UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

UNIVERSITÉ DE NANTES

Thèse de Doctorat

Hervé RENAUD

Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université de Nantes
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire

École doctorale : Sciences et Technologie de l'Information, Mathématiques

Discipline : Épistémologie, histoire des sciences et des techniques
Spécialité : Histoire des mathématiques
Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray

Soutenue le 06/11/2017

La fabrication d'un enseignement de l'analyse pour l'enseignement secondaire en France au XIX^{e} siècle : acteurs, institutions, programmes et manuels

JURY

Président du jury	**Christian GILAIN,** Professeur des Universités, Université Pierre et Marie Curie
Rapporteurs :	**Bruno BELHOSTE**, Professeur des Universités, Université Paris 1 Panthéon Sorbonne **Jesper LÜTZEN**, Professeur des Universités, Université de Copenhague
Examinateurs :	**Xavier SAINT-RAYMOND**, Professeur des Universités, Université de Nantes **Évelyne BARBIN,** Professeur des Universités, Université de Nantes
Directrice de Thèse :	**Évelyne BARBIN,** Professeur des Universités, Université de Nantes

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer ma plus profonde reconnaissance envers le professeur Évelyne Barbin qui a accepté de diriger cette thèse. Sans ses conseils avisés, son sens de la rigueur, sa disponibilité et son écoute, elle ne serait pas ce qu'elle est. Ce travail de thèse a été accompli au Laboratoire de Mathématiques Jean Leray (LMJL) de l'Université de Nantes. Je remercie les professeurs Benoît Grébert et Gilles Carron pour m'avoir accueilli au sein de ce laboratoire qu'ils ont dirigé successivement durant ces années de thèse.

J'adresse aussi mes remerciements aux professeurs Bruno Belhoste et Jesper Lützen qui m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs de cette thèse, ainsi qu'aux professeurs Christian Gilain et Xavier Saint-Raymond pour avoir accepté de participer au jury.

Je voudrais aussi exprimer ma reconnaissance à Monsieur Olivier Azzola, chargé des archives à l'École polytechnique, pour son accueil et l'aide précieuse qu'il m'a fournie dans mes recherches. Je tiens également à remercier les personnels des bibliothèques universitaires de la Sorbonne, de Lyon, de Nantes et d'Angers où m'ont conduit mes recherches, ainsi que ceux de la Bibliothèque nationale de France, des Archives Nationales à Pierrefitte-sur-Seine, et des Archives de l'Académie des Sciences.

Mes remerciements vont également aux personnels administratifs du LMJL pour l'aide fournie durant les différentes étapes de cette thèse.

Je tiens enfin à exprimer toute ma gratitude aux membres de ma famille qui m'ont soutenu durant ce travail, en particulier à mon épouse, Colette, pour sa patience durant ces années, et à mes filles, Camille, Adèle et Judith pour leur « soutien informatique et linguistique ». Je leur associe Sébastien. Je n'oublie pas enfin Romane et Raphaël qui ont eu quelquefois un grand-père moins disponible.

Principales Abréviations

BSM : *Bulletin des Sciences Mathématiques*

CSIP : Conseil supérieur de l'Instruction publique

JME : *Journal de mathématiques élémentaires*

JMS : *Journal de mathématiques spéciales*

NAM : *Nouvelles annales de mathématiques*

RMS : *Revue de mathématiques spéciales*

Notation

Lorsqu'un théorème ou une propriété mathématique est désigné(e) entre guillemets, le nom correspond à la désignation utilisée dans le contexte historique auquel nous nous référons; dans le cas où le nom est en italiques, il correspond à la désignation en vigueur de nos jours.

Sommaire

Introduction générale

Le point de départ de cette thèse est un mémoire de Master de recherche en Histoire des sciences et des techniques, préparé en 2010 à l'Université de Nantes, sous la direction d'Évelyne Barbin. Intitulé *Jules Tannery : les nombres, objet d'étude et sujet d'un renouvellement de l'enseignement des mathématiques (1886-1903)*, il était centré sur l'analyse de trois manuels rédigés par ce responsable des études scientifiques à l'École normale supérieure. Cette recherche faisait apparaître la problématique de l'enseignement des fondements de l'analyse à trois moments et à trois niveaux différents du système éducatif français. L'*Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*[1], publié en 1886, s'adressait à des élèves qui avaient déjà suivi la classe de mathématiques spéciales. Les *Leçons d'arithmétique théorique et pratique*[2] étaient, en 1894, destinées aux élèves de la classe de mathématiques élémentaires, c'est-à-dire aux candidats au baccalauréat scientifique. Sa publication intervenait quelques années après les réformes de 1890-1891 qui avaient eu des répercussions en profondeur sur l'enseignement des mathématiques dans le secondaire. Le troisième manuel, *Notions de mathématiques suivi de Notions historiques*[3] s'adressait aux élèves de la classe de philosophie, c'est-à-dire la classe terminale pour les candidats au baccalauréat littéraire. Sa rédaction s'inscrivait dans le cadre des nouveaux programmes de mathématiques entrés en vigueur, à la suite de la réforme de l'enseignement secondaire de 1902.

À travers ces trois ouvrages, nous avions suivi la problématique de l'enseignement des nombres, des entiers aux irrationnels, pour des publics très différents, à une période où les mathématiciens achevaient d'élaborer les fondements de l'analyse sur des bases arithmétiques, et où les premiers éléments de la théorie des ensembles se mettaient en place. La démarche de Tannery visait à un renouvellement de l'enseignement des mathématiques en introduisant ces notions fondamentales. Elle se situait à une époque où l'enseignement

---

[1] TANNERY Jules, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, Paris, Hermann, 1886.
[2] TANNERY Jules, *Leçons d'arithmétique théorique et pratique*, Paris, Armand Colin, 1894.
[3] TANNERY Jules, *Notions de mathématiques suivi de Notions historiques par TANNERY Paul*, Paris, Delagrave, 1903.

secondaire traversait une crise qui entraînait une série de réformes institutionnelles des plans d'études et des programmes. En mathématiques, ces réformes se traduisirent par l'introduction de la théorie des fonctions dérivées dans les programmes de l'enseignement secondaire avant le baccalauréat, en deux temps. Dans un premier temps, en 1891, elle était inscrite au programme de la classe terminale de l'enseignement moderne. En 1902, l'enseignement de cette théorie se généralisait, puisqu'elle figurait alors, à partir de la classe de seconde pour les filières scientifiques, et en classe de philosophie pour les baccalauréats littéraires.

Ce travail amenait à examiner le processus qui avait eu pour effet l'introduction de la notion de dérivée à ces niveaux d'enseignement. L'étude que nous avions menée au tournant du XIX^{e} siècle montrait qu'étaient alors en jeu l'état des connaissances mathématiques, mais aussi des objectifs de formation assignés par des politiques éducatives. Il s'agissait donc de qualifier les acteurs de ces réformes qu'ils soient mathématiciens, enseignants, institutionnels et hommes politiques.

Le premier moment de ce processus apparaissait comme étant la réécriture des programmes d'admission à l'École polytechnique, en 1851. Pour la première fois, la théorie des dérivées figurait au concours d'entrée à l'École polytechnique, concours dont la préparation orientait alors en grande partie l'enseignement secondaire des mathématiques.

La recherche du processus d'introduction des premières notions de la théorie des fonctions dérivées dans l'enseignement secondaire, de ce premier moment, en 1851, jusqu'à la réforme de 1902 forme le sujet de cette thèse. De multiples acteurs interviennent dans ce processus, des décideurs politiques aux élèves. Nous nous sommes focalisés sur les responsables institutionnels et les auteurs de manuels, et sur les interactions entre ces acteurs et les programmes et manuels qu'ils rédigent. Nous avons laissé en dehors de notre champ de recherche les pratiques d'enseignement qui constitueraient un sujet en tant que tel. Nous contribuons cependant à leur mise en évidence car, comme l'indique Évelyne Héry[4], l'histoire des pratiques est une « histoire indiciaire » dont les programmes, les manuels et leurs interactions constituent des éléments.

[4] HÉRY Évelyne, « Les pratiques pédagogiques, objet d'histoire », *Carrefours de l'Éducation*, n° 19, 2005, p. 93-105. Voir aussi BELHOSTE Bruno, « Les caractères généraux de l'enseignement secondaire scientifique de l'Ancien Régime à la Première Guerre mondiale ». *Histoire de l'éducation*, n° 41,1989, p. 3-46.

Les programmes de 1902 introduisent la notion de fonction dérivée, en vue de ses applications que sont la recherche de la tangente à la courbe représentative de la fonction, l'étude du sens de variation, la recherche des extrema et le calcul d'aire. Leur introduction nécessite au préalable de poser des principes. Ceux-ci ont varié tout au long du XIXe siècle. Ce sont ces notions et les principes sur lesquels elles reposent dont nous suivrons l'enseignement tout au long de cette thèse. Nous les désignerons comme les *premiers éléments de l'analyse*.

L'analyse et les éléments d'une science au XIXe siècle

Mais tout d'abord, l'expression *premiers éléments de l'analyse* que nous employons se doit d'être questionnée dans une perspective historique. L'analyse mathématique désigne de nos jours une branche des mathématiques dont la notion de limite est le fondement, et dont les notions de fonction, de continuité, de dérivation et d'intégration, c'est-à-dire ce qu'on appelle le calcul différentiel et intégral, sont les premiers développements. C'est dans ce sens que nous emploierons le terme d'analyse lorsque nous ne ferons pas référence à une signification particulière attachée à un auteur ou à un texte. Car ce mot a eu, en mathématiques, des significations très différentes.

L'analyse a d'abord été une méthode de raisonnement qui admettait la proposition cherchée pour remonter à une proposition connue. Méthode d'invention, elle s'opposait à la synthèse qui procédait en sens inverse[5]. Christian Gilain a montré qu'à la fin du XVIIIe siècle, dans l'*Encyclopédie méthodique, ou par ordre des matières,* éditée par le libraire Charles-Joseph Panckoucke, à la rubrique analyse correspondait ce que d'Alembert appelait « nouvelle analyse » dans l'*Encyclopédie*, et que nous rappelons ici :

> *Analyse des quantités infinies*, ou *des infinis*, appelée aussi *la nouvelles Analyse*, est celle qui calcule les rapports des quantités qu'on prend pour infinies, ou infiniment petites. Une de ses principales branches est la *méthode des fluxions*, ou *le calcul différentiel*.[6]

L'analyse des quantités finies est aussi appelée algèbre par d'Alembert qui, au début de l'article, regardant l'analyse comme méthode et non comme science, indique :

[5] Voir GARDIÈS Jean-Louis, *Qu'est-ce que et pourquoi l'analyse ? Essai de définition*, Paris, Vrin, 2001.

[6] d'ALEMBERT Jean le Rond, Article « Analyse », *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, Arts et des Métiers*, tome I, 1754, p. 401a. Les mots que nous mettons en italiques le sont dans l'article. Nous procéderons ainsi par la suite, que ce soit pour les mots en italiques, les mots en majuscules ou les mots soulignés dans le texte original.

> ANALYSE […] est proprement la méthode de résoudre les problèmes mathématiques en les réduisant à des équations […].
>
> L'*Analyse*, pour résoudre les problèmes, employe le secours de l'Algèbre, ou calcul des grandeurs en général : aussi ces deux mots, *Analyse*, *Algèbre*, sont souvent regardés comme synonymes.[7]

Les termes d'analyse et d'algèbre sont donc souvent confondus durant tout le XIX^e^ siècle. Ceci explique que, tout au long de cette thèse, nous verrons apparaître les notions d'analyse que sont la théorie des fonctions dérivées, puis les notions de différentielle et d'intégrale comme une partie du programme d'algèbre, et que les manuels que nous analyserons sont pour la plupart des manuels d'algèbre.

La question de l' « élémentation »[8] d'une science peut renvoyer aux *Éléments* d'Euclide, dont Proclus de Lycie rappelait dans *Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, que le titre exact en était *L'enseignement des Éléments*[9]. Mais elle apparaît à l'époque révolutionnaire qui va voir la reconstruction du système d'instruction sur de nouvelles bases. Un concours est lancé par la Convention nationale pour la production de manuels *élémentaires*. Pour Condorcet, « l*es éléments y sont une véritable partie de la science, resserrée dans d'étroites limites, mais complète en elle-même* »[10] et Sylvestre-François Lacroix, mathématicien auteur de nombreux manuels élémentaires se pose la question : «jusqu'où doit-on pousser les éléments »[11], en reconnaissant qu'il est difficile d'imposer des limites fixes aux éléments.

Lieux d'enseignement

Cette thèse porte sur le passage de l'enseignement d'une théorie mathématique d'un niveau où il existe à un niveau inférieur. Sa compréhension nécessite tout d'abord d'analyser les conceptions de cette théorie mathématique qui ont cours afin d'en comprendre le

---

[7] *Ibid.*, p. 400b.

[8] Ce néologisme est à présent entré dans le vocabulaire des historiens de l'enseignement. Voir JULIA Dominique, « L'École normale de l'an III et "l'art d'enseigner" : les séances de débats », La Révolution Française, n°4, 2013, p. 1-20, et BARBIN Évelyne, « Descriptive Geometry in France : History of Élémentation of a method (1795-1865) *», International Journal for the History of Mathematics Education*, n° 10 2016, p.

[9] PROCLUS de Lycie, *Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, traduction de Paul VER EECKE, Bruges, Desclée de Brouwer, 1948.

[10] CONDORCET (marquis de) Marie-Jean-Antoine-Nicolas de Caritat*, Rapport et projet de décret sur l'organisation générale de l'instruction publique*, Paris, Imprimerie nationale, 1792, p. 16.

[11] LACROIX Sylvestre-François*, Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral, précédé de réflexions sur la manière d'enseigner les Mathématiques, et d'apprécier dans les examens le savoir de ceux qui les ont étudiées*, Paris, Duprat, An X (1802), p. XIII.

retentissement dans les manuels que nous examinerons. Elles ont varié tout au long du siècle comme les titres de manuels en témoignent, désignant tour à tour cette théorie sous les noms de « théorie des fonctions analytiques», « calcul des fonctions », « calcul différentiel » ou « calcul infinitésimal ».

Nous serons donc confrontés, tout au long de cette thèse, aux conceptions des principes de l'analyse qui ont au cours au XIXe siècle. Elles ont fait l'objet de très nombreux travaux des historiens des mathématiques. Pour un état des lieux de ces recherches, jusqu'en 1850, nous renvoyons à la première partie de l'ouvrage dirigé par Christian Gilain et Alexandre Guilbaud, intitulée « Articulation XVIIIe-XIXe siècle : un bilan historiographique »[12]. Dans cette abondante bibliographie, citons plus particulièrement les travaux d'Umberto Bottazini[13], de Ivor Grattan-Guinness[14], de Gert Schubring[15], de Niels Jahnke et Jesper Lützen[16], de Judith V. Grabiner[17], et le travail consacré à la notion de fonction par Adolf P. Youschkevitch[18]. Il nous faut ajouter les travaux de Pierre Dugac, autour de la notion de limite, qui couvrent tout le XIXe siècle, et, pour la deuxième partie du siècle, ceux de Thomas Hochkirchen[19] et de Hélène Gispert[20]. Enfin, les recherches de Martin Zerner sur les ouvrages d'analyse dans la seconde moitié du siècle[21] nous ont servi de point d'entrée nos propres recherches.

---

[12] GILAIN Christian et GUILBAUD Alexandre, « Articulation XVIIe-XIXe siècles : un bilan historiographique », dans Christian GILAIN et Alexandre GUILBAUD (dir.), *Sciences mathématiques, 1750-1850, Continuités et ruptures*, Paris, CNRS Éditions, 2015, p. 15-110.

[13] BOTTAZINI Umberto, *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, New-York, Springer-Verlag, 1986.

[14] GRATTAN-GUINNESS Ivor, *Convolutions in French Mathematics, 1800-1840*, Bâle, Birkhaüser, 1990.

[15] SCHUBRING Gert, *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century, France and Germany*, New-York, Springer, 2005.

[16] Voir, dans l'ouvrage dirigé par Hans Niels JAHNKE, *A History of Analysis*, Providence, American Mathematical Society, 2003, les textes de JAHNKE Hans Niels, « Algebraic Analysis in the 18th Century », p. 105-136, de LÜTZEN Jesper, « The Foundation of Analysis in the 19th Century», p.155-195.

[17] GRABINER Judith V., *A Historian Looks Back: The Calculus as Algebra and Selected Writings*, Washington DC, Mathematical Association of America, 2010.

[18] YOUSCHKEVITCH Adolf P., « The concept of function up to the Middle of the 19th Century », *Archive for History of Exact Sciences*, t. 16, 1976, p. 37–85

[19] HOCHKIRCHEN Thomas, « Theory of Measure and Integration from Riemann to Lebesgue » dans Hans Niels JAHNKE (dir.), *op. cit.*, p. 262-290.

[20] GISPERT Hélène, *Jordan et les fondements de l'analyse (étude comparée des deux premières éditions de son cours d'analyse),* Paris, Publications mathématiques d'Orsay, 1982, et « Sur les fondements de l'analyse en France », *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 28, 1983, p. 37-106.

[21] ZERNER Martin, « Sur l'analyse des traités de l'analyse: Les fondements du calcul différentiel dans les traités français, 1870–1914 », *Cahier de didactique des mathématiques*, N° 30, 1986, « La rectifiabilité des courbes dans les traités d'analyse français de la deuxième moitié du XIXème siècle », *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, t. 10, 1989, p. 267-281 et « La transformation des traités français d'analyse (1870-1914) », 1994, https://hal-unice.archives-ouvertes.fr/hal-00347740/fr/ , consulté le 31/08/2017.

La plupart du temps, les *premiers éléments d'analyse* dont nous suivrons le cheminement jusqu'à l'enseignement secondaire sont d'abord exposés dans des manuels d'enseignement destinés à l'École polytechnique, à l'enseignement en Faculté des sciences où dans d'autres écoles. Ces ouvrages ont déjà été répertoriés[22] et, pour les plus connus d'entre eux, maintes fois analysés. Nous nous sommes livrés, pour chacun d'eux à une relecture dans le cadre de notre problématique.

L'École polytechnique joue un rôle important dans cette thèse. Fondée en 1794, ses professeurs sont les plus grands savants de l'époque. L'enseignement de l'analyse devient rapidement la marque de l'École. Joseph-Louis Lagrange, Augustin-Louis Cauchy, Camille Jordan, y enseignent et exposent leurs conceptions des principes de l'analyse. Leurs cours appelaient donc une attention particulière. De plus, la préparation au concours d'entrée à cette École oriente l'enseignement en classes préparatoires durant tout le XIX^{e} siècle, et donc l'essentiel de l'enseignement secondaire des mathématiques comme l'historiographie l'a établi[23]. Nous aurons donc à replacer notre travail sur l'enseignement des éléments de l'analyse dans le contexte historique de cette École. Nous nous appuierons sur les nombreuses recherches dont elle a fait l'objet. L'histoire institutionnelle, sociale et éducative de l'École polytechnique est à présent bien connue grâce à ces nombreux travaux. Citons en particulier ceux de Terry Shinn[24], Janis Langins[25], Bruno Belhoste, Amy Dahan-Dalmedico et Antoine Picon[26].

Trouvant ses origines dans les Collèges de l'Ancien Régime, l'enseignement secondaire en France s'est structuré à partir de la création des lycées par Napoléon, en 1802. Ils succédaient aux écoles centrales fondées en 1795. Destiné à fournir l'élite dirigeante du pays, l'enseignement secondaire était centré sur l'étude du latin et du grec, et ne concernait que

[22] Voir notamment l' « Annexe 3 : les auteurs et leurs livres » dans ZERNER Martin, op. cit.

[23] Lire en particulier, de BELHOSTE Bruno, l' « Introduction » dans *Les Sciences dans l'Enseignement secondaire français, Textes officiels. Tome I: 1789–1914,* Paris, Institut national de recherche pédagogique, 1995, p. 15-62 et voir le texte 3 « Programme d'admission à l'École polytechnique », p. 73-77 dans ce même ouvrage, et BELHOSTE Bruno, « La préparation aux grandes écoles scientifiques au XIXe siècle : établissements publics et institutions privées », *Histoire de l'éducation*, n° 90, 2001, p. 101-130.

[24] SHINN Terry, *Savoir scientifique et pouvoir social. L'École polytechnique (1794-1914*), Paris, Presses de la Fondation Nationale des Sciences Politiques, 1980.

[25] LANGINS Janis, *La République avait besoin de savants*, Paris, Belin, 1987.

[26] Voir l'ouvrage collectif dirigé par BELHOSTE Bruno, DAHAN-DALMEDICO Amy et PICON Antoine, *La formation polytechnicienne, 1794-1994,* Paris, Dunod, 1994, et, de BELHOSTE Bruno, *La formation d'une technocratie : L'École polytechnique et ses élèves de la Révolution au Second Empire*, Paris, Belin, 2003.

quelques pour cent des garçons d'une classe d'âge. Il était majoritairement fréquenté par des élèves provenant des classes sociales les plus favorisées. Parmi eux, certains, remarqués pour leurs capacités particulières, étaient issus de milieux plus modestes.

Cet enseignement se développe à partir des années 1830 sous l'effet de l'industrialisation du pays. Ses effectifs font plus que tripler, passant d'environ 50 000 à plus de 180 000 élèves durant le XIXe siècle[27]. La croissance de l'économie requiert des cadres, mais aussi des techniciens. C'est ainsi que, parallèlement à l'enseignement classique, se crée un enseignement spécial, sans latin ni grec, où les sciences occupent une place privilégiée. Vers la fin du siècle, il regroupe environ le tiers des élèves de l'enseignement secondaire, mais reste considéré comme un enseignement de second ordre. À partir des années 1880 ses programmes et ses méthodes se rapprochent de celles de l'enseignement classique. En 1891, sa transformation en enseignement moderne parachève ce processus pour en faire, selon le souhait du Ministre de l'Instruction publique, Léon Bourgeois, un véritable enseignement classique basé sur l'étude des sciences.

Dans le secondaire, deux niveaux d'enseignement vont nous intéresser dans cette thèse. Le premier est celui des classes préparatoires. Cette expression désigne tout d'abord les classes qui préparent aux concours des École polytechnique et normale supérieure. Il s'agit des classes de mathématiques spéciales des lycées et de leur équivalent, souvent de leur complément[28], dans des institutions privées. L'expression englobe aussi, de façon plus générale, les classes préparatoires aux concours des autres écoles du gouvernement. Au XIXe siècle, ces écoles seront progressivement l'École spéciale militaire ou École Saint-Cyr, l'École navale, l'École forestière, l'École centrale des arts et manufactures, et l'École des mineurs de Saint-Étienne.

Après 1852, les plus importants des lycées publics créent des classes dédiées à la préparation à ces concours. Les statistiques officielles les considèrent comme des classes de mathématiques élémentaires. Cependant, le concours d'admission à l'École centrale est plus proche de celui de l'École polytechnique, surtout après que la théorie des dérivées est inscrite à son programme, en 1867. C'est ce que confirme le *Cours de mathématiques* de Charles de

---

[27] Source, PROST Antoine, *Histoire de l'enseignement en France, 1800-1967,* Paris, Armand Colin, 1968.

[28] Jusqu'à la loi Falloux, en 1851, les élèves des institutions privées étaient tenus de suivre les cours dans un établissement public.

Comberousse. La première édition, en 1861, est destinée aux candidats à l'École centrale. La deuxième, en 1887, s'adresse aux candidats aux Écoles polytechnique, normale supérieure, et centrale.

Le second niveau d'enseignement auquel nous nous intéresserons est celui des classes qui préparent aux baccalauréats scientifiques. Avant 1891, il s'agit de la préparation au baccalauréat ès sciences en classe de mathématiques élémentaires. De 1891 à 1902, il existe deux baccalauréats scientifiques : le baccalauréat « Lettres-Mathématiques » préparé en mathématiques élémentaires, et le baccalauréat « Lettres-Sciences » préparé en classe de 1^e^ Sciences, qui est la classe terminale de l'enseignement moderne.

L'histoire institutionnelle de l'enseignement secondaire au XIX^e^ siècle a connu ses premiers travaux importants dans la première moitié du XX^e^ siècle[29]. Ils ont été suivis de recherches qui portaient plus d'attention aux études statistiques et aux acteurs[30]. Cette riche historiographie a été complétée récemment par de nombreuses études sur l'enseignement des sciences dans le secondaire. Il faut en particulier mentionner l'étude menée par Nicole Hulin sur la réforme dite de la bifurcation, qui en 1852, organise pour la première fois une filière scientifique en parallèle de la filière littéraire[31]. Il faut aussi citer l'imposant ouvrage dirigé par Bruno Belhoste, répertoriant et analysant les textes officiels qui, sur tout le XIX^e^ siècle, organisent l'enseignement secondaire des sciences[32]. Cet ouvrage nous a été particulièrement utile, par son contenu et par l'orientation qu'il a donnée à nos propres recherches.

L'historiographie a porté une attention toute particulière à la réforme de 1902, que ce soit dans le cadre de l'histoire générale de l'enseignement, ou dans celui plus particulier de l'enseignement des sciences. Cette réforme a en effet doté l'enseignement secondaire d'une structure qui a perduré pendant plus d'un demi-siècle. De plus, elle a mis l'enseignement scientifique sur un pied d'égalité avec l'enseignement littéraire. Citons notamment les travaux

[29] Nous renvoyons aux ouvrages de PIOBETTA Jean-Baptiste*, Le baccalauréat de l'enseignement secondaire,* Paris, Baillière, 1932, et de FALCUCCI Clément*, L'humanisme dans l'enseignement secondaire en France au XIXe siècle*, Toulouse, Privat, 1939.
[30] Citons ici les ouvrages de PROST Antoine, *Histoire de l'enseignement en France, 1800-1967*, Paris, Armand Colin, 1968, MAYEUR Françoise, *Histoire de l'enseignement et de l'éducation,* tome III, 2e éd., Paris, Perrin 2004, et plus récemment, de SAVOIE Philippe, *La construction de l'enseignement secondaire*, Lyon, ENS Éditions, 2013.
[31] HULIN Nicole, *L'organisation de l'enseignement des sciences: la voie ouverte par le Second Empire*, Paris, Éditions du C.T.H.S., 1989.
[32] BELHOSTE Bruno, *Les Sciences dans l'Enseignement secondaire français, Textes officiels. Tome I: 1789–1914,* Paris, Institut national de recherche pédagogique, 1995.

de Antoine Prost[33], Nicole Hulin, Hélène Gispert et Marie-Claire Robic[34], de Rudolf Bkouche[35] et de Bruno Belhoste[36]. La réforme de 1902 est, en quelque sorte, l'épilogue du processus que nous nous proposons d'analyser et notre travail participe en ce sens à la compréhension des motifs de cette réforme.

Cependant, peu d'études ont été consacrées à l'enseignement secondaire des mathématiques. Parmi elles, la plupart ont concerné la géométrie[37]. L'enseignement de la géométrie occupait en effet la plus grande part des programmes de mathématiques. De plus, en 1902 des innovations importantes apparaissent dans le programme de géométrie. Les directives officielles incitent à enseigner la géométrie dans une approche expérimentale qui rompt avec la méthode synthétique pratiquée auparavant, tandis que se répand sous l'impulsion de Charles Méray l'enseignement d'une géométrie du mouvement qui abandonne la distinction entre géométrie plane et géométrie dans l'espace.

L'enseignement de l'analyse en classe de mathématiques spéciales n'avait pas encore été, en tant que tel, l'objet de travaux historiques. L'introduction de la théorie des dérivées, en 1891, dans la classe terminale de l'enseignement moderne n'est au plus qu'évoquée dans certains articles[38]. Occultant la décennie qui précède, l'historiographie considère habituellement que l'enseignement secondaire de l'analyse commence en 1902. Ceci occulte également, de 1891 à 1897, l'enseignement de la théorie des fonctions dérivées en classe de mathématiques élémentaires préparatoire à l'École Saint-Cyr. Parmi les écoles du gouvernement de cette fin

---

[33] PROST Antoine, « De l'enquête à la réforme. L'enseignement secondaire des garçons de 1898 à 1902 », *Histoire de l'Éducation*, N° 119, Paris, INRP, 2008, p. 29-80.

[34] HULIN Nicole*, L'enseignement et les sciences. L'exemple français au début du XX^e^ siècle*, Paris, Vuibert, 2005, GISPERT Hélène, HULIN Nicole et ROBIC Marie-Claire, *Science et enseignement. L'exemple de la grande réforme des programmes du lycée au début du XXe siècle*, Paris, INRP/Vuibert, 2007.

[35] BKOUCHE Rudolf, « Variations autour de la réforme de 1902/1905 », dans Hélène GISPERT (dir.), *La France Mathématique*, Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences et Société Mathématique de France, Paris, 1991, p. 181-213,

[36] BELHOSTE Bruno, « L'enseignement secondaire français et les sciences au début du XXe siècle. La réforme de 1902 des plans d'études et des programmes », *Revue d'Histoire des Sciences,* t. 43, 1990, p. 371-400.

[37] On pourra voir la bibliographie proposée dans MOUSSARD Guillaume, *Les notions de problèmes et de méthodes dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie en France (1794-1891)*, Thèse de doctorat, LMJL, Université de Nantes, Nantes, 2015.

[38] Voir BKOUCHE Rudolf, « De la modernité dans l'enseignement des mathématiques », dans Évelyne BARBIN et Marc MOYON (dir.), *Les ouvrages de mathématiques dans l'Histoire. Entre recherche, enseignement et culture,* Limoges, Presses Universitaires de Limoges, 2013, p. 205-216, et RENAUD Hervé, « Academics, textbooks and reform of mathematics education in secondary French schools (1890-1905) », dans Kristin BJARNADOTTIR, Fulvia FURINGHETTI, Johan PRYTZ et Gert SCHUBRING (éditeurs), *Proceedings of the Third International Conference on the History of Mathematics Education*, Uppsala University, 2015, p. 327-343.

de siècle, elle est celle qui recrute le plus grand nombre de candidats. Son impact sur l'enseignement secondaire des mathématiques n'est donc pas à négliger. Nous nous proposons de donner à ces deux moments toute la place qu'ils méritent dans l'histoire de l'enseignement secondaire de l'analyse.

Corpus de textes et méthodologie

Les textes officiels sont le premier outil dont nous disposons pour mener à bien cette thèse. Le *Bulletin Universitaire* de 1830 à 1850, auquel succède le *Bulletin administratif de l'Instruction publique*[39], et le *Journal officiel de la République française* à partir de 1868, donnent accès, aux textes de lois, décrets, arrêtés, concernant les réformes et les programmes. Les archives de l'École polytechnique permettent de combler les lacunes de ces collections concernant les programmes de l'École pour le concours d'admission et d'accéder au programme de l'enseignement de l'analyse à l'intérieur de l'école, auquel le programme d'admission est bien évidemment connecté.

À partir de 1889 les comptes rendus du Conseil supérieur de l'Instruction publique sont aussi publiés dans le *Bulletin administratif*. Même succincts, ils mettent en lumière des tensions dans les débats qui conduisent à l'élaboration des textes officiels. Il en est de même des procès-verbaux du Conseil d'Instruction et du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique. Christian Gilain[40], Bruno Belhoste[41] et Gert Schubring[42], notamment, ont déjà montré tout l'intérêt de ces documents. Si ces procès-verbaux avaient été largement étudiés pour la première moitié du XIX^e^ siècle, il n'en est pas de même pour la seconde moitié, période qui est l'objet de notre étude.

Mais notre principale source d'information demeure l'analyse des manuels scolaires à destination de la classe de mathématiques spéciales puis, à partir de 1891, de la classe de 1^e^ Sciences et des classes de mathématiques élémentaires. S'ils « ne permettent de saisir qu'un aspect de la réalité [,] il reste qu'ils donnent en général le texte social du savoir [et] en tout

[39] Nous le désignerons simplement par la suite comme *Bulletin administratif*.

[40] GILAIN Christian, « Cauchy et le cours d'analyse de l'École polytechnique », *Bulletin de la Sabix*, N° 5, 1989, p. 3-31.

[41] BELHOSTE Bruno, *La formation d'une technocratie : L'École polytechnique et ses élèves de la Révolution au Second Empire*, Paris, Belin, 2003.

[42] SCHUBRING Gert, *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century, France and Germany*, New-York, Springer, 2005.

état de cause, ils permettent une étude systématique »[43]. Ce sont des indicateurs forts sur la mise en œuvre des programmes et sur d'éventuelles *actions en retour* sur les programmes engendrées par ces manuels et par les enseignements dispensés dans les classes auxquelles ils s'adressent. Les travaux d'Évelyne Barbin ont en effet mis en évidence le rôle des classes préparatoires dans la modification des contenus enseignés dans le cas de la géométrie descriptive[44]. Nous chercherons à déterminer s'il se produit quelque chose d'analogue pour l'enseignement de l'analyse.

La lecture, à des fins historiques, de ce type particulier d'ouvrage qu'est le *manuel scolaire* nécessite des précautions méthodologiques soulignées par les travaux récents d'Alain Choppin[45] et Annie Bruter[46]. Alain Choppin, insistant sur la question de l'identification d'un texte comme manuel scolaire, rappelle que, dans leur classification générale des manuels scolaires, Gabriela Ossenbach Sauter et Miguel Somoza distinguent cinq caractéristiques pour ce type d'ouvrages :

> L'intention manifestée par l'auteur ou l'éditeur de destiner expressément l'ouvrage à un usage scolaire ; la présentation systématique des contenus ; l'adéquation au travail pédagogique, la complexité des contenus devant être proportionnée à la maturité intellectuelle et affective des élèves ; la conformité à la règlementation sur les contenus d'enseignement et la manière dont ils doivent être traités ; l'intervention administrative et politique de l'État, par le biais de la règlementation.[47]

Parmi tous ces points, les deux premiers ne posent pas de difficulté pour les ouvrages que nous considérerons. Les manuels d'algèbre destinés à la classe de mathématiques spéciales, à la classe de 1e Sciences ou à la classe de mathématiques élémentaires que nous examinerons

---

43 ZERNER Martin, « La transformation des traités français d'analyse (1870-1914) », 1994, p. 6, https://hal-unice.archives-ouvertes.fr/hal-00347740/fr/ , consulté le 31/08/2017.

44 BARBIN Evelyne, « Top-down: the role of the Preparatory Classes to the Grandes Écoles into the French System of Mathematical Curriculum (1870-1970) », dans *Proceedings of the Third International Conference on the History of Mathematics Education,* Uppsala, Sweden, 25-28 september 2013, p. 49-64.

45 Voir, de CHOPPIN Alain, « L'histoire des manuels scolaires. Une approche globale », *Histoire de l'Éducation*, n° 9, 1980, p. 1-25, « Le cadre législatif et réglementaire des manuels scolaires. I, De la Révolution à 1939 », *Histoire de l'Éducation*, n° 29, 1986, p. 21-58, et « Le manuel scolaire, une fausse évidence historique », *Histoire de l'Éducation*, n° 117, p. 7-56.

46 BRUTER Annie, « Les abrégés d'histoire d'Ancien Régime en France (XVIIe-XVIIIe siècles) », dans Jean-Louis JADOULLE (dir.), *Les manuels scolaires d'histoire : passé, présent, avenir*, Louvain-la-Neuve, Université Catholique de Louvain, 2005.

47 D'après SAUTER Gabriela Ossenbach et SOMOZA Miguel cités dans MOUSSARD Guillaume*, Les notions de problèmes et de méthodes dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie en France (1794-1891),* dans CHOPPIN Alain, *op. cit.*, p. 41.

indiquent précisément, pour la plupart, le public auquel ils sont destinés. En outre, tous les auteurs de manuels que nous avons retenus sont, au moment de la publication de la première édition, professeurs en mathématiques élémentaires, en mathématiques spéciales ou exercent des fonctions dans des institutions privées qui préparent aux concours d'admission aux écoles gouvernementales. De plus, le contenu est presque toujours présenté en respectant la structure indiquée par le programme. Dans ce type d'ouvrage, les écarts à cette structuration canonique révèlent des intentions particulières de l'auteur qui présentent pour nous le plus grand intérêt.

Nous aurons à discuter de la conformité des manuels aux programmes d'enseignement. En effet, la plupart des manuels que nous avons analysés ne se conforment pas strictement aux programmes. Cette non-conformité est pour nous une précieuse source d'information sur l'origine des modifications de programmes. Elle ne nous paraît donc pas un obstacle à l'emploi de l'ouvrage comme manuel scolaire, sauf si elle se joint à un écart trop grand entre la complexité des contenus et la maturité intellectuelle des élèves. L'une comme l'autre sont difficiles à apprécier, mais l'écart apparaît manifeste dans certains cas, en s'appuyant sur l'outil méthodologique que constitue le travail de comparaison. Cet écart est pour nous, là encore, source d'information sur l'enseignement de l'analyse.

La réglementation imposée par l'État a connu des régimes variés durant le siècle. Les premiers programmes des lycées, en 1802 et 1809, imposaient les manuels à employer. Puis, jusqu'en 1875, les manuels utilisés dans l'enseignement public devaient avoir reçu au préalable l'accord d'une commission. À partir de 1875 un régime de plus grande liberté est instauré, permettant aux enseignants de choisir les livres qu'ils souhaitent employer. L'un des critères que nous avons retenu pour le choix des manuels étant leur succès de librairie, il ne fait pas de doute qu'ils ont reçu l'accord de l'administration.

L'indication claire, par l'auteur ou par l'éditeur, du public auquel est destiné un manuel ne suffit pas pour affirmer que son utilisation par ce public était la destination principale de cet ouvrage. Comme Alain Choppin le rappelle, « avant qu'ils ne fussent mis entre les mains des élèves, les manuels furent des livres réservés aux maîtres »[48]. Nous ne disposons que de peu

[48] CHOPPIN Alain, « Le manuel scolaire, une fausse évidence historique », *Histoire de l'Éducation*, n° 117, p. 41.

d'informations sur les pratiques d'enseignement au XIXe siècle[49]. Il semble cependant acquis que le professeur dispensait un cours magistral que les élèves reprenaient en note. Les manuels en sa possession étaient l'un des outils à sa disposition pour confectionner son cours. L'utilisation des manuels par les élèves semble avoir été réservée aux heures d'étude, sous la direction de maîtres répétiteurs[50]. Quant à la possession de manuels par les élèves, la situation a probablement considérablement évolué entre la fin du XVIIIe siècle et les premières années du XXe siècle, mais nous manquons là encore d'informations.

Il ne faut pas non plus oublier que nombreux étaient les enseignants de mathématiques spéciales ou de mathématiques élémentaires qui conservaient des activités de recherche. C'est le cas de la très grande majorité des auteurs de manuels écrits par des enseignants de ces classes que nous avons étudiés. Ces deux activités résonnaient l'une dans l'autre. La porosité des frontières qui séparent ouvrages de mathématiques destinés à la recherche, à l'enseignement où à la culture a été soulignée par Évelyne Barbin et Marc Moyon[51]. Comme l'indique Gert Schubring à propos des mathématiques : « tout le développement depuis l'instauration d'un système d'éducation publique en France a confirmé et même approfondi ce lien indissociable entre l'enseignement et l'invention »[52]. Les exemples fournis à l'appui de cette affirmation sont puisés dans l'enseignement supérieur (précisons que nous appelons enseignement supérieur l'enseignement délivré en faculté ou dans les écoles auxquelles les élèves accèdent à l'issue des classes préparatoires). Nous aurons à examiner si, ce qui est à

[49] Voir de BRUTER Annie, « Le cours magistral comme objet d'histoire », *Histoire de l'Éducation*, n° 120, 2008, p. 5-32 et « Le cours magistral dans l'enseignement secondaire. Nature, histoire, représentations (1802-1902). », *Histoire@Politique*, n° 21, 2013, p. 22-38.

[50] Appelés « maîtres d'étude » jusqu'en 1853, ils étaient appelés à assurer la discipline et à diriger le travail des élèves durant les études. Bacheliers pour la plupart, ils étaient souvent, surtout vers la fin du XIXe siècle, licenciés pour ceux qui avaient une formation scientifique. La question du statut des maîtres répétiteurs est débattue à l'occasion de chacune des réformes de la fin du siècle. On pourra voir à ce sujet l'entrée « Maîtres répétiteurs » dans *Nouveau dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire publié sous la direction de Ferdinand Buisson*, édition de 1911, Institut Français de l'Education, http://www.inrp.fr/edition-electronique/lodel/dictionnaire-ferdinand-buisson/, consulté le 22/08/2017, et de LE BARS Loïc, *Les professeurs de silence. Maîtres d'études, maîtres répétiteurs et répétiteurs au XIXe siècle*, Paris, L'Harmattan, 2014. On pourra lire aussi, comme apportant un témoignage romancé, le roman autobiographique de VALLÈS Jules, *Le Bachelier*, Paris Gallimard, 1974.

[51] BARBIN Évelyne et MOYON MARC, « Avant-propos » dans Évelyne BARBIN et Marc MOYON (dir.), *Les ouvrages de mathématiques dans l'Histoire. Entre recherche, enseignement et culture*, Limoges, Presses Universitaires de Limoges, 2013, p. 7-10.

[52] SCHUBRING Gert, « Remarque sur la note de Bruno Belhoste, « Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques » parue dans la RHM 4 (1998), p. 289-304 », *Revue d'Histoire des Mathématiques*, n° 7, 2001, p. 298. Voir aussi l'article initial auquel répond ce texte de Gert SCHUBRING : BELHOSTE Bruno, « Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques », *Revue d'Histoire des Mathématiques*, n° 4, 1998, p. 289-304.

présent considéré par les historiens des mathématiques comme une évidence pour l'enseignement supérieur, est aussi vrai dans l'enseignement secondaire.

