K. YOSIDA, *Functional analysis*, vol. 123, Springer Science & Business Media, 2013. 94

[91] M. ZWORSKI, *Semiclassical analysis*, vol. 138, American Mathematical Soc., 2012. 81, 87

l'université nantes angers le mans
COMMUNAUTÉ D'UNIVERSITÉS ET ÉTABLISSEMENTS

UNIVERSITÉ DE NANTES

Thèse de Doctorat

Virgile Robbe

Étude semi-classique de quelques équations cinétiques à basse température

Semiclassical study of some low-temperature kinetic equations

Résumé
Dans cette thèse, on s'intéresse à des équations cinétiques faisant apparaître un petit paramètre h correspondant au régime des basses températures du système. Plus précisément, on effectue une analyse du spectre proche de 0 pour les opérateurs associés à ces modèles. Les méthodes utilisées varient suivant l'équation étudiée de l'hypocoercivité hilbertienne à l'analyse semi-classique. On montre également la structure supersymétrique d'un des modèles. Les résultats spectraux obtenus sont traduits en terme de décroissance du semi-groupe associé à l'opérateur.

Abstract
In this thesis, we are interested in some kinetic equation in which there is a small parameter h which corresponds to the low-temperature regime of the system. More precisely, we provide an analysis of the spectrum near 0 of the operators associated to the models. The technics are quite different depending on the studied equation : from hypocoercivity to semiclassical analysis. We also show the supersymmetric structure of one of the models. The spectral results are translated into semigroup decay rate estimates for the associated operator.

Mots clés
analyse semi-classique, théorie spectrale, équations cinétiques, opérateurs non autoadjoints, supersymétrie, hypocoercivité, estimation de résolvante, transformée FBI.

Key Words
semiclassical analysis, spectral theory, kinetic equations, non selfadjoint operators, supersymmetry, hypocoercivity,resolvent estimate, FBI transform.