Enfin, l'une des caractéristiques des manuels scolaires au XIXe siècle, ce qui le distingue des publications académiques, ce sont, pour certains ouvrages, leurs nombreuses rééditions. Selon Schubring elles reflètent,

> avec les modifications du texte, le degré d'acceptation sociale de la science transmise ainsi que des pressions sociales tendant à imposer des changements (en méthodologie, « métaphysique », contenu, etc.)[53]

Schubring propose une méthodologie en « trois dimensions » pour analyser l'œuvre d'un auteur de manuels dans plusieurs champs disciplinaires :

> - la première dimension consiste à analyse les changements dans les différentes éditions d'un manuel […]
> - la deuxième dimension consiste à trouver des changements correspondants dans d'autres manuels appartenant à la même œuvre en étudiant les parties concernées par les mêmes champs conceptuels
> - la troisième dimension rapporte les changements dans les manuels aux changements du contexte : changements dans les programmes, décrets ministériels, débats didactiques, évolution des mathématiques, changements épistémologiques, etc.[54]

Notre objectif n'est pas d'analyser des œuvres d'auteurs mais, dans le domaine restreint qui est le nôtre, cette approche méthodologique est au cœur de notre travail de compréhension des changements survenus dans les programmes au cours du demi-siècle que couvre cette thèse. À ces dimensions nous avons ajouté une comparaison diachronique entre différentes collections de manuels. La méthode qui consiste à mettre en parallèle, sur la durée, des manuels de différents auteurs, permet une analyse fine des similitudes et des différences de conceptions d'enseignants qui ont eu des formations différentes, dans des lieux différents. Elle est aussi révélatrice de la mise en débat des programmes dans les manuels scolaires, et donc, de ces *actions en retour* qui sont un des éléments du processus que nous étudions.

Une telle méthode de travail implique à son tour une méthodologie de lecture des manuels afin que la comparaison soit pertinente. Ils doivent être replacés dans le cadre des programmes existants en recherchant la conformité de la structuration des connaissances

[53] SCHUBRING Gert, « On the Methodology of Analyzing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author *», For the Learning of Mathematics*, Vol. 7, No. 3, 1987, p. 44.
[54] *Ibid.*, p. 45.

adoptée par les auteurs à celle indiquée par les programmes, ainsi que les proportions respectives de l'analyse dans les manuels et les programmes. La recherche systématique des notions et théorèmes contenus dans ce que nous avons désigné comme *premiers éléments de l'analyse* entraîne bien souvent une recherche concomitante de ces notions dans d'autres articles du programme d'algèbre, mais aussi dans des manuels de géométrie analytique ou dans des manuels d'algèbre destinés à des niveaux inférieurs d'enseignement. La comparaison est encore une fois d'autant plus riche d'informations que les éditions sont nombreuses.

Enfin, nous nous sommes intéressés aux exercices proposés par ces manuels. Leur objectif est la préparation des candidats à un examen ou à un concours. Les exercices d'entraînement sont un élément essentiel de cette préparation. Il faut bien évidemment éviter de transposer au XIX^{e} siècle notre conception de la difficulté d'un exercice. Le public, la formation, étaient différents Cependant le type d'exercices, la façon dont ils se modifient dans le temps sont là encore des indices du « degré d'acceptation sociale de la science », mais aussi des pratiques enseignantes.

La pluralité des éditions a donc été le critère principal de choix des manuels pour notre corpus. Elle est le meilleur marqueur du succès d'un manuel scolaire car nous ne disposons d'indications sur le tirage que pour quelques ouvrages parus autour de 1810. De plus, le succès d'un manuel est une preuve de son emploi, c'est-à-dire un indicateur de ce qui s'enseignait.

Le second critère a été le rôle institutionnel des auteurs, ou des personnalités de référence qui garantissaient au livre une grande visibilité lors de sa publication. Ainsi les *Leçons d'algèbre* d'Émile Pruvost et Dominique Piéron, l'ouvrage du même nom de Carlo Bourlet, et le *Traité d'algèbre élémentaire* de Narcisse Cor et Jules Riemann ne connaissent qu'une édition dans la période qui nous intéresse. Mais Pruvost est Inspecteur général, Piéron est Inspecteur de l'Aacadémie de Paris ; le manuel de Bourlet est publié dans le cadre d'un cours dirigé par Gaston Darboux, mathématicien majeur de la fin du XIX^{e} siècle, engagé institutionnellement dans le champ éducatif ; et Cor et Riemann se revendiquent de Tannery dont toute une génération d'anciens élèves enseigne en mathématiques spéciales ou en mathématiques élémentaires. Ces manuels avaient toute leur place dans notre corpus.

Des acteurs dans les lieux d'enseignement

Autant que des manuels, il s'agit donc d'auteurs d'ouvrages qui sont des acteurs majeurs de l'enseignement secondaire des mathématiques dont nous interrogeons les textes. La plupart enseignent dans les grands lycées publics parisiens qui regroupent plus du tiers des élèves de mathématiques spéciales du pays[55]. En 1850 ces lycées sont au nombre de cinq : Louis-le-Grand, Condorcet, Charlemagne, Henri IV et Saint-Louis. À la fin du siècle il faut ajouter les lycées Carnot, Janson de Sailly, le lycée de Versailles et les collèges Chaptal et Rollin pour les établissements disposant d'une classe de mathématiques spéciales. Nombre de ces professeurs enseignent aussi à l'École normale supérieure, à la Sorbonne ou à l'École polytechnique. Ils sont au centre du réseau de professeurs de classes préparatoires qui se constitue à partir des années 1840[56]. Les sites du Laboratoire de recherche historique Rhône-Alpes (LARHRA)[57], de l'Association des amis et anciens élèves de l'École normale supérieure (a.Ulm)[58], de la Bibliothèque centrale de l'École polytechnique[59], ainsi que le site de Roland Brasseur sur les professeurs de mathématiques spéciales[60] nous ont permis de reconstituer les itinéraires de ces enseignants.

Pratiquement tous ont été formés à l'École normale supérieure et ont obtenu l'agrégation qui, suivant les époques, a été une agrégation de sciences ou une agrégation de mathématiques. Ceux qui ne sont pas issus de cette École sont d'anciens élèves de l'École polytechnique ou ont suivi un cursus en faculté des sciences et ont obtenu une licence de mathématiques. La formation des enseignants est, comme l'a montré Évelyne Barbin, une des conditions de la mise en place de nouveaux programmes[61]. C'est à ce titre que nous nous sommes intéressés à l'enseignement de l'analyse dispensé en Faculté des sciences et à l'École normale supérieure.

---

[55] 35,6% en 1898 (Source : *Enquête sur l'Enseignement secondaire, Tome III, Statistique et Rapports des Recteurs et des Inspecteurs d'Académie*, Paris, Imprimerie de la Chambre des Députés, 1899).

[56] Voir BARBIN Évelyne, « Le réseau des professeurs de mathématiques des classes préparatoires au XIXe siècle », Arnaud HUREL (dir.), *La France savante* (édition électronique), Paris, 2017, http://cths.fr/_files/ed/pdf/13_barbin_frasav.pdf , consulté le 29/08/2017.

[57] http://rhe.ish-lyon.cnrs.fr/ , consulté le 29/08/2017.

[58] https://www.archicubes.ens.fr/ , consulté le 29/08/2017.

[59] https://www.polytechnique.edu/bibliotheque , consulté le 29/08/2017.

[60] https://sites.google.com/site/rolandbrasseur/5---dictionnaire-des-professeurs-de-mathematiques-speciales , consulté le 30/08/2017.

[61] Voir BARBIN Évelyne, "Teaching of conics in 19th and 20th centuries: on the conditions of changing (1854–1997)", dans K. Bjarnadottir, F. Furinghetti, J. M. Matos, et Gert Schubring (éd.), *Proceedings of the Second International Conference on the History of Mathematics Education*, Lisbonne, UIED, 2012, p. 44-59.

Cette École est le lieu institutionnel de formation des professeurs de mathématiques qui enseigneront ensuite dans les classes de mathématiques élémentaires et spéciales des lycées. Jusqu'à la fin des années 1850, son organisation connaît des vicissitudes liées aux différents régimes politiques, avant de se stabiliser. Mais, après l'éphémère École normale de l'An III, à partir de sa refondation en 1808, les élèves qui se destinent à un enseignement scientifique suivent les cours de licence à la Sorbonne et complètent leur formation avec des maîtres de conférences à l'École même.

Les travaux sur l'École normale supérieure sont nombreux. L'École normale de l'An III a, en particulier, été l'objet de recherches approfondies[62]. Robert J. Smith[63] a montré comment cette école pour professeurs se transforme, au cours de la Troisième République, en un lieu de formation de leaders politiques. Craig Zwerling[64] s'est attaché à montrer l'émergence de l'École normale supérieure comme lieu de la recherche scientifique qui va supplanter l'École polytechnique dans les dernières décennies du XIXe siècle. Mais l'histoire de l'enseignement des mathématiques dispensé dans cette École reste à écrire. L'ouvrage de Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, nous a permis d'approcher la formation des futurs enseignants de lycées sur les fondements de l'analyse à la fin du XIXe siècle. La pertinence du choix de cet ouvrage est confirmée par de nombreux témoignages.

L'enseignement de l'analyse en Faculté des sciences est tout aussi mal connu. Nous disposons cependant de plus d'éléments concernant l'enseignement à la Sorbonne où se forment les élèves de l'École normale supérieure. Les ouvrages de Lacroix, titulaire de la chaire de calcul différentiel et intégral de 1809 à 1843, puis de Joseph Alfred Serret, titulaire de cette même chaire de 1863 à 1871 nous ont servi d'indicateurs. Le *Traité élémentaire de de calcul différentiel et de calcul intégral*[65] de Lacroix a été écrit pour l'École polytechnique, et c'est dans ce cadre que nous l'analysons. Mais nous savons que Lacroix l'utilisait son pour préparer

[62] Citons plus particulièrement l'ouvrage dirigé par dans Jean DHOMBRES, *L'École normale de l'An III, Leçons de mathématiques : édition annotée des cours de Laplace, Legendre et Monge*, Paris, Dunod, 1992 et celui paru récemment sous la direction de Dominique JULIA : *L'École normale de l'an III*. *Une institution révolutionnaire et ses élèves – Introduction historique*, Paris, Éditions Rue d'Ulm, 2016.

[63] SMITH Robert J., *The École normale supérieure and the third republic*, Albany, State University of New-York Press, 1982.

[64] ZWERLING Craig, « The emergence of the École Normale Supérieure», dans Robert FOX et *George WEISZ, The Organization of Science and Technology in France, 1808-1914*, Cambridge, Cambridge University Press, 1980.

[65] LACROIX Sylvestre-François, *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral, précédé de réflexions sur la manière d'enseigner les Mathématiques, et d'apprécier dans les examens le savoir de ceux qui les ont étudiées*, Paris, Duprat, An X (1802).

ses cours en faculté[66]. Serret a rédigé son *Cours de calcul différentiel et intégral*[67] d'après ses leçons à la Sorbonne. Lorsqu'il y enseignait, le programme de l'École polytechnique était la base des études scientifiques en faculté[68]. Cet ouvrage, qui a connu cinq éditions jusqu'en 1902, est répertorié par l'historiographie comme l'un des ouvrages majeurs pour l'enseignement de l'analyse durant la période que nous considérons.

Pour les facultés de province, nous avons accordé une attention particulière au *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal* qu'Antoine-Augustin Cournot publie en 1841 d'après ses cours à la toute nouvelle Faculté des sciences de Lyon[69]. Ce manuel, réédité en 1847, nous fournit un exemple de diffusion de l'analyse dans une faculté de province et nous permet de connaître les conceptions d'un acteur institutionnel de première importance. Au moment de la parution, Cournot est en effet Inspecteur Général des Études et président du jury de l'agrégation de mathématiques.

Les journaux mathématiques constituent un autre élément essentiel de notre corpus de textes. Les historiens des mathématiques se sont, depuis peu, particulièrement intéressés aux journaux mathématiques au XIXe siècle. Parmi les travaux consacrés à ce nouveau champ de recherche, citons ceux de Christian Gérini et Norbert Verdier[70], et le groupe de travail « Nouvelles Annales » animé par Hélène Gispert[71]. Ces recherches sont centrées sur les auteurs, le lectorat et les stratégies éditoriales plus que sur le contenu des articles. Nous nous sommes livrés à une analyse des principaux journaux du XIXe siècle dont le public affiché était celui de l'enseignement secondaire, professeurs et élèves, à la recherche des discussions sur les programmes d'analyse et les méthodes d'enseignement. Débattre des programmes et méthodes était, à sa création en 1899, l'objectif de la revue *L'Enseignement mathématique*. Il

[66] Voir EHRHARDT Caroline, « L'identité sociale d'un mathématicien et enseignant, Sylvestre-François Lacroix (1765-1843) », *Histoire de l'Éducation*, No. 123, Paris, INRP, 2009, p. 5-43.
[67] SERRET Joseph Alfred, *Cours de calcul différentiel et intégral,* Paris, gauthier-Villars, 1868.
[68] Voir HULIN Nicole, « La rivalité École normale - École polytechnique. Un antécédent : l'action de Pasteur sous le Second Empire », *Histoire de l'Éducation*, 1986, vol. 30, p. 71-81.
[69] COURNOT Antoine-Augustin, *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal*, tomes I et II, Paris, Hachette, 1841.
[70] Voir en particulier, de GERINI Christian, *Les annales de Gergonne : apport scientifique et épistémologique dans l'histoire des mathématiques*, Villeneuve d'Ascq, Presses Universitaires du Septentrion, 2002, de VERDIER Norbert, « Les journaux de mathématiques dans la première moitié du XIXe siècle en Europe », *Philosophia Scientae*, 13-2, 2009, p. 97-126 et de GERINI Christian et VERDIER Norbert, « L'émergence de la presse mathématique en Europe au 19ème siècle. Formes éditoriales et études de cas (France, Espagne, Italie et Portugal) », *College Publications*, Collection « Cahiers de logique et d'épistémologie », Vol. 19, Oxford, 2014.
[71] Voir le site http://nouvelles-annales-poincare.univ-lorraine.fr/ , consulté le 31/08/2017.

a donc été facile d'identifier dans ce journal les articles qui nous intéressaient. Cela l'était moins pour les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, le *Journal de mathématiques élémentaires et spéciales* ou la *Revue de mathématiques spéciales* dont le propos est moins d'interroger les enseignements que de proposer des questions de mathématiques et des sujets d'examens et de concours. Les débats se glissent au milieu d'articles, dans le courrier des lecteurs, et surtout dans la bibliographie, à l'occasion de la recension d'ouvrages. Nous nous sommes livrés à une analyse systématique de la bibliographie proposée par ces journaux, complétée par une recherche par mots que permet la numérisation de la plupart des numéros de ces revues. Nous ne prétendons cependant pas avoir été exhaustifs et il reste sans doute beaucoup à découvrir.

Plan de la thèse

Notre recherche est encadrée par les deux moments importants que sont, en 1851, l'inscription de la théorie des fonctions dérivées au programme d'admission à l'École polytechnique et, en 1902, la généralisation de cette théorie dans l'enseignement secondaire.

Elle a nécessité, dans une première partie, de revenir sur ce que furent les conceptions et les enseignements des *premiers éléments de l'analyse* à l'École polytechnique, de sa création en 1794, jusqu'en 1850. Il ne nous en effet a pas paru possible d'analyser les manuels pour la classe de mathématiques spéciales, ni les textes d'auteurs comme Olry Terquem ou Pierre Finck qui, avant 1851, militent pour l'introduction du calcul différentiel à ce programme, sans une compréhension fine des conceptions des principes de l'analyse enseignées à l'École polytechnique. Ces manuels et ces textes s'inscrivent directement dans l'histoire de l'enseignement du calcul différentiel de cette École. Il ne s'agissait cependant pas de se livrer à une étude exhaustive des sources disponibles dans les archives de l'École. Celles-ci sont particulièrement riches, que ce soit les cours lithographiés, les résumés de leçons des enseignants ou les notes manuscrites d'élèves. De plus, un tel travail n'est pas l'objet de cette thèse.

Nous avons tout d'abord relu, dans le cadre de notre problématique, les divers ouvrages publiés à partir des leçons professées à l'École. Ces textes de Lagrange, Lacroix, Cauchy, Henri Navier, Jean-Marie Constant Duhamel et Charles Sturm assuraient une diffusion des éléments de l'analyse à l'extérieur de l'École polytechnique. Nous avons complété cette lecture par celle de cours lithographiés ou imprimés, disponibles aux Archives de l'Ecole polytechnique, de Jean-Guillaume Garnier, André-Marie Ampère, Louis Mathieu, Navier, Sturm et Joseph Liouville. Ils nous ont permis d'accéder aux conceptions d'enseignants qui n'ont pas publié d'ouvrages, et de préciser, en suivant la méthodologie décrite plus haut, les modifications significatives intervenues dans leurs enseignements. En suivant cette même démarche méthodologique, nous nous sommes livrés à l'étude simultanée des programmes d'analyse de l'École avec pour objectif de comprendre les débats sur les principes qui ont cours à l'École polytechnique et leurs interactions avec les enseignements.

La deuxième partie de cette thèse concerne essentiellement l'enseignement de l'analyse en classe de mathématiques spéciales, de 1851 à 1902. Mais, là encore, elle nécessite de revenir, dans un premier chapitre sur une première diffusion de l'analyse en aval de l'École polytechnique. En effet, en vue de la préparation au concours, des éléments de calcul différentiel sont enseignés dans certaines classes préparatoires. Ce fait a déjà été signalé dans un contexte différent sans cependant avoir fait l'objet d'une étude pour lui-même[72]. Nous avons donc recherché des traces de cet enseignement avant 1851, des écoles centrales aux classes de mathématiques spéciales des lycées, en recherchant les débats qu'il suscitait, à l'intérieur ou à l'extérieure de l'École.

Trois événements majeurs marquent l'enseignement de l'analyse en mathématiques spéciales entre 1851 et 1902. Le premier est, en 1885, l'introduction dans le programme d'admission à l'École polytechnique des notions d'infiniment petits, de différentielle et d'intégrale définie. Le second, en 1896, est la suppression de ces mêmes notions du programme d'admission. Le troisième, en grande partie extérieur à cette École est inscrit dans la durée. Il s'agit de la constitution des fondements de l'analyse sur des bases arithmétiques, connue sous le nom d'arithmétisation de l'analyse[73]. Les années 1870 sont particulièrement importantes avec la réception en France des travaux de l'école allemande et leur prolongement par ceux de

---

[72] Voir le chapitre 14, « Projets de réforme à l'École polytechnique » dans MOATTI Alexandre, *Gaspard-Gustave de Coriolis (1792-1843) : un mathématicien, théoricien de la mécanique appliquée,* Thèse de doctorat, Université Paris I – Sorbonne, Paris, 2011.

[73] Le terme est dû à Felix KLEIN et, dans une première traduction, d'abord orthographié « arithmétization » (voir KLEIN Felix, « Sur « l'arithmétization » des mathématiques », traduit par Alexandre VASSILIEFF*, Nouvelles annales de mathématiques, 3e série*, t. 16, 1897, p. 114-128).

Darboux qui enseigne alors à l'École normale supérieure[74]. Jordan les approfondira avec la publication, en 1887, du troisième tome de la première édition de son *Cours d'analyse de l'École polytechnique*, puis avec la publication de la deuxième édition de cet ouvrage à partir de 1893[75]. Mais, en ce qui concerne la diffusion de ces travaux dans l'enseignement, le moment marquant, déjà relevé par l'historiographie[76], est la publication en 1886 de l'ouvrage de Tannery : *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*.

Dans cette deuxième partie, nous étudions donc dans un premier temps l'enseignement de l'analyse en mathématiques spéciales jusqu'en 1885. Cette période d'une trentaine d'années est riche en manuels fréquemment édités. Citons ici le *Traité d'algèbre* de Joseph Bertrand, les *Leçons d'algèbre* de Charles Briot et le *Traité d'algèbre* de Hermann Laurent. À eux trois, ils totalisent plus de vingt éditions. Ils nous ont permis de déployer notre méthode de recherche. L'examen comparatif de ces manuels permet de comprendre la mise en œuvre de ce programme. Leur mise en parallèle avec la chronologie des modifications du programme d'admission à l'École polytechnique donne accès à ces *actions en retour* que nous recherchons.

Pour comprendre les nouveautés du programme de 1885, il nous a fallu revenir une nouvelle fois à l'enseignement de l'analyse à l'École polytechnique, de 1850 à 1885. L'historiographie avait déjà signalé l'importance de Duhamel dont les conceptions s'imposent et marquent l'enseignement supérieur de l'analyse durant cette période[77]. Nous relisons ses textes sur l'enseignement des principes de l'analyse. Dans notre démarche comparative, nous examinons aussi ceux de Bertrand, Hermite et Jordan à l'École polytechnique, de Serret à la Sorbonne, de Houël[78] à la faculté des sciences de Bordeaux, ainsi que ceux de Sonnet, Boussinesq et Collignon pour les futurs ingénieurs. Nous poursuivons par l'examen de la mise

[74] DARBOUX Gaston, « Mémoire sur les fonctions discontinues », *Annales scientifiques de l'École normale supérieure, 2e série*, tome 4, 1875, p. 57-112.
[75] JORDAN Camille, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, t. 3, Paris, Gauthiers-Villars, 1887, et *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, *Deuxième édition entièrement refondue*, t. 1, Paris, Gauthiers-Villars, 1893.
[76] Voir ZERNER Martin, *op. cit.*
[77] *Ibid.*
[78] Nous adoptons pour Houël l'orthographe de François PLANTADE (voir PLANTADE François, « Comment Jules Hoüel a rédigé la partie « Les fonctions elliptiques » de son cours de Calcul infinitésimal avec l'aide de Gösta Mittag-Leffler », dans Évelyne BARBIN et Marc MOYON (dir.), *Les ouvrages de mathématiques dans l'Histoire. Entre recherche, enseignement et culture*, Limoges, Presses Universitaires de Limoges, 2013, p. 173-185).

en œuvre de ce programme, jusqu'à l'abandon, en 1897, des notions d'infiniment petit, de différentielle et d'intégrale définie.

Ce retour en arrière du programme d'admission ne peut s'expliquer, selon nous, qu'en considérant l'enseignement des nouveaux fondements de l'analyse durant les dix années qui précèdent. Nous terminons donc cette deuxième partie par le rappel des étapes essentielles de l'arithmétisation de l'analyse, par l'étude de la diffusion de ces notions en France, dans l'enseignement supérieur puis en classe de mathématiques spéciales, et par l'examen des tensions que cet enseignement suscite. Les manuels d'algèbre de Boleslas Niewenglowski et de Pruvost et Pieron participent à cette diffusion en classe de mathématiques spéciales. Nous examinons ensuite dans quelle mesure cette mise en place de l'arithmétisation de l'analyse affecte des ouvrages déjà édités de nombreuses fois en reprenant les manuels de Briot et Laurent. La lecture des procès-verbaux des Conseils d'instruction et de perfectionnement de l'École polytechnique nous montre en quoi le programme d'admission de 1897 apporte des réponses aux questions soulevées par l'enseignement des nouveaux fondements de l'analyse. Nous examinons pour terminer les débats que ce nouveau programme suscite dans les journaux mathématiques.

La troisième partie de cette thèse est consacrée à l'enseignement des *premiers éléments de l'analyse* avant le baccalauréat, de 1891 à 1902 et à la recherche des motifs qui conduisent aux nouveaux programmes de mathématiques de 1902. Nous revenons sur les réformes de 1890-1891 qui modifient l'accès au baccalauréat scientifique de l'enseignement classique et instituent l'enseignement moderne. L'introduction de la théorie des dérivées dans l'enseignement moderne est concomitante à l'inscription de cette même théorie au programme du concours d'admission à Saint-Cyr. Nous recherchons les rapports entre ces deux réformes avant d'étudier la mise en œuvre du nouveau programme en classe terminale de l'enseignement moderne. Nous examinons à cet effet des manuels de Paul Porchon et Charles Vacquant destinés exclusivement à l'enseignement moderne. L'analyse des ouvrages de mathématiques élémentaires de Bourlet, Henri Neveu, Cor et Riemann, permet de comprendre les conséquences de cette réforme sur l'enseignement classique.

Nous complétons cette analyse par l'étude des débats dans la presse sur l'enseignement de la théorie des dérivées dans le secondaire et l'examen du volet enseignement des mathématiques dans l'enquête parlementaire de 1899. Les travaux de Prost cités plus haut n'avaient pas traité cet aspect de la réforme. Nous associons les résultats de cette enquête à des statistiques établies postérieurement sur le baccalauréat. La combinaison de l'analyse des manuels, de celle des débats et des résultats des deux enquêtes offre de nouveaux éléments de compréhension des motifs qui conduisent aux nouveaux plans d'études et programmes de la réforme de 1902.

PREMIÈRE PARTIE : Les principes de l’analyse à l’École polytechnique (1794-1851)

La question de l'éducation des hommes est l'une des problématiques majeures portées par les révolutionnaires qui veulent rompre avec l'Ancien Régime. Cette rupture passe, dans un premier temps, par l'abolition des structures de l'ancien système éducatif. La construction d'un nouveau système éducatif sera l'un des objectifs de l'Assemblée législative qui crée un Comité d'instruction publique. Reflet des idéaux portés par la Révolution en matière d'instruction, le *Rapport et projet de décret* présenté par Condorcet à l'Assemblée nationale en 1792 propose une organisation du système éducatif en cinq degrés qui accompagne le développement de l'individu, de l'école primaire à l'Institut[1] destiné à former savants et professeurs.

La science tient une place essentielle dans cette instruction dont la « première condition » est « de n'enseigner que des vérités »[2]. Un certain nombre de savants sont eux-mêmes engagés depuis le début dans ce mouvement révolutionnaire. Le marquis de Condorcet en est sans doute la figure la plus emblématique. Mais ils sont nombreux. Le mathématicien Gaspard Monge est en janvier 1792, avec le physicien Jean-Henri Hassenfratz et le mathématicien Alexandre-Théophile Vandermonde l'un des membres fondateurs de la Société patriotique. Le chimiste Antoine-François Fourcroy et le mathématicien Lazare Carnot sont membres du Comité de Salut public institué en mars 1793.

En 1793, l'urgence du Comité de Salut public est la lutte contre l'ennemi extérieur. Il organise des « cours révolutionnaires sur la fabrication des salpêtres, des poudres et des canons » auxquels Monge et Hassenfratz participent activement. Parallèlement la Convention prévoit la création d'une école pour former les ingénieurs dont le pays a besoin. Hostile aux corporations, elle avait envisagé un temps de supprimer les écoles qui formaient les ingénieurs civils ou militaires : École des élèves du corps d'artillerie à Châlons-sur-Marne, École du génie militaire de Mézières, déplacée à Metz en février 1794, École des ponts et chaussées, École des mines, École des élèves-ingénieurs de la marine, École des ingénieurs-géographes. Si elles n'ont pas été supprimées, en 1794, elles sont désorganisée, manquent de moyens, parfois de

[1] Voir CONDORCET (marquis de) Marie-Jean-Antoine-Nicolas de Caritat, *Rapport et projet de décret sur l'organisation générale de l'instruction publique*, Paris, Imprimerie nationale, 1792.
[2] *Ibid.*, p. 3.

candidats ou de maîtres[3]. C'est dans ce contexte que la loi Fourcroy du 7 vendémiaire An III (28 septembre 1794) fonde l'École centrale des travaux publics[4].

Dès le 21 ventôse An II (11 mars 1794), un décret de la Convention avait institué une Commission des travaux publics chargée de s'occuper de l'établissement d'une École centrale des travaux publics. Au Comité de Salut public, Carnot et Claude-Antoine Prieur, dit Prieur de la Côte d'Or, anciens élèves de l'École de Mézières, qui avaient toute confiance en Monge, lui avaient confié l'organisation de cette nouvelle école. Monge avait été professeur de mathématiques à l'École de Mézières où il avait inventé ce qui allait devenir la géométrie descriptive. Cette théorie restait encore inconnue en dehors du cercle de ses anciens élèves. Dans la communauté mathématique, Monge avait été remarqué dès 1771 pour des travaux de géométrie différentielle, puis à partir de 1786, pour une série de mémoires sur la théorie des équations aux dérivées partielles[5]. À l'époque où lui est confiée l'organisation de la future école d'ingénieurs, il est responsable de la manufacture d'armes créée par la Commune de Paris, qu'il a organisée avec Hassenfratz.

Monge rédige les textes fondateurs de l'École centrale des travaux publics voulue comme une école de haute culture scientifique et technique, et entièrement indépendante des anciens corps d'ingénieurs. Jacques-Élie Lamblardie[6], directeur de l'École des ponts et chaussées, se charge de l'emménagement de l'École dans les dépendances du Palais-Bourbon.

La formation d'ingénieurs n'est pas le seul objectif assigné à l'École centrale des travaux publics (elle prendra le nom d'École polytechnique le 1er septembre 1795) comme le précise le premier cahier du *Journal de l'École Polytechnique* publié en germinal an III (mars-avril

---

[3] Sur la désorganisation de ces écoles en 1794, voir FOURCY Ambroise, *Histoire de l'École polytechnique*, Paris, École polytechnique, 1828, p. 1-12.

[4] Sur la fondation de l'École polytechnique, voir en particulier LANGINS Janis, *La République avait besoin de savants*,Paris, Belin, 1987, BELHOSTE Bruno, pour l'article « De l'École des Ponts et Chaussées à l'École centrale des travaux publics », *Bulletin de la Sabix*, n° 11, 1994, p. 1-57 et pour l'ouvrage *La formation d'une technocratie: L'École polytechnique et ses élèves de la Révolution au Second Empire*, Paris, Belin, 2003, et la partie consacrée à l'École polytechnique du chapitre III intitulé « Thermidorean Convention and Directory » dans GILLIPSIE Charles C., *Science an Polity in France : the revolutionary and Napoleonic Years*, Princeton/Oxford, Princeton University Press, 2004.

[5] Sur Monge on pourra consulter BELHOSTE Bruno et TATON René, « L'invention d'une langue des figures », dans Jean DHOMBRES (dir.), *L'École normale de l'An III, Leçons de mathématiques : édition annotée des cours de Laplace, Legendre et Monge*, Paris, Dunod, 1992, p. 269-303.

[6] Lamblardie sera le premier directeur de l'École centrale des travaux publics jusqu'en septembre 1795 avant de reprendre le poste de direction aux ponts et chaussées.

1795)[7], « [les] élèves étant destinés à remplir un jour, soit des fonctions d'ingénieurs de différens genres, soit des professions particulières qui exigent des hommes éclairés dans les sciences ou les arts »[8]. L'École doit aussi former des savants[9]. Tous ces motifs justifient selon le *Journal*, que la première branche de l'enseignement à l'École est celle des sciences mathématiques. Elle comprend « l'analyse mathématique, avec ses applications à la géométrie et à la mécanique »[10].

Les premiers programmes de l'École centrale des travaux publics, rédigés par Monge, sont publiés en pluviôse An III (janvier-février 1795)[11]. Présentés sous forme d'un arbre de la connaissance, ils comportent les « sciences mathématiques » et la physique, elle-même partagée en « physique générale » et « physique particulière ou chimie ». Les sciences mathématiques sont partagées en « Analyse » et « Description des objets »[12], donnant ainsi, à côté de l'analyse, une place centrale à la géométrie descriptive. L'analyse est elle-même partagée en « Analyse appliquée à la Géométrie » et « Analyse appliquée à la Mécanique ». Ce programme peu détaillé ne donne que ce qu'on pourrait qualifier de titres de chapitre. Il découpe l'analyse appliquée à la géométrie en trois parties : la première traite de la résolution des équations, la deuxième introduit des « Élémens du calcul différentiel » pour déterminer « les tangentes normales, &c, des lignes courbes », et la troisième des « Élémens du calcul intégral », pour les « Rectifications, quadratures, &c ». L'analyse appliquée à la mécanique s'adresse à des « élèves préparés par l'étude de la physique, de la chimie & de l'analyse géométrique »[13].

[7] Ce journal était destiné à publier les travaux des enseignants et des élèves de l'école afin d'offrir un modèle à d'autres établissements d'instruction et de diffuser des connaissances. Le premier cahier porte le nom de *Journal Polytechnique.* Les douze premiers cahiers, jusqu'en 1804, publient essentiellement des cours professés à l'école. À partir du 13e, on y trouve presque exclusivement des mémoires de recherche écrits par des professeurs ou des élèves de l'École polytechnique.

[8] « Avant-Propos », *Journal Polytechnique*, Premier cahier, An III (1795), p. III.

[9] Sur cette double vocation de l'École polytechnique, former des ingénieurs, mais aussi des savant et des professeurs, on pourra lire DHOMBRES Jean, « L'École polytechnique et ses historiens », dans FOURCY Ambroise, *Histoire de l'École Polytechnique*, réédition, Paris, Belin, 1987, p. 7-69 et BELHOSTE Bruno, « A propos des missions de l'École polytechnique : une réflexion historique », *Bulletin de la Sabix*, n° 26, 2000, p. 23-26.

[10] « Avant-Propos », *Journal Polytechnique*, Premier cahier, An III (1795), p. IV.

[11] Voir Annexe …

[12] La « Description des objets » comprend la stéréotomie, l'architecture, la fortification et le dessin.

[13] Annexe G, « *Texte des programmes de l'enseignement polytechnique de l'École centrale des travaux publics* », retranscrit dans LANGINS Janis, op. cit., p. 132.

L'enseignement de l'analyse mathématique pour la formation d'ingénieurs n'est pas en soi une complète nouveauté. En 1770, le *Cours de mathématiques à l'usage du corps de l'Artillerie* en quatre tomes de Étienne Bézout contient, dans le deuxième tome, la résolution des équations des quatre premiers degrés. Les *Élémens du Calcul différentiel* et les *Elémens du Calcul intégral* figurent dans le troisième[14]. Le titre du troisième tome précise qu'il contient « les principes généraux de la MECANIQUE, & l'HYDROSTATIQUE; précédés des Principes de Calcul qui servent d'introduction aux Sciences Physico-mathématiques ». L'avertissement indique que ces éléments de calcul différentiel et intégral y figurent en raison de leur utilité dans les calculs de la mécanique. Bézout proposait, « avant que d'entrer en Mécanique, [de] nous arrêter quelques moments sur cette partie du calcul qui a pour objet de décomposer les quantités jusque dans leurs Élémens, & de revenir de ces Élémens aux quantités mêmes »[15]. Dans le même esprit, le programme de l'École centrale des travaux publics prévoit de dispenser le cours de mécanique aux élèves initiés à l'analyse mathématique, et en particulier au calcul différentiel et intégral.

Couronnement de l'analyse mathématique, le calcul différentiel et intégral ne semble avoir été enseigné, en dehors de l'École d'artillerie ou, selon Jacques-Antoine Cousin, il était généralisé avant sa fermeture en 1772[16], que de manière exceptionnelle dans les écoles d'ingénieurs militaires, malgré la volonté du gouvernement de le généraliser aux armes savantes dans les années 1770. Il n'a pas non plus fait l'objet d'un enseignement officiel à l'École des ponts et chaussées où ces cours étaient donnés par les élèves les plus anciens et les plus forts à leurs camarades[17]. En dehors de ces quelques écoles d'ingénieurs, cet enseignement était aussi dispensé aux meilleurs élèves de certains collèges[18]. La création de

---

[14] Les candidats à l'École d'artillerie étaient interrogés sur le deuxième tome, le troisième étant l'objet d'un enseignement à l'école (voir FOURCY Ambroise, *Histoire de l'École polytechnique*, Paris, Belin, 1987).

[15] BÉZOUT Étienne, *Cours de mathématiques à l'usage du corps de l'artillerie, Nouvelle édition revue, corrigée et augmentée de l'Exposition abrégée du nouveau Système de Poids et Mesures, d'après le Mètre définitif ; par le C. GUILLARD, professeur de mathématiques*, tome 3, Paris, Richard, Caille et Ravier, 1797, p. 2.

[16] Voir COUSIN Jacques Antoine Joseph, *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral*, Paris, Jombert, 1777, p. XXIII. Cet enseignement aurait selon lui été contesté : « il en est sorti un très grand nombre de sujets estimables dont on n'a pas parlé, tandis que les détracteurs de cet établissement […] divulguaient les égarements de quelques autres». Ces mêmes détracteurs auraient imprimé, qu'en raison de cette instruction devenue « trop générale, des hommes qui n'étaient point destinés aux premières places, portaient dans les différents corps cet esprit d'examen si contraire à la subordination » (*Ibid.*, p. XXIII).

[17] Prony, qui donnera les premiers cours d'analyse appliquée à la mécanique à l'Ecole Centrale des Travaux Publics, l'enseignait à ses camarades des Ponts et Chaussées dans les années 1780.

[18] Pour l'enseignement du calcul infinitésimal avant 1794, on pourra consulter LAMANDÉ Pierre, « La Mutation de l'enseignement scientifique en France (1750-1810) et le rôle des écoles centrales : l'exemple de Nantes »,

l'École centrale des travaux publics lui assigne une fonction beaucoup plus large. Il apparaît alors comme l'outil mathématique indispensable à tous les futurs ingénieurs, civils ou militaires. Et son enseignement, resté jusqu'alors confidentiel, prend une toute autre ampleur avec une première promotion d'environ 400 élèves.

Durant plus d'un demi-siècle, l'enseignement de l'analyse en France sera donc essentiellement celui dispensé à l'École polytechnique. Mais cet enseignement subira lui-même au cours de cette période de profonds changements. Il ne représente à l'origine, à l'École centrale des travaux publics qu'environ 8% des cours[19]. Les modifications consécutives à la transformation de l'école en École polytechnique vont contribuer à l'accroissement de cet enseignement dans les années qui suivent. Ce changement de nom intervient dans le sillage des soubresauts politiques qui voient la victoire des thermidoriens sur les jacobins au printemps 1795. Les Académies, supprimées en 1793, renaissent sous la forme d'un Institut National et l'École polytechnique prépare désormais aux écoles d'application (écoles d'artillerie, du génie, des ponts et chaussées, des mines, des constructeurs de vaisseaux et des ingénieurs géographes) qui signent le retour des anciennes écoles d'ingénieurs[20].

Cette réorganisation provoquera une opposition des écoles militaires désireuses de réduire au minimum les cours d'application à l'École polytechnique. Laplace, examinateur de sortie à l'École polytechnique pour l'Artillerie, critique vivement l'enseignement qui y est donné. Ses critiques sont relayées par les professeurs de l'École du génie. Un compromis durable sera trouvé avec la loi du 25 frimaire An VIII (16 décembre 1799) qui fixe dans la durée le cadre institutionnel de l'École polytechnique. L'organisation des études initialement réparties en trois années (une première année dite de stéréotomie, suivie d'une année d'architecture et d'une année de fortifications) passera à deux ans. De plus, une modification importante intervient dans l'organisation administrative de l'École. Elle était dotée depuis 1794 d'une assemblée de professeurs présidée par le chef de l'École, le Conseil d'instruction. Il

---

PICON Antoine, *L'invention de l'ingénieur moderne : l'École des ponts et chaussées, 1747-1851*, Paris, Presses de l'École nationale des ponts et chaussées, 1992, *Sciences et Techniques en Perspective*, volume 15, Université de Nantes, 1988-1989, TATON René, « L'École royale du génie de Mézières » dans id. dir, *Enseignement et diffusion des Sciences en France au XVIII*[e] *siècle*, 2[e] éd., Paris, Hermann, 1986, p. 559-615.

[19] Voir GRISON Emmanuel, « Lagrange », *Bulletin de la Sabix*, N° 23, 2000, p. 44-52.

[20] Pour resituer les aléas des premières années de l'École dans le contexte politique de l'époque, voir en particulier le chapitre intitulé « Genèse et transformation d'une institution des lumières », dans BELHOSTE Bruno, *La formation d'une technocratie : L'École polytechnique et ses élèves de la Révolution au Second Empire*, Paris, Belin, 2003, p. 105-129.

déterminait les orientations de l'École et prenait les décisions importantes. En 1799 est créé un Conseil de perfectionnement destiné à coordonner les enseignements de l'École polytechnique et des écoles d'application[21]. Y siègent, outre le directeur de l'école, trois membres de l'Institut pris dans la classe des sciences mathématiques, quatre membres délégués par le Conseil d'instruction et sept membres qui représentent les écoles d'application : artillerie de terre, de mer, génie, ponts et chaussées, constructions navales, mines et ingénieurs géographes. Le rôle de ce Conseil est essentiel. Il arrête les programmes, règle l'emploi du temps des élèves et propose la nomination au Ministre des instituteurs, répétiteurs, examinateurs d'admission et examinateurs permanents. La composition des Conseils de perfectionnement et d'instruction évoluera au cours du XIX[e] siècle et l'équilibre entre les pouvoirs des Conseils connaîtra des modifications suivant les circonstances politiques.

La pression exercée par les écoles d'application à la fin des années 1790 va se traduire par un accroissement de la partie théorique et de l'enseignement des principes[22]. Ainsi à partir de 1801, et pour une décennie, le nombre de leçons consacrées à l'analyse se stabilise à 60 en première année et à une cinquantaine en deuxième année, ce qui représente 13,5% du volume des enseignements[23]. La majorité de ces leçons est consacrée au calcul différentiel et intégral. Le cours que donne Jean-Guillaume Garnier aux élèves de première année en 1800-1801, comporte seize leçons d'analyse algébrique, dix-sept de calcul différentiel et neuf de calcul intégral. Le cours qu'il donne l'année suivante aux mêmes élèves en deuxième année est presque exclusivement consacré au calcul intégral[24].

Le XIX[e] siècle tout entier est considéré dans l'historiographie comme celui de la fondation de l'analyse. La période qui nous intéresse dans cette partie est dominée en France par les noms de Joseph-Louis Lagrange, Joseph Fourier, Augustin-Louis Cauchy, Joseph Liouville, tous, à un

[21] Voir à ce propos la section intitulée « Le pouvoir des conseils » dans BELHOSTE Bruno, *op. cit.*, p. 50-53.

[22] Voir à ce sujet le chapitre intitulé « Culmination of Algebraization and *Retour du Refoulé* » dans SCHUBRING Gert, *op. cit.*, p. 298-303

[23] Chiffres donnés par MERCADIER *Ernest, « Histoire de l'Enseignement de l'École polytechnique » dans École polytechnique, Livre du centenaire, 1794-1894, Tome I, L'École et la Science*, Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1895, p. 1-88.

[24] GARNIER Jean-Guillaume, *Leçons d'analyse algébrique, différentielle et intégrale donnée en l'An IX à la première division de l'École polytechnique*, CRH cours : Garnier 1800, et *Cours d'analyse algébrique, fait en l'an 10. Cours d'analyse différentielle, fait en l'an 10,* CRH cours : Garnier 1801/COU, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

moment où un autre, professeurs d'analyse à l'École polytechnique, et à l'étranger par ceux de Carl Friedrich Gauss, Bernhard Bolzano, Niels Henrik Abel et Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, pour ne citer que les plus importants. Leurs travaux, en particulier ceux sur le développement d'une fonction en série trigonométrique, remettent en cause les fondements d'une science où l'intuition géométrique avait une part prépondérante, et contribuent à donner à l'analyse la rigueur démonstrative nécessaire après la fécondité des méthodes d'invention des XVII^e^ et XVIII^e^ siècles[25].

De même que la rigueur démonstrative doit s'appuyer sur des principes indiscutables, l'enseignement que vont devoir dispenser les mathématiciens à l'École polytechnique les confronte à la question des fondements. L'acte d'enseigner suppose en effet une clarification des notions à exposer à des « commençants ». L'historiographie récente a mis en évidence l'apport de l'enseignement à la constitution des fondements de l'analyse[26]. Mais l'enseignement dans une école destinée à former l'élite des cadres techniques du pays est nécessairement contraint par le cadre éducatif dans lequel elle s'insère et par le contexte politique et social. Ainsi les programmes et les enseignements de l'analyse à l'École polytechnique durant ce demi-siècle sont la résultante de trois dynamiques qui ne convergent pas nécessairement.

Nous analyserons donc tout d'abord, dans cette perspective scientifique, pédagogique et institutionnelle, les enseignements des acteurs majeurs que furent les professeurs d'analyse de l'École durant cette période. Notre propos n'est pas en soi l'étude de l'enseignement des éléments de l'analyse à l'école polytechnique, mais la compréhension des principes à la base de cet enseignement et leurs interactions avec les programmes.

Nous disposons, pour la quasi-totalité des professeurs d'analyse, d'ouvrages imprimés, de cours imprimés ou lithographiés, ou de notes de cours prises par des élèves. En raison de l'importance de la documentation, nous y consacrerons deux chapitres. La périodisation

---

[25] Voir LÜTZEN Jesper, « The Foundation of Analysis in the 19th Century», dans Hans Niels JAHNKE (dir.), *A History of Analysis*, Providence, American Mathematical Society, 2003, p.155-195.

[26] Voir notamment BELHOSTE Bruno, « Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques », *Revue d'Histoire des Mathématiques*, Vol. 4, 1998, p. 289-304, SCHUBRING Gert, « Remarque sur la note de Bruno Belhoste, « Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques » parue dans la RHM 4 (1998), p. 289-304 », *Revue d'Histoire des Mathématiques*, n° 7, 2001, p. 295-305. 298.

retenue pour chacun d'eux l'a été en fonction des contraintes institutionnelles, déjà documentées, qui ont été exercées sur l'enseignement de l'analyse à l'École à la fin des années 1810[27]. Dans les circonstances que nous rappellerons dans le deuxième chapitre, le Conseil de perfectionnement de l'École a décidé en 1811 de remplacer la méthode des limites par celle des infiniment petits pour l'enseignement de l'analyse.

Le tableau 1 liste les différents professeurs d'analyse à l'École polytechnique de 1794 à 1850. Ce n'est en fait qu'à partir de 1800 qu'il y a deux chaires d'analyse à l'École polytechnique, mais nous avons adopté, par commodité, une disposition sur deux colonnes à partir de 1795. Figurent en gras les noms des professeurs pour lesquels nous avons analysé des cours. Lorsque nous connaissions l'information, nous avons fait figurer à côté du nom de l'enseignant, en italiques, le nom du professeur d'analyse qu'il a eu à l'École où le nom d'un mathématicien de référence pour son apprentissage du calcul différentiel et intégral.

Lagrange (1795-1799)	**Prony** (1795)
Lacroix (1799-1809) (*Mauduit*)	**Fourier** (1795-1798) (*Bézou*t)
Ampère (1809-1827)	**Garnier** (1798-1802) (*Agnesi*)
Mathieu (1827-1838) (*Lacroix*)	Poisson (1802-1806)
Liouville (1838-1851) (*Ampère*)	Labey (1806-1809)
	Poinsot* (1809-1815)
	Cauchy (1815-1830) (*Lacroix*)
	Coriolis (1830-1831)
	Navier (1831-1836) (*Poisson*)
	Duhamel (1836-1840) (*Cauchy*)
	Sturm (1840-1855) (*L'Huillier*)

* Suppléé par Reynaud en 1812-1813 et 1813-1814, puis par Cauchy en 1814-1815

Tableau 1: les enseignants d'analyse à l'École polytechnique, de sa création à 1850

[27] Voir GUITARD Thierry, « La querelle des infiniment petits à l'École Polytechnique au XIXe siècle », *Historia Scientiarum*, 1986, N° 30, p. 1–61 et la section IV.3, « *Le Retour du Refoulé* : The Renaissance of the Synthetic Method at the *École polytechnique* », dans SCHUBRING Gert, *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century, France and Germany*, New-York, Springer, 2005, p. 295-308.

Chapitre 1 : Les principes de l'analyse à l'École polytechnique : de Lagrange à Lacroix (1795-1809)

L'enseignement de l'analyse, et plus particulièrement celui du calcul différentiel et intégral est donc, dès la fondation de l'École polytechnique, au cœur de la formation scientifique des ingénieurs. Mais il s'agit d'un enseignement qui doit être renouvelé, adapté à l'esprit révolutionnaire. Fourcroy a proclamé à l'Assemblée son dédain du « cours de Bézout », manuel de l'ancien régime[28]. La désignation, au printemps 1795, de Joseph-Louis Lagrange, l'un des plus grands mathématiciens de son temps, comme instituteur[29] d'analyse, assure à cet enseignement l'éclat et l'assurance de la nouveauté. En 1772, dans un Mémoire à l'Académie de Berlin intitulé *Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables*, Lagrange avait déjà proposé un point de vue original sur l'introduction du calcul différentiel. Car la question des fondements de ce calcul n'est pas résolue en cette fin de XVIII^e^ siècle.

Le calcul infinitésimal, apparu dans les dernières décennies du XVII^e^ siècle sous les traits du calcul différentiel de Leibniz en 1684 et sous ceux de la méthode des fluxions de Newton en 1687, a rapidement suscité de nombreuses controverses. Celle sur la priorité de la découverte de ce nouveau calcul n'est pas tout à fait éteinte un siècle plus tard mais la démarcation entre leibniziens et newtoniens, entre une école continentale et une école anglaise, n'est plus aussi tranchée. En revanche, la question des fondements de ce calcul qui utilise la notion d'infini, philosophiquement et mathématiquement problématique[30], est toujours débattue. Nous n'en sommes cependant plus aux expressions de rejet exprimées par certains mathématiciens à l'occasion de la publication, en 1696, du livre *L'Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* du Marquis de l'Hospital. Les immenses avancée réalisées en mathématiques, mécanique, astronomie, physique, ont montré la validité de ce calcul et ont installé la nouvelle analyse au centre des sciences mathématiques. Cependant, les infiniment petits sont toujours considérés comme une notion difficile à concevoir, et en particulier,

---

[28] Voir LANGINS Janis, *op. cit*, p. 40.
[29] Ce terme désigne les professeurs chargés des cours magistraux durant les premières années de l'école.
[30] « L'infini est le gouffre où s'absorbent nos pensées » était la devise qui, avec un numéro, identifiait le mémoire de L'Huillier, qui en 1784 remporta le concours organisé par l'Académie de Berlin pour obtenir une théorie claire de l'infini.

l'omission dans les expressions contenant des infiniment petits, de tous les termes d'ordre supérieur. En 1734, le philosophe anglais Georges Berkeley, avait affirmé que la présence d'erreurs dans les calculs ne permettait d'obtenir des résultats exacts que par la destruction réciproque de deux erreurs opposées. Selon lui, cela déniait au calcul infinitésimal le statut de science authentique[31]. Cette question des erreurs n'est pas tranchée en cette fin de XIXe siècle. De même, l'existence de différents ordres d'infiniment petits est tout aussi problématique. Enfin, il est toujours reproché à la méthode des fluxions de Newton d'introduire en géométrie la notion étrangère de mouvement.

Léonhard Euler et Jean Le Rond d'Alembert avaient renouvelé la question des principes vers le milieu du XVIIIe siècle. Rejetant la géométrie comme base du nouveau calcul, Euler avait placé la notion de fonction au centre de l'analyse dans l'*Introductio in analysin infinitorum* publié en 1748[32]. Dans cet ouvrage, « une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité & de nombres, ou de quantités constantes »[33]. La variable est une « quantité indéterminée », c'est-à-dire qui « comprend tous les nombres de quelque nature qu'ils soient »[34]. Euler distingue les fonctions algébriques des fonctions transcendantes, les fonctions algébriques pouvant être rationnelles ou irrationnelles. Les fonctions rationnelles sont entières ou fractionnaires. Les fonctions irrationnelles sont explicites, lorsqu'elles s'écrivent au moyen de radicaux, ou implicites lorsqu'elles dépendent de la résolution d'équations comme dans $Z^7 = azZ^2 - bz^5$, qui est l'exemple cité. Enfin une fonction peut être uniforme ou multiforme suivant qu'elle peut prendre une ou plusieurs valeurs pour chaque valeur déterminée de la variable. Les expressions analytiques pouvant être infinies, une part importante de l'ouvrage est consacrée

[31] En 1734, Georges Berkeley publie un texte intitulé « *Analyse ou Dissertation Adressée à un Mathématicien Incrédule où l'on examine si l'objet, les principes et les inférences de l'Analyse moderne sont conçus plus distinctement, ou déduits avec plus d'évidence que les Mystères de la Religion et les règles de la Foi* ». Il se place d'un point de vue philosophique et théologique mais adresse aussi des reproches mathématiques à la méthode infinitésimale. On pourra notamment consulter BLAY Michel, « Deux moments de la critique du calcul infinitésimal : Michel Rolle et Georges Berkeley », *Revue d'Histoire des Sciences*, Vol. 39, 1986, p. 223-253.

[32] Sur le concept de fonction, voir YOUSCHKEVITCH Adolf P., « The concept of function up to the Middle of the 19th Century »*Archive for History of Exact Sciences*, t. 16, 1976, p. 37–85, DHOMBRES Jean, « Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonction », *Archive for History of Exact Sciences*, 1986, t. *36*, p. 91–181 et LÜTZEN Jesper, « Between Rigor and Applications: Developments in the Concept of Function in Mathematical Analysis », dans Mary Jo NYE (éd.), *The Cambridge History of Science*, Vol. 5, Cambridge, Cambridge University Press, 2003, p. 468-487.

[33] EULER Léonhard, *Introduction à l'analyse infinitésimale*, traduction de Jean-Baptiste LABEY, Paris, Barrois, 1796, p. 2.

[34] *Ibid.*, p. 2.

aux séries. En effet, pour Euler, il ne fait aucun doute « que toute fonction ne puisse être transformée en une série infinie »[35]. Précisons enfin que, pour Euler, une fonction est continue si elle s'exprime par une seule expression analytique.

Dans les *Institutiones calculi differentialis*, en 1755, Euler introduit l'idée de dépendance dans la définition d'une fonction : « si certaines quantités dépendent d'autres quantités de telle manière que si les autres changent, ces quantités changent aussi, alors on a l'habitude de nommer ces quantités fonctions de ces dernières »[36]. Cette définition de nature plus large permet d'englober les fonctions qui représentent des phénomènes physiques.

Euler considère le calcul infinitésimal comme un cas particulier du calcul aux différences finies et un infiniment petit devient chez lui un zéro absolu : $\frac{dy}{dx}$ est la valeur qui est rigoureusement atteinte par le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ lorsque Δx et Δy sont réduits absolument à zéro. Cette approche algébrique et le calcul formel qui en résulte sont appliqués avec succès dans de nombreux problèmes physiques.

En 1751, dans l'*Encyclopédie*, d'Alembert rejette les infiniment petits car « dans le fond, le *calcul différentiel* ne suppose point nécessairement l'existence de ces quantités ; [...] ce calcul ne consiste qu'à *déterminer algébriquement la limite d'un rapport* »[37]. Reprenant la « méthode des premières et dernières raisons » de Newton, publiée en 1704, il fonde le calcul différentiel sur la méthode des limites. Dans l'article « limite » du tome IX de l'*Encyclopédie*, il affirme que la théorie des limites est la base de la vraie métaphysique du calcul différentiel. Il faut entendre par ce terme de métaphysique, qui se trouve déjà sous la plume de Leibniz[38] et que nous retrouverons chez la plupart des auteurs, la recherche des premiers principes sur lesquels fonder ce calcul. Pour d'Alembert,

> une grandeur est la limite d'une grandeur, quand la seconde peut s'approcher de la première plus près que d'une grandeur donnée, si petite qu'on puisse la

---

[35] *Ibid.*, p.46.

[36] EULER Léonhard traduit et cité par YOUSCHKEVITCH Adolf P., *op. cit.*

[37] d'ALEMBERT, Jean le Rond, Article « Différentiel », *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers*, tome IV, 1751, p. 985-989.

[38] Voir la citation de Leibniz dans BOSSUT (Abbé) Charles, *Traités de calcul différentiel et de calcul intégral,* tome I, Paris, Imprimerie de la République, An VI (1797), p. LVI.

> supposer sans pourtant que la grandeur, qui s'approche puisse jamais surpasser la grandeur dont elle s'approche. [39]

Dans le même article, il énonce un théorème sur l'unicité de la limite et un autre sur la limite d'un produit. Précisons qu'une grandeur, une idée « pourtant assez difficile de bien définir », est, selon lui, « tout ce qui est susceptible d'augmentation & de diminution ». Il distingue la grandeur abstraite « qui n'est autre chose que les nombres » de la grandeur concrète qui « renferme deux espèces, l'*étendue* & le *tems* »[40].

En 1764, le mathématicien anglais John Landen propose d'introduire le calcul différentiel par une méthode purement algébrique. Il parvient à lever les indéterminations de la forme $\frac{0}{0}$ pour les fonctions algébriques mais sa méthode ne s'applique pas aux fonctions transcendantes et, de plus, il utilise un symbolisme peu commode[41].

Dans son mémoire à l'Académie de Berlin de 1772, Lagrange fait reposer les principes du calcul différentiel et intégral sur le développement d'une fonction en série, c'est-à-dire sur le théorème publié par Taylor en 1715. Cette nouvelle approche des calculs différentiel et intégral présente l'avantage selon lui d'être « indépendante de toute métaphysique et de toute théorie des quantités infiniment petites ou évanouissantes »[42].

Car la question de l'infini mathématique ne semble toujours pas avoir reçu, pour la communauté savante, de réponse satisfaisante. En 1786, l'Académie de Berlin lance un concours pour obtenir « une théorie claire & précise de ce qu'on appelle Infini en Mathématiques », demandant « qu'on indique un principe sûr, clair, en un mot vraiment mathématique propre à être substitué à l'*Infini* »[43]. Le concours est remporté par le mathématicien genevois Simon L'Huillier pour qui les « premiers principes des calculs

---

[39] d'ALEMBERT Jean le Rond, Article « Limite », *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, Arts et des Métiers,* tome IX, 1759, p. 542.

[40] d'ALEMBERT Jean le Rond, Article « Grandeur », *Encyclopédie méthodique*, t. II, Paris /Liège, Panckoucke, Plomteux, 1785, p. 149.

[41] Il définit ce qu'il appelle une « valeur spéciale » qu'il note $[x'\_y]$ qui est la valeur du rapport $\frac{y-y_1}{x-x_1}$ où y et y_1 sont les valeurs respectives de la fonction pour x et x_1, lorsque $x = x_1$, ce rapport étant noté lui-même $[x|y]$. Voir LANDEN John, *The Residual Analysis*, tome I, Londres, L. Hawes, W. Clarke, 1764, p. 4, et FRIEDELMEYER Jean-Pierre*, Le Calcul des Dérivations d'Arbogast dans le projet d'algébrisation de l'analyse à la fin du dix-huitième siècle*, Thèse de doctorat, Nantes, 1993, p. 52.

[42] LAGRANGE Joseph-Louis, « Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables », *Œuvres de Lagrange*, t. 3, Paris, Gauthier-Villars, 1869, p. 443.

[43] *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-lettres,* Berlin, Decker, 1786, p. 12.

supérieurs »[44] sont donnés par la théorie des limites dont il propose la première véritable construction. Il démontre notamment les théorèmes sur l'unicité de la limite, sur les limites d'une somme et d'un produit, énonce et démontre le théorème sur la limite d'un quotient, et introduit la notation « lim. ».

En 1789, le mathématicien français Louis François Antoine Arbogast fait paraître un mémoire intitulé *Mémoire sur la nature des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations différentielles partielles*[45]. Il ajoute la notion de fonction discontigüe à la conception eulérienne des fonctions continues. La définition repose sur une image géométrique : « lorsque les différentes parties d'une courbe ne tiennent pas les unes aux autres »[46] la courbe, et la fonction qui lui correspond, sont dites discontigües. Son mémoire est couronné par un prix décerné par l'Académie de Saint Petersburg.

Enfin, concernant le calcul intégral, considéré au départ par Leibniz comme une somme de rectangles de largeur infinitésimale, la conception de Johann Bernoulli est majoritairement adoptée au XVIIIe siècle: le calcul intégral est l'inverse du calcul différentiel[47]. C'est ce que fait Euler dans son *Institutionum calculi integralis* en 1768, même s'il utilise l'intégrale comme somme dans son calcul des variations.

La question des principes fondateurs du calcul différentiel devient plus cruciale encore en raison du développement de l'enseignement de cette science à la fin du XVIIIe siècle. En France, immédiatement après la fondation de l'École polytechnique, entre 1795 et 1802, paraissent ou reparaissent sept livres consacrés au calcul différentiel et intégral. La publication d'un tel nombre d'ouvrages, en si peu d'années et dans un seul pays, est inédite depuis les débuts de cette science. Tous abordent la question des principes. Quatre d'entre eux sont des manuels d'enseignement. Il s'agit de la réédition en 1796 sous le titre de *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* de l'ouvrage de Jacques-Antoine Cousin publié une première fois en 1777 sous le titre *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral*, de la *Théorie des*

---

44 L'HUILLIER Simon, *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs*, Berlin, Decker, 1786, p. 7.

45 Sur ce mémoire, voir FRIEDELMEYER Jean-Pierre, *Le Calcul des Dérivations d'Arbogast dans le projet d'algébrisation de l'analyse à la fin du dix-huitième siècle*, Thèse de doctorat, Nantes, 1993, et le chapitre IV intitulé « Le concept de fonction aux prises avec le calcul intégral » dans LUBET Jean-Pierre et FRIEDELMEYER Jean-Pierre, *L'analyse algébrique. Un épisode clé de l'histoire des mathématiques*, Paris, Ellipses, 2015.

46 ARBOGAST Louis François Antoine, cité dans LUBET Jean-Pierre et FRIEDELMEYER Jean-Pierre, *op. cit.,* p. 84.

47 Voir le chapitre 5 « Approximate integration and conceptions of the integral » dans CARAMALHO DOMINGUES João, *Lacroix and the Calculus*, Bâle, Birkhäuser, 2008.

fonctions analytiques de Lagrange en 1797, des *Traités de Calcul différentiel et Intégral* de Bossut en 1798 et du *Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral* de Lacroix en 1802.

Est également publié, en 1800, *Le calcul des dérivations* d'Arbogast. Cet ouvrage s'adresse plus aux « géomètres » qu'aux « commençants » mais il semble à l'auteur qu'en utilisant sa méthode « on abrégerait d'une manière remarquable un traité de calcul différentiel »[48].

Les *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* de Carnot, publiées qu'en 1797[49] concernent, comme l'indique le titre, les principes fondateurs de ce calcul. Cet ouvrage est une version remaniée par l'auteur du manuscrit proposé à l'Académie de Berlin dans le cadre du concours de 1786 évoqué plus haut.

Avant d'examiner la question des principes dans le contenu mathématique des premiers enseignements à l'École polytechnique, nous étudierons, dans une première section, ce qu'écrivent ces différents auteurs sur les fondements du calcul différentiel, à une époque où « la situation […] était assez confuse, différents points de vue concurrents étant disponibles, chacun avec ses propres supporters ».[50] La lecture de ces textes, non seulement nous éclaire quant au positionnement de leurs auteurs mais aussi nous révèle la difficulté d'enseigner l'analyse dans le contexte scientifique qui marque les véritables débuts de cet enseignement en France.

Notre analyse des premiers enseignements des éléments de calcul différentiel et intégral à être dispensés à l'École polytechnique commence avec les cours de Gaspard Riche de Prony. Ils ont été publiés dans le *Journal de l'École polytechnique*. Des leçons de Lagrange, nous connaissons les deux ouvrages qu'elles ont inspirées : la *Théorie des fonctions analytiques* et les *Leçons sur le calcul des fonctions*. Les notes prises par un élève nous permettent de connaître le cours de Joseph Fourier qui, de la fin 1795 au début 1798 assure les cours réguliers d'analyse alors que Lagrange dispense ses leçons aux élèves les plus doués.

À la suite de la réorganisation de l'école en 1799, de nouveaux programmes sont adoptés. Nous étudierons leur mise en œuvre dans les *Leçons d'analyse algébrique, différentielle et intégrale* de Jean-Guillaume Garnier qui remplace Fourier, et dans le *Traité élémentaire de*

---

[48] ARBOGAST Louis François Antoine, *Du calcul des dérivations*, Strasbourg, Levrault, 1800, p. IX.
[49] Ce mémoire est publié dans les *Œuvres mathématiques du citoyen Carnot*, Bâle, Decker, 1797, p. 127-204.
[50] GRATTAN-GUINNESS Ivor, *Convolutions in French Mathematics*, *1800-1840*, Bâle, Birkhaüser, 1990, p. 139.

calcul différentiel et de calcul intégral de Sylvestre-François Lacroix qui remplace Lagrange. Ce dernier ouvrage marque une étape important dans l'enseignement du calcul différentiel à l'École polytechnique. Son auteur est reconnu par l'historiographie comme une pédagogue de premier plan et est considéré comme « le propagateur de la méthode des limites »[51]. L'analyse des principes du calcul différentiel dans cet ouvrage termine ce chapitre qui se clôt sur la démission de Lacroix.

1 – La question des principes de l'analyse à la fin du XVIIIe siècle

1 – 1 Le « Discours préliminaire » du *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral* de Cousin (1777-1796)

Lorsqu'il publie la première version de son texte, en 1777, Cousin est membre de l'Académie des Sciences depuis 1771[52]. Il enseigne la physique au Collège royal de France et il est professeur à l'École royale militaire de Paris[53]. L'ouvrage commence par un « Discours préliminaire » de vingt-cinq pages où il traite des problèmes des fondements du calcul différentiel en retraçant brièvement l'histoire de cette théorie. En 1796, lorsque paraît la nouvelle édition de son ouvrage, Cousin est toujours professeur de physique au Collège de France et membre de l'Institut. Engagé en politique dès 1791, il a été nommé par le Directoire membre du Bureau central des contributions de Paris. Le *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* de 1796 reprend souvent mot à mot le « Discours préliminaire » de 1777, actualisant seulement un bref passage qui a trait au contexte politique et institutionnel.

L'objectif de son livre est, annonce-t-il, de remédier au défaut que présente la plupart des ouvrages précédents : « ne pas avoir ce degré d'évidence qui est le fondement de la certitude »[54]. La cause en est, affirme-t-il, la notion de quantité infiniment petite que l'esprit peine à concevoir. Il pense, sans aucun doute, au cours de Bézout qui introduisait le calcul

---

[51] Nous reprenons l'expression à Gert SCHUBRING dans *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century, France and Germany*, New-York, Springer, 2005.

[52] Les quelques références biographiques sur Cousin sont fournies par la notice de JUNG Marjorie, « Cousin Jacques-Antoine Joseph », http://cths.fr/an/prosopo.php?id=117280# et la consultation des *Messages, Arrêtés et Proclamations du Directoire exécutif*, tome I, Paris, Baudoin, An IV (1796).

[53] Il ne semble dons pas y avoir eu jusqu'à la parution du livre d'enseignement du calcul différentiel à l'École militaire de Paris. Voir l'article de JACOB Marie, « L'École royale militaire : un modèle selon l'*Encyclopédie* », *Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie*, n° 43, 2003, p. 105-126.

[54] COUSIN Jacques Antoine Joseph, *Traité de Calcul différentiel et de calcul intégral*, Paris, Régent et Bernard, 1796, p. V. Sur cette notion d'évidence en mathématique, voir BARBIN Évelyne, « Historicité de la notion d'évidence en géométrie. Entre évidence visuelle et évidence manipulatoire », *Historia e Educacao Matematica*, Université de Braga, 1996, p. 124-135.

différentiel à la manière de Leibniz, en définissant la différentielle dx d'une quantité comme son accroissement infiniment petit, ce dernier étant déterminé par la connaissance de « la valeur de cette quantité pour un instant quelconque, & la valeur de cette quantité pour l'instant immédiatement suivant »[55]. Bézout expliquait ensuite, dans la règle donnant la différentielle du produit, qu'il fallait « omettre $dxdy$ qui est infiniment petit du second ordre, & par conséquent infiniment petit à l'égard xdy et ydx qui sont infiniment petits du premier »[56].

Newtonien, Cousin affirme que toutes les difficultés liées à ces quantités étaient résolues dans les *Principes mathématiques de la philosophie naturelle* de Newton mais que les géomètres capables de comprendre ce texte, « Leibnitz, les Bernoulli, Taylor, Côtes, le Marquis de l'Hospital, travaillèrent bien plus à augmenter l'édifice du Calcul Différentiel & du Calcul Intégral qu'à en éclairer l'entrée »[57]. Cependant, pour lui, bien que se prêtant à la rigueur mathématique, les fluxions newtoniennes avaient l'inconvénient d'introduire le mouvement en algèbre et en géométrie, une idée qui leur est absolument étrangère. Pour Cousin, c'est d'Alembert qui fit connaître, dans le tome IX de l'*Encyclopédie*, la « vraie métaphysique du Calcul différentiel & du Calcul Intégral, celle qui se déduit si facilement de la méthode des Anciens Géomètres […] connue sous le nom de *Méthode des limites* »[58].

Pour exposer cette métaphysique, Cousin revient à l'objet des mathématiques : comparer les grandeurs. Il adopte là aussi une conception newtonienne où le nombre abstrait est donné par le rapport de deux grandeurs. Et, selon lui, le rapport de l'unité à un nombre qui augmente continuellement donne l'idée du zéro comme limite, la limite de rapports qui croissent continuellement donnant l'idée de l'infini. La circonférence du cercle comme limite du périmètre de polygones inscrits ou circonscrits fournit un exemple de grandeur dont la limite n'est ni le zéro ni l'infini. De la notion de limite, il conclut ce qu'il appelle « les principes de toute géométrie transcendante » :

> 1°. que deux grandeurs qui sont la limite d'une même grandeur sont nécessairement égales entre elles ; […] 2]. que si deux grandeurs, qui croissent

[55] BÉZOUT Étienne, *Cours de mathématiques à l'usage du corps de l'artillerie, Nouvelle édition revue, corrigée et augmentée de l'Exposition abrégée du nouveau Système de Poids et Mesures, d'après le Mètre définitif ; par le C. GUILLARD, professeur de mathématiques*, t. III, Paris, Richard, Caille et Ravier, 1797, p. 10.
[56] COUSIN Jacques Antoine Joseph, *op. cit.*, p. 13.
[57] *Ibid.* p. V.
[58] *Ibid.* p. VI. L'expression « vraie métaphysique du Calcul Différentiel » est ici clairement reprise à d'Alembert.

> ou décroissent continuellement, conservent entre elles la même raison invariable, cette raison sera celle des limite des deux grandeurs.[59]

Ces deux principes, qui selon lui n'ont pas varié et qu'il convient d'employer dans les ouvrages élémentaires, sont à distinguer de la méthode, révolutionnée par l'application que Descartes a faite de l'algèbre à la géométrie. Newton ayant découvert dès 1669 les calculs pour résoudre le problème des tangentes, et ayant établi que les questions de quadrature et de rectification des courbes se ramenaient au problème inverse des tangentes, ce sont Leibniz et ses « disciples » qui ont développé ce nouveau calcul, l'ont fait connaître et l'ont appliqué avec succès à la résolution de problèmes : courbe isochrone, courbe brachistochrone, problèmes des isopérimètres, du solide de moindre résistance, etc.

En 1796, Cousin affirme donc que le calcul différentiel et intégral, inventé par Newton, repose sur des principes solides connus des Anciens et mis au jour par d'Alembert. Enfin, dans un passage qu'il qualifie de « digression » il affirme que l'étude des mathématiques transcendantes donne à l'esprit « de l'étendue et de la justesse » pour ensuite supposer :

> ce sont sans doute de semblables réflexions qui ont déterminé l'Assemblée nationale à exiger cette étude préliminaire des jeunes gens qui se présentent pour entrer dans le Génie Militaire & celui des Ponts et Chaussées, dans l'Artillerie, & dans la Marine.[60]

Cousin fait suivre cette supposition d'un paragraphe montrant l'intérêt de cet enseignement qui permettrait « d'épargner aux Artistes ces essais inutiles, en leur donnant des règles certaines»[61].

---

[59] *Ibid.* p. VII. La première de ces deux propositions est reprise à l'article de d'Alembert. Cousin a remplacé la deuxième proposition de l'article qui concerne la limite d'un produit par celle-ci sur un quotient (Voir d'ALEMBERT Jean le Rond, Article « Limite », *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, Arts et des Métiers*, tome IX, 1765, p. 542.

[60] *Ibid.* p. XIII.

[61] *Ibid.* p. XIII. Bruno BELHOSTE définit les artistes à la veille de la Révolution comme « des hommes indépendants généralement sortis du peuple et formés sur le tas, revendiquant une compétence pratique et recherchant, le plus souvent hors des cadres corporatifs, les voies de l'invention et de l'entreprise » (*La formation d'une technocratie : L'École polytechnique et ses élèves de la Révolution au Second Empire*, Paris, Belin, 2003, p. 106). Ils forment les techniciens du pays avec les ingénieurs, hommes du roi à la formation académique et au statut de fonctionnaire.

1 – 2 Les *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* de Carnot (1797)

Carnot nait en 1753 à Nolay, près de Dijon[62]. Après des études dans un collège oratorien, il entre à l'École du génie de Mézières où il étudie les mathématiques sous la direction de Monge. Parallèlement à sa carrière d'officier du génie, il participe à des concours organisés par diverses académies. C'est dans ce cadre qu'il participe, en 1786, au concours organisé par l'Académie de Berlin.

Malgré la qualité de son travail d'ingénieur, ses origines sociales modestes freinent sa carrière militaire. Il rencontre Robespierre en 1787. En 1789, il adhère aux idéaux révolutionnaires. Élu député à l'Assemblée législative puis à la Convention, il devient membre du Comité de salut public en 1793. Délégué aux Armées, il organise les armées de la République et joue un rôle décisif dans la guerre contre l'Autriche et la Prusse. Élu à l'Académie des sciences en 1796,[63] il fait paraître ses *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* l'année suivante, d'après son manuscrit de 1786[64]. Peu après la publication, il est exclu de l'Académie pour s'être opposé au coup d'état du 18 fructidor An V (4 septembre 1797) et est contraint de s'exiler en Suisse.

Selon Carnot, les premiers principes du calcul infinitésimal résident dans la compensation des erreurs[65]. Dans la figure 1 ci-dessous, il suppose que le cercle est un polygone ayant « un très grand nombre de côtés ».

MN est l'un de ces côtés. En le prolongeant jusqu'à l'axe, il obtient la tangente MT. Le calcul de la sous-tangente TP donne, en notant $DP = x$, $MP = y$, et a le rayon du cercle :

$$TP = \frac{y(2y + NO)}{2a - 2x - MO}.$$

En négligeant les quantités MO et NO, l'équation se réduit à la valeur cherchée :

---

[62] Sur Carnot, voir DHOMBRES Jean et DHOMBRES Nicole, *Lazare Carnot*, Paris, Fayard, 1997, et la section du chapitre V intitulé « *Le retour du refoulé* : From the Perspective of Mathematical Concepts » dans SCHUBRING Gert, op. cit., p. 309-364.

[63] Il est officiellement élu en raison de son *Essai sur les machines*, mais son engagement politique a joué un rôle majeur dans cette élection.

[64] Son ouvrage diffère du manuscrit par une moindre importance accordée à la théorie des limites Voir YOUSCHKEVITCH Adolf P., *op. cit.*). Cette notion y joue cependant un rôle fondamental comme nous allons le voir.

[65] Sur le manuscrit de Carnot transmis à l'Académie de Berlin, voir YOUSCHKEVITCH Adolf P., « La contribution de Lazare Carnot à la théorie de l'infini mathématique » dans GILLIPSIE Charles C. et YOUSCHKEVITCH Adolf P., *Lazare Carnot savant et sa contribution à la théorie de l'infini mathématique*, Paris, Vrin, 1979, p. 228-248, ainsi que l'annexe du chapitre VI intitulée « L'infini en mathématiques : comment en tirer le vrai du faux » dans DHOMBRES Jean et DHOMBRES Nicole, *op. cit.*, p. 177-191.

$$TP = \frac{y^2}{a-x}.$$

Ainsi, écrit-il en négligeant ces quantités, on a détruit « l'erreur à laquelle avait donné lieu la fausse hypothèse d'où l'on était parti »[66].

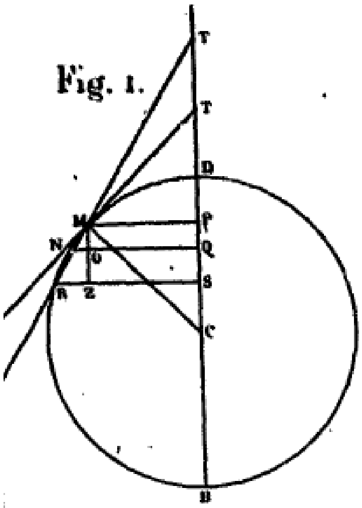


Figure 1: illustration par Carnot du calcul de la sous-tangente dans
Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal

Puis, Carnot définit une limite comme

> une quantité désignée de laquelle une quantité auxiliaire est supposée s'approcher perpétuellement, de manière qu'elle puisse en différer aussi peu qu'on voudra, et que leur dernière raison soit une raison d'égalité.[67]

Cela lui permet de définir une quantité infiniment petite, comme « une quantité dont la limite est 0 »[68], s'opposant « aux idées vagues qu'on se fait communément des quantités infinitésimales »[69], qu'il dénonçait dans les premières pages de l'ouvrage. Une quantité infiniment grande est une quantité de la forme $\frac{1}{0}$.

Carnot définit ensuite la notion d' « équation imparfaite », c'est-à-dire d'équation « dont les deux membres ont des quantités inégales, mais infiniment peu différentes l'une de l'autre »[70]. Il démontre alors que, si dans une équation exacte ou imparfaite, on substitue à une quantité « une autre quantité qui en diffère infiniment peu, ou dont le rapport à la première ait l'unité

[66] CARNOT Lazare, « Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal *», Œuvres mathématiques du citoyen Carnot*, Bâle, J. Decker, 1797, p. 138.
[67] *Ibid..*, p. 149.
[68] *Ibid.*, p. 150.
[69] *Ibid.*, p. 130.
[70] *Ibid.*, p. 156.

pour limite en dernière valeur, l'équation qui résultera de cette transformation ne pourra être une équation fausse »[71].

L'ouvrage de Carnot connaîtra rapidement une grande diffusion en Europe. Une nouvelle édition paraîtra en 1813. Carnot y adopte une position radicalement différente sur les infiniment petits qu'il définit sans recourir à la notion de limite. Cette nouvelle version peut se lire comme une « légitimation du changement radical de l'École polytechnique »[72]. Nous verrons en effet au prochain chapitre, qu'en 1811, le Conseil de perfectionnement de l'École revient sur la méthode des limites et impose les infiniment petits pour introduire le calcul différentiel.

1 – 3 Le principe fondamental de la *Théorie des fonctions analytiques* de Lagrange (1797)

Lagrange est reconnu, en cette fin de XVIII^e^ siècle comme l'un des plus grands, sinon le plus grand mathématicien vivant. Il n'a plus rien publié depuis la *Méchanique analitique* en 1788, ouvrage considéré alors comme son plus grand titre de gloire. Les leçons d'analyse qu'il donne à l'École Polytechnique à partir du 5 prairial An III (24 mai 1795) sont un événement, même si elles intéressent plus les professeurs que les élèves[73]. Gaspard Riche de Prony, lui-même instituteur du cours d'analyse appliquée à la mécanique, décrit des « instituteurs […] empressés de se ranger parmi ses auditeurs »[74]. Les leçons que Lagrange professera à l'École polytechnique de 1795 à 1799 seront l'occasion de reprendre et de développer les idées formulées dans son mémoire de 1772 et formeront la matière de deux ouvrages : la *Théorie des fonctions analytiques* en 1797 et les *Leçons sur le calcul des fonctions* en 1801. Il est difficile de dire si le premier livre est la traduction exacte de ses premières leçons mais il en est l'aboutissement, aboutissement tout provisoire d'ailleurs puisqu'il jugera utile de le remanier en publiant le second. Ce deuxième texte, que Lagrange présente comme le cours dispensé durant sa dernière année d'enseignement à l'école, en 1798-1799, est une version améliorée et complétée de la *Théorie des fonctions analytiques*. Il sera publié la première fois dans le

---

[71] *Ibid.*, p. 157.
[72] « a legitimization of the radical change at the *École polytechnique* », SCHUBRING Gert, *op. cit.*, p. 351.
[73] Sur l'enseignement de Lagrange à l'École polytechnique voir GRISON Emmanuel, « Lagrange », Bulletin de la Sabix, N° 23, 2000.
[74] PRONY (RICHE de) Gaspard, « Notice sur un cours élémentaire d'analyse fait par Lagrange», *Journal de l'École polytechnique*, 2e cahier, An IV (1796), p. 206.

tome X des *Séances des École normales* avant de l'être dans le tome V du *Journal de l'École polytechnique*, en 1804. Nous nous référons à ce dernier texte.

La *Théorie des fonctions analytiques* se présente comme une succession de leçons. L'ouvrage ne comporte pas de préface. Cependant, après avoir défini la notion de fonction et affirmé que toute fonction est développable en série entière, Lagrange consacre quatre pages à la question des principes du calcul différentiel. Cette question des principes est d'ailleurs mise en exergue puisque le sous-titre de l'ouvrage précise qu'il contient *les principes du calcul différentiel dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissans, de limites ou de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies*.

Dans ces quelques pages, Lagrange commence par indiquer que Leibniz et ses partisans, préoccupés de développer ce calcul, ne se sont pas soucié des principes. D'Alembert et Euler ont essayé d'y suppléer mais leurs idées ne lui semblent pas assez claires « pour servir de principes à une science dont la certitude doit être fondée sur l'évidence, et surtout pour être présentée aux commençans »[75]. D'ailleurs, il pense que la véritable métaphysique du calcul différentiel réside dans la compensation des erreurs. Lorsqu'il écrit sa *Théorie des fonctions analytiques*, Lagrange connaît le texte de Carnot. Il était directeur de la classe mathématique de l'Académie de Berlin lorsqu'elle lancé le concours auquel Carnot a répondu. Il est difficile de savoir s'il fait-il ici allusion au texte de Carnot. Il avait en effet publié lui-même une note dans le tome II des *Miscellanea Taurinensia* (1760-1761) où il énonçait que le calcul infinitésimal « redresse de lui-même les fausse hypothèses qu'on y fait »[76].

Nous retrouvons aussi chez Lagrange le reproche adressé à Newton d'introduire la notion de mouvement en géométrie. Mais plus que l'introduction d'une notion étrangère, il reproche aux fluxions d'utiliser l'idée de vitesse « dont tout le monde a ou croit avoir une idée » alors « qu'on n'a pas même une idée bien nette de ce que c'est que la vitesse d'un point à chaque instant, lorsque cette vitesse est variable »[77]. La méthode des dernières raisons présente selon lui le même inconvénient que celle des limites (qui n'en est finalement que la traduction

[75] LAGRANGE Joseph-Louis, *Théorie des fonctions analytiques*, Paris, Imprimerie de la République, 1797, p. 3.
[76] Voir YOUSCHKEVITCH Adolf P., « La contribution de Lazare Carnot à la théorie de l'infini mathématique » dans Charles C. GILLIPSIE et Adolf P. YOUSCHKEVITCH, *Lazare Carnot savant et sa contribution à la théorie de l'infini mathématique*, Paris, Vrin, 1979, p. 228-248.
[77] LAGRANGE Joseph-Louis, *op. cit.,* p. 4.

algébrique) : l'esprit ne peut avoir une idée claire d'un rapport de quantités qui deviennent l'une et l'autre nulles à la fois.

Il salue la tentative de Landen pour sa méthode purement analytique, mais d'une application difficile, ainsi que le travail d'Arbogast. Ce dernier a développé, dans un « beau mémoire » non publié, une idée semblable à celle qu'il avait lui-même proposée dans son mémoire de 1772 : le théorème de Taylor peut être regardé comme le principe fondamental du calcul différentiel. Nous reviendrons un peu plus loin sur ce texte d'Arbogast qui contient, selon Lagrange, « des développements et des applications » propres à cet auteur.

Lagrange indique que ce sont les cours à l'École Polytechnique qui lui ont donné l'occasion de rappeler, de confirmer et de généraliser cette idée, lui permettant de développer ce qu'il nomme un « calcul des fonctions ». Il propose d'en montrer l'identité avec le calcul différentiel. Ce calcul des fonctions lui permet de démontrer les principes et les règles du calcul différentiel « d'une manière indépendante de toute supposition et de toute métaphysique »[78].

Ce n'est sans doute pas là le moindre avantage que voit Lagrange à une introduction purement analytique d'un calcul qui n'a plus à être appelé différentiel : une présentation purement algébrique qui permet de se passer de toute métaphysique.

Lagrange précise sa pensée dans le « Discours sur l'objet de la Théorie des Fonctions analytiques » prononcé le 7 pluviôse An VII (26 janvier 1799) à l'École polytechnique, lors la séance d'ouverture aux cours. Ce discours est publié dans le sixième cahier du *Journal de l'École polytechnique* et sera repris dans les *Leçons sur le calcul des fonctions*. Il formule à la méthode des limites le reproche suivant : « la sous-tangente n'est pas à la rigueur la limite des sous-sécantes parce que rien n'empêche la sous-sécante de croître encore lorsqu'elle est devenue sous-tangente. Les véritables limites, suivant les notions des anciens, sont des quantités qu'on ne peut passer, quoi qu'on puisse en approcher aussi près que l'on veut ».

Il faut comprendre le propos de Lagrange de la façon suivante : lorsque la sécante atteint la position de la tangente, la sous-sécante PS atteint comme valeur la sous-tangente PT (figure 2 ci-dessous). En continuant à tourner la droite redevient sécante et la sous-sécante peut

[78] *Ibid.*, p. 7.

continuer à croître, c'est-à-dire dépasser la limite. Lagrange aborde le problème par la question de la sous-tangente puisque, communément, c'était la connaissance de la sous-tangente qui donnait la tangente à une courbe[79].

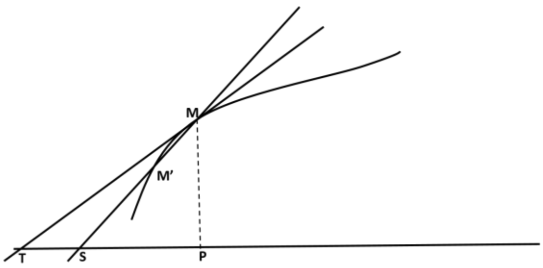


Figure 2 :sous-tangente et sous-sécante

Ainsi, chez les anciens géomètres, le cercle était limite des polygones inscrits mais jamais le périmètre de ces polygones ne pouvait dépasser celui du cercle. Cette volonté d'un retour aux conceptions et à la rigueur des anciens est l'une des marques de la *Théorie des fonctions analytiques* que nous examinerons plus loin.

Il concède cependant que la méthode des limites permet de démontrer rigoureusement les principes du calcul différentiel, mais en y employant une métaphysique étrangère à l'esprit de l'analyse. De même, s'il admet que la théorie des fluxions puisse ne pas faire appel à la mécanique, elle conserve l'inconvénient d'employer des quantités infiniment petites. Et, poursuit-il, ces différentes méthodes n'ayant pour but que d'obtenir les premiers termes du développement en série d'une fonction, autant considérer de la manière la plus générale le développement de ces fonctions. L'algorithme donnant les dérivées successives, une fois obtenu, fournira pour la géométrie des courbes et la mécanique « des expressions aussi simples et aussi intelligibles que le sont les expressions algébriques des puissances et des racines »[80].

1 – 4 Les principes du calcul différentiel dans les traités de Lacroix : d'une origine analytique à la « loi de continuité » comme « explication philosophique » des propriétés du calcul différentiel (1797-1802)

Le premier tome du *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* de Lacroix paraît la même année que la *Théorie des fonctions analytiques*. Comme le livre de Cousin, il commence par

[79] Voir par exemple COUSIN Jacques Antoine Joseph, *op. cit.*, p. 17.
[80] LAGRANGE Joseph-Louis, *op. cit.,* p. 235.

une longue préface de vingt-neuf pages qui retrace l'histoire et expose la question des principes du calcul différentiel.

Dans la dernière décennie du XVIII^e siècle, Lacroix s'impose comme l'un des personnages majeurs de l'enseignement des mathématiques en France, à la fois à travers son rôle institutionnel, les cours qu'il donne et les manuels qu'il rédige[81]. Né en 1775 dans une famille bourgeoise, il étudie au Collège Royal de France le calcul différentiel avec Antoine René Mauduit. Cependant, c'est l'enseignement de Monge, en 1780, qui le marquera le plus durablement, Lacroix restant toute sa vie un admirateur de ce mathématicien reconnu pour ses qualités de pédagogue. En 1782, sur la recommandation de Monge, Lacroix est nommé professeur de mathématiques à l'École des Gardes de la Marine de Rochefort. Il rédige pour l'Académie des Sciences des tables astronomiques en 1785 et un mémoire sur les équations aux dérivées partielles en 1786 qui le font remarquer de Condorcet[82]. Ce dernier le recommande pour enseigner, à partir de 1786, dans la chaire de mathématiques au « Lycée »[83], puis, en 1787, à l'École Royale Militaire de Paris[84]. En 1788, à la suite de la suppression de ses cours au Lycée et de la fermeture de l'École militaire, il est nommé, sur recommandation de Laplace avec qui il a noué des relations, professeur à l'École royale d'artillerie de Besançon. En 1789 il est désigné comme membre correspondant de l'Académie des Sciences.

De retour à Paris en 1793, il est, à partir de janvier 1794, examinateur des candidats à l'École de Châlons. Il sera l'une des examinateurs d'admission à l'École polytechnique à sa création.

[81] Pour une biographie plus complète de Lacroix, voir CARAMALHO DOMINGUES João, *Lacroix and the Caclculus*, Bâle, Birkhäuser, 2008. Voir aussi SCHUBRING Gert, « On the Methodology of Analyzing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author », *For the Learning of Mathematics*, Vol. 7, No. 3, 1987, p. 41-51 et EHRHARDT Caroline, « L'identité sociale d'un mathématicien et enseignant**,** Sylvestre-François Lacroix (1765-1843) », *Histoire de l'éducation*, No. 123, Paris, INRP, 2009, p. 5-43. Ainsi que l'indique João CARAMALHO DOMINGUES une biographie compète de Lacroix reste à écrire et certains points sont encore contradictoires.

[82] Voir TATON René, « Condorcet et Sylvestre-François Lacroix », *Revue d'Histoire des Sciences et de leur applications*, tome 12, n° 2, 1959, p. 127-158. Rappelons que Condorcet était l'auteur d'un *Traité de calcul intégral*, publié en 1786. On lira à ce sujet GILAIN Christian, « Condorcet et le calcul intégral », dans Roshi RASHED (dir.*), Sciences à l'époque de la Révolution française. Recherches historiques*, Paris, Librairie A. Blanchard, 1988, p. 87-147.

[83] Ce nom désigne ici une institution privée pour jeunes gens souhaitant acquérir une culture générale sous la direction de maîtres renommés. Voir TATON René, *op. cit*.

[84] Il est difficile de dire si cet enseignement comportait du calcul différentiel et intégral. L'École d'artillerie supprimée en 1772 avait été remplacée en 1779 par six places d'élèves dans chacune des sept écoles régimentaires françaises dont faisait partie l'école de Paris. Les éléments de calcul différentiel et intégral devaient faire partie du cursus de ces élèves.

Il est nommé, en octobre de la même année, chef de bureau à la Commission exécutive de l'Instruction publique. Il fait partie des examinateurs du concours lancé en 1794 pour la production de nouveaux manuels élémentaires. En 1795, il publie *Essais de géométrie sur les plans et les surfaces courbes* d'après l'enseignement de géométrie descriptive de Monge. La même année il est nommé professeur pour les écoles centrales et, à compter de l'année suivante, il enseigne à l'École centrale des quatre-nations. Fruits de cet enseignement, Lacroix publie à partir de 1797 de nombreux livres qui formeront son *Cours complet de mathématiques* et connaîtront un grand succès, devenant des références en matière de manuels scolaires.

Mais le premier tome du *Calcul différentiel et du calcul intégral* qui paraît en 1797 ne s'inscrit pas dans cette veine. Lacroix ne le conçoit pas comme un ouvrage d'initiation mais comme un recueil encyclopédique car « la réunion des nombreux matériaux, relatifs au Calcul différentiel et au Calcul intégral […] peut seule faire connaître toutes les richesses de cette branche importante de l'Analyse »[85]. Un recueil qui n'est pas cependant une compilation, puisque parmi les différentes méthodes d'introduction de ces calculs,

> il faut faire un choix, ou [les] exposer dans un ordre, qui mette en évidence les rapports par lesquels elles se lient les unes aux autres, […] enfin […] donner […] à toutes une teinte uniforme qui ne laisse point apercevoir de différence, entre ce qu'on doit à un auteur et ce qu'on a emprunté d'un autre, et répande sur le tout un égal degré de précision et de clarté.[86]

Après avoir annoncé son objectif, Lacroix commence un exposé d'une vingtaine de pages destiné à retracer les origines, la découverte et les progrès du calcul différentiel. Mais, son ouvrage ayant pour objectif d'exposer le calcul différentiel et ses applications d'une façon qui harmonise les différents résultats, quelle qu'ait pu être la méthode utilisée pour y parvenir, l'histoire que raconte Lacroix se rapporte comme celle de Cousin à la question des fondements de cette science.

Cette question est en effet celle qui introduit et conclut sa narration historique. Lacroix débute sa brève histoire du calcul différentiel en citant la deuxième proposition du Livre XII des *Éléments d'Euclide*. Cette proposition énonce que les surfaces des cercles sont entre elles comme les carrés des diamètres. Commentant cette proposition, il écrit :

---

[85] LACROIX Sylvestre-François, *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, tome I, Paris, Duprat, 1797, p. III.
[86] *Ibid.*, p. III.

> Il y a ici un passage du fini à l'infini ; car dans la proposition précédente, Euclide montre que ce rapport est celui des polygones semblables, inscrits dans deux cercles différents, et Il me paraît évident que le Géomètre […] qui découvrit cette vérité, voyait qu'elle était indépendante du nombre de côtés des polygones, et qu'en même temps les polygones différaient d'autant moins des cercles qu'ils avaient plus de côtés, a dû nécessairement conclure de là, en vertu de la loi de continuité que la propriété des premiers convenait aux seconds[87].

Lacroix ne précise pas ce qu'il entend par loi de continuité dans ce texte. L'expression est courante à cette époque[88], en particulier dans la formulation qu'en a donnée Leibniz : « la nature ne fait jamais de sauts ». Pour d'Alembert, dans l'*Encyclopédie,* « on conçoit de la continuité partout où l'on ne peut rien placer entre deux parties »[89]. Cette notion est illustrée d'exemples physiques. Puis, dans le même article, il précise que les mathématiciens distinguent les quantités discrètes, les nombres, des quantités continues, l'étendue, c'est-à-dire les lignes, les surfaces et les solides, objets de la géométrie. Et, si l'étendue est continue car « on ne remarque point d'intervalle entre ses parties ; qu'entre deux portions d'étendue on ne peut en imaginer une autre », les nombres forment une quantité discrète « car il n'y a point de nombres si peu différents entre lesquels on n'en puisse imaginer un, plus grand que le moindre des nombres donnés, & plus petit que le plus grand »[90].

Nous retrouvons la « loi de continuité » à la fin de son récit historique lorsqu'il évoque la question de la métaphysique de ce calcul. Après avoir rappelé les critiques sur l'existence des infiniment petits de Leibniz, le problème de l'introduction par Newton de la notion de mouvement étrangère à la géométrie, les tentatives de d'Alembert et d'Euler pour donner des bases plus rigoureuses au calcul différentiel, il cite le mémoire non encore publié de Carnot dans lequel l'auteur « observe que c'est en vertu de la loi de continuité, que les quantités évanouissantes gardent encore le rapport dont elles se sont approchées par degrés, avant de s'évanouir »[91]. Selon Lacroix ce mémoire de Carnot éclaire la théorie et traduit les idées de Leibniz en analyse. Signalons qu'il reproche à Euler de considérer les infiniment petits comme

---

[87] *Ibid.*, p. IV.

[88] Sur la loi de continuité on pourra lire les sections III-5 et III-9 intitulées respectivement « The Law of Continuity : Law of Nature or Mathematical Abstraction ? » et « Operationalizations of the Concept of Continuity ? » dans SCHUBRING Gert, *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century, France and Germany*, New-York, Springer, 2005, p. 174-185 et p. 238-254.

[89] d'ALEMBERT Jean le Rond, Article « Continu », *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, Arts et des Métiers,* tome IV, 1754, p. 115.

[90] *Ibid.*, p. 115.

[91] LACROIX Sylvestre-François, *op. cit.*, p. XXI.

des zéros absolus qui conservent un rapport obtenu à partir des quantités finies qu'ils remplacent mais ne fait aucun reproche à la méthode des limites de d'Alembert.

Ce n'est pourtant pas la méthode des limites que Lacroix adopte pour introduire le calcul différentiel. Il déclare employer une méthode qu'il a développée en s'inspirant du mémoire de Lagrange à l'Académie de Berlin de 1772, méthode qui lui permet de traiter « [le calcul différentiel] analytiquement, d'une manière indépendante des considérations de l'infini »[92]. Il emprunte, selon lui, la voie montrée par Taylor dans son théorème, c'est à dire le développement en série entière d'une fonction, le calcul différentiel consistant en la recherche des coefficients de la série, le calcul intégral à remonter des coefficients à la fonction. Mais là où Taylor montrait la formation successive des coefficients par les fluxions, Lacroix affirme qu'il « donne d'un seul jet l'exposition purement analytique et complète des principes du Calcul différentiel »[93]. C'est donc, l'année même ou parait la *Théorie des fonctions analytiques*, l'idée développée par Lagrange que Lacroix emploie pour introduire le calcul différentiel.[94]

Sa position est bien différente dans le *Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral* qu'il fait paraître en 1802. Lacroix est alors instituteur d'analyse à l'École polytechnique depuis qu'il a remplacé Lagrange, en 1799. L'ouvrage est cette fois conçu comme un manuel d'enseignement, et le qualificatif d' « élémentaire » est là pour marquer la différence avec son précédent traité.

Ce traité n'est pas précédé d'une préface qui retrace l'histoire et traite des principes du calcul différentiel mais de vingt-sept pages intitulées : « Réflexions sur la manière d'enseigner les Mathématiques, et d'apprécier dans les examens le savoir de ceux qui les ont étudiées ». Le choix d'un texte sur les méthodes d'enseignement en lieu et place d'un texte historique pour préfacer cet ouvrage se justifie probablement de plusieurs façons. D'une part, comme nous le verrons au chapitre suivant, l'enseignement du calcul différentiel a été au programme de

---

[92] *Ibid.*, p. XXII.
[93] *Ibid.*, p. XXIII.
[94] Ceci soulève une question de priorité que Lacroix règle dans une note de bas de page. Il signale avoir suivi les leçons de Lagrange à l'École Polytechnique et précise que ce dernier est revenu à ses premières idées (c'est-à-dire celles développées dans le mémoire de Berlin) après le début de l'impression du premier tome de son traité, en novembre 1795. Il n'a donc, selon lui, pu s'en inspirer que sur quelques points, points qu'il affirme avoir pris soin de rapporter à Lagrange.

certaines écoles centrales : nous pouvons donc imaginer que cette préface s'adresse aux futurs enseignants, les premiers lecteurs d'un tel manuel, et les premiers concernés par ces réflexions sur la manière d'enseigner et d'évaluer. D'autre part, comme nous le préciserons un peu plus loin à propos des programmes adoptés en 1800 à l'École polytechnique, le fait de ne pas proposer un texte qui montre la diversité des méthodes d'introduction et les questions soulevées par chacune d'elles, relève chez Lacroix d'un choix pédagogique : la multiplicité des méthodes d'introduction n'est, selon lui, pas souhaitable pour les élèves.

Cependant, en page 75, après une introduction purement analytique du calcul différentiel basée cette fois sur la méthode des limites, Lacroix commence les « Applications du Calcul différentiel à la théorie des courbes » par un peu plus d'une page de « Réflexions sur la métaphysique du Calcul différentiel ». Il affirme que, quelle que soit l'origine que l'on attribue à ce calcul,

> Il reposera toujours sur un *fait analytique* préexistant à toute hypothèse, comme la chute des corps graves vers la surface de la terre, préexiste à toutes les explications qu'on en a données : et ce fait est précisément la propriété dont jouissent toutes les fonctions d'admettre une limite dans le rapport que leurs accroissements ont avec ceux de la variable dont elles dépendent.[95]

Nous reviendrons plus loin sur le choix des limites pour introduire le calcul différentiel. Remarquons simplement ici que l'existence de cette limite, ce fait analytique, est, par la comparaison avec la chute des corps, rapproché du domaine des évidences physiques.

Pour Lacroix, ce fait analytique est le suivant: « plus les accroissements de la variable indépendante sont petits, plus les valeurs successives de la fonction sont resserrées, plus enfin cette fonction approche d'être soumise à la loi de continuité dans ses changements »[96]. Précisons que, dans la relation entre deux quantités variables, $y = f(x)$, x est appelée la « variable indépendante », la quantité y étant la variable qui dépend de x. Lacroix explique qu'il entend par loi de continuité, « celle qui s'observe dans la description des lignes par le mouvement, et d'après laquelle les points consécutifs d'une même ligne se succèdent sans aucun intervalle »[97]. Lacroix a des grandeurs continues une conception qui n'est pas celle

[95] LACROIX Sylvestre-François, *Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral, précédé de réflexions sur la manière d'enseigner les Mathématiques, et d'apprécier dans les examens le savoir de ceux qui les ont étudiées*, Paris, Duprat, An X (1802), p. 75.
[96] LACROIX Sylvestre-François, *op. cit.*, p. 75.
[97] *Ibid.*, p. 75.

d'Alembert : il y introduit le mouvement[98] mais, surtout, les lignes sont constituées de points consécutifs[99]. Ce qui lui permet probablement d'objecter, à la discontinuité des nombres affirmée par d'Alembert :

> La manière d'envisager les grandeurs dans le calcul, ne paraît pas admettre cette loi, puisqu'on suppose toujours un intervalle entre deux valeurs consécutives de la même quantité ; mais plus cet intervalle est petit, plus on se rapproche de la loi de continuité, à laquelle la limite convient parfaitement ; c'est aussi en vertu de cette loi de continuité que les accroissements quoiqu'évanouissans, conservent encore le rapport dont ils se sont approchés par degrés avant de s'évanouir.[100]

Pour Lacroix, la loi de continuité est présente dans le domaine des nombres et garantit l'existence d'une limite au rapport des « quantités évanouissantes » qui définissent ce qu'il désignera comme coefficient différentiel de la fonction, c'est-à-dire le nombre dérivé.

Il semble bien qu'il y ait eu chez Lacroix, depuis la préface de 1797 où il signalait le rôle de la loi de continuité dans le mémoire de Carnot, une maturation de cette notion, comme paraît le confirmer la phrase suivante : « Il me paraît maintenant très-évident que la métaphysique précédente renferme l'explication philosophique des propriétés du Calcul différentiel et du Calcul intégral »[101]. Le cours que Prony a donné aux élèves de la première promotion de l'École polytechnique, a-t-il contribué à cette maturation ? Nous y lisons, dans un résumé hélas trop succinct :

> J'ai expliqué aux élèves comment on pouvait assigner pour caractère distinctif au calcul *différentiel*, relativement à la méthode des *différences*, l'introduction de la loi de *continuité* entre les quantités variables que considère cette méthode, et dans quel sens le mot *continuité* devait être pris lorsqu'on appliquait à pareille question.[102]

Signalons enfin que Lacroix ne modifiera pas sa conception de la métaphysique du calcul différentiel dans les éditions ultérieures du *Traité élémentaire*. De plus, il reproduira

---

[98] Peut-être est-il ici influencé par Carnot qui adopte des points de vue qui se ressemblent concernant le calcul infinitésimal et la mécanique. Voir GILLIPSIE Charles C., « Lazare Carnot savant » dans GILLIPSIE Charles C. et YOUSCHKEVITCH Adolf P., *Lazare Carnot savant et sa contribution à la théorie de l'infini mathématique*, Paris, Vrin, 1979, p. 153-163.

[99] Pour d'Alembert le point, comme la surface et la ligne, est une abstraction, tout ce qui existe ayant trois dimensions. Voir l'article non signé intitulé « Point » dans l'*Encyclopédie méthodique*, tome 2, Paris, Panckouke, Liège, Plomteux, 1785, p. 617).

[100] *Ibid.*, p. 75.

[101] *Ibid.*, p. 76.

[102] PRONY (RICHE de) Gaspard, « Suite des leçons d'analyse », *Journal de l'École Polytechnique*, 4e cahier, An V (1796), p. 544.

intégralement ses lignes du *Traité élémentaire* concernant la métaphysique du calcul différentiel dans les quatre éditions des *Essais sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier*[103] qu'il fera publier à partir de 1805. Et, en 1810, la préface de la deuxième édition de son grand traité reprendra l'essentiel des propos qui précèdent

1 – 5 Le « Discours préliminaire » des *Traités de calcul différentiel et intégral* de Bossut (1798)

L'année suivante paraît le premier tome des *Traités de calcul différentiel et intégral* de Charles Bossut. L'abbé Bossut est l'un des rares élèves de d'Alembert[104]. Il l'a aidé pour la rédaction de ses articles de l'*Encyclopédie.* Remarqué par des travaux en calcul intégral, hydrodynamique et astronomie, il devient membre de l'Académie des Sciences en 1768. La même année Bossut est nommé examinateur d'admission et de sortie de l'École du génie de Mézières où il avait été professeur de mathématiques. De cet enseignement il tire un cours de mathématiques qui connaîtra de nombreuses éditions : en 1795, il en est à sa cinquième édition. En 1775 Bossut édite la traduction française du traité de calcul différentiel et intégral de l'italienne Maria Gaetana Agnesi, *Instituzioni Analytche, al uso della Gioventu Italiana.* Destitué de ses fonctions d'examinateur sous la Terreur pour manque de patriotisme, il devient, après Thermidor, l'un des premiers membres de l'Institut. En 1796 il est nommé examinateur de sortie des élèves de l'École polytechnique.

Le « Discours préliminaire », long de 80 pages, qui ouvre le premier tome de ses traités est presque essentiellement consacré à l'histoire de la « nouvelle analyse »[105]. Détaillée, parfois anecdotique[106], elle ne commence qu'avec Newton et Leibniz, sans remonter aux géomètres de l'Antiquité. Il faut sans doute relier ce « Discours préliminaire » à l'*Essai sur l'histoire générale des mathématiques* que Bossut publiera en 1802, où le deuxième tome tout entier est consacré aux progrès des mathématiques depuis la découverte de l'analyse infinitésimale.

---

[103] LACROIX Sylvestre-François, *Essais sur l'enseignement en général et celui des mathématiques en particulier*, 4e éd., Paris, Bachelier, 1838, p. 342-344.

[104] Sur Bossut, voir LANGINS Janis, op. cit., p. 273.

[105] Ancien élève et collaborateur de d'Alembert il n'est pas surprenant qu'il emploie fréquemment cette expression de « nouvelle analyse ». On en trouve douze occurrences dans le « Discours préliminaire », pour vingt occurrences de l'expression « calcul différentiel ».

[106] Il narre « la tentative de résurrection d'un mort » à Saint Paul de Londres par Fatio de Duillier, mathématicien suisse qui est, selon lui, à l'origine de la querelle de priorité entre newtoniens et leibniziens.

Nous ne trouvons pas chez Bossut de questionnement sur les principes du calcul différentiel et intégral. Il évoque les critiques portées contre les infiniment petits de Leibniz pour insister sur la réponse de ce dernier. Dans celle-ci, Leibniz déclare n'avoir proposé l'hypothèse de l'existence de quantités infiniment petites que pour abréger le calcul et les raisonnements. Leibniz conclut en affirmant que la métaphysique de son calcul est entièrement conforme à la méthode d'exhaustion des anciens[107].

En toute fin du texte Bossut explique que, dans ses traités, il considère que les différentielles sont « des zéros ou des quantités évanouissantes et inassignables, entre lesquelles il peut exister des rapports quelconques, de même qu'entre les quantités finies »[108]. En conclusion, il écrit :

> alors tous les problèmes de l'Analyse infinitésimale se réduisent, en dernier ressort, à trouver, d'après les conditions de chaque question particulière, deux valeurs d'une même fonction, et à les égaler entr'elles. Cette manière d'envisager le calcul des infiniment petits ou des fluxions, revient aux méthodes de Newton, d'Euler, de d'Alembert, et, en remontant plus haut, à celle d'Archimède, quand il détermine le rapport de la sphère au cylindre[109]. Quelque détour qu'on emploie, on retombera toujours, dans le fond, sur ce même principe.[110]

Il cite, pour terminer, l'existence de l'ouvrage de Lagrange qui, écrit-il, ne lui a été connu qu'après que le sien fut terminé.

Finalement, pour Bossut, la présentation adoptée semble n'avoir finalement que peu d'importance. Dans le texte de son ouvrage, après deux chapitres consacrés au calcul aux différences finies, il fait reposer le calcul différentiel sur les deux principes suivants, qui sont de l'ordre des méthodes :

> PREMIER PRINCIPE.
>
> 110. Deux quantités X et Z supposées comparées à une troisième quantité M , ou former avec elle les rapports $\frac{X}{M}$ et $\frac{Z}{M}$; si l'on fait varier les grandeurs X , Z , ou

[107] Bossut ne précise pas ce qui est désigné sous l'expression usitée à l'époque de « méthode d'exhaustion ». L'*Encyclopédie méthodique* dont il est l'un des auteurs indique qu'il s'agit de la méthode de démonstration par l'absurde de l'égalité de deux grandeurs utilisée par les anciens géomètres (voir LA CHAPELLE Jean-Baptiste (abbé de), article « Exhaustion », *Encyclopédie méthodique*, tome 1, Paris, Panckouke, Liège, Plomteux, 1884, p. 703).
[108] *Ibid.*, p. LXXX.
[109] Archimède obtient ce résultat qu'il aurait, dit-on, fait graver sur sa tombe, en utilisant des polygones réguliers inscrits et circonscrits au grand cercle d'une sphère et en leur faisant faire une révolution. Ses démonstrations utilisent bien sûr la méthode d'exhaustion dont il est question plus haut. Voir ARCHIMÈDE, « De la sphère et du cylindre, Livre premier », *Œuvres d'Archimède traduites littéralement, avec un commentaire par F. Peyrard*, Paris, Buisson, 1807.
[110] *Ibid.*, p. LXXX.

seulement l'une d'elles, et que dans cet état de variation successive, elles tendent continuellement à devenir égales, de manière qu'à la fin leur différence soit moindre que toute quantité finie assignable : alors on pourra substituer indifféremment X ou Z dans les deux rapports proposés, lesquels devront par conséquent être regardés comme égaux dans ce dernier état.

[…]

SECOND PRINCIPE.

111. Les différentielles peuvent être regardées ou traitées comme de véritables zéros, qui ont entr'eux des rapports déterminables par l'état d'une question.[111]

1 – 6 *Du calcul des dérivations* d'Arbogast (1800)

Arbogast est né en 1759 à Mutzig près de Strasbourg[112]. Après des études de droit, il exerce un temps comme avocat. Mais, passionné de mathématiques, il devient professeur de mathématiques au Collège royal de Colmar. Il remporte deux prix pour des concours lancés par les Académies de Saint-Pétersbourg et de Mantoue. En 1789, il fait parvenir à l'Académie des Sciences de Paris un *Essai sur de nouveaux principes de calcul différentiel et de calcul intégral, indépendans de la théorie des infiniment petits et de celle des limites.* Cet essai ne sera pas publié. Il s'agit du « beau mémoire » dont parle Lagrange dans sa *Théorie des fonctions analytiques*.

Élu député à l'Assemblée législative puis à la Convention, il participe au Comité d'instruction publique. Il joue un rôle important dans la mise en place du nouveau système métrique et est l'auteur d'un *Rapport et projet de décret sur la composition des Livres élémentaires destinés à l'Instruction publique*. Il participe à la fondation de l'École polytechnique. En 1794 il devient professeur à l'École centrale de Strasbourg.

Du calcul des dérivations, qu'il publie en 1800, se veut « la suite de [ses] recherches sur la vraie théorie du calcul différentiel, [qu'il] finit au commencement de l'année de 1789 »[113], c'est-à-dire du mémoire de 1789. Il précise d'ailleurs, à propos de cet essai, qu'il avait été inspiré par

[111] *Ibid.*, p. 94.
[112] Sur Arbogast et sur une analyse détaillée de l'ouvrage *Du calcul des dérivations*, voir FRIEDELMEYER Jean-Pierre*, op. cit.* On lira aussi la section 4.3.6 du chapitre 4 intitulé « The Lagrangian tradition in the calculus, 1800-1815 », dans GRATTAN-GUINNESS Ivor, *op. cit.*, p. 211-217 et le chapitre VI, « Le Calcul des dérivations d'Arbogast » dans LUBET Jean-Pierre et FRIEDELMEYER Jean-Pierre, *L'analyse algébrique. Un épisode clé de l'histoire des mathématiques*, Paris, Ellipses, 2015.
[113] ARBOGAST Louis François Antoine, *op. cit*., p. XI.

le mémoire de Lagrange de 1772. Parmi les principes qui l'avaient guidé, il cite le théorème de Taylor tel que Lagrange l'avait présenté dans ce mémoire.

Le « Calcul des dérivations » qu'il développe dans l'ouvrage publié en 1800, se veut « un genre de calcul qui embrasse la théorie des suites, et dont le calcul différentiel n'est qu'un cas particulier »[114]. Il s'agit donc pour lui de reprendre les principes du calcul différentiel développés dans son mémoire de 1789 et de les généraliser.

Considérant le développement en série entière d'une fonction quelconque :

$$F(x+\alpha) = a + bx + \frac{c}{1.2}x^2 + \frac{d}{1.2.3}x^3 + \frac{e}{1.2.3.4}x^4 + etc \ldots,$$

il crée une opération de dérivation, qu'il note D, et qui est « l'opération qu'il faut faire sur $F\alpha$ pour déduire b ». Il obtient ainsi : $c = DD\,F\alpha = D^2F\alpha$, $d = D^3F\alpha$, etc. Cette opération correspond à la différentiation dans le cas où α est considérée comme une variable. Arbogast l'applique de façon plus générale aux fonctions quelconques « d'un ou de plusieurs polynômes simples, doubles ou triples »[115], et à la théorie des séries. Les 300 premières pages sont consacrées à la mise en place du « Calcul des dérivations » avant de l'appliquer au calcul différentiel.

Cet ouvrage d'Arbogast ne présente donc pas à proprement parler de nouvelles réflexions sur les principes du calcul différentiel. Ceux-ci, dans la lignée de la théorie lagrangienne, ont été exposés dans son essai de 1789. Le « Calcul des dérivations » se veut plus comme une synthèse déduite de ces nouveaux principes. Elle lui permet d'obtenir « avec une grande facilité des formules compliquées, et même des théories entières du calcul différentiel »[116]. Ceci l'autorise à proposer son « Calcul des dérivations » comme méthode d'introduction calcul différentiel, le posant ainsi en nouveau principe.

1 – 7 Conclusion

À la fin du XVIIIe siècle, le calcul différentiel est une théorie vieille d'un siècle, dont l'intérêt n'est plus à démontrer. Si la plupart des auteurs des ouvrages que nous venons d'examiner commencent par en retracer l'histoire c'est qu'il y va sans doute de l'idée de célébrer la science dans cette période révolutionnaire au cours de laquelle de nombreux savants jouent

[114] *Ibid.*, p. I.
[115] *Ibid.*, p. III.
[116] *Ibid.*, p. IX.

des rôles importants. Mais, à l'exception de Bossut, l'essentiel est la question des principes, tout particulièrement pour des ouvrages destinés à des commençants où les notions premières doivent avoir le caractère de l'« évidence » comme le demandent Cousin et Lagrange. Chaque auteur apporte sa réponse à un problème qui reste ouvert. À défaut d'une réponse définitive, la volonté de chacun d'eux d'ancrer la théorie dans les travaux des anciens géomètres garantit la solidité et la rigueur des fondements.

L'approche analytique, promue par Lagrange dès 1772 dans son mémoire à l'Académie de Berlin est reprise par Lacroix et Arbogast tandis que Cousin et Carnot adoptent la méthode des limites. Ce dernier peut alors proposer une définition d'une quantité infiniment petite dont nous verrons qu'elle connaîtra une longue postérité pour l'introduction du calcul différentiel. Si Lacroix revient à la méthode des limites pour des raisons pédagogiques dont nous reparlerons plus loin, il ne réintroduit pas les infiniment petits mais pose la question de l'existence de la loi de continuité dans le domaine des nombres.

Mais, parmi les réponses possibles, un consensus semble se dégager à propos de la méthode des infiniment petits : l'introduction du calcul différentiel telle que la pratiquent les manuels de Bézout, « leibnizien orthodoxe »[117], n'est pas adaptée à cette nouvelle forme d'enseignement en train de naître.

2 – Prony et Lagrange : le théorème de Taylor pour principe fondamental

L'enseignement à l'École polytechnique débute par une période de trois mois de cours dits révolutionnaires, pensés sur le modèle des cours du même nom organisés au printemps 1794 à Paris pour la fabrication d'armes et de poudre. Dans l'esprit des organisateurs de ces cours, il faut entendre le mot révolutionnaire comme synonyme d'énergique, d'accéléré. L'objectif était, à l'issue de cette période, de répartir les élèves sur les trois années d'enseignement prévues initialement à l'école afin d'obtenir une première promotion d'ingénieurs après un an d'études[118]. Les cours révolutionnaires sont suivis des cours dits « réguliers ».

[117] Nous empruntons cette citation à João CARAMALHO DOMINGUES, *Lacroix and the Caclculus*, Bâle, Birkhäuser, 2008, p. 145.

[118] Ce qui ne sera finalement pas le cas, les meilleurs élèves devant rester deux ans à l'école. Sur les cours révolutionnaires, et notamment sur les autres fonctions possibles que leurs initiateurs ont pu attribuer à ces cours, voir LANGINS Janis, *La République avait besoin de savants*, Paris, Belin, 1987, p. 19-63.

Pour les cours révolutionnaires, celui d'analyse appliquée à la géométrie devait être donné par Monge. Étant tombé malade, Monge fut remplacé par Claude-Joseph Ferry, ancien professeur de mathématiques à l'École de Mézières. Le plan rédigé par ce dernier prévoyait des leçons de calcul différentiel et intégral. Mais, en raison notamment des difficultés éprouvées par les élèves, cette partie ne semble pas avoir été enseignée, ni par Ferry ni par Charles Griffet-Labaume, ingénieur en chef des ponts et chaussées qui lui succède et termine ses leçons le 29 nivôse An III (18 janvier 1795). À l'issue des cours révolutionnaires, Lagrange sera chargé du cours régulier d'analyse appliquée à la géométrie après avoir assuré, de janvier à avril, ses leçons à l'École normale. Il donnera son premier cours à l'École polytechnique, comme nous l'avons déjà vu, le 5 prairial (24 mai).

Cependant, la même année, Prony proposera aux élèves une autre introduction au calcul différentiel. Il semble avoir décidé d'introduire ces leçons dans son cours d'analyse appliquée à la mécanique en raison des difficultés rencontrées par les élèves[119]. Des élèves auraient quitté son cours lorsqu'il avait annoncé, durant les cours révolutionnaires, qu'il allait parler pour ceux qui avaient des connaissances en calcul différentiel. Précisons que Prony inclut dans le calcul différentiel le calcul des différences finies qui occupera la plus grande part de ses leçons.

Il est difficile de dire avec certitude qui de Prony ou Lagrange a le premier introduit le calcul différentiel. Le *Journal de l'École polytechnique* indique que Prony l'aborde dans sa 32e leçon. Il a commencé son cours régulier en germinal (mars), soit environ deux mois avant Lagrange. Les premières leçons de Lagrange, selon le résumé sommaire qu'en donne Prony, sont consacrées à l'arithmétique, à la théorie des logarithmes, aux séries et aux suites récurrentes. Il n'en précise pas le nombre. Lagrange donnait une leçon par décade[120], soit trois par mois, et Prony semble en avoir donné dix à douze par mois[121]. Si ce rythme s'est maintenu, Prony a dû aborder le calcul différentiel à la fin de prairial, alors que Lagrange devait donner ses leçons préliminaires. Pour cette raison, nous commencerons par l'étude du cours de Prony avant d'aborder les leçons de Lagrange.

[119] Voir LANGINS Janis, *op. cit.,* p. 272.
[120] Dans le cahier républicain, le mois de trente jours était partagé en trois décades.
[121] Prony affirme en avoir donné dix durant le mois de germinal (21 mars au 5 mai). Si La fréquence est, pour les mois suivants, celle qui sera adoptée à partir de 1799, il en donne alors douze par mois à partir de floréal.

2 – 1 Prony : le calcul différentiel comme cas particulier du calcul aux différences finies

Prony a été élève de l'École des ponts et chaussées[122]. Sous-ingénieur en 1780, il travaille à la théorie des ponts et participe à la restauration du port de Dunkerque. Nommé responsable de l'enseignement scientifique à l'École des ponts et chaussées en 1790, il est ingénieur en chef en 1791, puis directeur du Cadastre général, fondé à cette époque pour faciliter le calcul de l'impôt. Il participe à l'établissement de grandes tables de logarithmes (à 14 décimales) et noue à cette occasion des relations avec Legendre et Carnot. Nommé en 1794 à la Commission des poids et mesures, il participe la même année à la Commission qui inventorie les livres, instruments, machines et autres objets scientifiques confisqués, dont une partie sera destinée à l'École centrale des travaux publics. Auteur d'une *Nouvelle Architecture Hydraulique* il va être désigné pour assurer le premier cours d'analyse appliquée à la mécanique[123].

Durant les cours révolutionnaires, ses leçons portent essentiellement sur les principes physico-mathématiques de la mécanique. Les leçons qui suivent, dans le cadre du cours régulier, ont été publiées dans les quatre premiers cahiers du *Journal de l'École polytechnique*. Les trente et une premières sont détaillées. En revanche Prony ne donne qu'un résumé des six dernières, qui traitent du calcul différentiel, car, écrit-il :

> Lagrange a traité cette matière, par une manière particulière et nouvelle, avec la supériorité qui caractérise toutes ses conceptions ; on imprime ses leçons, et cette circonstance m'engage à supprimer tous les détails relatifs à l'exposition des principes et à la pratique de la différenciation .[124]

Ce qu'il en dit permet cependant de nous en faire une idée assez précise.

Comme « plusieurs » élèves ne connaissaient pas « l'analyse indéterminée », il fait précéder le calcul différentiel de notions sur cette analyse, c'est-à-dire sur les fonctions. L'analyse indéterminée est la partie de l'analyse « relative aux expressions analytiques et aux équations qui renferment, outre les données, d'autres quantités qu'on suppose susceptible de prendre

---

[122] Pour plus précisions sur la biographie de Prony, voir BRADLEY Margaret, « Gaspard-Clair-François-Marie Riche de Prony (1755-1839), Constructeur de ponts », *Bulletin de la Sabix*, N° 48, 2011, p. 5-13.

[123] Prony va assurer ce cours à la demande de Lagrange, initialement désigné pour le cours d'analyse appliquée à la mécanique

[124] PRONY (RICHE de) Gaspard, « Suite des leçons d'analyse », Journal de l'École Polytechnique, 4e cahier, An V (1796), p. 544.

successivement un nombre indéfini de valeurs différentes »[125]. Après avoir expliqué comment on pouvait représenter graphiquement une fonction, en précisant que « toutes les propriétés d'une courbe se déduisent de son équation »[126], Prony définit les courbes algébriques et les courbes transcendantes.

La quatrième leçon aborde le calcul aux différences finies[127]. Héritage des travaux des britanniques Brook Taylor et James Stirling, les différences finies ont pris place dans un exposé du calcul différentiel depuis les *Institutiones Calculi Differentialis* d'Euler, en 1755. Si nous considérons une variable x et un accroissement fini de cette variable Δx, en notant $y, y_1, y_2, y_3, \ldots$ les valeurs de la fonction correspondant à $x, x+\Delta x, x+2\Delta x, x+3\Delta x$, on définit les différences finies premières de la fonction par :

$$\Delta y = y_1 - y,\ \Delta y_1 = y_2 - y_1,\ \Delta y_2 = y_3 - y_2,$$

puis les différences successives par :

$$\Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y = y_2 - 2y_1 - y, \qquad \Delta^3 y = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y, \ldots$$

L'étude des différences finies permet à Prony de démontrer, à la huitième leçon, la proposition suivante : lorsque z est une fonction de x, si les quantités $z_0, z_I, z_{II}, \&c \ldots z_{(n)}$ sont séparés par l'intervalle Δx, on a :

$$z_{(n)} = z_0 + n\Delta z + \frac{n.n-1}{1.2}\Delta^2 z + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\Delta^3 z + \&c.$$

Sa démonstration généralise à une fonction quelconque des résultats obtenus pour une fonction algébrique et rationnelle. Elle suppose donc, comme l'avait affirmé Euler, que toute fonction exprimable par une expression analytique peut se développer en série entière.

Il reprend cette relation à la leçon 31, en considérant l'intervalle Δx sous-divisé en un nombre k d'intervalles égaux δx, et en notant $\delta z, \delta^2 z, \delta^3 z, \ldots$ les valeurs des différences finies successives de la fonction. Il obtient :

---

[125] PRONY (RICHE de) Gaspard, « Cours d'analyse appliquée à la mécanique », *Journal Polytechnique*, 1er cahier, An III (1795), p. 93.
[126] *Ibid.*, p. 96.
[127] On pourra consulter LUBET Jean-Pierre, « Faut-il étudier le calcul aux différences finies avant d'aborder le calcul différentiel et intégral ? Un état des lieux de la question dans la seconde moitié du XVIII e siècle », dans Évelyne BARBIN et Marc MOYON (dir.), *Les ouvrages de mathématiques dans l'Histoire. Entre recherche, enseignement et culture*, Limoges, Presses Universitaires de Limoges, 2013, p. 133-147, et « Le calcul aux différences finies, une nouvelle branche de l'analyse », dans Christian GILAIN et Alexandre GUILBAUD (dir.), *Sciences mathématiques, 1750-1850, Continuités et ruptures*, Paris, CNRS Éditions, 2015, p. 443-473.

$$z_1 = z_0 + k\delta z + \frac{k.k-1}{1.2}\delta^2 z + \frac{k.k-1.k-2}{1.2.3}\delta^3 z + \&c.$$

Cette expression peut se mettre sous la forme :

$$z_1 = z_0 + \frac{1}{1}\frac{\delta z}{\delta x}\Delta x + \frac{1.\left(1-\frac{1}{k}\right)}{1.2}\frac{\delta^2 z}{(\delta x)^2}(\Delta x)^2 + \frac{1.\left(1-\frac{1}{k}\right).\left(1-\frac{2}{k}\right)}{1.2.3}\frac{\delta^3 z}{(\delta x)^3}(\Delta x)^3 + \&c.$$

Prony poursuit en indiquant que, parmi toutes les valeurs de $\frac{1}{k}$, la plus remarquable est celle pour laquelle $\frac{1}{k} = 0$. Pour distinguer de $\frac{\delta z}{\delta x}$ la valeur qui en découle, il note cette dernière $\frac{dz}{dx}$ et, en écrivant $\Delta z = z_1 - z_0$, il obtient « le fameux théorème de Taylor qui peut être regardé comme le principe fondamental du calcul différentiel » [128]:

$$\Delta z = \frac{dz}{dx}\Delta x + \frac{d^2 z}{1.2.\,dx^2}(\Delta x)^2 + \frac{d^3 z}{1.2.3.\,dx^3}(\Delta x)^3 + \&c.$$

En donnant au théorème de Taylor le rôle de principe fondamental, Prony s'inscrit dans la conception développée par Lagrange dès 1772. Mais il obtient ce théorème par la méthode eulérienne des différences finies dont il reprend les notations, n'utilisant ni la méthode ni les notations de Lagrange.

Prony ne dit rien sur ce que sont les quantités $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots$. Remarquons que si la formule précédente peut laisser supposer une existence autonome de dz et dx, la suite du texte ne les considère jamais autrement que globalement et les nomme rapports différentiels. Quant au calcul de ces quantités, il écrit simplement qu'il a fait observer aux élèves comment chacune des quantités $\frac{dz}{dx}, \frac{d^2z}{dx^2}, \ldots$ « se déduisait de ce celle qui la précède, par un procédé commun »[129].

Il donne aussi la représentation graphique des rapports différentiels successifs à la manière d'Euler. Pour une courbe $y = \varphi(x)$, il considère un point particulier, et prend le pied de ce point pour nouvelle origine des coordonnées, en notant t les abscisses, v les ordonnées et :

$$y = A, \frac{dy}{dx} = A_1, \frac{d^2y}{dx^2} = A_2, \ldots,$$

Alors les relations

$$v_1 = A + A_1 t,\ v_1 = A + A_1 t + A_2 t^2, \ldots$$

[128] PRONY (RICHE de) Gaspard, « Suite des leçons d'analyse », *Journal de l'École Polytechnique*, 4e cahier, An V (1796), p. 545.
[129] *Ibid.*, p. 545.

donnent les paraboles des différents ordres tangentes à la courbe. Il n'explique cependant pas comment il est parvenu à ces résultats. Prony précise par la suite que la méthode des tangentes n'est qu'un cas particulier de la théorie de l'osculation développée par Lagrange dans un mémoire à l'Académie de Berlin, et par Arbogast.

Il déduit la recherche des extrema d'une fonction de la formule de Taylor. Lorsque $\frac{dz}{dx} = 0$, si $\frac{d^2z}{dx^2}$ n'est pas nul, on obtient un maximum ou un minimum suivant que $\frac{d^2z}{dx^2}$ est négatif ou positif. Si $\frac{d^2z}{dx^2} = 0$, on étudie le signe de $\frac{d^3z}{dx^3}$ lorsque ce terme n'est pas nul, etc. Cousin attribuait cette méthode à Maclaurin[130].

Le cours que Prony décrit dans ce quatrième cahier du *Journal de l'École polytechnique* n'aborde pas le calcul intégral. Après le recrutement de Fourier comme instituteur d'analyse, le cours de Prony sera entièrement consacré à la mécanique.

2 – 2 Les éléments du « calcul des fonctions » selon Lagrange (1795-1799)[131]

Nous avons déjà évoqué les deux ouvrages de Lagrange qui peuvent nous permettre de connaître son enseignement de l'analyse à l'École polytechnique. Les témoignages de Lacroix et Prony permettent de penser que les premières leçons sur les fonctions données par Lagrange à l'École sont très proches des premières pages de la *Théorie des fonctions analytique*s.

Le second ouvrage, *Leçons sur le calcul des fonctions*, est présenté par Lagrange comme la matière de son cours en 1798-1799, sa dernière année d'enseignement. Enrichi de nouvelles notions, allégé sur d'autres, il comporte, pour ce qui nous intéresse, c'est-à-dire les principes de son calcul, peu de modifications par rapport à la *Théorie des fonctions analytiques*. Nous nous référerons donc au premier texte publié par Lagrange en précisant par la suite les modifications notables que le second apporte.

[130] COUSIN Jacques Antoine Joseph, *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral*, Paris, Jombert, 1777, p. 45.
[131] On pourra lire à ce sujet FRASER Craig G., « Joseph Louis Lagrange's Algebraic Vision of the Calculus *», Historia Mathematica*, N° 15, 1987, p. 38-53, les sections 3.2.2 et 3.2.3 du chapitre 3 intitulé « The 18th-century heritage : the calculus around 1800» dans GRATTAN-GUINNESS Ivor, *op. cit.*, p. 129-133 et les chapitres 2 et 3 de la première partie intitulée « The calculus as algebra » dans GRABINER Judith V., *A Historian Looks Back: The Calculus as Algebra and Selected Writings*, Washington DC, Mathematical Association of America, 2010, p. 37-80.

Il est important d'indiquer que le cours de Lagrange, assez rapidement délaissé par la majorité des élèves car trop difficile, deviendra facultatif et ne s'adressera plus qu'aux plus brillants d'entre eux[132]. Le texte des *Leçons sur le calcul des fonctions* qu'il donnera la dernière année est probablement marqué par le public auquel il s'adresse, public qui assiste en parallèle à un cours régulier d'analyse. Il paraît difficile de le considérer comme un ouvrage élémentaire malgré le rappel des principes de la théorie. Le contenu de cet ouvrage semble beaucoup plus correspondre à des « leçons [qui] n'avaient pour objet que l'avancement de l'analyse […] et n'entraient pas nécessairement dans le système d'enseignement de l'École »[133], ainsi que Lagrange qualifie son cours lorsqu'il demande à être démis de son enseignement en 1799.

La *Théorie des fonctions analytiques* est un ouvrage de près de 300 pages, en deux parties. La première, de 115 pages, est intitulée « Exposition de la Théorie, avec ses principaux usages dans l'Analyse », la seconde étant « Application de la Théorie à la Géométrie et à la Mécanique », elle-même partagée en applications à la géométrie et applications à la mécanique. Chacune des parties est découpée en leçons. Le choix d'une séparation aussi marquée entre la théorie et ses applications est la marque de la volonté algébrique de Lagrange. Ce n'est que dans la deuxième partie qu'il montre l'identité du calcul des fonctions et du calcul différentiel.

L'exposition de la théorie

Lagrange commence par définir une fonction, à la manière d'Euler dans l'*Introduction à l'analyse infinitésimale*, comme une « expression de calcul » dans laquelle entrent, d'une manière quelconque, des quantités variables et des quantités qui peuvent être constante. En l'absence de précision supplémentaire, ce sont donc ces « expressions de calcul » qu'il faut comprendre comme étant des fonctions analytiques selon Lagrange.

La théorie des fonctions qu'il propose repose sur une propriété dont il rappelle qu'il affirmait, dès 1772, qu'elle contient les « vrais principes du calcul différentiel » et sur deux théorèmes qu'il qualifie de principes fondamentaux.

---

132 Voir GRISON Emmanuel, « Lagrange », *Bulletin de la Sabix*, N° 23, 2000, p. 44-52.

133 LAGRANGE Joseph-Louis, cité par Emmanuel GRISON dans « Lagrange », *Bulletin de la Sabix*, N° 23, 2000, p. 51.

La propriété est que toute fonction analytique peut être développée en série entière. Il l'énonce ainsi :

> Considérons donc une fonction fx d'une variable quelconque x. Si à la place de x on met $x+i$, i étant une quantité quelconque indéterminée, elle deviendra $f(x+i)$; et par la théorie des séries on pourra la développer en une suite de cette forme : $fx + pi + qi^2 + ri^3 + \&c$, dans laquelle les quantités $p, q, r, \&c$, coëficiens des puissances de i seront de nouvelles fonctions de x, dérivées de la fonction primitive fx ,et indépendantes de la quantité i .[134]

La démonstration qui suit de ce théorème consiste en fait, pour Lagrange, à prouver qu'il ne peut y avoir dans le développement de puissance fractionnaire de la variable.

L'explication qu'il donne ensuite du développement d'une fonction permet de mieux comprendre comment il entend ramener le calcul des fonctions à un calcul purement algébrique.

Il indique que fx étant ce qui reste dans $f(x+i)$ quand $i=0$, $f(x+i)$ doit être égal à fx plus une quantité qui doit disparaître en faisant $i=0$. D'où, selon le théorème précédent, on doit avoir : $f(x+i) = fx + iP$. « Or, P étant une nouvelle fonction de x et de i, on pourra de même en séparer ce qui est indépendant de i, et qui par conséquent ne s'évanouit pas quand i devient nul »[135]. C'est-à-dire qu'on aura : $P = p + iQ$. Ce qui donne, dans l'exemple du développement de $fx = \frac{1}{x}$ qu'il fait suivre :

$$P = -\frac{1}{x(x+i)}$$

Et, donc, en faisant dans P, $i=0$, il obtient ce qui ne s'évanouit pas, soit : $p = -\frac{1}{x^2}$. Il a ainsi le début du développement de la fonction inverse :

$$\frac{1}{x+i} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} i + i^2 Q$$

Il n'est effectivement pas question ici de « quantités évanouissantes » mais d'expressions algébriques où l'on peut séparer ce qui s'évanouit du reste en donnant la valeur 0 à une variable.

[134] LAGRANGE Joseph-Louis, *Théorie des fonctions analytiques*, Paris, Imprimerie de la République, 1797, p. 2.
[135] *Ibid.*, 8.

À la suite du développement en série d'une fonction, Lagrange énonce le premier théorème « [qu'] on doit regarder […] comme un des principes fondamentaux de la théorie »[136] : dans le développement en série d'une fonction, on peut toujours prendre i assez petit pour qu'un terme quelconque soit plus grand que la somme des termes qui le suivent. Nous le désignerons sous le nom de *principe de troncature*[137]. Pour le démontrer, le reste de la série étant une fonction de i, il considère la courbe qui le représente, qui passe par l'origine des axes et dont « le cours sera nécessairement continu depuis ce point […] et s'en approchera par conséquent d'une quantité moindre qu'aucune quantité donnée »[138]. Observons, à propos de cette démonstration, l'unique emploi d'un argument géométrique, et relevons la seule occurrence du mot « continu », dans cette exposition de la théorie lagrangienne, le mot caractérisant la courbe de la fonction.

Le second principe fondamental est le théorème de Taylor obtenu en étudiant la façon dont les fonctions p, q, r dérivent de f. Reprenant la méthode employée dans son mémoire de 1772, il le démontre en substituant $x + o$ à x dans $f(x + i)$ et en observant qu'on parvient au même résultat si on substitue $i + o$ à i. Il introduit à cette occasion le vocabulaire « dérivées successives » et la notation « prime » pour ces dérivées. Il aboutit à la relation :

$$f(x+i) = fx + f'xi + \frac{f''x}{2}i^2 + \frac{f'''x}{2.3}i^3 + \frac{f^{iv}x}{2.3.4}i^4 + \&c,$$

> expression [qui] a l'avantage de faire voir comment les termes de la série dépendent les uns des autres, et surtout comment, lorsqu'on sait former la première fonction dérivée d'une fonction primitive quelconque, on peut former toutes les fonctions dérivées que la série renferme.[139]

Lagrange étudie un peu plus loin la « légitimité » de cette formule. La seule restriction qu'il envisage est le cas des fonctions irrationnelles : la série ne sera pas légitime dans le cas où le radical « disparaîtra […] dans toutes les fonctions $fx, f'x, f''x$, &c, à l'infini » [140]. La question de la « légitimité » de cette série est aussi évoqué à propos de la méthode appelée

[136] *Ibid.*, p. 12.
[137] Nous reprenons cette expression à BELHOSTE Bruno, *La formation d'une technocratie : L'École polytechnique et ses élèves de la Révolution au Second Empire*, Paris, Belin, 2003, p. 242.
[138] *Ibid.*, p. 12. Ce théorème se trouvait déjà dans le mémoire d'Arbogast envoyé en 1789 à l'Académie des Sciences de Paris : *Essai sur de nouveaux principes de calcul différentiel et de calcul intégral, indépendans de la théorie des infiniment petits et de celle des limites.*. Arbogast en donnait une démonstration purement algébrique reproduite dans FRIEDELMEYER Jean-Pierre, *Le Calcul des Dérivations d'Arbogast dans le projet d'algébrisation de l'analyse à la fin du dix-huitième siècle*, Thèse de doctorat, Nantes, 1993, p. 81.
[139] *Ibid.,* p. 14.
[140] *Ibid.*, p. 33

actuellement *règle de l'Hôpital* pour lever l'indétermination $\frac{0}{0}$. Considérant la fraction $\frac{f}{F'}$, il écrit :

> Il n'est pas à craindre que les fonctions $fx, f'x, f''x$, &. $Fx, F'x, F''x$, &c puissent devenir nulles en même temps par la supposition $x = a$, comme quelques géomètres paraissent le supposer, car, puisque
> $$f(x+i) = fx + if'x + \frac{i^2}{2}f''x + \&c.$$
> en faisant $x = a$ on aurait $f(a+i) = 0$ quel que soit i, ce qui est impossible.[141]

Sans qu'ils ne puissent exhiber de contre-exemple, « quelques géomètres » semblaient déjà douter du fait que toute fonction soit développable en série entière. La réponse que leur oppose Lagrange est fournie dans la démonstration de ce théorème : il n'envisage comme difficulté que la question des fonctions irrationnelles.

Dans la suite de ses leçons Lagrange fait un usage constant de ce principe fondamental qu'il applique au binôme, aux fonctions transcendantes (logarithme, exponentielle, fonctions trigonométriques). Il en déduit les « fonctions primes » des sommes, produits, quotients et fonctions composées des fonctions simples, algébriques ou transcendantes ainsi que des fonctions données par des équations de la forme $F(x,y) = 0$. Ceci nécessite bien sûr une maîtrise de l'emploi des séries qui justifie les leçons préliminaires données par Lagrange.

Le *principe de troncature* lui permet de démontrer le « lemme général » :

> si une fonction prime de z telle que $f'z$ est toujours positive pour toutes les valeurs de z, depuis $z = a$ jusqu'à $z = b$, b étant $> a$, la différence des fonctions primitives qui répondent à ces deux valeurs de z, savoir, $fb - fa$, sera nécessairement une quantité positive.[142]

Il en déduit le théorème appelé à présent *théorème des accroissements finis* et la formule dite de *Taylor-Lagrange* énoncée ainsi pour u compris entre 0 et x :

$$f(z+x) = f(z) + xf'(z+u) = f(z) + xf'(z) + \frac{i^2}{2}f''(z+u)$$
$$= f(z) + xf'(z) + \frac{i^2}{2}f''(z) + \frac{i^3}{2.3}f'''(z+u) \ldots$$

[141] *Ibid.*, p. 37.

[142] LAGRANGE Joseph-Louis, *op. cit.*, p. 45. Sur la démonstration de ce lemme, voir le chapitre intitulé « La théorie des fonctions analytiques de Lagrange et la notion d'infini » dans DUGAC Pierre, *Histoire de l'analyse*, Paris, Vuibert, 2003, p. 70-78.

À partir du théorème de Taylor, il démontre ce que nous appelons aujourd'hui la *formule de Taylor avec reste int*égral qu'il écrit, au rang un :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x^2Q$$

Dans cette relation Q désigne la valeur en $z = 1$ de la primitive, qui s'annule en $z = 0$, de la fonction de la variable z : $zf''(x - xz)$. La recherche des différents coefficients, aux rangs successifs, de cette formule le conduit au problème de l' « analyse inverse », qui consiste à remonter des fonctions primes aux fonctions primitives, c'est-à-dire au *calcul intégral*, expression qui ne figure pas dans le texte. La première question qu'il considère est la détermination d'une valeur approchée de ces coefficients, soit, dans le langage actuel, de valeurs approchées d'intégrales définies.

Et, avant d'étudier les fonctions de plusieurs variables, Lagrange indique :

> Ceux qui savent le calcul différentiel, ne peuvent manquer d'apercevoir déjà la conformité de l'analyse des fonctions avec ce calcul, et la correspondance des analyses directe et inverse avec les deux parties de ce calcul qu'on appelle calculs différentiel et intégral. […] Nous aurions même pu commencer par là, et rappeler ainsi tout de suite notre analyse des fonctions au calcul différentiel ; mais la marche que nous avons suivie, nous a paru plus propre à remplir l'objet que nous nous sommes proposé, et qui consiste uniquement à lier cette branche de l'analyse avec l'analyse élémentaire, sans la faire dépendre ni même rien emprunter d'aucune considération étrangère.[143]

L'application de la théorie à la géométrie

Cette seconde partie de l'ouvrage débute par l'exposé de la conception lagrangienne des tangentes :

> Suivant les anciens géomètres, une ligne droite est tangente d'une courbe, lorsqu'ayant un point commun avec la courbe, on ne peut mener par ce point aucune autre droite entre elle et la courbe […]. Mais depuis que, par l'application de l'algèbre à la géométrie, les courbes ont été soumises à l'analyse, on a envisagé les tangentes sous d'autres points de vue on les a regardées comme des sécantes dont les deux points d'intersection sont réunis ou comme le prolongement des côtés infiniment petits de la courbe considérée comme un poligone d'une infinité de côtés, ou comme la direction du mouvement composé, par lequel la courbe peut être décrite […].Ces méthodes ne laissent rien à désirer pour la généralité et la simplicité mais ceux qui admirent avec raison l'évidence et la rigueur des anciennes démonstrations, regrettent de ne pas trouver ces avantages dans les principes de ces nouvelles méthodes. La théorie des fonctions que nous avons développée dans la première partie, nous met en état de traiter le problème des tangentes, et les autres problèmes du même genre d'après les

[143] *Ibid.*, p. 91.

> notions et les principes des anciens et de donner ainsi aux résultats de l'analyse le caractère qui distingue leurs solutions.[144]

Lagrange exprime clairement dans ce paragraphe sa volonté de revenir à la rigueur et aux principes des anciens, c'est-à-dire des géomètres grecs. Son analyse n'est plus l'étude des quantités infinies, mais celle des quantités finies. Elle sépare nettement la théorie des fonctions de ses applications. Signalons aussi que Lagrange ne donne aucune définition de ce qu'est la courbe d'une fonction. Cette notion a déjà été rencontrée à plusieurs reprises dans la première partie. Elle ne pose aucune difficulté aux mathématiciens de cette époque. Pour toute fonction $y = f(x)$, en faisant varier x, les points d'abscisse x et d'ordonnée $f(x)$ donnent une courbe continue, sauf éventuellement pour des valeurs particulières de x.

L'application aux courbes du calcul des fonctions est présentée dans le cadre très général d'une théorie de l'osculation[145]. Le « degré de rapprochement » entre une courbe d'équation $y = fx$ et une autre courbe d'équation $y = Fp$ ayant avec la première un point commun est donnée par la différence :

$$fx - Fx = o + i(f'x - F'x) + \frac{i^2}{2}(f''x - F''x) + \frac{i^3}{2.3}(f'''x - F'''x) + \&c.$$

Lagrange écrit que les courbes se rapprocheront d'autant plus qu'il y aura plus de termes qui disparaîtront au début de cette série. Mais, pour pouvoir estimer ce degré de rapprochement, revenant à la méthode des anciens, Lagrange utilise une troisième courbe $s = \varphi r$ qui a le même point commun avec les deux autres. L'étude du rapprochement entre cette troisième courbe et chacune des deux premières lui permet de montrer que, si $f'x = F'x$, elle ne pourra passer entre les deux premières qu'à moins d'avoir $f'x = \varphi' x$. Donc, dans le cas où on a : $Fp = fx - xf'x + pf'x$, la droite qu'elle représente est, au sens de Lagrange, la tangente à la courbe au point d'abscisse x et d'ordonnée fx.

Cette étude des degrés de rapprochement peut bien sûr se poursuivre en considérant les dérivées successives. Lagrange définit le cercle osculateur avec les dérivées secondes puis se place dans une théorie générale du contact[146].

---

[144] *Ibid.*, p. 117.

[145] La théorie de l'osculation se trouvait elle aussi dans le mémoire d'Arbogast déjà cité. Sur la question de la reconnaissance de la priorité d'Arbogast à propos de cette théorie, on pourra lire FRIEDELMEYER Jean-Pierre, *op. cit.,* p. 125-128.

[146] On pourra lire DELCOURT Jean, « Analyse et Géométrie, histoire des courbes gauches. De Clairaut à Darboux », *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 65, N° 3, 2011, p. 229-293.

Lagrange effectue d'abord la recherche des extrema d'une fonction par des considérations sur les courbes avant « de faire voir comment cette méthode peut se déduire directement de l'analyse des fonctions, sans la considération intermédiaire des courbes »[147]. La méthode qu'il emploie utilise la *formule de Taylor-Lagrange* mais, dans son principe, elle reste la même que celle que nous avons vue avec Prony.

La *formule de Taylor-Lagrange* lui permet aussi de démontrer que, si Fx désigne l'aire sous la courbe d'une fonction fx, on a alors : $F'x = fx$. Considérant l'aire entre les abscisses x et $x + i$, il encadre la différence $F(x+i) - Fx$ entre les « espaces rectangulaires » ifx et $if(x+i)$. Pour une quantité déterminée j comprise entre 0 et i, qui peut ne pas être la même pour les deux fonctions, il obtient donc, « abstraction faite des signes de ces quantités » :

$$i(F'x - fx) + \frac{i^2}{2}F''(x+j) \text{ moindre que } i^2 f'(x+j).$$

Cette relation devant être vraie « quelle que soit la valeur de i, et par conséquent en prenant i aussi petit que l'on voudra »[148], il démontre par l'absurde qu'elle ne peut avoir lieu que si $F'x = fx$.

Les aménagements des Leçons sur le calcul des fonctions

Le texte des *Leçons sur le calcul des fonctions* n'est plus partagé en parties mais en vingt leçons qui ne respectent plus la séparation entre exposition de la théorie et application de celle-ci à la géométrie puis à la mécanique. Parmi les nouvelles notions que Lagrange introduit citons les sinus et cosinus des angles multiples, des travaux récents de lui-même[149], de Siméon Denis Poisson ou de Jean Nicolas Hachette[150], et remarquons plus particulièrement la XIXe leçon intitulée « Disgression[151] sur les Equations aux différences finies » où il s'intéresse à l'analogie entre calcul des différences finies et calcul différentiel.

Concernant les points que nous avons détaillés plus haut il est important de noter que Lagrange revient longuement sur le développement en série d'une fonction. Il précise sa

---

[147] LAGRANGE Joseph-Louis, *op. cit.*, p. 151.
[148] *Ibid.*, p. 155.
[149] C'est le cas de l'exposition d'une méthode pour trouver l'équation primitive de toute équation différentielle du premier ordre à un nombre quelconque de variables, lorsque les fonctions dérivées ne passent pas le premier degré, p. 308-318.
[150] « Note sur les équations primitives singulières » de Poisson, p. 239-241, et « Note sur les équations primitives des dérivées du premier ordre » de Hachette, p. 318-320.
[151] Probable coquille de l'imprimeur. Dans l'édition de 1806 cette leçon, devenue la 18e, est bien qualifiée de « digression ».

démonstration en montrant que le développement ne peut contenir de puissances négatives de l'accroissement. Mais surtout, ses propos se sont nuancés sur l'existence d'un tel développement pour toute fonction. Après l'avoir affirmé pour les fonctions algébriques, il ajoute en effet :

> Si la fonction fx n'est pas algébrique, on peut néanmoins supposer que le développement de $f(x+i)$ soit en général de la même forme, en regardant comme des exceptions particulières les cas où ce développement contiendrait d'autres puissances de i que des puissances positives et entières.[152]

Lagrange ne donne aucune explication supplémentaire sur ce qui motive ses doutes à propos de la généralité du développement en série d'une fonction.

Le développement en série entière est immédiatement suivi de la démonstration du « théorème de Taylor »[153] à propos duquel il rappelle, « pour ceux qui savent le calcul différentiel », les notations $\frac{d.fx}{dx}, \frac{dy}{dx}$, etc.

Le *principe de troncature* ne figure plus comme principe fondamental dans les *Leçons sur le calcul des fonctions*. La démonstration de la *formule de Taylor-Lagrange* repose sur ce « principe général » :

> Une fonction qui est nulle lorsque la variable est nulle, a nécessairement, depuis l'origine de la variable, des valeurs finies et constamment positives ou négatives, tant que sa fonction dérivée est finie et toujours positive ou négative.[154]

Ce principe général est démontré de manière analytique en subdivisant l'intervalle de 0 à z en n intervalles de longueur i, et en prenant i aussi petit que l'on veut pour que toute les quantités :

$$\begin{gathered} f(x+i)-fx \\ f(x+2i)-fx \\ f(x+3i)-fx \\ \dots\dots\dots.. \\ f(x+ni)-f[x+(n-1)i] \end{gathered}$$

[152] LAGRANGE Joseph-Louis, « Leçons sur le calcul des fonctions », *Journal de l'École polytechnique*, 12e cahier, An XII (1804), p. 9.
[153] Le théorème obtenu est simplement appelé « formule fondamentale » et le nom de Taylor n'apparaît qu'à l'occasion de la XIXe leçon sur les différences finies. Il y démontre le « théorème de Taylor » dans le cas où les différences finies deviennent infiniment petites, démonstration qui rappelle celle de Prony dans son cours de 1795.
[154] *Ibid.*, p. 66.

aient le même signe, x étant considérée comme une constante arbitraire.

Sa démonstration repose sur l'affirmation suivante. Dans l'expression :

$$f(x+i) = fx + i(f'x + V)$$

où V est une fonction de x et de i nulle pour $i = 0$, « il est clair qu'en faisant croître i par degrés insensibles depuis zéro, la valeur de V croîtra aussi insensiblement depuis zéro, soit en plus soit en moins, jusqu'à un certain point »[155]. Nous y lisons, sans que n'y figure le mot, la notion de continuité d'une fonction, une fonction continue étant supposée, dans le langage actuel, monotone par morceaux.

Et c'est la *formule de Taylor-Lagrange* qui lui permet de démontrer de façon analytique le principe de troncature.

Cette même formule lui permet de justifier que la droite $y = fx + if'x$ est bien la tangente à la courbe au point d'abscisse x. La recherche des tangentes ouvre sur une théorie de l'osculation simplifiée par rapport à son premier ouvrage, auquel il renvoie. Le problème des quadratures n'est pas abordé. Mais, ainsi que nous l'avons dit, ce second ouvrage est probablement marqué par le public restreint auquel Lagrange s'adresse. L'introduction purement analytique de Lagrange n'est plus celle qui a cours à l'École polytechnique où Joseph Fourier a introduit la méthode des limites dans son enseignement.

3 – La méthode des limites à l'École polytechnique : son introduction dans le cours de Fourier, son inscription dans le programme d'Analyse de 1800 et sa mise en œuvre par Garnier et Lacroix

3 – 1 L'introduction de la méthode des limites dans le cours d'analyse de Fourier (1795-1796)

Fourier a été élève de l'École royale militaire d'Auxerre où il a découvert les mathématiques à l'âge de 13 ans dans les manuels de Bézout[156]. À 17 ans, il complète sa formation au collège de Montaigu à Paris. Entré à 26 ans comme élève à l'École normale de l'An III, il s'y fait remarquer et il est engagé comme maître de conférences. À la fermeture de cette école, en mai 1795, il est recruté à l'École polytechnique comme surveillant des leçons de fortification.

[155] *Ibid.,* p. 67.

[156] Sur Fourier, voir DHOMBRES Jean, *Joseph Fourier (1778-1830) créateur de la physique mathématique*, Paris, Belin, 1998.

Emprisonné de juin à octobre pour ses sympathies jacobines, il est nommé instituteur d'analyse en novembre 1795.

Son cours d'analyse, qui commence le 4 nivôse An IV (25 décembre 1795), nous est connu par les notes manuscrites de Charles-Louis Donop[157], élève de la première promotion de l'École[158]. Ce cours de Fourier peut être considéré comme le premier véritable cours régulier d'analyse dispensé à l'École polytechnique en raison de la difficulté du cours de Lagrange rapidement réservé aux meilleurs élèves.

Le manuscrit comporte huit cahiers. Les quatre premiers semblent correspondre aux premières leçons de Lagrange. Ils abordent la résolution des équations jusqu'au quatrième degré, la décomposition des équations en facteurs du premier et deuxième degré, la règle des signes de Descartes, la recherche des racines énièmes de l'unité, les logarithmes, les progressions géométriques, le développement en série des expressions rationnelles, des quantités trigonométriques, exponentielles et logarithmique. Dans ces premiers cahiers, Fourier, à l'instar de Lagrange, exprime son souhait d'un retour à la rigueur des anciens et son refus d'une métaphysique du calcul différentiel :

> Il est à espérer que les géomètres modernes amèneront les mathématiques à ce point de perfection que les méthodes des infinis, des indivisibles, des incomparables, des dernières raisons, des fluxions, &c. feront place aux définitions géométriques et rigoureuses à l'instar des anciens, en sorte que ces sophismes disparaissant devant le flambeau lumineux de la saine géométrie, iront se réfugier dans les régions ténébreuses de la métaphisique.[159]

Le cours de calcul différentiel qui occupe les huit derniers cahiers s'ouvre par la première définition eulérienne d'une fonction suivie d'une brève introduction au calcul des différences. Fourier choisit l'exemple de la fonction x^2 pour l'introduire et distinguer le calcul différentiel du calcul aux différences. L'objet de ce dernier est, écrit-il, de trouver le rapport de la différence de la fonction à la différence de la variable, soit $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$ dans l'exemple

[157] Le manuscrit Vitt. Em. 1509 qui contient les notes de cours de Donop a appartenu au mathématicien italien Vito VOLTERRA et se trouve actuellement à la Bibliothèque de l'Academia dei Lincei, à Rome. Il a été édité en 1989 par Anne-Marie LORRAIN. Nous nous référons cette version éditée.

[158] Ce qui montre que certains élèves de la première promotion ont suivi les cours de Fournier destinés aux élèves de la promotion suivante.

[159] FOURIER Joseph cité par LORRAIN Anne-Marie et PEPE Luigi dans « Le Ms. Vitt. Em. 1509 et les débuts de l'enseignement de l'analyse mathématique à l'École polytechnique », dans FOURIER Jean-Baptiste, *Leçons d'un cours d'analyse rédigées par C. L. Donop*, *Ms. Vitt. Em. 1509*, Edité par Anne-Marie LORRAIN, Ferrare, 1989, p. XVIII.

choisi, alors que le calcul différentiel ne considère que la limite de ce rapport. Fourier définit alors la limite à la manière de d'Alembert : « la limite d'une quantité variable est le terme dont cette quantité approche sans cesse et aussi près qu'on veut sans cependant pouvoir jamais y arriver »[160]. Cette définition est suivie, comme dans l'article de d'Alembert dans l'*Encyclopédie*, de l'exemple du cercle comme limite des polygones inscrits et circonscrits, illustrée par la figure ci-dessous : la longueur de la corde approchera d'autant de la longueur de l'arc que l'arc sera petit et donc la limite du rapport de la longueur de l'arc à celui de la corde sera l'unité.

Un second exemple est illustré par deux figures qui prouvent que, pour toute courbe, « l'angle formé par la sécante a pour limite l'angle formé par la touchante »[161].

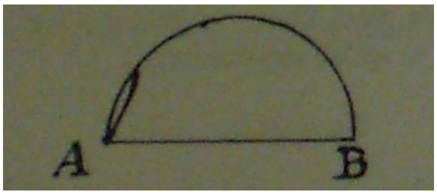
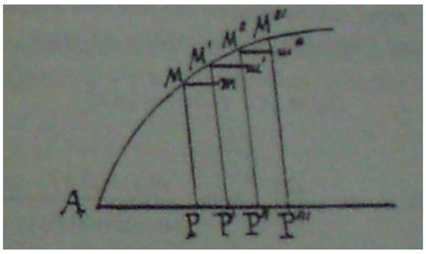
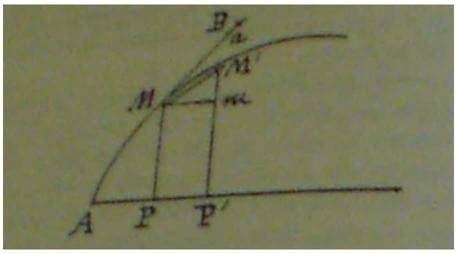


Figure 3: illustration du cercle comme limite de polygones dans *Leçons d'un cours d'analyse* rédigées par C. L. Donop





Figures 4 et 5: illustration de la tangente comme limite de la sécante dans *Leçons d'un cours d'analyse* rédigées par C. L. Donop

Ainsi donc, Fourier rompt doublement avec l'enseignement de Lagrange : il choisit la méthode des limites pour principe et réinscrit ce calcul dans un rapport immédiat à la géométrie.

Mais le développement en série d'une fonction reste l'outil qui permet à Fourier de déterminer le rapport des accroissements de la fonction à ceux de la variable. Il dicte : « il est

[160] FOURIER Joseph, *Leçons d'un cours d'analyse rédigées par C. L. Donop, Ms. Vitt. Em. 1509*, Edité par Anne-Marie LORRAIN, Ferrare, 1989, p. 114.
[161] *Ibid*, p. 116.

toujours possible […] de développer $\varphi(x + \Delta x)$ en une série de x qui marche suivant les puissances de Δx »[162], série qui aura la forme :

$$\varphi(x) + A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + \&.$$

Le rapport $\frac{dy}{dx}$, notation qu'il utilise pour exprimer le passage à la limite dans le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, auquel il ne donne pas de nom, sera donc égal à A. L'emploi de la notation est une nouvelle rupture avec le cours de Lagrange, même si nous avons vu que ce dernier la signalera dans son cours de 1798-1799.

De l'égalité $\frac{dy}{dx} = A$, il déduit $dy = Adx$, dy étant appelée la différentielle de la fonction. Ce passage d'une notation $\frac{dy}{dx}$ qui n'a de sens que comme entité globale, à la différentielle de la fonction recèle une indiscutable difficulté quant à la signification des quantités dy et dx. Cette difficulté n'est pas levée quand Fourier précise que ce n'est que par souci « d'uniformité » dans la notation qu'il transforme Δ en d dans Δx, et que la différentielle d'une fonction n'est autre chose que le premier terme de la différence de cette fonction. Il s'agit probablement, là encore, de la marque des fondements incertains qu'il regrettait dans les premiers cahiers. Cependant, ceci lui permet de réintroduire la notion de différentielle, notion fondamentale du calcul leibnizien, qui ne se trouvait ni chez Prony ni chez Lagrange, et sans avoir recours à la notion d'infiniment petit. Il réintroduit ainsi un outil de calcul particulièrement efficace qui lui permet de différentier les équations, c'est-à-dire les fonctions implicites.

Le développement en série d'une fonction et le calcul de la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sont les outils qui lui permettent d'obtenir la différentielle d'une puissance quelconque de la variable, d'un produit ou d'un quotient de fonctions, et les différentielles des fonctions logarithme, exponentielle, sinus et cosinus. Pour illustrer sa méthode, prenons l'exemple du calcul de la différentielle de $z = \frac{x}{y}$, où y est une fonction de x. Le développement en série lui permet d'obtenir :

$$\frac{\Delta \mathrm{z}}{\Delta x} = \frac{y - x(A + B\Delta x + C\Delta x^2 + \&c)}{y^2 + y\Delta x(A + B\Delta x + C\Delta x^2 + \&c)}$$

Là où Lagrange poursuivait avec un développement en série, il utilise la limite:

[162] *Ibid*, p. 118.

$$\text{limite}\frac{\Delta z}{\Delta x}=\frac{y-xA}{y^2}\ \text{ou}\ \frac{dz}{dx}=\frac{y-xA}{y^2},$$

pour conclure : $dz=\frac{ydx-xdy}{y^2}$.

De la même façon que le calcul différentiel est introduit à partir des différences finies du premier ordre, les différentielles successives sont obtenues à partir des limites des rapports aux différences finies secondes, troisièmes, …. : $\frac{\Delta^2 Z}{\Delta x^2},\frac{\Delta^3 z}{\Delta x^3}$, … . L'identité des rapports successifs $\frac{d^2y}{dx^2},\frac{d^3y}{dx^3}$, … ainsi définis, avec les rapports :

$$\frac{d\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)}{dx}$$

est généralisée à partir des exemples du binôme, des fonctions logarithme, exponentielle et sinus.

À l'occasion des différentielles successives, Fourier introduit le vocabulaire lagrangien de « fonctions dérivée » et de « fonction primitive », ainsi que la notation lagrangienne en notant :

$$\frac{dy}{dx}=f'(x),\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=f''(x),\qquad \frac{d^3y}{dx^3}=f'''(x),\dots$$

Ces rapports étant définis, il démontre le « théorème de Taylor ».

La recherche des tangentes, sous-tangentes, normales et sous-normales lui permet d'indiquer que l'on obtient les mêmes résultats avec les infiniment petits, infiniment petits dont il avait déjà précisé qu'il fallait les employer avec prudence. En effet :

> Il faut faire le moins possible dans les calculs usage de l'infini, car d'après cette hypothèse on néglige les quantités finies ou les infinies d'ordre inférieur, ce qui, quoique très exact pour le raisonnement, n'est pas assez rigoureux pour les mathématiques.[163]

Malgré leur efficience, les infiniment petits font partie pour Fourier de ces « sophismes » qui ne conviennent pas à une « saine géométrie » et à son exigence de rigueur.

[163] FOURIER Joseph cité par LORRAIN Anne-Marie et PEPE Luigi o*p. cit.*, p. XVIII

Fourier n'aborde pas la théorie de l'osculation. La recherche des maxima et des minima est abordée par des considérations purement géométriques qui lui permettent d'obtenir la condition nécessaire à l'obtention d'un extrémum. Il reproduit ensuite sur une même figure la courbe de la fonction et « la courbe des inclinaisons », c'est-à-dire celle de la fonction dérivée (sur la figure 6 ci-dessous, au point M de la courbe de la fonction, il porte $MR = 1$; SR est donc la tangente de l'angle SMR qu'il reporte en P pour obtenir le point correspondant de la courbe des inclinaisons).

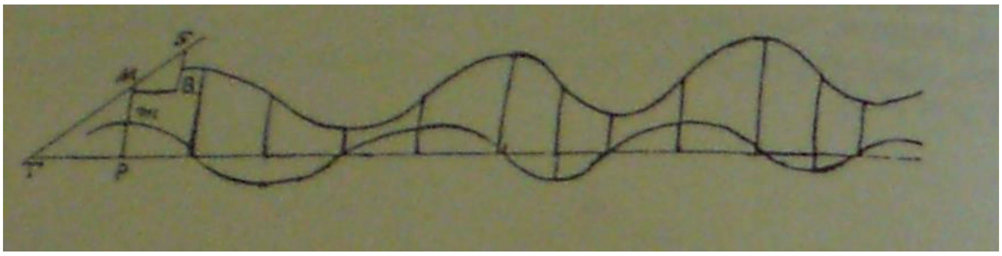


Figure 6 : courbe de la fonction et courbe des inclinaisons dans les *Leçons d'un cours d'analyse* rédigées par C. L. Donop

Il observe ainsi qu'à un extremum de la courbe des inclinaisons correspond un point d'inflexion de la courbe de la fonction. Il reporte ensuite la « 2e courbe des inclinaisons (courbe que l'on pourrait nommer la courbe seconde) » pour observer « que si la 1re courbe est convexe, la seconde a ses ordonnées croissantes et la 3e les a positives et si la 1re est concave, la seconde a ses ordonnées décroissantes et la 3e les a négatives »[164].

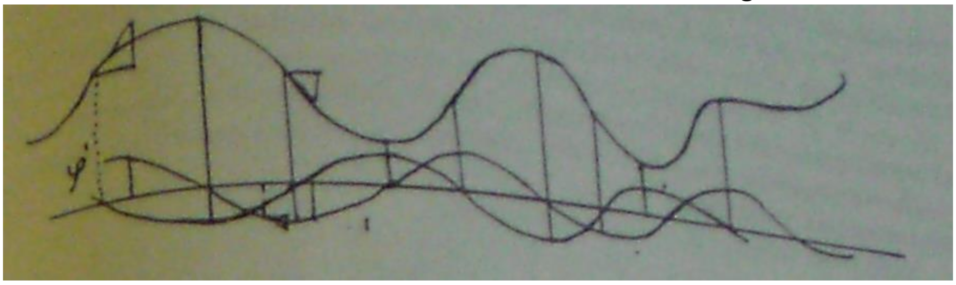


Figure 7: courbe de la fonction, courbe des inclinaisons et courbe seconde dans les *Leçons d'un cours d'analyse* rédigées par C. L. Donop

À la suite de cette introduction géométrique, la recherche des extrema est traitée « de manière purement analytique » en utilisant le théorème de Taylor. Le manuscrit ne comporte pas de calcul intégral.

Les éléments du calcul différentiel que propose Fourier sont donc finalement bien éloignés du calcul des fonctions de Lagrange même si le développement d'une fonction en série entière reste la propriété fondamentale. Le calcul différentiel n'est plus comme chez Prony un cas

[164] *Ibid.*, p. 189.

particulier du calcul aux différences finies mais ce dernier calcul reste un outil essentiel qui lui permet, par passage à la limite, d'obtenir les coefficients différentiels successifs. Très éloigné du calcul leibnizien de Bézout dont les manuels l'avaient initié au calcul différentiel, le cours de Fourier nous semble, par certains aspects, proche du texte de Cousin de 1777.

Les *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral* de Cousin commençaient par un premier chapitre sur le calcul aux différences finies. Le chapitre deux, intitulé « De la Méthode des anciens Géomètres connue sous le nom de Méthode des Limites » indiquait sur quelques exemples dont le rapport de la circonférence du cercle à celle des polygones inscrits ce qu'était la méthode des limites. Puis Cousin définissait les rapports $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$ comme limites des rapports $\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}, \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$ dans le développement en série de la fonction y avant de démontrer le théorème de Taylor. L'ambiguïté signalée à propos de la définition des différentielles se trouvait déjà chez Cousin qui appelait « différentielles du premier ordre les termes dy, dx de la limite $\frac{dy}{dx}$ »[165].

Il faut aussi noter la présence dans le cours de Fourier de « Résumés » qui concluent l'étude des notions les plus importantes, et de nombreux exercices d'entraînement, avec les réponses (par exemple 56 exercices de calcul de différentielles). Tout ceci ne se trouvait ni chez Lagrange ni chez Prony. Il y a là, avec ces outils pour parvenir à une maîtrise de la théorie par un entraînement régulier, une réponse au problème crucial du niveau des élèves apparu dès les premières leçons à l'École polytechnique. Ce cours est l'œuvre originale d'un savant et d'un professeur dont l'objectif n'est pas seulement la présentation rigoureuse d'une théorie, qui d'ailleurs relève pour lui d'un futur qui la débarrassera de ses « sophismes ». Le recours à la géométrie et aux exemples introductifs obéit sans conteste à une volonté pédagogique. Et, même s'il faut faire preuve de recul vis-à-vis de certains propos laudateurs dans un livre commandé pour les cent ans de l'École, les qualités de pédagogue de Fourier semblent avoir fait date puisqu'un siècle plus tard, Ernest Mercadier, directeur des études évoquera ce « professeur rempli de clarté, de méthode, d'érudition, et même de *grâce* »[166].

---

[165] COUSIN Jacques Antoine Joseph, *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral*, Paris, Jombert, 1777, p. 73.
[166] MERCADIER Ernest, « Histoire de l'Enseignement de l'École Polytechnique » dans *École Polytechnique, Livre du centenaire, 1794-1894*, *Tome I, L'École et la Science*, Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1895, p. 49.

En 1798 Fourier, avec deux autres professeurs de l'École, le chimiste Claude-Louis Berthollet et Monge, fait partie des savants qui accompagnent l'expédition de Bonaparte en Egypte. Il est remplacé par Garnier et l'École polytechnique est réorganisée l'année suivante.

3 – 2 La méthode des limites dans le programme d'analyse de 1800

À la suite de la loi du 25 frimaire an VIII (16 décembre 1799) qui réorganise l'École polytechnique les premiers programmes véritablement détaillés de l'École, pour l'enseignement et pour le concours d'admission, sont adoptés.

Lacroix, qui a été élu membre de de l'Académie de Sciences en avril 1799, est recruté en octobre 1799 pour remplacer Lagrange et assurer les cours facultatifs d'analyse. Il participe à l'élaboration des nouveaux programmes. Y participent également Garnier, Prony, et Jean-Baptiste Labey recruté comme instituteur de mécanique. Labey, ancien professeur à l'École militaire puis à l'École d'artillerie, était examinateur d'admission à l'École polytechnique depuis 1798. Il est l'auteur d'une traduction de l'*Introductio in analysin infinitorum* d'Euler parue en 1796 et 1797. Le Conseil d'instruction remet au Conseil de perfectionnement des « bases […] pour servir à la formation des programmes de l'analyse à fournir aux Examinateurs pour l'examen des deux divisions ». Ce texte, approuvé par le Conseil d'instruction le 15 brumaire an 9 (6 novembre 1800), porte indiscutablement la marque de Lacroix, même s'il est rédigé conjointement avec Garnier[167].

À propos des méthodes d'introduction du calcul différentiel, le document précise :

> Si la connaissance de ces diverses méthodes importe à celui qui se propose d'enseigner ou qui veut se livrer exclusivement aux mathématiques, dans la vüe de les perfectionner, elle ferait perdre beaucoup de tems à l'élève qui doit diriger tout son travail vers la méchanique[168]. Celui-ci préférera sans doute la connaissance d'un résultat qu'il ignore à celle d'un nouveau chemin pour arriver à l'un de ceux qu'il possède déjà.[169]

---

[167] Archive III3b, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique. Ce document est retranscrit dans CARAMALHO DOMINGUES João, *Lacroix and the Calculus*, Bâle, Birkhäuser, 2008, annexe C.2.1. L'auteur de cet ouvrage, probablement à ce jour le plus complet sur ce « mathématicien-enseignant », précise que certaines additions et corrections sont indiscutablement de la main de Lacroix lui-même. Garnier revendique aussi son rôle dans l'écriture de ce projet (voir la « Notice sur Jean Guillaume GARNIER », http://www.academieroyale.be/academie/documents/GARNIERJeanGuillaumeARB_184158077.pdf consulté le 28/08/2017., p. 170)

[168] La loi de décembre 1799 rappelle le double objectif assigné à l'école de formation d'ingénieurs et de savants mais elle porte plus nettement l'accent sur la formation d'ingénieurs (Voir MERCADIER Ernest, *op. cit.*, p. 24.). Ce passage du document montre que le Conseil d'instruction se conforme à l'esprit de la nouvelle loi.

[169] Archive III3b, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

On ne peut que faire le rapprochement avec la préface à la première édition du *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*, en 1802, où Lacroix écrit, cette fois-ci à propos de l'arithmétique et de la géométrie : « ne convient-il pas mieux d'employer le temps des élèves à leur faire connaître des résultats nouveaux, plutôt que des procédés différens pour parvenir au même résultat »[170].

Le projet de programme propose de commencer directement l'enseignement d'analyse par le calcul différentiel présenté par la méthode des limites. Cela aurait pour conséquence de supprimer l'enseignement préalable de notions d'algèbre : certaines, désignées comme les « éléments d'algèbre complets » devant être exigées des candidats au concours d'admission, d'autres, comme la démonstration du binôme dans le cas d'un exposant fractionnaire et les séries des fonctions logarithmiques et circulaires, inclus dans le cours de calcul différentiel « parce que le développement des fonctions se lie naturellement au calcul différentiel, comme une application spéciale du théorème de Taylor »[171]. Le document précise qu'il faudrait se hâter de parvenir au « théorème de Taylor », après qu'on eut obtenu les différentielles premières des fonctions circulaires et logarithmiques par la méthode des limites. Le texte propose aussi d'étudier la recherche des maxima et des minima des fonctions d'une seule variable avant l'application aux courbes, c'est-à-dire de façon analytique. En ce qui concerne le calcul intégral, rien n'est précisé sur la façon de l'aborder, ce qui signifie, suivant les conceptions de l'époque, que l'intégration est l'opération inverse de la différentiation. Quant à l'étude des différences finies, elle ne figure pas dans le projet.

Le Conseil de perfectionnement ne suit pas le Conseil d'instruction sur la suppression d'un enseignement d'algèbre préalable à celui du calcul différentiel[172]. Le « Programme d'Analyse » de première année comporte une première partie intitulée « Analyse algébrique ». Elle est essentiellement consacrée à la résolution des équations et à l'étude des progressions arithmétiques et géométriques. Le développement en série de quelques fonctions y figure également. L'analyse algébrique semble reprendre finalement dans ses grandes lignes

[170] LACROIX Sylvestre-François, *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral, précédé de réflexions sur la manière d'enseigner les Mathématiques, et d'apprécier dans les examens le savoir de ceux qui les ont étudiées*, Paris, Duprat, An X (1802), p. XIV.

[171] Archive III3b, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

[172] Les programmes adoptés par le Conseil de perfectionnement figurent dans le « Rapport du Conseil de perfectionnement de l'an 9 », *Rapports du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique,* CRH archives : X2B 10/1799-181O, p. 28-34.

l'enseignement dispensé par Lagrange durant les premières leçons qui précédaient la théorie des fonctions, enseignement qu'on retrouvait par la suite chez Fourier avant l'étude du calcul différentiel.

En ce qui concerne le calcul différentiel et intégral, les vœux du Conseil d'instruction, que nous avons évoqués précédemment sont globalement respectés : introduction par la méthode des limites, « théorème de Taylor » placé après l'obtention des différentielles des fonctions logarithmiques et circulaires, recherche analytique des maxima et des minima. Cependant le programme ne précise pas que les différentielles des fonctions logarithmiques et circulaires doivent être obtenues par la méthode des limites, ce qui laisse toute latitude au professeur pour les introduire à partir des développements en série.

Avec ce programme, la méthode des limites, et elle seule, s'impose comme fondement du calcul différentiel. Introduite par Fourier dans l'enseignement à l'École polytechnique, Lacroix l'a à son tour utilisée en succédant à Lagrange. Les notes manuscrites de Aimé Marie Gaspard, marquis de Clermont-Tonnerre, élève de l'École de la promotion 1799, fournissent un résumé des leçons données par Lacroix en 1799-1800 qui l'atteste[173]. Le plan suivi est celui proposé par le document du Conseil d'instruction à quelques détails près : on ne connaît pas la méthode employée pour déterminer les différentielles des fonctions logarithmiques et circulaires, et la recherche des maxima et des minima semble avoir utilisé les courbes.

Les programmes ne sont fixés par le Conseil de perfectionnement qu'après le début des cours de l'an 9 (1800-1801), assez tôt cependant pour que Garnier et Lacroix, les deux instituteurs d'analyse, puissent en tenir compte. À compter de 1800, le Conseil de perfectionnement décide qu'un professeur suivra les élèves sur les deux années d'études, et des emplois de répétiteurs d'analyse sont créés. Ceux-ci sont chargés de vérifier la maîtrise des cours par les élèves en procédant à des interrogations[174]. Charles Louis Dinet est recruté comme répétiteur pour seconder Garnier qui va enseigner aux élèves de première année en 1800-1801. Louis Benjamin Francoeur sera le répétiteur de Lacroix. Ils sont tous deux anciens élèves de l'École et ingénieurs géographes.

---

[173] Ce manuscrit, Ms. 1666, qui appartient à la Wellcome Library for the History and Understanding of Medicine de Londres, est retranscrit dans CARAMALHO DOMINGUES João, *op. cit.*, annexe C.1.

[174] Le « Tableau des études » prévoyait en première année quatre leçons de une heure d'analyse par décade, les primidi, tridi, sextidi et octidi, avec pour chacune, une répétition le lendemain. *Ibid.*, p. 24-25.

3 – 3 Les *Leçons d'Analyse algébrique, différentielle et intégrale* de Garnier (1800-1801)

Après des études à Reims et Paris, où il indique avoir étudié le calcul différentiel et intégral dans la traduction française des traités d'Agnesi, Garnier enseigne à l'École militaire de Colmar où il rencontre Arbogast[175]. À la fermeture de cette école, en 1789, il retourne à Paris et travaille avec Prony à la réalisation des grandes tables logarithmiques. Il fait partie, dès la première année, des examinateurs d'admission à l'École polytechnique et crée une école où il prépare les candidats au concours d'admission. À l'occasion d'une tournée d'examens il rencontre Fourier à Auxerre. Il est recruté comme instituteur d'analyse temporaire après le départ de Fourier pour l'Egypte. Il devient, selon lui, un proche de Lagrange, ayant « la liberté d'entrer dans son cabinet à tout heure du jour »[176], revoyant les épreuves et les calculs des ouvrages suivants de Lagrange : la *Résolution des équations numériques*, la *Théorie des fonctions analytiques*, les *Leçons sur le calcul des fonctions* et la *Mécanique analytique*.

Nous ne connaissons pas les cours de Garnier durant ses deux premières années d'enseignement à l'École polytechnique. En revanche, nous disposons de son cours imprimé distribué aux élèves de première division pour l'année 1800-1801[177], intitulé *Leçons d'analyse algébrique, différentielle et intégrale*. Le préambule annonce qu'il n'a eu connaissance des programmes définitifs qu'après avoir commencé ses cours. Malgré cela, affirme-t-il, son cours d'analyse algébrique comprend tous les points du nouveau programme. Il précise aussi s'être conformé scrupuleusement aux directives pour le cours d'analyse différentielle et d'analyse intégrale et avoir utilisé les ouvrages de Laplace, Lagrange, Legendre, Bossut, Prony et Lacroix.

Le cours comporte 42 leçons. « L'Analyse différentielle » commence à la dix-septième leçon par la première définition eulérienne des fonctions et leur classification en fonctions algébriques et transcendantes. Garnier consacre ensuite deux leçons aux différences finies de tous ordres avant d'aborder la notion de limite.

---

175 Sur Garnier, voir la « Notice sur Jean Guillaume GARNIER », http://www.academieroyale.be/academie/documents/GARNIERJeanGuillaumeARB_184158077.pdf , consulté le 28/08/2017.

176 *Ibid.*, p. 172.

177 C'est en l'an 9 que le Conseil de perfectionnement « invite » les professeurs à « rédiger des ouvrages exprès pour l'usage de cette école », *ibid.*

À la différence de Fourier qui ne donnait qu'une intuition géométrique de l'idée de limite, Garnier, qui n'utilise à ce moment pas de notation pour cette notion, choisit d'expliciter la limite d'une quantité sur un exemple purement algébrique. Il considère la division de a par $a-x$. Dans le cas où $x<a$, elle donne des restes qui vont en diminuant et donc,

> plus on prendra de termes de la suite
> $$1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+etc$$
> plus on approchera du véritable quotient
> $$\frac{a}{a-x},$$
> sans cependant que la différence puisse devenir rigoureusement nulle ; mais elle pourra toujours être rendue plus petite qu'une quantité donnée, quelque petite qu'elle soit.[178]

Pour « rendre la chose plus claire », il étudie le cas $x=\frac{a}{2}$. La série précédente donnera alors une valeur aussi approchée qu'on le voudra de 2, sans « jamais tomber exactement sur le nombre 2 qui sera la limite»[179]. Le cas $x=a$ donne « l'idée qu'il convient de se former de l'*infini* mathématique »[180].

De même, la limite d'un rapport, qu'il nomme aussi « dernière raison », est illustrée par l'étude des limites de : $\frac{corde}{sinus},\frac{sinus}{sinus\ verse},\frac{tan}{sin},\frac{tan}{corde}$ quand, en termes actuels, la variable tend vers 0. Enfin, il fait reposer la méthode des limites qui sert de base au calcul infinitésimal sur le principe suivant : « *deux limites d'une grandeur et de son expression doivent être égales entre elles* »[181]. On reconnaît là le premier des deux principes donnés dans l'article « Limite » de l'*Encyclopédie*. Il ne donne cependant pas les théorèmes sur la limite d'un produit et d'un quotient, théorèmes utilisés implicitement. S'il fait appel à l'intuition géométrique lors de la mention brève du périmètre et de l'aire du cercle comme limites des périmètres et aires des polygones inscrits et circonscrits, Garnier veut indiscutablement donner, dans son cours, une présentation rigoureuse de la méthode des limites par l'emploi de considérations algébriques.

---

[178] GARNIER Jean-Guillaume, *Leçons d'analyse algébrique, différentielle et intégrale donnée en l'An IX à la première division de l'École polytechnique*, CRH cours : Garnier 1800, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique, p. 71.
[179] *Ibid.*, p. 72. Précisons que, comme dans les autres textes de l'époque, le cours de Garnier ne distingue pas nettement suites et séries.
[180] *bid.*, p. 72.
[181] *bid.*, p. 74.

Ainsi les inégalités : « $tan > arc > corde$ d'où $\frac{tan}{corde} > \frac{arc}{corde} > 1$ » lui permet de conclure que, « dans la limite $\frac{arc}{corde} = 1$ »[182].

Les notions de limite d'une quantité et de limite d'un rapport étant définies, Garnier démontre, d'une façon très semblable à celle employée par Lagrange dans la *Théorie des fonctions analytiques*, que toute fonction peut se développer en série entière. Comme Fourier avant lui, il utilise ensuite les différences finies pour définir les rapports $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}$, ..., qu'il nomme coefficients différentiels, comme limites des rapports des différences finies successives : $\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}, \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$, ...

Les différentielles successives d'une fonction sont, dans les différences finies successives, les « parties propre à donner les limites, et dans lesquelles on a échangé Δ en d »[183]. Par exemple, la différence finie d'ordre deux donnant : $\Delta^2 y = p\Delta x^2 + q\Delta x^3 + etc$, la différentielle seconde est : $d^2y = pdx^2$. Comme chez Fourier, la notion d'infiniment petit est exclue de la notion de différentielle. Il démontre ensuite qu'un coefficient différentiel dérive du précédent, c'est-à-dire que :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)}{dx}$$

Pour la différentiation des produits et quotients de fonctions il utilise les développements des fonctions en série, et, après avoir démontré le « théorème de Taylor », Garnier rappelle : « qu'on peut regarder [le théorème de Taylor] comme le fondement du calcul différentiel »[184]. Garnier donne aussi la différentiation des fonctions implicites.

L'application du calcul différentiel aux courbes commence par la recherche des sous-tangentes, tangentes, normales et sous-normales obtenues à partir de la limite d'une sécante. La méthode utilisée semble une tentative de réponse au reproche de Lagrange signalé plus haut : la sous-tangente n'est pas, de façon rigoureuse, la limite de la sous sécante. Garnier ne considère pas une sécante qui tourne autour du point M mais une sécante à la courbe en 'MM'

[182] *bid.*, p. 76.
[183] *bid.*, p. 79.
[184] *Ibid.*, p. 86.

avec $'\mathrm{PP} = \mathrm{PP}' = \Delta x$ (figure 8 ci-dessous). La sous-sécante 'PS ne pourra pas, sous ces hypothèses, croître au-delà de sa valeur limite.

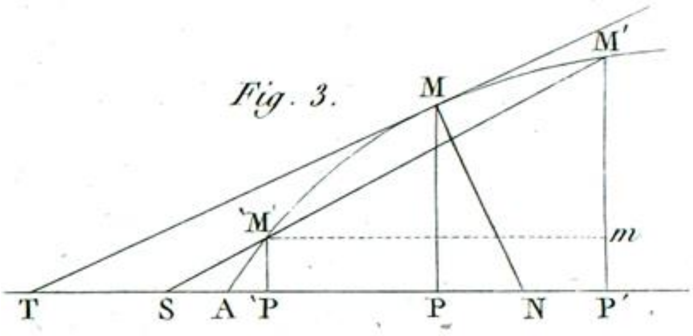


Figure 8 : la tangente comme limite d'une sécante dans les *Leçons d'analyse algébrique, différentielle et intégrale* de Garnier

Contrairement aux prescriptions du programme, la question de la recherche des maxima et des minima est abordée par des considérations géométriques. «La seule inspection » des courbes, qui ne sont « que le tableau de toutes les valeurs de la fonction », fait voir,

pour conditions du minimum

$$\frac{dy}{dx} = 0; \frac{d^2y}{dx^2} > 0$$

et pour celle du maximum

$$\frac{dy}{dx} = 0; \frac{d^2y}{dx^2} < 0.$$ [185]

Ces conditions tirées de l'observation des courbes sont complétées par une recherche purement analytique des extrema à partir de la *formule de Taylor-Lagrange*. Garnier utilise ici le *principe de troncature* qui ne donne lieu à aucune démonstration.

Le calcul intégral est défini comme l'inverse du calcul différentiel. La quadrature des courbes est abordée après les méthodes de calcul des différentes fonctions primitives au programme. Elle commence par la démonstration du principe, déjà employé au début de l'analyse différentielle :

---

[185] *Ibid.*, p. 124.

lorsqu'une grandeur variable est toujours comprise entre deux autres qui ont pour limite de leur rapport l'unité, la limite du rapport de cette grandeur comparée à l'une des autres, est aussi l'unité.[186]

Lors de cette démonstration, Garnier utilise le symbole L pour désigner la limite.

La différentielle de l'aire d'une courbe est obtenue par encadrement de l'accroissement de l'aire, ΔE , entre les aires des rectangles PP'M'm' et PP'mM (voir figure 9 ci-dessous).

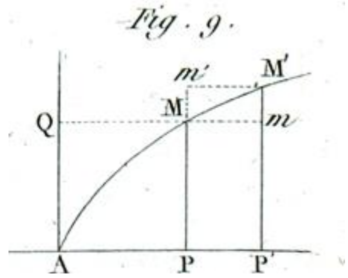


Figure 9 : illustration du calcul de la différentielle de l'aire dans les *Leçons d'analyse algébrique, différentielle et intégrale* de Garnier

Le rectangle PP'M'm' ayant pour aire $(y + \Delta y)\Delta x$, en divisant les aires PP'M'm', ΔE et PP'mM par $y\Delta x$ qui est l'aire de PP'mM, il obtient :

$$L\frac{y\Delta x + \Delta y\Delta x}{y\Delta x} > L\frac{\Delta E}{y\Delta x} > 1\,.$$

Puis, considérant le développement : $\Delta y = A\Delta x + A'\Delta x^2 + etc.$, il en déduit :

$$1 > \frac{dE}{ydx} > 1,$$

d'où : $dE = ydx$.

Dans la conception de son cours, Garnier suit donc les traces de Fourier[187]. Basé sur le principe des limites, le développement en série d'une fonction et le calcul des différences finies y jouent un rôle tout aussi essentiel. Ceci est contraire au projet de programme, co-écrit par Garnier. Le projet voyait dans le développement en série d'une fonction une « application spéciale » du « théorème de Taylor ». Les conceptions de Lacroix et Garnier sur l'enseignement des éléments du calcul différentiel ne coïncidaient probablement pas, ce qui éclairerait ce passage du préambule :

Le conseil de perfectionnement a adopté un programme qui devait devenir le texte d'un ouvrage rédigé de concert par les deux professeurs chargés de cette branche de l'enseignement ; mais les collaborateurs eurent bientôt reconnu que la chose serait beaucoup mieux exécutée par chacun d'eux en particulier, et

[186] *Ibid.*, p. 157.

[187] Nous n'y lisons de filiation avec les traités leibniziens de Agnesi dans lesquels il a appris le calcul différentiel

> qu'enfin il y aurait en cela même cet avantage que les deux cours étant faits d'après le même texte, on pourrait ensuite ou opter entre les deux, ou prendre dans l'un et dans l'autre les matériaux de l'ouvrage classique désiré.[188]

Précisons que cet ouvrage classique ne verra pas le jour et ne sera pas « désiré » très longtemps. Dans sa session de 1806, le Conseil de perfectionnement renouvelle son invitation aux professeurs de rédiger et de faire publier des précis qui ne doivent pas avoir le caractère des livres classiques car « l'instruction de l'École polytechnique doit suivre pas à pas les progrès de la science et des arts et [...] le Conseil de perfectionnement doit se réserver la faculté de désigner chaque années, sur chaque matière, le meilleur ouvrage »[189].

La différence entre les cours de Fourier et Garnier se situe plus dans l'approche des notions, plus intuitive chez Fourier, plus analytique chez Garnier. Il faut noter en particulier, chez ce dernier, la volonté d'inscrire la notion de limite dans un cadre analytique plus rigoureux. Sa proximité avec Lagrange peut l'expliquer.

À son retour en Europe, en 1802, Fourier est nommé préfet de l'Isère et ne reprend pas ses cours à l'École polytechnique. Le Conseil de perfectionnement va cependant préférer Poisson à Garnier pour suppléer Fourier dans les cours d'analyse[190]. Poisson enseignera l'analyse jusqu'en 1806, année où le Conseil de perfectionnement lui demande d'échanger ses cours avec ceux de Labey. Nous ne disposons ni de cours lithographiés, ni de manuel de calcul différentiel écrit par Poisson. Le Livre du centenaire de l'École polytechnique nous laisse cependant entrevoir un enseignement fondé sur les infiniment petits qui ne convient guère aux élèves. On y lit en effet, sous la plume de Émile Sarrau, professeur de mécanique à l'École au moment de la publication du livre : « les professeurs qui, comme Poisson, employaient exclusivement les infiniment petits, exposaient sous une forme peu rassurante les principes de leur analyse »[191].

---

[188] *Ibid.*, p. 2.

[189] *Rapports du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique, session de 1806,* CRH archives : X2B 10/1799-181O, p. 6.

[190] Il est reproché à Garnier son manque d'autorité sur les élèves (voir SCHUBRING Gert, *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century, France and Germany*, New-York, Springer, 2005, p. 372).

[191] SARRAU Émile, « Duhamel (1797-1872) », *Livre du centenaire, 1794-1894, Tome I, L'École et la Science*, Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1895, p. 126-130.

L'année suivante, Labey est suppléé par Ampère pour raisons de santé. Il semble que Labey ait enseigné l'analyse durant une année pleine, aux élèves de deuxième année.

3 – 4 Un ouvrage de référence pour la méthode des limites : Le *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral* de Lacroix (1802) :

Nous avons vu que le cours de Lacroix en 1799-1800 était basé sur la méthode des limites alors que son *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* publié en 1797 était d'inspiration lagrangienne. La méthode des limites n'était pas cependant pas absente du grand traité. La fin du chapitre I intitulé « Exposition analytique des principes du Calcul différentiel » montrait l'identité des coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots$, obtenus de façon analytique, avec les limites des rapports des accroissements. Seules des considérations pédagogiques peuvent expliquer ce changement dans le choix de la méthode d'introduction.

Lacroix avait assisté aux cours de Lagrange et sa position d'examinateur d'admission en faisait un observateur attentif de l'enseignement à l'École polytechnique. Il connaissait l'enseignement de Fourier. D'ailleurs, selon Garnier, Lacroix avait emprunté l'introduction de son grand traité aux leçons de Fourier, « sans que justice fût rendue à ce dernier géomètre »[192]. Lacroix ne semble pas avoir enseigné le calcul différentiel à l'École centrale des Quatre-Nations. Le choix de la méthode des limites ne paraît donc pas être le résultat d'une expérience personnelle d'enseignant. Il apparaît clairement que l'introduction du calcul différentiel par la méthode des limites est pour Lacroix, dès le départ, une conviction pédagogique forgée à partir des difficultés rencontrées par Lagrange dans son enseignement et à partir des succès de celui de Fourier. Même s'il s'agit d'une confirmation rétrospective il est intéressant de citer la préface de la deuxième édition de son grand traité où il écrit : « lorsqu'on veut concilier la rapidité de l'exposition avec l'exactitude dans le langage, la clarté dans les principes […] je pense qu'il convient d'employer la méthode des limites » [193].

Le *Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral* qui paraît en 1802 est le pendant du cours de Garnier. Il a été écrit par Lacroix pendant sa première année d'enseignement aux

[192] GARNIER Jean-Guillaume, « Notice sur Jean Guillaume GARNIER », *op. cit*., p. 194.
[193] LACROIX Sylvestre-François, *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, Deuxième édition revue et augmentée*, Paris, Duprat, 1810, p. XXIV.

élèves de première division de l'École polytechnique[194]. Dans les années suivantes, Il l'a utilisé pour la préparation de ses leçons, comme le prouve le résumé des leçons de Lacroix en 1805-1806. Il porte en effet, en regard de chaque leçon, les sections du livre qui y correspondent[195]. Le *Traité élémentaire* sera à la disposition des élèves en salle d'études au moins jusqu'en 1813. Ce sera même, au moins jusqu'en 1811, le seul ouvrage de calcul différentiel à leur disposition[196]. Il s'agit donc d'un ouvrage essentiel pour la connaissance de l'enseignement des principes de l'analyse à l'École polytechnique durant la première décennie du XIX^{e} siècle.

Ouvrage de près de six cent pages, il comporte deux parties intitulées « Calcul différentiel » et « Calcul intégral », suivies d'un appendice : « Des différences et des séries ». La première partie et le début de la seconde, jusqu'à l' « Application du Calcul intégral à la quadrature des courbes et à leur rectification, à la quadrature des surfaces et à l'évaluation des volumes qu'elles renferment », soit près de 330 pages, correspondent au programme de première année. La fin du livre correspond au programme de la deuxième année.

La définition d'une fonction ouvre le *Traité élémentaire* :

> Pour exprimer qu'une quantité dépend d'une ou de plusieurs autres, soit par des opérations quelconques, soit même par des relations impossibles à assigner algébriquement, mais dont l'existence est déterminée par des conditions certaines, on dit que le première est fonction des autres. L'usage que nous ferons de ce mot par la suite en éclaircira la signification.[197]

Il s'agit donc de la deuxième définition proposée par Euler dans les *Institutiones calculi differentialis*.

Il nous paraît que la volonté exprimée par Lacroix de ne pas s'attarder à préciser la notion de fonction est là encore le résultat d'une conviction pédagogique. Il en est ainsi de la notion de limite qui suit immédiatement la notion de fonction. À la page suivante, la limite du rapport

---

[194] Jusqu'en 1806, la première division correspond à la première année. À partir de 1807 la première division correspond à la deuxième année d'études.

[195] Ce résumé a été établi par le directeur des études de l'École à l'intention de André-Marie Ampère. Le document référencé Ampère *AS*, cart. 5, chap. 4, chem. 100 est retranscrit dans CARAMALHO DOMINGUES João, *op. cit.*, annexe C.3.2.

[196] Voir le procès-verbal de la séance du Conseil d'instruction du 1O juillet 1811 qui précise que les élèves n'ont à leur disposition en salle d'études, en ce qui concerne l'analyse, que l'ouvrage de Lacroix, *Registre du Conseil d'Instruction*, archives III2, , Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

[197] LACROIX Sylvestre-François, *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral, précédé de réflexions sur la manière d'enseigner les Mathématiques, et d'apprécier dans les examens le savoir de ceux qui les ont étudiées,* Paris, Duprat, An X (1802), p. 2.

$\frac{u'-u}{h}$, calculé dans l'exemple $u = ax^2$, où u' désigne la valeur de u en $x + h$, est simplement « la valeur vers laquelle ce rapport tend à mesure que la quantité h diminue, et dont il peut s'approcher autant qu'il le voudra »[198]. Lacroix ne développe pas comme Fourier d'intuition géométrique de la notion de limite, ni ne fournit d'exemples détaillés comme Garnier. Un deuxième exemple avec la fonction $u = ax^3$ suffit probablement pour que, là encore, l'usage en éclaircisse la signification. Lacroix applique les conceptions pédagogiques développées dans la préface à propos des questions de métaphysique :

> Les jeunes gens épuisent leur forces sur de vaines subtilités et perdent à les discuter un temps qu'ils employeraient bien plus utilement à augmenter la masse de leurs connaissances. […] Les conséquens, lorsqu'ils sont bien déduits et ordonnés, réfléchissent sur les antécédens une lumière beaucoup plus vive que celle que ces antécédens pourraient acquérir pour eux-mêmes. En passant à de nouvelles choses dans un ordre convenable, on sait mieux celles qu'on a déjà apprises ; c'est dans ce sens que d'Alembert disait à quelqu'un qui se plaignait des nuages que certaines démonstrations avaient laissés dans son esprit : *allez en avant et la foi vous viendra*.[199]

Pour Lacroix, la limite de ce rapport existe pour toute fonction en général[200]. La définition de ce qu'il nomme coefficient différentiel est donc purement analytique. Il faudra attendre la section 61, en page 76, pour qu'il utilise l'existence de la tangente à une courbe afin de démontrer l'existence de ce rapport. Car, écrit-il dans cette section qui suit ses réflexions sur la métaphysique du calcul différentiel, « les considérations géométriques prouvent d'une manière bien évidente que le rapport des accroissements d'une fonction et de sa variable est en général susceptible de limites »[201].

En effet, poursuit Lacroix, dans la courbe de la figure 10 ci-dessous, « si l'on conçoit que le point M' se rapproche sans cesse du point M, le point S se rapprochera aussi du point T ; […] le rapport $\frac{PM}{PS}$ s'approchera de même du rapport $\frac{PM}{PT}$ qu'il aura pour limite »[202]. Ainsi qu'il l'indiquait dans sa métaphysique du calcul différentiel, le fait analytique sur lequel repose ce calcul est l'existence de la loi de continuité dans le domaine des nombres. Cependant ce fait

---

[198] LACROIX Sylvestre-François, *op. cit.*,p. 3.
[199] *Ibid.*, p. XI.
[200] Là encore, on peut imaginer que Lacroix attend que les élèves aient amassé de nouvelles connaissances pour évoquer les points singuliers où cette limite n'existe pas.
[201] *Ibid.*, p. 74.
[202] *Ibid.*, p. 74.

analytique reste, chez lui, lié à des considérations géométriques puisque ce sont les courbes qui le « prouvent ».

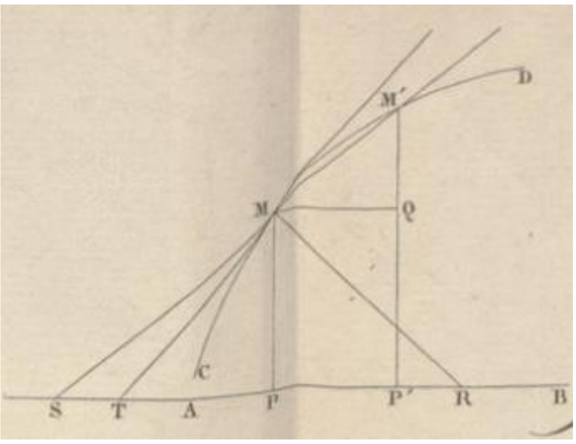


Figure 10 : la tangente comme limite d'une sécante dans le *Traité élémentaire* de Lacroix

Une différence apparue dans la deuxième édition du *Traité élémentaire*, en 1806, nous paraît significative sur la question de l'enseignement par Lacroix des principes du calcul différentiel. Après avoir affirmé l'existence d'une limite au rapport des accroissements, en page cinq, le texte de la deuxième édition renvoie à cette « preuve » géométrique : « Ces assertions s'éclaircissent et se confirment de manière très-satisfaisante par la considération des courbes, ainsi qu'on le verra dans la suite »[203]. Cette modification correspond probablement à une nécessité pédagogique qui s'est fait jour. Nous pouvons penser que son enseignement a comporté, dès ce moment du cours, une justification par les courbes de l'existence de la limite du rapport des accroissements lors des premières leçons.

De même que Fourier et Garnier avant lui, Lacroix ne dérive pas mais il différentie les fonctions. La définition qu'il donne de la différentielle est plus précise que celle de ses prédécesseurs. Partant de l'exemple de la fonction $u = ax^3$ dont les accroissements sont :

$$u' - u = 3ax^2h + 3axh^2 + h^3,$$

il définit la différentielle du comme la partie de l'accroissement qui ne dépend que de la première puissance de h, soit : $du = 3ax^2h$. Et, puisque dans le cas $u = x$ on obtient $du = h$, Lacroix écrit qu'il convient de noter : $du = 3ax^2dx$ pour « mettre de l'uniformité dans les calculs ». Cette définition de la différentielle est une nouvelle version de la définition du grand traité de 1797. La différentielle de la fonction désignait déjà le terme qui ne dépendait que de

[203] LACROIX Sylvestre-François, *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*, 2e éd., Paris, Courcier, 1806, p. 5.

la première puissance de h mais l'introduction de la notation dh se faisait uniquement par souci d'uniformité dans les calculs. Il en déduit le « coefficient différentiel » $\frac{du}{dx}$. Dans l'ouvrage, Lacroix n'emploie jamais la notation lagrangienne de fonction « prime » ni l'expression de « fonction dérivée ».

La définition de Lacroix, comme celles de Fourier et Garnier, exclut la notion d'infiniment petit. Cette notion n'est cependant pas totalement absente de l'ouvrage. Après avoir expliqué « qu'il y a d'autant moins d'erreur à prendre la différentielle pour la différence, que l'on suppose plus petite la valeur de l'accroissement de la variable »[204], une note de bas de page, signale que « c'est sur ce principe que Leibniz a fondé le Calcul différentiel, en regardant les différentielles comme des différences infiniment petites »[205]. Une deuxième note de bas de page, au début de l'application de la théorie aux courbes donne une citation de Leibniz tirée des *Acta Eruditorum* de 1684 sur le cercle considéré comme un polygone a une infinité de côtés infiniment petits. Puis, lors de l'étude des différentielles successives, Lacroix justifie par la méthode des limites les différents ordres d'infiniment petits chez Leibniz. Mais surtout, lors de l'étude de la cubature des corps terminés par des surfaces courbes, il affirme :

> en considérant les différentielles comme des accroissements infiniment petits des variables ou des fonctions dont elles dérivent, il est évident que que $dy \int z\, dx$ est l'expression de la tranche […] comprise entre deux plans parallèles.[206]

Il fait à nouveau appel aux infiniment petits et à des « considérations géométriques » lors de la résolution d'équations différentielles à deux variable. Si sa présentation du calcul différentiel exclut la notion d'infiniment petits, celle-ci lui est malgré tout utile pour donner à certains calculs un caractère d' « évidence ».

Si Lacroix ne s'est pas appesanti sur la notion de limite, il fonde en revanche son calcul des limites sur les deux propriétés introduites par d'Alembert et L'Huillier : la limite d'un produit est le produit des limites et la limite d'un quotient est le quotient des limites. Remarquons aussi qu'il n'utilise pas de notation de la limite.

---

[204] LACROIX Sylvestre-François, *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral, précédé de réflexions sur la manière d'enseigner les Mathématiques, et d'apprécier dans les examens le savoir de ceux qui les ont étudiées,* Paris, Duprat, An X (1802), p. 6.

[205] *Ibid.*, p. 6.

[206] *Ibid.*, p. 350.

Contrairement à Fourier et Garnier qui utilisaient les différences finies, les différentielles successives sont obtenues en différentiant les nouvelles fonctions que sont les différentielles. Puis Lacroix « se hâte » de démontrer le « théorème de Taylor », en page 22[207]. Sa démonstration suppose le développement d'une fonction en série entière, propriété qu'il se contente d'admettre sans démonstration.

Conformément au projet de programme, Lacroix emploie la méthode des limites pour différentier les fonctions circulaires, mais il différentie la fonction exponentielle en utilisant la formule du binôme qu'il a admise pour des exposants fractionnaires, négatifs ou positifs. Les maxima et minima sont obtenus à partir du développement de la fonction en série de Taylor, en utilisant le *principe de troncature* qui n'est pas démontré.

La propriété fondamentale de la quadrature des courbes est démontrée dans la partie « Calcul différentiel », lors de l'étude de l'application de ce calcul aux courbes. Sa démonstration, semblable dans le principe à celle de Garnier, ne fait pas appel au développement en série de la fonction.

Si s désigne l'aire sous la courbe CM qui représente la fonction y, lorsque x croît de P à P', l'aire sous la courbe s'accroît du trapèze curviligne PP'M'M. Quand P' s'approche de P, la limite du rapport $\frac{\mathrm{PP'M'M}}{\mathrm{PP'QM}}$ est égale à 1. Écrivant ce rapport $\frac{\mathrm{PP'M'M}}{\mathrm{PP'}} \times \frac{1}{\mathrm{PM}}$, il en déduit : $\frac{ds}{dx} \times \frac{1}{y} = 1$, d'où : $ds = ydx$.

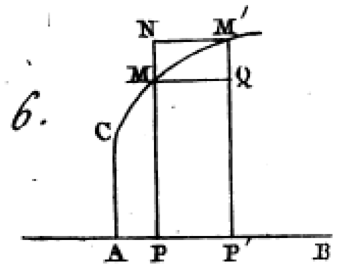


Figure 11 : illustration du calcul de la différentielle de l'aire d'une courbe dans le *Traité élémentaire* de Lacroix

L'intégration est, chez Lacroix comme chez ses prédécesseurs, l'opération inverse de la différentiation. Il traite des « intégrales définies », après avoir étudié les différentes techniques d'intégration, ce que ne faisait pas Garnier. Précisons que l'expression « intégrale

[207] Il établit tout d'abord la relation, « lorsqu'[il] est possible » d'écrire $u = A + Bx + Cx^2 + Dx3 + Ex4 + etc$ en prenant ses différentielles successives puis l'utilise pour établir le théorème de Taylor en considérant $u(x+h)$ comme fonction de h.

définie » est due Laplace[208]. Lacroix la note, pour une fonction X variant de $x = a$ à $x = b$: $\int X = B - A$, A et B étant respectivement les valeurs de la fonction P pour $x = a$ et $x = b$, où P est déduite de X par « le procédé de l'intégration ». Le tome II du *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, publié en 1798, serait le premier ouvrage à employer une telle notation[209]. Cette notion est abordée dans la section intitulée « Méthode générale pour obtenir les valeurs approchées des intégrales ». Les valeurs approchées sont obtenues en utilisant le « théorème de Taylor ». L'objectif de Lacroix est donc essentiellement d'obtenir une valeur approchée d'une intégrale définie.

La méthode de calcul d'une valeur approchée de l'intégrale définie est suivie d'une interprétation géométrique (figure 12 ci-dessous[210]) :

> l'inspection de la figure 37 fait voir que l'aire du segment d'une courbe quelconque est toujours comprise entre la somme d'une suite de rectangles inscrits PR, P'R', P''R'', etc. et celle d'une suite de rectangles circonscrits P'S, P''S', P'''S''.[211]

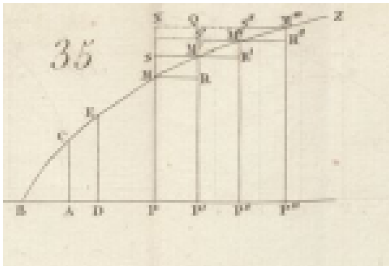


Figure 12 : interprétation géométrique de l'intégrale définie dans le *Traité élémentaire* de Lacroix

Le *Traité élémentaire* a donc été conçu comme un manuel scolaire, suivant les critères pédagogiques que Lacroix édictait dans sa préface : « les meilleurs traités sont ceux qui renferment le plus d'exemples et le moins de raisonnements ». Il prenait pour modèle les manuels qui se publiaient selon lui en Angleterre et qui faisaient « probablement […] que

[208] Voir YOUSCHKEVITCH Adolf P., « S.-D. Poisson et la théorie de l'intégration » dans Yvette KOSMANN-SCHWARZBACH (éd.), *Siméon-Denis Poisson, Les Mathématiques au service de la science*, Palaiseau, Éditions de l'École polytechnique, 2013, p. 89-112. Cet ouvrage reprend des articles, dont celui de YOUSCHKEVITCH, écrits pour l'ouvrage intitulé *Siméon-Denis Poisson en son temps*, publié en 1981.

[209] Voir YOUSCHKEVITCH Adolf P., *op. cit.*, p. 99.

[210] Pour des questions de lisibilité, nous reprenons la figure de la 3e édition (1820) du *Traité élémentaire*. Elle est numérotée 35 et non 37 comme dans la première édition.

[211] LACROIX Sylvestre-François, *op. cit.*, p. 295.

l'instruction est plus répandue dans ce pays que dans le nôtre »[212]. Nous avons vu que des exemples introduisaient les principales notions. De nombreux exemples d'application les illustrent. Le manuel comporte en outre des séries d'exercices. Ils sont en nombre moins important que chez Fourier, mais, entre-temps, l'École a recruté des répétiteurs. Cette conception du manuel explique probablement son succès dans la durée. Il connaîtra cinq éditions du vivant de l'auteur, en 1802, 1806, 1820, 1828 et 1837. Il sera traduit en anglais en 1816, et en allemand en 1830. Après le décès de Lacroix il continuera à être édité, jusqu'à une 9e édition en 1881.

En 1809, Bossut, octogénaire, est contraint d'abandonner ses fonctions d'examinateur permanent. Lacroix lui succède et abandonne son enseignement d'analyse

4 – Conclusion

De 1794 à 1809, l'analyse, et plus particulièrement le calcul différentiel et intégral, s'est vraiment imposé comme « l'âme de l'École polytechnique »[213]. Et, comme le souhaitait Fourcroy, cet enseignement a été renouvelé, abandonnant la méthode des infiniment petits du cours de Bézout et plaçant la notion eulérienne de fonction à l'origine de ce calcul.

L'auteur le plus emblématique de ce renouvellement, Lagrange, n'a cependant pu imposer le « théorème de Taylor » comme principe fondamental. S'il enseigne ainsi le « calcul des fonctions » jusqu'en 1799, la méthode des limites, introduite à l'École par Fourier, amplifiée par Lacroix, s'impose durant cette période. Les difficultés rencontrées par les élèves au cours de Lagrange expliquent le remplacement de l'introduction lagrangienne par la méthode des limites et son inscription dans le programme de 1800.

L'emploi de la méthode des limites par Lacroix se situe dans le prolongement du cours de Fourier, mais le *Traité élémentaire* pose la question de l'existence d'une limite au rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Pour, justifier l'existence de cette limite, Lacroix fait appel à la loi de continuité, et ce sont finalement des considérations géométriques qui lui permettent de conclure.

[212] LACROIX Sylvestre-François, *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral, précédé de réflexions sur la manière d'enseigner les Mathématiques, et d'apprécier dans les examens le savoir de ceux qui les ont étudiées,* Paris, Duprat, An X (1802), p. XXXII.
[213] Nous reprenons l'expression à BELHOSTE Bruno, qui titre ainsi son chapitre 8 dans *La formation d'une technocratie : L'École polytechnique et ses élèves de la Révolution au Second Empire*, Paris, Belin, 2003.

La véritable rupture que marque le *Traité élémentaire* avec les enseignements de Fourier et Garnier se situe dans l'abandon de la méthode des différences finies qui ne figure pas non plus dans le programme de 1800. Le calcul aux différences finies formait l'essentiel du cours de Prony en 1795. Fourier et Garnier l'utilisaient eux aussi afin d'obtenir les coefficients différentiels successifs comme limites des rapports $\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}, \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}, \ldots$, en supposant que toute fonction était développable en série entière. Cependant, l'existence d'un développement en série entière pour toute fonction n'est pas remise en cause par Lacroix qui l'utilise lui aussi pour démontrer le « théorème de Taylor ».

Ce théorème ne s'est pas non plus imposé pour la recherche des tangentes définies avec la rigueur des « anciens géomètres » comme le souhaitait Lagrange. Là encore, la méthode des limites s'impose. Il reste cependant un outil fondamental pour la recherche des extrema d'une fonction, et pour le calcul de la valeur approchée d'une intégrale définie. Mais c'est bien la méthode des limites qui permet de déterminer aisément la différentielle de l'aire sous une courbe et donc, de résoudre le problème des quadratures.

Remarquons pour terminer, que la notion de fonction dérivée de Lagrange, ainsi que sa notation, ne se sont pas non plus imposées. La notion de différentielle, abandonnée par Lagrange, reste toujours la notion fondamentale. Lacroix en donne une définition claire qui ne fait pas appel aux infiniment petits.

Nous voyons aussi se dessiner au travers des cours ou manuels étudiés, à l'exception de Prony pour lequel nous manquons d'informations, une ligne de partage entre les présentations de Lagrange et Garnier, d'une part, de Fourier et Lacroix d'autre part. Pour les deux premiers, la plus grande rigueur prime dans la présentation des notions. De cette rigueur seulement, viendra, pour « commençants », la clarté de l'exposition de la théorie. Pour les deux derniers, et plus particulièrement chez Lacroix qui peut l'exprimer plus complètement dans le cadre d'un manuel, l'intuition, qu'elle s'appuie sur des exemples géométriques ou algébriques, est la condition d'une exposition claire à partir de laquelle les commençants pourront accéder à la rigueur de la théorie.

Chapitre 2 : Les principes de l'analyse à l'École polytechnique : d'Ampère à Liouville (1809-1850)

Nous avons vu dans, le premier chapitre, que les premiers cours de calcul différentiel et intégral à l'École polytechnique rompaient avec la notion d'infiniment petit qui s'était imposée en France depuis Leibniz et le marquis de L'Hôpital. Refusant les notions de différentielle et de limite, les leçons Joseph-Louis Lagrange instituaient le théorème de Taylor comme fondement d'une théorie des fonctions qu'il voulait purement analytique, avant de l'appliquer à la géométrie et à la mécanique. Mais les débuts de Lagrange comme instituteur d'analyse avaient été difficiles. Peu pédagogue, ses leçons étaient bientôt réservées à une poignée de bons élèves, alors que Joseph Fourier était désigné pour assurer des cours à l'ensemble des élèves. Fourier renouait avec la notion de différentielle qu'il introduisait par la méthode des limites. Le programme d'analyse de 1800 officialisait cette méthode que propageait par la suite Sylvestre-François Lacroix, pédagogue reconnu et auteur d'un *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral* qui devenait l'ouvrage de référence à l'École.

Nous poursuivons dans ce deuxième chapitre l'étude de ce que furent les principes de l'analyse enseignés à l'École polytechnique, de la démission de Lacroix en 1809 jusqu'en 1850. Nous disposons de notes de cours, de cours lithographiés ou d'ouvrages imprimés pour André-Marie Ampère, Augustin-Louis Cauchy, Claude-Louis Mathieu, Louis Marie Henri Navier, Jean-Marie Constant Duhamel, Joseph Liouville et Joseph Sturm.

Les premiers enseignements d'Ampère, qui succède à Lacroix en 1809, se situent à un moment particulier de l'histoire de l'enseignement de l'analyse à l'École polytechnique. La méthode des limites est remise en cause par le Conseil de perfectionnement qui veut imposer un retour aux infiniment petits[1]. Après avoir rappelé cet épisode déjà mis en évidence par l'historiographie, nous verrons la réponse apportée par Ampère, en 1812, aux exigences du

[1] Voir GUITARD Thierry, « La querelle des infiniment petits à l'École Polytechnique au XIX*e* siècle », Historia Scientiarum, 1986, N° 30, p. 1–61 et la section IV.3, « *Le Retour du Refoulé* : The Renaissance of the Synthetic Method at the *École polytechnique* », dans SCHUBRING Gert, *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century, France and Germany*, New-York, Springer, 2005. p. 295-308.

Conseil, revenant tout d'abord sur la démonstration de la dérivabilité d'une fonction qu'il avait proposée en 1806, alors qu'il n'était que répétiteur.

À partir de 1815, il est difficile de séparer les noms d'Ampère et de Cauchy qui sont titulaires des deux chaires d'analyse jusqu'en 1827, date de la démission d'Ampère. En plus de cette décennie d'enseignements communs, l'historiographie a déjà montré la proximité des conceptions des deux hommes[2]. Le deuxième cours d'Ampère dont nous disposons date du début des années 1820. Nous l'examinerons donc dans une section consacrée à Ampère et Cauchy. Ce dernier, à travers son cours à l'École, se livre à une véritable réforme des fondements de l'analyse qui n'est pas sans conséquence sur l'enseignement d'Ampère. Durant la quinzaine d'années que dure l'enseignement de Cauchy, le lieu où se professe l'analyse est aussi le lieu elle se crée. Nous reprendrons, dans le cadre de notre problématique, les concepts développés par Cauchy.

En revanche, les cours des successeurs immédiats d'Ampère et Cauchy que furent Mathieu et Navier n'ont pas encore été analysés. Nous y étudierons les conceptions du calcul différentiel et intégral de ces deux auteurs, plus préoccupés dans leurs travaux scientifiques par les applications des mathématiques que par les mathématiques pures. En particulier, nous verrons ce qu'y deviennent les nouveaux concepts fondamentaux forgés par Cauchy.

Durant la période qui nous intéresse dans ce chapitre, Duhamel n'enseigne que quelques années à l'École polytechnique. L'importance de son enseignement est reconnue sans que ses cours n'aient, là encore, fait l'objet d'une étude approfondie[3]. Nous chercherons ce que doivent à Cauchy les conceptions du calcul infinitésimal d'un auteur qui se revendiquait de ce mathématicien, et ce qui lui appartient en propre dans ses cours à l'École polytechnique.

Des deux derniers enseignants dont nous examinerons les cours dans ce chapitre, Liouville et Sturm, le premier est le plus connu. Le personnage et son œuvre mathématique ont suscité d'importants travaux qui ont mis en évidence leur collaboration comme chercheurs[4]. Nous verrons ce qu'il en est pour leurs enseignements qui ont, là encore, la particularité d'être

[2] Voir SCHUBRING Gert, *op. cit.*

[3] ZERNER Martin, « La transformation des traités français d'analyse (1870-1914) », 1994, https://hal-unice.archives-ouvertes.fr/hal-00347740/fr/

[4] Citons en particulier LÜTZEN Jesper, *Joseph Liouville 1809-1882 : Master of Pure and Applied Mathematics,* New-York, Springer-Verlag, 1990.

communs dans la durée : les deux hommes sont, pendant dix ans, titulaires des deux chaires d'analyse de l'École.

Durant toute cette période d'autres travaux que ceux d'Ampère et de Cauchy interviennent dans la question des fondements de l'analyse. En France, en 1805, Fourier introduit les séries trigonométriques dites *séries de Fourier* pour l'étude de la propagation de la chaleur, et remet en cause la conception eulérienne d'une fonction continue[5]. À Prague, en 1817, Bernard Bolzano, refusant tout appel à la géométrie pour la démonstration du théorème dit de nos jours *théorème des valeurs intermédiaires*, définit la notion de fonction continue[6]. Ses travaux, que nous examinerons à l'occasion de l'analyse des cours de Cauchy, semblent ignorés des mathématiciens français.

Ce n'est pas le cas, en revanche, des travaux Pierre-Gustave Lejeune-Dirichlet qui a étudié à Paris. En 1829 il publie un mémoire intitulé *Sur la convergence des séries numériques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*. Il y démontre la propriété énoncée par Fourier sur la convergence de séries trigonométriques ayant pour coefficients ceux de Fourier. Il précise les conditions de convergence, conditions dites aujourd'hui de Dirichlet. Ce mémoire introduit de nouvelles questions sur la séparation des notions de continuité et de dérivabilité d'une fonction, la recherche et la caractérisation des points de discontinuité[7]. Il y propose en particulier de définir une fonction égale à 1 pour tout nombre irrationnel, et à 0 pour tout nombre rationnel. Le caractère arbitraire de cette définition rompait avec la notion de fonction qui avait cours depuis Euler[8]. Nous rechercherons les traces de ces travaux fondamentaux dans les enseignements à l'École polytechnique.

---

[5] Sur la notion de function, voir YOUSCHKEVITCH Adolf P., « The concept of function up to the Middle of the 19th Century »*Archive for History of Exact Sciences*, t. 16, 1976, p. 37–85, et, LÜTZEN Jesper, « Between Rigor and Applications: Developments in the Concept of Function in Mathematical Analysis », dans Mary Jo NYE (éd.*), The Cambridge History of Science*, Vol. 5, Cambridge, Cambridge University Press, 2003, p. 468-487.

[66] Voir SINACEUR Hourya, « Cauchy et Bolzano », *Revue d'Histoire des Sciences*, n° 26, 1973, p. 97-112.

[7] On pourra consulter DAHAN-DALMEDICO Amy et PEIFFER Jeanne, *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales*, Paris, Seuil, 1986, p. 228,229 et le chapitre intitulé « Dirichlet ouvre la voie à la topologie générale » dans DUGAC Pierre, *Histoire de l'analyse*, Paris, Vuibert, 2003, p. 112-117.

[8] Voir YOUSCHKEVITCH Adolf P., *op. cit*.

1 – Les infiniment petits dans le programme de 1811

1 – 1 La remise en cause de la méthode des limites

La remise en cause de la méthode des limites commence dès 1810 et provient de l'École du Génie de Metz[9]. Depuis la militarisation de l'École polytechnique en 1804, ces deux écoles dépendent du Ministre de la Guerre. Cette situation nouvelle explique en partie l'écho qu'auront les griefs formulés par l'École de Metz à l'encontre de l'enseignement dispensé à l'École polytechnique.

L'École du Génie de Metz se plaint du niveau insuffisant des élèves de l'École polytechnique à l'issue de leurs deux années de formation. Un enseignement trop théorique et l'emploi abusif des méthodes analytiques en seraient la cause. À la suite de ces plaintes, le Conseil d'instruction demande à ce que les démonstrations de statique soient faites en utilisant la méthode synthétique et non la méthode analytique. En 1811 l'École de Metz réitère ses plaintes. Des élèves de deuxième année sont interrogés sur le programme de première année. Ceux qui sont choisis dans le premier tiers du classement répondent de façon satisfaisante. Les résultats des élèves choisis dans le deuxième tiers sont moins satisfaisants et on constate que les élèves pris dans le dernier tiers ont oublié les éléments. Nous avons vu l'importance que revêtaient, dans les conceptions pédagogiques de l'époque, la notion d'éléments d'une science[10]. Les mauvais résultats des élèves seront interprétés comme résultant d'une erreur dans le choix des notions qui président à l'enseignement et les programmes seront modifiés.

En 1811, Conseil de perfectionnement décide de substituer, « pour l'exposition du calcul différentiel […] à la méthode des limites celle des infiniment petits, qui est plus facile et à laquelle on est d'ailleurs obligé d'avoir recours pour la mécanique »[11]. Il est notable que, outre l'argument de la facilité, ce soit l'emploi pour les applications en mécanique qui soit mis en

---

[9] Pour une étude détaillée de cet épisode qui se situe dans le prolongement de l'opposition déjà évoquée entre les Corps du Génie et de l'Artillerie d'une part, et l'École polytechnique d'autre part, on pourra consulter GUITARD Thierry, « La querelle des infiniment petits à l'École Polytechnique au XIXe siècle », *Historia Scientiarum*, 1986, N° 30, p. 1–61 et la section IV.3, « *Le Retour du Refoulé* : The Renaissance of the Synthetic Method at the *École polytechnique* », SCHUBRING Gert, *op. cit.*, 2005, p. 295-308.

[10] Pour Gert SCHUBRING, « la conception sous-jacente du savoir était fondée sur l'hypothèse que toutes les connaissances étaient entrelacées et connectées, qu'il se construisait méthodiquement à partir de quelques éléments de base » (the underlying conception of […] was based on the assumption that all knowledge was interwoven and connected, which was built up methodically from a few basic elements), SCHUBRING Gert, *op. cit.*, p. 307.

[11] *Rapports du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique*, *session 1811-1812*, CRH archives : X2B 10/1799-181O, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique, p. 5.

avant. Le Conseil de perfectionnement reprend ainsi pleinement à son compte les demandes de l'École de Metz qui a en vue les applications de l'analyse et se plaint d'études trop théoriques à l'École polytechnique.

Cette décision pose la question des livres à mettre à la disposition des élèves dans les salles d'études. Comme le remarque le Conseil d'instruction, « l'ouvrage de Mr Lacroix qu'on avait arrêté de mettre dans les salles et qui traite de ce calcul par la méthode des limites ne serait plus l'ouvrage qui conviendrait ». Mais, poursuit le Conseil, « il n'existe pas de livre classique dans lequel le calcul différentiel soit enseigné par les infiniment petits»[12]. Saisi, le Conseil de perfectionnement maintient le livre de Lacroix dans les salles d'étude. Remarquons que cette affirmation du Conseil d'instruction exclut des « livres classiques » le *Cours de mathématiques* de Étienne Bézout, qui continue d'être réédité, ainsi que les *Traités de calcul différentiel et de calcul intégral* de Charles Bossut. Ces ouvrages introduisent pourtant le calcul différentiel à partir des infiniment petits. Cependant le premier n'emploie que tardivement la notion de fonction[13] et le second commence par le calcul aux différences finies qui n'est plus au programme d'analyse de l'École depuis 1800.

1 – 2 Les notes du *Cours de calcul différentiel et intégral* d'Ampère (1812)

Pour étudier les conséquences de cette réforme dans les enseignements, nous pouvons consulter le *Cours de calcul différentiel et intégral, 1811-1812-1813* d'Ampère. Né en 1775, fils d'un riche négociant en soie de la région lyonnaise, Ampère n'est pas un ancien élève de l'École polytechnique[14]. Autodidacte, sa formation a été complétée par des professeurs particuliers en mathématiques et physique. Professeur à l'école centrale de Bourg en Bresse, il fait parvenir à l'Institut, en 1803, un mémoire sur la théorie du jeu et un mémoire sur le calcul des variations qui le font remarquer. Il est nommé professeur de mathématiques au

[12] *Registre du Conseil d'instruction de l'École polytechnique*, *séance du 15 novembre 1811*, archives III2 1811-1820, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

[13] Cette notion n'apparaît qu'au début des « Elémens du calcul intégral », en p. 68 du 3e tome, après les « Élémens du calcul différentiel » et leurs applications. Voir BÉZOUT Étienne, *Cours de mathématiques à l'usage du corps d'artillerie*, t. 3, Paris, Richard et Caille, 1797.

[14] Sur Ampère, on pourra notamment lire l'article de COSTABEL Pierre, « L'activité scientifique d'Ampère », *Revue d'Histoire des Sciences*, Vol. 30, 1977, p. 105-112, et plus récemment, sur sa formation d'autodidacte BLONDEL Christine, « Devenir un savant par correspondance à la fin du 18e siècle : échanges scientifiques et techniques entre deux jeunes amateurs, Ampère et Couppier », *Dix-huitième siècle*, n° 40, 2008, p. 79-92. Sur Ampère et les fondements de l'analyse, on pourra lire la section 2.4.3 intitulée « Further Concept Development : Lacroix, Garnier and Ampère », dans SCHUBRING Gert, *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century, France and Germany*, New-York, Springer, 2005, p. 380-389.

lycée de Lyon la même année puis est recruté comme répétiteur d'analyse à l'École polytechnique en 1804. Il remplace Louis-Benjamin Francoeur comme répétiteur de Lacroix. En 1807 il supplée Jean-Baptiste Labey comme instituteur d'analyse. En 1808 Il est nommé Inspecteur général de l'Université et devient examinateur d'admission à l'École polytechnique. En 1809 il succède à Lacroix dans l'une des deux chaires d'analyse alors que, dans l'autre chaire, Poinsot est recruté pour remplacer Labey. Il restera instituteur d'analyse à l'École polytechnique jusqu'en 1827.

Ce *Cours de calcul différentiel et intégral* est constitué, comme il est précisé sur la couverture du manuscrit, de *Notes prises par l'élève OLIVIER, promotion 1811*[15]. Le « 2e cahier » est consacré au calcul différentiel. Daté de 1812, il commence à la 13e leçon intitulée « Notions sur les fonctions » et porte la mention « sous la dictée de M. Ampère »[16]. Le manuscrit n'est pas paginé et l'écriture est souvent difficile à déchiffrer.

Mais, avant d'analyser ce cours de 1812, nous allons d'abord nous intéresser au mémoire publié par Ampère en 1806 dans le Journal de l'École polytechnique, intitulé : *Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor, et à l'expression finie des termes qu'on néglige lorsqu'on arrête cette série à un terme quelconque*.

Démontrer la dérivabilité d'une fonction en 1806

Avant d'aborder la démonstration du théorème de Taylor, Ampère démontre ce que Lacroix appelait un « fait analytique » que des considérations géométriques prouvaient d'une « manière bien évidente » dans son *Traité élémentaire.* En effet, il énonce le théorème :

> la fonction de x et de i
>
> $$\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$$
>
> qui exprime le rapport de la différence de deux valeurs x et $x+i$ d'une variable, et de la différence des deux valeurs correspondantes d'une quelconque de ses fonctions $f(x)$ ne peut devenir ni nulle ni infinie quand on fait $i=0$,[17]

---

[15] Il s'agit du mathématicien Théodore Olivier qui participera à la création de l'École centrale des arts et manufactures.

[16] *AMPERE André Marie, Cours de calcul différentiel et intégral, 1811-1912-1813, Notes prises par l'élève OLIVIER, promotion 1811*, III 3 b, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

[17] AMPÈRE André-Marie, "Mémoire: Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor, et à l'expression finie des termes qu'en néglige

sauf en des points isolés.

Cet énoncé nous permet de remarquer que, pour un mathématicien de cette époque, une fonction étant une quantité variable, elle ne pouvait être constante sur un intervalle.

Ampère indique que, si la question cruciale de ce que nous nommerions aujourd'hui la dérivabilité d'une fonction[18] était, pour les mathématiciens de l'époque, un fait qui ne souffrait sans doute pas de contestation, elle se devait cependant d'être démontrée d'une manière purement analytique. Car, comme il le remarquait, cette propriété servait de base « à toute la partie des mathématiques connue sous le nom de *mathématiques transcendantes* »[19]. Cette question était encore plus cruciale pour un professeur de calcul différentiel dans le cadre d'un programme qui comprenait une exposition analytique de la théorie avant son application à la géométrie. Il faut se rappeler la modification apportée par Lacroix dans la deuxième édition de son *Traité élémentaire*, qui renvoyait à la géométrie pour justifier l'existence d'une limite au rapport des accroissements[20]. C'est d'ailleurs un autre professeur de mathématiques transcendantes, Paul-René Binet[21], professeur au lycée de Rennes, qui proposera lui aussi, en 1807, une démonstration de cette propriété dans son *Mémoire sur la fonction dérivée ou coefficient différenciel du premier ordre* à la Société philomatique de Paris[22].

Pour démontrer ce théorème Ampère raisonne par l'absurde. Il suppose que $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ devient nul ou infini pour $i = 0$ dans un intervalle. Il considère deux valeurs différentes a et k dans cet intervalle, choisies pour que $f(x)$ ne devienne pas infinie entre ces deux valeurs et

lorsqu'on arrête cette série à un terme quelconque," *Journal de l'École Polytechnique*, tome 6, cahier 13, 1806, p. 148.

18 Il serait bien sûr anachronique d'employer à ce moment de l'histoire l'expression de « fonction continue ». Ampère se place d'un point de vue purement analytique et évacue toute référence à la loi de continuité.

19 AMPÈRE André-Marie, *op. cit.*, p. 150.

20 Voir *supra*, chapitre 1, p. 109.

21 Paul-René Binet est le frère aîné de Jacques Philippe Marie Binet, élève de la promotion de 1804 de l'École polytechnique, qui deviendra professeur de mécanique à l'École en remplacement de Poisson.

22 BINET Paul-René, « Mémoire sur la fonction dérivée, ou coefficient différenciel du premier ordre, lu par M. BINET, professeur de mathématiques transcendantes au lycée de Rennes », *Nouveau Bulletin des Sciences par la Société philomatique de Paris,* tome premier, IIe année, Paris, Bernard 1808, p. 275-278.

telles que l'on n'ait pas $f(k) = f(a)$. Il note $K = f(k), A = f(a)$, etc. D'après la supposition, on peut donner à i une valeur assez petite pour que $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ ne soit jamais égal à $\frac{K-A}{k-a}$, quelle que soit la valeur de x entre a et k.

En intercalant des valeurs e entre a et k, g entre e et k, c entre a et e, il démontre que parmi les fractions

$$\frac{K-G}{k-g}, \frac{G-E}{g-e}, \frac{E-C}{e-c}, \frac{C-A}{c-a},$$

il s'en trouvera nécessairement une supérieure ou égale et une inférieure ou égale à $\frac{K-A}{k-a}$. En continuant à intercaler ainsi des valeurs, et en procédant par dichotomie pour partager les intervalles, on obtiendra des dénominateurs aussi petits que l'on veut, c'est-à-dire « moindres que la plus petite des parties de i que l'on supposerait rendre $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ plus grande ou plus petite que la valeur finie $\frac{K-A}{k-a}$ »[23]. En faisant varier x entre a et k on obtiendrait donc une valeur pour laquelle $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ serait égal à $\frac{K-A}{k-a}$ [24], donc une contradiction. Ampère indique, à ce point de la démonstration, faire appel « au raisonnement dont M. *Lagrange* s'est servi pour démontrer la réalité des racines irrationnelles des équations algébriques, où l'on trouve des changements de signes dans les résultats que l'on obtient en substituant différens nombres à x », c'est-à-dire au *théorème des valeurs intermédiaires* qui n'a pas encore reçu à cette époque de démonstration purement analytique.

Il est à remarquer que, dans sa démonstration, Ampère n'emploie jamais la notion de limite, contrairement à Binet. Sans détailler la démonstration de ce dernier, signalons qu'elle est basée sur le fait qu'on peut toujours choisir un intervalle sur lequel la fonction est monotone. Ampère sera le rapporteur du mémoire de Binet à l'Académie des sciences.

Le mémoire d'Ampère n'est pas à sa parution un objet d'enseignement. Cependant, dans son *Cours complet de mathématiques pures* publié en 1809, Francoeur indique que cette proposition figurait dans le cours d'Ampère à l'École polytechnique en 1808[25].

[23] AMPÈRE André Marie, *op. cit.*, p. 153.
[24] *Ibid*, p.154.
[25] Voir la note de bas de page dans FRANCOEUR Louis-Benjamin, *Cours complet de Mathématiques pures*, tome II, Paris, Bernard et Didot 1809, p. 207.

Le cours de 1812

Ampère aborde la notion de variable à partir des équations. Lorsque le nombre d'équations est inférieur au nombre d'inconnues, écrit-il, « on peut supposer qu'elles passent [?][26] par tous les degrés de grandeur, ce qui s'exprime en disant qu'elles sont variables »[27]. La définition qu'il donne d'une fonction correspond à la première définition d'Euler suivi de la classification eulérienne des fonctions, résumée de la façon suivante :

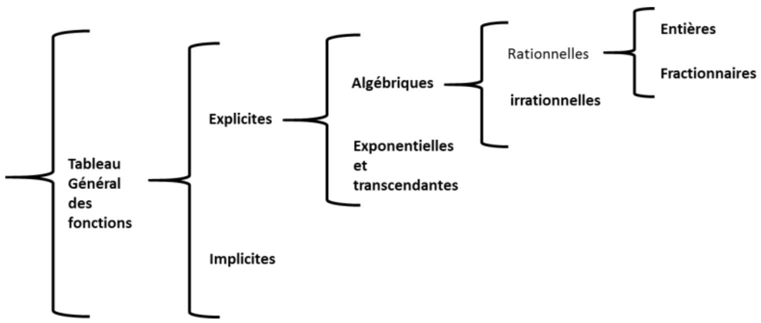


Figure 4: classification des fonctions dans le *Cours de calcul différentiel et intégral, 1811-1812-1813, notes prises par l'élève Olivier*, 13e leçon.

Le calcul différentiel est, selon Ampère, celui qui, lorsqu'on donne un accroissement aux variables, considère, non pas l'accroissement de la fonction comme dans le calcul des différences, mais « la partie de ses accroissements qui a la propriété de devenir d'autant moins différente de l'accroissement entier que cet accroissement est lui-même plus petit »[28]. Et donc,

> la différentielle se compose des termes où les accroissements des variables [?] sont élevés à la plus petite dimension dans la valeur de l'accroissement de la fonction [?] suivant les puissances et les produits des accroissements des variables. Nous démontrerons bientôt qu'il n'existe pas de fonctions dont les accroissements ne puissent être développés de cette manière.[29]

Sa définition est illustrée par la différentielle de $u = x^3$, qui est égale à $3x^2h$. Il observe que $3xh^2 + h^3$ « est une quantité qu'on peut rendre aussi petite qu'on veut par rapport à $3x^2h$ en diminuant suffisamment h ». La différentielle est notée du et, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, comme dans le cas $u = x$, on a $dx = h$, il obtient : $du = 3x^2dx$.

---

[26] Nous remplaçons de cette façon les mots que nous ne sommes pas parvenus à déchiffrer.

[27] AMPERE André Marie, *Cours de calcul différentiel et intégral, 1811-1912-1813, Notes prises par l'élève OLIVIER, promotion 1811*, III 3 b, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique. 13e leçon.

[28] *Ibid.*, 13e leçon.

[29] *Ibid.*, 13e leçon.

Même s'il n'utilise pas explicitement la notion de limite, la définition d'Ampère de la différentielle en 1811-1812, est très proche de celle de Lacroix. Elle ne prend pas en compte les exigences du Conseil de perfectionnement pour la méthode d'exposition du calcul différentiel. C'est l'existence d'un développement en série entière pour toute fonction qui joue un rôle fondamental. Ampère démontre ce théorème dans la leçon suivante, intitulée « principe fondamental ».

Sa démonstration suppose « qu'il y a continuité entre les valeurs que prend la fonction, lorsqu'on fait croître ou décroître les variables par degrés insensibles dans l'intervalle que l'on considère »[30]. Ampère reprend ensuite le raisonnement qu'il avait suivi dans son mémoire de 1806, en utilisant cette fois une notation indicielle qui se trouvait chez Binet.

IL considère dans l'intervalle de x à $x_{(n)}$ les valeurs intermédiaires $x_1, x_2, x_3, \dots x_{(n-1)}$ en notant :

$$x_1 - x = h, x_2 - x_1 = h_1, x_3 - x_2 = h_2, \dots, x_{(n)} - x_{(n-1)} = h_{(n-1)}$$

et

$$\frac{u_1 - u}{h} = p, \frac{u_2 - u_1}{h_1} = p_1, \frac{u_3 - u_2}{h_2} = p_2, \dots \frac{u_{(n)} - u_{(n-1)}}{h_{(n-1)}} = p_{(n-1)}, \frac{u_{(n)} - u}{x_{(n)} - x} = P,$$

$u_{(n)}$ désignant la valeur de la fonction u en $x_{(n)}$, et u sa valeur en x.

Il démontre alors « qu'il est impossible que les quantités $p_1, p_2, p_3, \dots p_{(n-1)}$ soient toutes plus près de 0 que P ». Il en conclut que le développement de u quand on met $x + h$ pour x « ne peut pas ne contenir que des termes ou h soit élevé à des puissances >. que l'unité ».

Si la question de l'existence d'une limite au rapport des accroissements de la fonction à celui de la variable ne figure pas explicitement dans le cours de 1811, elle est au cœur de sa démonstration.

[30] *Ibid.*, 14e leçon.

Dans le cours, la question des extrema est traitée à partir du théorème de Taylor, en « s'arrêtant au terme de rang n » et en montrant que le reste de la série est, « abstraction faite du signe »[31], inférieure à $\frac{Mh^n}{1.2\ldots n}$, où M est la plus grande valeur de $\frac{d^ny}{dx^n}$ entre x et $x+h$.

Les applications du calcul différentiel à la géométrie commencent par la recherche des tangentes. Ampère considère le rapport $\frac{Y-y}{X-x}$ où Y et y sont les ordonnées correspondant aux abscisses X et x. Comme, $\frac{Y-y}{X-x} = \text{tang}\, mMR = \text{tang}\, mSP$, alors « cette valeur est comprise entre tang MTP et tang mtp pourvu que l'on ait pris l'arc Mm assez petit pour qu'il ne coupe pas la sécante entre les points M et m »[32]. Ces deux dernières valeurs devenant égales quand on fait $X = x$, il en déduit : $\frac{Y-y}{X-x} = \text{tang}\, MTP$.

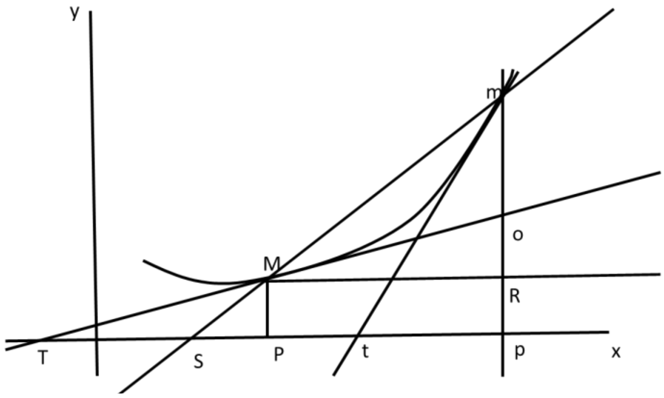


Figure 5: tangente à une courbe d'après le *Cours de calcul différentiel et intégral, 1811-1812-1813, notes prises par l'élève Olivier*, 14e leçon.

Cette recherche des tangentes par encadrement est suivie d'une méthode qui utilise les infiniment petits. La « considération des infiniment petits » permet à Ampère de remarquer :

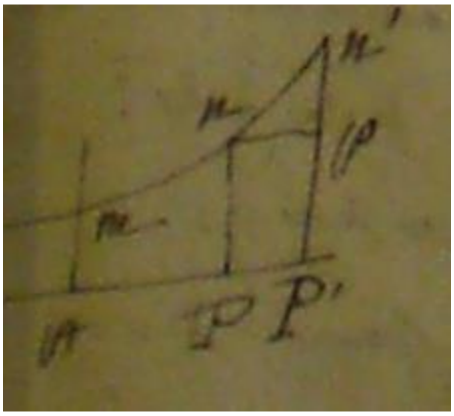
> plus l'accroissement devient petit plus le triangle rectiligne MmR approche de se confondre avec le triangle curviligne MmR en sorte qu'en même tems que la différentielle Ro s'approche de la différence Rm, l'arc Mm s'écarte de moins en moins de la tangente MT.[33]

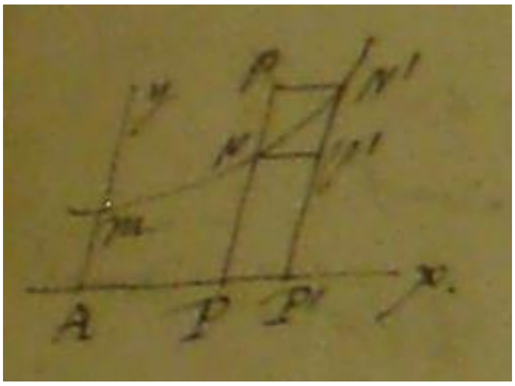
La 30e leçon traite de la différentielle de l'aire d'une courbe par la méthode des infiniment petits (figure 3a, ci-dessous à gauche). Pour un accroissement infiniment petit pp', l'arc nn' pourra être regardé comme une ligne droite et le triangle $nn'p$ sera rectiligne. L'accroissement

[31] *AMPERE André Marie, Cours de calcul différentiel et intégral, 1811-1912-1813, Notes prises par l'élève OLIVIER, promotion 1811*, III 3 b, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique, 23e leçon.
[32] *Ibid.*, 27e leçon.
[33] *Ibid.*, 27e leçon.

du de l'aire sera donc égal à $ydx + dx\frac{pn\prime}{2}$. Ce dernier terme étant un infiniment petit du second ordre, Ampère obtient : $\frac{du}{dx} = y$.

Mais, puisque « on a commis deux erreurs pour […] parvenir » à ce résultat, Ampère l'établit à nouveau « par une méthode rigoureuse » (figure 3b, ci-dessous à droite). En notant x et X les abscisses de N et N', y et Y leurs ordonnées, $APNM = u$ et $AP'N'M = U$, il encadre $\frac{U-u}{X-x}$ par y et Y. « Et, quand on fait $x = X$, Y devient égal à y, donc $\frac{du}{dx} = y$ »[34].





Figures 3a et 3b: différentielle de l'aire d'une courbe dans le *Cours de calcul différentiel et intégral, 1811-1812-1813, notes prises par l'élève Olivier*, 30e leçon.

Le calcul intégral, calcul inverse du calcul différentiel, débute en 37e leçon. Ampère indique « qu'il faut d'abord montrer la possibilité d'obtenir la fonction au moyen de la différentielle »[35]. Considérant $u = f(x)$ la fonction primitive qui devient U pour pour $x = X$, la « formule de Taylor » donne :

$$U = u + \frac{du}{dx}\frac{(X-x)}{1} + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{(X-x)^2}{1.2} + \&c.$$

« Or, $\frac{du}{dx}$ est donnée, et en le représentant par y, on aura » :

$$U - u = y\frac{(X-x)}{1} + \frac{dy}{dx}\frac{(X-x)^2}{1.2} + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{(X-x)^3}{1.2.3} + \&c.$$

où

[34] *Ibid.*, 30e leçon.
[35] *Ibid.*, 37e leçon.

> tout est connu dans le second membre. […] Mais cette méthode ne donne que l'accroissement de la fonction primitive pour la valeur X de x, c.a.d qu'elle ne donne que la valeur de la fonction entre x et X [:] c'est l'intégrale définie.[36]

L'intégrale définie devient ainsi chez Ampère un concept de base du calcul intégral[37].

Quelques mois après les exigences du Conseil de perfectionnement sur l'emploi de la méthode des infiniment petits, il nous semble effectivement qu'Ampère a représenté « un foyer obstiné de résistance aux infiniment petits »[38]. Elle n'était pas selon lui la méthode rigoureuse. Mais cependant, Ampère ne s'inscrit pas dans la continuité de Lacroix : à la différence de celui dont il a été le répétiteur, il n'emploie jamais le vocabulaire des limites. Son mémoire de 1806 est sur ce point le plus révélateur. Sa référence reste Lagrange, et sa méthode, algébrique. Et c'est la démonstration du principe fondamental, le développement d'une fonction en série entière, qui le conduit à tenter de démontrer, en langage actuel, que toute fonction continue est dérivable.

2 – Les changements de programme et la rigueur analytique chez Ampère et Cauchy (1815-1830)

Cauchy est désigné en décembre 1815 pour suppléer Poinsot[39]. Né en 1789, ancien élève de l'École de la promotion 1805, il a donc suivi les cours d'analyse de Lacroix et les répétitions d'Ampère. Ingénieur des ponts et chaussées affecté à Cherbourg puis au canal de l'Ourcq, il a déjà publié en 1814 son *Mémoire sur les intégrales définies* qui est le point de départ de sa théorie des fonctions d'une variable complexe, ainsi que des travaux sur les nombres polygonaux. Il est reconnu dès cette époque comme l'un des mathématiciens les plus importants de sa génération.

---

[36] *Ibid*., 37e leçon.

[37] Voir SCHUBRING Gert, *op. cit.*, p 440.

[38] Nous reprenons ici Gert SCHUBRING, *op. cit.*, p. 402, qui écrit : «Ampère formed the most stubborn focus of resistance to the introduction of the infiniment petits ».

[39] Sur Cauchy, parmi les nombreuses sources secondaires, nous avons plus particulièrement utilisé GRABINER Judith V., « The Origins of Cauchy's Theory of the Derivative », *Historia Mathematica*, 1978, Vol. 5, p. 379–409, BELHOSTE Bruno, *Cauchy. Un mathématicien légitimiste au XIXe siècle*, Paris, Belin, 1985, GILAIN Christian, « Cauchy et le cours d'analyse de l'École polytechnique », *Bulletin de la Sabix*, N° 5, 1989, http://sabix.revues.org/569, le chapitre 11 intitulé « Cauchy's inauguration of mathematical analysis » dans GRATTAN-GUINNESS Ivor, *Convolutions in French Mathematics*, 1800-1840, Bâle, Birkhaüser, 1990, le chapitre intitulé « Cauchy le fondateur » dans DUGAC Pierre, *Histoire de l'analyse*, Paris, Vuibert, 2003, et le chapitre VI, « Cauchy's compromise concept » dans SCHUBRING Gert, *op. cit.*, p. 427-480.

Royaliste légitimiste, catholique ultra, il a l'appui du nouveau pouvoir qui écarte de l'École des savants comme Gaspard Monge, le professeur de physique Jean Henri Hassenfratz, ou le chimiste Louis Bernard Guyton-Morveau, trop proches du régime précédent. Cauchy bénéficie également du soutien de Pierre-Simon de Laplace qui l'avait soutenu lors de ses candidatures malheureuses à l'Institut en 1813 et 1814. Il est nommé à l'École polytechnique de façon discrétionnaire par le nouveau gouverneur, et non sur proposition du Conseil de perfectionnement comme le veut le règlement. En 1816 il est nommé instituteur permanent en place de Poinsot évincé. La même année, sa désignation à l'Académie des Sciences d'où Monge et Lazare Carnot sont radiés, lui vaudront de nombreux ennemis dans la communauté scientifique. Au sein des enseignants de l'École, ce sera notamment le cas de François Arago et du professeur de physique Alexis Thérèse Petit, beau-frère d'Arago.

Cauchy sera professeur d'analyse à l'École polytechnique jusqu'en 1830. À la chute de Charles X il démissionnera, refusant de prêter serment à Louis-Philippe.

2 – 1 Les changements de programme de 1815 et 1825

L'année 1816-1817 est une année de crise pour l'École polytechnique. Tous les élèves sont licenciés en avril 1816 pour indiscipline[40]. Une commission présidée par Laplace, le plus prestigieux mathématicien français de l'époque, réorganise l'École. Les programmes sont remaniés et, dorénavant le professeur d'analyse enseigne aussi la mécanique. Les cours reprendront en janvier 1817 avec une promotion unique qui aura Cauchy pour professeur d'analyse et de mécanique.

Le programme d'analyse connait d'importantes modifications. Les titres du programme qui étaient « Analyse algébrique », « Calcul différentiel », « Calcul intégral », deviennent « Analyse algébrique », « Calcul différentiel et intégral » et « Application du calcul différentiel et intégral à la géométrie ». Parmi les articles du programme qui concernent notre problématique, il faut surtout noter l'apparition de « la distinction des fonctions continues et discontinues » en analyse algébrique, la suppression de la référence aux infiniment petits dans

[40] Les polytechniciens, qui avaient acclamé le retour de Napoléon en 1815, manifestent par des chahuts leur opposition à des mesures prises par le nouveau pouvoir, notamment le renvoi de Monge.

l'introduction du calcul différentiel et intégral où il est simplement indiqué « Principes fondamentaux », ainsi que le traitement simultané du calcul différentiel et de l'intégration[41]. Cauchy a participé activement à l'élaboration du projet de programme approuvé par Ampère. Sur les quelques points que nous venons de signaler, le Conseil de perfectionnement reprend presque intégralement le projet de Cauchy[42]. Il n'est cependant pas suivi dans son souhait de concentrer l'enseignement de l'analyse sur la première année, réservant à la deuxième année l'enseignement de la mécanique. Malgré tout, dès sa deuxième année à l'école polytechnique, Cauchy imprime ses conceptions au programme d'analyse.

Dès l'année suivante, la référence aux infiniment petits reviendra dans les applications à la géométrie, le programme précisant à propos de la rectification des courbes, des quadratures des courbes et des surfaces, et de la cubature des volumes : « Ces formules devront être déduites de la considération des *infiniment petits* »[43]. Le programme de mécanique fait lui aussi référence aux infiniment petits. Siméon Denis Poisson et Gaspard Riche de Prony qui siègent au Conseil de perfectionnement semblent être les auteurs de ce retour aux infiniment petits[44].

Un autre changement majeur du programme d'analyse aura lieu en 1825, sous l'impulsion en particulier de Laplace. Il préside la commission, mise en place en 1823, chargée d'étudier chaque année les feuilles du cours d'analyse. Cette commission avait été créée à la suite de critiques de professeurs qui trouvaient trop compliqué le cours de Cauchy. Le programme est dorénavant intitulé : « Analyse – Calcul différentiel et calcul intégral ». L'analyse algébrique disparaît du programme, une partie des articles devenant exigible au concours d'admission, l'autre étant intégrée au calcul différentiel et intégral. C'est le cas de la notion de fonction continue introduite par Cauchy. Le programme de première année commence en effet par l'article : « Des fonctions en général, et des fonctions continues en particulier »[45]. Le calcul

---

[41] « Programmes de l'École Royale polytechnique arrêtés par le Conseil de perfectionnement dans sa session de 1815-1816 », *Rapports du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique,* CRH archives : X2B 10/1811-1820, p. 8.

[42] Pour plus de précisions sur le rôle de Cauchy dans l'élaboration de ce programme, voir GILAIN Christian, *op. cit*.

[43] « Programmes de l'École Royale polytechnique pour l'année scolaire 1817-1818 », *Rapports du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique,* CRH archives : X2B 10/1811-1820, p. 9.

[44] GILAIN Christian, *op. cit.*, p. 7.

[45] « Programmes de l'École Royale polytechnique arrêtés par le Conseil de perfectionnement pour l'année scolaire 1825-1826 », *Rapports du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique,* CRH archives : X2B 10/1819-1830, p. 5.

différentiel et le calcul intégral sont de nouveau séparés, entérinant la pratique d'Ampère et de Cauchy depuis quelques années[46]. L'application à la géométrie n'est plus une partie distincte du programme.

La notion de fonction dérivée apparaît dans le programme qui ne mentionnait jusqu'alors que les différentielles. Leurs définitions s'appuient sur la notion d'infiniment petits, le programme indiquant au préalable : « Du rapport entre l'accroissement d'une fonction et l'accroissement de la variable. – Valeur que prend ce rapport quand les accroissements deviennent infiniment petits »[47]. L'intégrale définie d'une fonction est ainsi définie : « une intégrale prise entre des limites données est la somme des valeurs infiniment petites de la différentielle comprises dans ces limites »[48].

Ces nouveaux changements dans le programme sont en partie une conséquence de l'enseignement de Cauchy. Il s'agit, pour ses opposants, de combattre l'excès de rigueur théorique d'un cours trop éloigné des applications. Cauchy s'opposera à ces modifications. La défense de son enseignement, qu'il fait inscrire au procès-verbal du Conseil d'instruction, exprime son désaccord avec les nouvelles méthodes qu'on veut lui imposer. Elle montre aussi, une nouvelle fois, son accord avec Ampère pour ce qui est de l'enseignement de l'analyse lorsqu'il défend « les nouvelles méthodes [qui], loin de nuire à l'instruction des élèves, leur permettent d'apprendre en moins de temps et avec moins de travail, tout ce qu'ils apprenaient autrefois ». Car Ampère est bien « le professeur d'analyse de la première division [qui] a pu expliquer et développer la seconde partie du calcul infinitésimal en consacrant à cet objet moins de leçons que le programme n'en indique »[49].

Mais cette suppression de l'analyse algébrique traduit aussi une reconnaissance de ses conceptions mathématiques en intégrant au programme de calcul différentiel des notions pour lui essentielles, comme celle de fonction continue.

---

[46] Voir GILAIN Christian, *op. cit*.

[47] « Programmes de l'École Royale polytechnique arrêtés par le Conseil de perfectionnement pour l'année scolaire 1825-1826 », *Rapports du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique,* CRH archives : X2B 10/1819-1830, p. 5.

[48] *Ibid.*, p. 7.

[49] CAUCHY Augustin-Louis cité dans BELHOSTE Bruno, *Cauchy*. *Un mathématicien légitimiste au XIXe siècle*, Paris, Belin, 1985, p. 89.

2 – 2 Le *Précis des leçons sur le calcul différentiel et le calcul intégral* d'Ampère (1821 ?)

Durant les années d'enseignement d'Ampère, l'École polytechnique éditera en 1816 un premier cours, sans nom d'auteur, intitulé *Traité de calcul différentiel et intégral.* Nous n'en n'avons pas retrouvé la trace[50]. Le texte d'un cours donné aux élèves de première année sous le titre *Précis des leçons sur le calcul différentiel et le calcul intégral* est également édité. Il semble avoir été écrit durant l'année 1821, comme l'indiquerait cet extrait d'une lettre d'Ampère à un ami, en 1821 : « je me suis couché trop tard pour arriver à donner au prote[51] de l'École polytechnique les rédactions de mes leçons »[52].

Le cours lithographié d'Ampère est incomplet puisqu'il ne comporte ni le calcul intégral ni les applications géométriques. L'absence de calcul intégral indique qu'il ne respecte pas, tout comme Cauchy à la même époque, les programmes qui traitaient simultanément calculs différentiel et intégral

Ce texte d'environ 150 pages, composé de neuf chapitres, commence par des généralités sur les fonctions. La définition d'une fonction correspond dans ce cours à la seconde définition d'Euler, dans les *Institutiones calculi differentialis*. Ampère évoque des fonctions « inexprimables », citant « par exemple les ordonnées d'une ligne ou d'une surface dont on n'a point ou dont on ne peut avoir l'équation »[53]. Puis, comme dans le cours de 1811, il détaille la classification des fonctions.

Le deuxième chapitre s'ouvre par la définition d'une fonction continue :

> Lorsqu'en faisant croître ou décroître par degrés insensibles une variable indépendante, depuis une valeur déterminée jusqu'à une autre, une fonction de cette variable croît ou décroît aussi par degrés insensibles, de manière qu'en prenant à volonté, dans l'intervalle de ces deux valeurs, deux autres valeurs de la variable indépendante, dont la différence soit aussi petite qu'on veut, la différence des valeurs correspondantes de la fonction devient de même aussi petite qu'on veut, on dit que la fonction est continue dans ce même intervalle.[54]

[50] Voir COSTABEL Pierre, « L'activité scientifique d'Ampère », *Revue d'Histoire des Sciences*, Vol. 30, 1977, p. 105-112.

[51] Le prote désigne le chef d'un atelier de composition typographique.

[52] CHEVREUX H., « Lettre d'André-Marie Ampère à J. Bredin, 30 novembre 1821 », *André-Marie Ampère et Jean-Jacques Ampère, Correspondance et souvenirs (1805-1864*), Paris, Hetzel et Cie, 1875, p. 207.

[53] AMPÈRE André Marie, *Précis des leçons sur le calcul différentiel et le calcul intégral*, CRH cours : A3a 174, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique. p. 3.

[54] *Ibid*, p. 11.

Il ne s'agit pas, comme dans le cours de 1811, d'une simple incise sur une notion qui n'est ni développée ni reprise ailleurs dans le cours. Cette importance accordée à la continuité apparaît comme une conséquence directe des enseignements de Cauchy que nous évoquerons dans la section suivante. Remarquons qu'il s'agit, dans le vocabulaire actuel, de la continuité sur un intervalle.

Après avoir défini la notion de fonction croissante ou décroissante dans un intervalle, Ampère ajoute une condition pour qu'une fonction soit continue :

> Une fonction étant continue dans un certain intervalle, si l'on partage cet intervalle en plusieurs autres, elle le sera encore dans chaque intervalle partiel, et nous admettrons, comme une seconde condition nécessaire pour que la fonction soit appelée continue, qu'on puisse toujours prendre ces derniers intervalles assez petits pour qu'elle soit constamment croissante ou décroissante dans chacun d'eux. [55]

Sa définition de la continuité prépare une nouvelle démonstration de ce qui est pour lui la propriété fondamentale du calcul différentiel, à savoir la dérivabilité d'une fonction continue. Ampère y utilise l'hypothèse de Binet, c'est-à-dire qu'on peut choisir un intervalle assez petit sur lequel la fonction est monotone. Mais Binet n'évoquait pas la notion de continuité. Ampère a donc appris de Binet et de Cauchy.

De plus, l'énoncé d'Ampère laisse supposer qu'il envisage des fonctions vérifiant la première condition mais pas la seconde. On pense bien sûr à la fonction $y = x\sin\frac{1}{x}$. Cependant l'énoncé n'est pas sans ambigüité. Dans la suite de son propos Ampère affirme :

> Ce que nous venons de dire et ce qui va suivre s'aperçoit immédiatement, quand on trace sur un plan une ligne dont l'abscisse et l'ordonnée représentent les deux variables, dont l'une est considérée comme la variable indépendante, et l'autre comme la fonction : alors la continuité de cette ligne entraîne celle de la fonction, et réciproquement.[56]

La courbe qu'il envisage semble vérifier les deux hypothèses et exclut une fonction du type $y = x\sin\frac{1}{x}$.

Pour démontrer la dérivabilité d'une fonction continue suivant sa définition, Ampère ne procède plus par dichotomie. La continuité lui permet d'affirmer que dans les rapports

[55] *Ibid*, p. 12.
[56] *Ibid*, p. 12.

$\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}, \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \dots, \frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}$, où $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ forment une subdivision de l'intervalle de x_0 à x_n, on peut toujours rendre les numérateurs et les dénominateurs aussi petits que l'on veut[57]. L'emploi de la monotonie lui permet de simplifier sa démonstration.

Une différence notable avec le cours de 1811 est le retour de la notion de fonction dérivée, présente dans son mémoire de 1806, et abandonnée dans son cours de 1811. La fonction dérivée en x est, pour Ampère, la valeur du rapport $\frac{f(X)-f(x)}{X-x}$ quand on fait $X = x$. La différentielle, définie ensuite comme Lacroix le faisait, peut alors s'écrire, utilisant la notation lagrangienne : $dy = f'(x)dx$. Ceci nous permet en outre de remarquer, qu'ainsi, au plus tard au début des années 1820, le vocabulaire et la notation lagrangienne f' sont employés par les deux instituteurs d'analyse à l'École polytechnique.

Il est important aussi de souligner que, comme dans son mémoire de 1806 et son cours de 1811, Ampère n'emploie jamais le vocabulaire des limites. Nous y voyons à nouveau la marque de sa proximité avec les conceptions algébriques de Lagrange. Nous retrouvons cette approche algébrique lors de la différentiation de la fonction $= \frac{a}{x}$. Le rapport $\frac{Y-y}{X-x} = -\frac{a}{Xx}$ donne, en faisant $X = x : f'(x) = -\frac{a}{x^2}$.

Ampère n'emploie pas plus la notion d'infiniment petit formalisée par Cauchy. Nous avons vu qu'en 1811, la pression exercée par le Conseil de perfectionnement pour un retour aux infiniment petits n'avait eu qu'un effet très limité sur Ampère. Dans ce cours, lors de l'introduction du calcul différentiel, nous ne retrouvons qu'une seule fois l'expression « infiniment petite ». Lorsqu'il définit la différentielle d'une fonction, Il écrit simplement que la différence des accroissements devient infiniment petite quand on fait $X = x$.

Le neuvième, et dernier chapitre de ce *Précis* est consacré au théorème de Taylor et au développement des fonctions en série. Ce théorème occupe dans le *Précis*, si l'on exclut les applications géométriques détachées à cette époque en une partie indépendante du programme, une place similaire à celle qu'il occupait dans le *Traité élémentaire* de Lacroix. La démonstration du théorème est semblable à celle qu'Ampère avait proposée dans son

[57] La dichotomie permettait de rendre les dénominateurs aussi petits qu'on veut. Pour ce qui est des numérateurs, la notion de continuité rend explicite ce qu'Ampère considérait comme une évidence. Remarquons aussi la notation indicielle qui se trouvait déjà chez Binet. Elle améliore grandement la lisibilité de la démonstration.

mémoire de 1806. Nous n'y retrouvons pas le contre-exemple proposé par Cauchy en 1821, ce qui nous paraît un argument supplémentaire en faveur de 1821 comme année d'écriture de ce texte.

Dès 1806, Ampère avait montré, avec sa démonstration de la dérivabilité d'une fonction, sa volonté de se détacher des évidences géométriques pour ses démonstrations. Le cours de 1811, dans lequel il refusait à la méthode des infiniment petits le qualificatif de rigoureuse, confirmait cette volonté d'une rigueur analytique inspirée sans conteste de Lagrange. L'arrivée de Cauchy à l'École polytechnique l'a indiscutablement conforté dans cette voie. Cauchy, qui avait sans doute beaucoup appris de son ancien répétiteur, était déjà allé bien plus loin dans l'exigence de cette rigueur analytique. Cependant, Ampère appuie sa définition d'une fonction continue sur une image géométrique. Il est difficile de dire si, comme chez Lacroix, cette représentation géométrique a valeur de démonstration, ou s'il s'agit pour lui de rendre plus accessible son enseignement. À la lumière de ce que nous savons de l'enseignement d'Ampère, nous penchons plutôt pour la deuxième hypothèse.

2 – 3 Cauchy : la primauté du « fait analytique »

Les textes d'analyse publiés par Cauchy à l'occasion de sa carrière d'enseignant à l'École polytechnique ont été très largement étudiés. Nous savons l'importance des notions qu'il y développe dans la fondation de l'analyse moderne. Nous nous contenterons d'aborder ici, celles qui concernent notre problématique.

Nous avons rappelé le rôle joué par Cauchy dans l'élaboration des programmes de 1815. De plus, il bouleverse la distribution des leçons, consacrant la première année 31 leçons et demie à l'analyse algébrique contre seulement 16 au calcul différentiel et intégral, et 8 leçons et demie aux applications géométriques[58]. L'importance accordée par Cauchy à l'analyse algébrique se justifie par la volonté de rigueur qui caractérise son enseignement. Ainsi, il donne un rôle essentiel à la notion de fonction continue, il propose une démonstration du *théorème des valeurs intermédiaires* et il attribue une importance inédite à la question de la convergence des séries.

[58] Voir GILAIN Christian, *op. cit.*, p. 6. Ceci lui vaudra, dès l'année suivante, une première attaque d'Arago en Conseil d'instruction sur la faiblesse des élèves en calcul différentiel.

Durant les seize années d'enseignement de Cauchy à l'École polytechnique, son cours conservera cette exigence de rigueur et les concepts de base qui la fondent. Cependant il connaîtra de nombreuses modifications, conséquences de changements dans la pensée mathématique de Cauchy, mais aussi de pressions exercées par l'institution avec laquelle il a dû composer.

Son enseignement donnera lieu à la publication de quatre ouvrages : *Cours d'Analyse de L'École Royale Polytechnique* en 1821[59], *Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal* en 1823[60], L*es applications du calcul infinitésimal à la géométrie* en 1826 et 1828, et *Leçons sur le calcul différentiel* en 1829. Aucun de ces textes ne correspond exactement aux leçons données par Cauchy durant l'une de ces années. Il faut probablement les considérer comme des compromis entre la volonté de rigueur de leur auteur et les nécessités d'un enseignement soumis à des contraintes pédagogiques et programmatiques en vue de la préparation aux examens de l'École[61]. Nous nous référerons essentiellement au *Cours d'analyse* et au *Calcul infinitésimal*. Des quatre textes, ce dernier semble le proche des cours donnés par Cauchy durant l'une de ces années, en l'occurrence 1822-1823[62].

Fonctions continues et infiniment petits dans le **Cours d'analyse** *(1821)*

Le *Cours d'analyse*, est un ouvrage annoncé comme la première partie du cours de Cauchy à l'École polytechnique, partie qui comprend l'analyse algébrique précédée d'une vingtaine de pages de « Préliminaires ». Ouvrage de près de six cent pages, il comporte douze chapitres suivis de neuf « notes ».

Nous nous intéresserons à ces « Préliminaires » et aux deux premiers chapitres intitulés « Des fonctions réelles » pour le premier, et « Des quantités infiniment petites ou infiniment grandes, et de la continuité des fonctions. Valeurs singulières des fonctions dans quelques cas particuliers » pour le second.

Cauchy définit la notion de limite dans les « Préliminaires »[63] :

---

[59] Désigné par *Cours d'analyse*, dans la suite du texte.
[60] Désigné par *Calcul infinitésimal*, dans la suite du texte.
[61] Voir en particulier les sections VI-3 et VI-4 dans SCHUBRING Gert, *op. cit.*, p. 433-441.
[62] Voir GILAIN Christian, *op. cit.*, p. 11.
[63] Dans ces « Préliminaires », Cauchy passe en revue les « diverses espèces de quantités réelles » et distingue les nombres qui ont leur origine « dans la mesure absolue des grandeurs » des quantités dont la dénomination est

> lorsque les valeurs successivement attribuées à une variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir à en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres.[64]

Cette définition est illustrée par le nombre irrationnel comme limite des fractions qui en fournissent des valeurs approchées et par la surface du cercle comme limite des surfaces des polygones inscrits. Cauchy utilise par la suite la notation $lim.$ pour désigner la limite.

Et, lorsque les valeurs d'une variable

> décroissent indéfiniment de manière à s'abaisser en-dessous de tout nombre donné, cette variable devient ce qu'on nomme un infiniment petit, ou une quantité infiniment petite. Une variable de cette espèce a zéro pour limite.[65]

Il reprend la définition de Lazare Carnot dans ses *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*[66]. Cette définition, qui lui permet d'employer les infiniment petits sans renoncer à la notion de limite, est fort probablement une réponse à la pression exercée par les Conseils de l'École pour l'emploi des infiniment petits. Ce « compromis de Cauchy »[67] est essentiel car la méthode des limites prend avec lui une toute autre ampleur.

Il donne aussi à cette occasion des définitions claires des limites infinies, une variable ayant pour limite $+\infty$ lorsque ses valeurs « croissent de plus en plus, de manière à s'élever au dessus de tout nombre donné »[68].

Le premier chapitre commence par la seconde définition eulérienne d'une fonction, exprimant l'idée que, « lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles »[69], une variable est fonction d'une autre si la connaissance d'une valeur de cette dernière suffit à déterminer la valeur de l'autre. Sa définition est suivie de la classification des fonctions que nous avons rappelée à propos du cours d'Ampère de 1812.

Le deuxième chapitre reprend la définition d'un infiniment petit et la complète en définissant les ordres d'infiniment petit. Si α est une quantité infiniment petite, les puissances de

---

réservée « aux quantités réelles, positives ou négatives » (CAUCHY Augustin-Louis, *Cours d'Analyse de L'École Royale Polytechnique*, Paris, Imprimerie royale, 1821, p. 2).

[64] CAUCHY Augustin-Louis, *Cours d'Analyse de L'École Royale Polytechnique*, Paris, Imprimerie royale, 1821, p. 4.

[65] *Ibid.* p, 4.

[66] Voir *supra*, p. 61.

[67] Nous empruntons l'expression « Cauchy's compromise » à Gert SCHUBRING, *op. cit.*.

[68] CAUCHY Augustin-Louis, *op. cit.*, p. 5.

[69] *Ibid.*, p. 19.

α: $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots$ sont désignées par Cauchy comme des infiniment petits du premier, second, du troisième ordre, … En général, un infiniment petit d'ordre n est de la forme $k\alpha^n(1 \pm \varepsilon)$, ou k est une constante et ε « un nombre variable qui [décroît] indéfiniment avec la valeur numérique de α »[70]. Cauchy démontre ensuite les théorèmes suivants sur les infiniment petits : si on compare deux infiniment petits d'ordre différents, « celui qui est de l'ordre le plus élevé finira par obtenir constamment la plus petite valeur numérique »[71] ; la somme d'infiniment petits d'ordres différents n, n', n'', … (n', n'', … désignant des nombres supérieurs à n) est un infiniment petit d'ordre n.

La continuité ou la discontinuité sont des notions qui « se rattachent à la considération des fonctions ». Une fonction $f(x)$ « qui admet constamment une valeur unique et finie » entre deux limites données « restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même »[72].

Rappelons qu'étaient continues, selon Euler, les fonctions qui s'exprimaient par une seule expression analytique. Cauchy, nous l'avons vu, n'est pas le premier à rompre avec cette conception de la continuité. Il ne devait pas ignorer le texte d'Arbogast. Mais la définition qu'il en donne est, elle, détachée de toute considération géométrique.

En revanche il semble actuellement admis que Cauchy ignorait les travaux de Bolzano qui avait, dès 1816, défini la continuité de la façon suivante :

> on entend par l'expression : une fonction $f(x)$ varie suivant la loi de continuité pour toutes les valeurs de x situées à l'intérieur ou à l'extérieur de certaines bornes rien d'autre que ceci : si x est une valeur quelconque, la différence
> $$f(x+\omega) - f(x)$$
> peut être rendue plus petite que toute grandeur donnée, si l'on peut toujours prendre ω aussi petit qu'on le voudra.[73]

[70] *Ibid.*, p. 28.
[71] *Ibid.*, p. 30.
[72] *Ibid.*, p. 35.
[73] BOLZANO Bernhard, « Démonstration purement analytique du théorème : entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposé se trouve au moins une racine réelle de l'équation », traduction de Jan SEBESTIK, *Histoire des Sciences*, n° 17, 1964, p. 136-164.

Bolzano définissait la continuité pour démontrer le *théorème des valeurs intermédiaires* alors que Cauchy aurait rencontré ce problème de la continuité dans son *Mémoire sur les intégrales définies* de 1814[74].

Remarquons aussi que Cauchy définit ce que nous appelons de nos jours la continuité sur un intervalle alors que Bolzano définit la continuité en une valeur.

Nous sommes bien loin, avec cette définition de Cauchy, de la « loi de continuité » évoquée par Lacroix pour justifier de l'existence d'une limite au rapport $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ comme nous l'avons vu au chapitre précédent. Cauchy formalise ici une notion que Lagrange utilisait implicitement dans ses *Leçons sur le calcul des fonctions* pour démontrer son « principe général »[75] et qu'Ampère signalait dans son cours de 1811 lors du développement d'une fonction en série entière, sans cependant s'y attarder.

Comme Bolzano, Cauchy démontre le *théorème des valeurs intermédiaires* pour une fonction continue. Sa démonstration nous semble caractéristique des contraintes qui lui imposées dans son enseignement à l'École polytechnique. Dans le corps du texte il s'appuie sur des considérations géométriques. $f(x)$ étant une fonction continue entre x_0 et X, il écrit que, pour établir cette proposition, « il suffit de faire voir que la courbe qui a pour équation $y = f(x)$ rencontrera une ou plusieurs fois la droite qui a comme équation $y = b$ »[76], b étant une valeur intermédiaire entre $f(x_0)$ et $f(X)$. Puis il renvoie à une démonstration « purement analytique » qui est l'objet de la « Note III » de l'ouvrage. Précisons que *le théorème des valeurs intermédiaires* apparaissait dans le cours de Cauchy de 1816-1817[77].

L'analyse algébrique pose, pour Cauchy, les bases rigoureuses du calcul différentiel et intégral que nous allons aborder à partir de son second ouvrage. Les fondements qu'il a donnés à la notion d'infiniment petit justifient le titre de *Calcul infinitésimal*, titre qui répond pleinement aux demandes des Conseils de l'École. Mais il s'agit bien de la notion de limite qui est à la base de ce calcul et, avec l'utilisation par Cauchy de la méthode des limites « c'est l'ensemble de l'édifice de l'analyse […] qui en sera modifié, avec l'apparition de nouveaux problèmes, de

---

[74] Voir LÜTZEN Jesper, « The Foundation of Analysis in the 19th Century», dans Hans Niels JAHNKE (dir.), *A History of Analysis*, Providence, American Mathematical Society, 2003, p.155-195.
[75] Voir supra, p. 89.
[76] CAUCHY Augustin-Louis, *op. cit.*, p. 44.
[77] Voir GILAIN Christian, *op. cit.*, p. 7.

nouvelles méthodes, et l'établissement de résultats inédits »[78]. Ainsi, dans le *Cours d'analyse*, Cauchy démontre le théorème suivant en termes de ε,η:

> Si la fonction $f(x)$ étant positive pour de très grandes valeurs de x, le rapport
>
> $$\frac{f(x+1)}{f(x)}$$
>
> converge, tandis que x croît indéfiniment, vers la limite k, l'expression
>
> $$[f(x)]^{\frac{1}{x}}$$
>
> convergera en même temps vers la même limite.[79]

Le Calcul infinitésimal *(1823)*

Il s'agit d'un texte court de 160 pages, partagé en vingt leçons pour le calcul différentiel et autant pour le calcul intégral. Il ne contient pas les leçons consacrées aux applications géométriques. La séparation entre calcul différentiel et calcul intégral ne répond plus au programme d'analyse de 1817, toujours en vigueur en 1823, qui traitait les deux simultanément.

Limites, infiniment petits et fonction continue

Cauchy reprend dans les deux premières leçons de cet ouvrage les définitions d'une fonction, d'un infiniment petit et d'une fonction continue du *Cours d'analyse*. En revanche il ne définit pas les ordres d'infiniment petits et ne démontre pas le *théorème des valeurs intermédiaires*. Cette propriété d'une fonction continue est simplement citée à propos de la démonstration du théorème appelé de nos jours *théorème des accroissements finis*.

Fonction dérivée, extrema et tangente

La fonction dérivée est définie à la troisième leçon. Pour une fonction continue, elle est la limite, « lorsqu'elle existe », du rapport $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$, pour un accroissement infiniment petit i. Cette formulation restrictive sur l'existence de la limite concerne bien sûr le problème des points isolés. Envisage-t-il d'autres cas ? Dans la suite de l'ouvrage les fonctions continues sont

[78] GILAIN Christian, *op. cit.*, p. 6.

[79] CAUCHY Augustin-Louis, *op. cit.*, p. 53. On verra à ce sujet GRABINER Judith V., *op. cit*. Dans la leçon 7 du *Calcul infinitésimal*, Cauchy démontre également en ε, δ la propriété appelé aujourd'hui *propriété des inégalités des accroissements finis*.

implicitement dérivables, mais Cauchy n'affirme nulle part que toute fonction continue admet une fonction dérivée. Durant ces mêmes années, Ampère le démontrait dans son cours à l'École polytechnique. Cela indique-t-il que Cauchy doutait de la démonstration d'Ampère ? En tout état de cause, sa définition était assez générale « pour ouvrir toute la question de l'existence ou de la non-existence des dérivées »[80].

Il paraît en tout cas clair que, au plus tard en 1829, la seconde condition ajoutée par Ampère pour qu'une fonction soit continue, et donc dérivable, à savoir l'existence d'un intervalle sur lequel elle est monotone, constitue un problème pour Cauchy. En effet, il propose dans les *Leçons sur le calcul différentiel* les exemples des fonctions $xsin\frac{1}{x}$ et $x^3sin\frac{1}{x}$. Pour lui, elles valent toutes deux 0 pour $x = 0$ et sont donc continues. La dérivée de la première est « indéterminée, par conséquent discontinue pour $x = 0$ »[81]. La seconde est dérivable en 0. Aucune des deux n'est monotone sur un intervalle qui a 0 pour origine. Cauchy ne dit rien de la monotonie de ces fonctions.

La différentielle d'une fonction, définie comme le faisait Lacroix, n'est donnée qu'après avoir dérivé les fonctions simples, algébriques, logarithmiques et circulaires. Elle s'écrit, comme nous l'avons vu avec Ampère : $dy = f'(x)dx$.

Le cours de Cauchy est le premier, parmi ceux que nous avons analysés, à rechercher les extrema d'une fonction à partir du lien qui existe entre sens de variation de la fonction et signe de la dérivée. Ce problème est traité dans la sixième leçon, pour une fonction continue dans le voisinage d'une valeur particulière x_0. Puisque la limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ est $\frac{dy}{dx} = y'$, il en déduit que,

> pour de très petites valeurs numériques de Δx, et pour une valeur particulière x_0 de la variable x, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sera positif si la valeur correspondante de y' est une quantité positive et finie, négatif, si cette valeur de y' est une quantité finie mais négative. Dans le premier cas, [..] la fonction y croîtra ou diminuera, à partir de $x = x_0$, en même temps que la variable x. Dans le second cas, […] la fonction y croîtra si la variable x diminue, et décroitra si la variable augmente. [82]

[80] GRABINER Judith V., *op. cit.*, p. 383.
[81] CAUCHY *Leçons sur le calcul différentiel* Augustin-Louis, , Paris, Bure Frères, 1829, p 53.
[82] AUCHY Augustin-Louis, *Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal*, Paris, Imprimerie Royale, 1823, p. 21.

Nous rencontrons pour la première fois la notion de fonction croissante ou décroissante à partir d'une valeur déterminée de la variable. Cauchy en déduit le résultat liant le signe de la dérivée et le sens de variation, le passage entre le sens de variation en une valeur de la variable et le sens de variation sur un intervalle ne faisant l'objet d'aucun commentaire. Il s'agit, sans aucun doute possible, d'une évidence pour Cauchy. Les extrema s'obtiennent donc ensuite en cherchant les valeurs pour lesquelles la dérivée change de signe, Cauchy remarquant que, « dans ce passage, la fonction dérivée deviendra nulle, si elle ne cesse pas d'être continue »[83].

La même leçon résout le « Problème » suivant : « Déterminer l'inclinaison d'une courbe en un point donné »[84] qui établit le lien entre fonction dérivée et tangente à une courbe. Cauchy ne définit pas la tangente mais sa conception en est lagrangienne. En effet, considérant une sécante à la courbe en un point, il écrit : « Si le second point vient à se rapprocher à une distance infiniment petite du premier, la corde se confondra sensiblement avec la tangente »[85] et l'inclinaison de la courbe sera la fonction dérivée. Il termine la résolution de ce problème, qui n'excède pas vingt lignes, en remarquant que si la dérivée est nulle ou infinie, la tangente à la courbe est parallèle à l'un des axes, ce qui arrive quand l'ordonnée devient un maximum ou un minimum.

L'intégrale définie

L'une des innovations majeures proposées par Cauchy est d'asseoir le calcul intégral sur le concept d'intégrale définie. Ses travaux et ceux de Poisson sur l'intégrale complexe pourraient être à l'origine de ce changement dans la définition de l'intégrale[86]. Pour le calcul des coefficients dits *coefficients de Fourier* pour des fonctions arbitraires, Fourier avait déjà constaté qu' « il ne pouvait plus compter sur le calcul différentiel car la différentiation des fonctions non analytiques n'avait pas vraiment de sens »[87]. Mais, sa définition de l'intégrale d'une fonction définie entre deux bornes a et b, qu'il était le premier à noter $\int_a^b f(x)dx$, reposait sur la notion d'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses. Cauchy se détache de cette conception géométrique pour définir l'intégrale définie.

[83] *Ibid.*, p. 22.
[84] *Ibid.*, p. 23.
[85] *Ibid.*, p. 23.
[86] Voir LÜTZEN Jesper, *op. cit.*
[87] *Ibid.*, p. 170.

Dans la première leçon de calcul intégral, soit la 21e leçon du *Calcul infinitésimal*, il démontre que, pour une fonction $y = f(x)$ continue entre x_0 et X, si $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ réalisent une subdivision de l'intervalle de x_0 à X, la somme :

$$(x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_0)f(x_{n-1})$$

admet une limite lorsque les éléments de cette subdivision deviennent infiniment petits. Cette limite qu'il note $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$, reprenant la notation de Fourier, est l'intégrale définie de la fonction sur l'intervalle de x_0 à X. La « représentation géométrique des intégrales définies réelles », c'est-à-dire la surface sous la courbe est donnée deux leçons plus tard. Puis, dans la 26e leçon il démontre que, si $F(x) = \int_{x_0}^{X} f(x)dx$ alors, $F'(x) = f(x)$.

Avec Cauchy, l'intégrale définie cesse d'être une procédure d'approximation numérique, comme nous l'avons vu chez Lacroix, et devient une définition[88].

Une remise en cause du théorème de Taylor comme principe fondamental

La place centrale qui était accordée au développement d'une fonction en série de Taylor, que ce soit comme principe fondamental pour Lagrange, où comme théorème auquel il faut se hâter de parvenir pour Lacroix, n'est plus de mise dans le *Calcul infinitésimal*. Il ne figure plus qu'en 37e leçon, comme conséquence de ce que nous nommons aujourd'hui le *théorème de Taylor* avec reste intégral. Le développement en série entière est établi pour des fonctions dont les dérivées successives sont continues entre x et $x + h$, à la condition que les intégrales

$$\int_0^h \frac{(h-z)^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} f^{(n)}(x+z)dz = \frac{h^n}{1.2.3 \dots n} f^{(n)}(x+\theta h), \qquad 0 < \theta < 1$$

convergent vers zéro.

La leçon suivante propose le contre-exemple : $y = e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$ pour lequel la fonction et ses dérivées successives sont nulles à l'origine, et qui n'est donc pas développable en série de Taylor au voisinage de 0. Cauchy avait publié ce contre-exemple en 1821 dans un mémoire à l'Académie des sciences intitulé *Sur le développement des fonctions en séries, et sur l'intégration des équations différentielles ou aux différences partielles.* On se souvient que

[88] Jesper Lützen écrit, à propose de l'intégrale définie : « Cauchy changed the technique from being a numerical approximation procedure to being a definition », *ibid.*, p. 171.

Lagrange avait écarté l'existence d'un tel cas qui aurait prouvé que toute fonction analytique suivant sa conception, n'était pas développable en série de Taylor[89].

Les **Leçons sur le calcul différentiel** *(1829)*

Ce dernier ouvrage de Cauchy alors qu'il enseigne à l'École polytechnique n'aborde pas le calcul intégral. Nous n'y trouvons pas de réelles nouveautés concernant les notions de calcul différentiel abordés précédemment à l'exception du rôle nouveau qu'il fait jouer au *théorème des accroissements finis*.

Nous signalerons, à propos de la continuité, qu'il définit la notion de fonction continue dans le voisinage d'une valeur particulière de x : une fonction est continue au voisinage de x « toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites, mêmes très rapprochées, qui renferment la valeur en question »[90].

Il précise de même la notion d'infiniment petit en définissant la notion de « base d'infiniment petits » : i étant un infiniment petit,

> dans le système de quantités infiniment petites dont i [est] la base, une fonction de i représentée par $f(i)$, sera un infiniment petit de l'ordre a si la limite du rapport
>
> $$\frac{f(i)}{i^r}$$
>
> est nulle pour toutes les valeurs de r plus petites que a, et infinie pour toutes la valeurs de r plus grandes que a.[91]

Mais surtout, il obtient la *formule de Taylor-Lagrange* à partir du *théorème des accroissements finis*. Cette formule, ainsi que le développement en série de Taylor d'une fonction retrouve sa place dans le cours de calcul différentiel. L'ouvrage entérine une approche que Cauchy pratiquait déjà en cours depuis l'année 1824-1825[92]. Il semble que ceci ait justifié sa demande de séparer à nouveau calcul différentiel et calcul intégral dans les programmes, ce qui, comme nous l'avons vu, fut adopté dans les programmes de 1825.

---

[89] On peut cependant se demander dans quelle mesure les contemporains ont reçu comme valide ce contre-exemple d'une fonction dont la valeur en 0 n'est donnée que grâce à l'infini. Lacroix ne modifiera pas sa position sur le développement d'une fonction en série de Taylor dans ses éditions postérieures du *Traité élémentaire*, et, en 1904, Jules Molk estimera que le raisonnement de Cauchy laissait subsister des doutes (Voir FRIEDELMEYER Jean-Pierre,*op. cit.*, p. 58).

[90] CAUCHY Augustin-Louis, *Leçons sur le calcul différentiel*, Paris, Bure Frères, 1829, p. 9.

[91] *Ibid.*, p. 11.

[92] Voir GILAIN Christian, *op. cit*.

Précisons que Cauchy obtient le *théorème des accroissements finis* à partir de ce que nous nommons *théorème des accroissements finis généralisés*. Il démontre, que pour deux fonctions $f(x)$ et $F(x)$ « qui s'évanouissent pour $x = x_0$ et qui restent continues entre les limites $x = x_0$ et $x = X$ » [93], dont les dérivées sont elles-mêmes continues avec $F'(x)$ de signe constant dans cet intervalle, on a :

$$\frac{f(x_0 + h)}{F(x_0 + h)} = \frac{f'(x_0 + \theta h)}{F'(x_0 + \theta h)}$$

en notant $X = x_0 + h$, avec « θ un nombre inférieur à l'unité.[94]

Avec Cauchy, le théorème des accroissements finis apparait comme un « théorème central du calcul différentiel »[95].

Conclusion

Dans son « Introduction » au *Cours d'analyse*, en 1821, Cauchy affirme : « quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre »[96]. Le reproche qu'il adresse aux généralités de l'algèbre est étayé : emploi de séries divergentes, passage des quantités réelles aux quantités imaginaires. Cependant, c'est bien par l'analyse qu'il obtient la rigueur à laquelle il veut atteindre. En effet, s'il emploie dans son cours une figure géométrique pour démontrer le *théorème des valeurs intermédiaires*, c'est la démonstration purement analytique de la note en fin d'ouvrage qui répond à son idéal de rigueur.

Dans l'« Avertissement » au *Calcul infinitésimal*, en 1823, Cauchy réaffirme sa volonté de rigueur. Il reprend la critique contre les généralités de l'algèbre mais ne se réfère plus à la géométrie. Nous avons constaté que les figures géométriques ne venaient toujours qu'en second lieu, comme illustrations ou applications de définitions et propriétés énoncées de manière purement analytique. Il ne faut en effet, probablement pas dissocier les cours publiés par Cauchy, des contraintes que lui imposaient les Conseils de l'École qui avaient en vue les applications pour la formation d'ingénieurs[97]. Comme l'affirmait Arago au Conseil

[93] CAUCHY Augustin-Louis, *Leçons sur le calcul différentiel*, Paris, Bure Frères, 1829, p. 33.
[94] *Ibid.*, p. 32. Nous rappelons ici qu'un nombre est, pour Cauchy, une quantité positive.
[95] BELHOSTE Bruno, *op. cit*., p. 110.
[96] CAUCHY Augustin-Louis, *Cours d'Analyse de L'École Royale Polytechnique, Première Partie. Analyse algébrique*, Paris, Imprimerie Royale, 1821, p. II.
[97] On lira à ce propos la section intitulée « Effects of the context » dans », SCHUBRING Gert, op. cit., p. 436-440.

d'instruction en 1823 : « l'analyse n'a pour but que de conduire à la mécanique »[98]. C'est sans doute ainsi qu'il faut encore lire, dans les *Leçons sur le calcul différentiel* sa volonté « de concilier la rigueur, dont [il s']était fait une loi dans [son] cours d'analyse, avec la simplicité que produit la considération directe des quantités infiniment petites »[99]. L'examen des éléments du calcul différentiel et du calcul intégral à travers ces trois ouvrages prouve qu'avec Cauchy, la géométrie ne démontre plus comme chez Lacroix : avec lui c'est bien le fait analytique qui est premier.

3 – Mathieu et Navier : enseigner l'analyse en vue des applications (1827-1838)

Le programme de première année d'analyse adopté en 1825 restera inchangé jusqu'en 1839. Les deux professeurs qui, en quelques années, remplacent Ampère et Cauchy dans les deux chaires d'analyse et de mécanique semblent en adéquation avec la volonté exprimée maintes fois aux Conseils de l'École d'un enseignement de l'analyse plus tourné vers les applications.

En 1827, Claude-Louis Mathieu succède à Ampère qui avait, dès 1826, souhaité être déchargé de ses fonctions à l'École. Nous disposons de peu d'éléments biographiques récents concernant Mathieu. Le *Livre du Centenaire* de l'École nous apprend que, fils d'un menuisier de Mâcon, remarqué par un prêtre, il avait étudié à l'École centrale des Quatre-Nations à partir de 1801 avant d'être admis à l'École polytechnique dans la même promotion qu'Arago, en 1803. Il avait donc eu Lacroix comme professeur d'analyse. Il devient l'ami d'Arago et lui succède à l'Observatoire, en 1806, quand celui-ci est envoyé en mission en Espagne pour le prolongement de la méridienne. Ses travaux d'astronomie lui valent d'être admis à l'Académie des Sciences en 1817. La même année Arago le prend comme répétiteur de ses leçons de géodésie à l'École polytechnique. En 1821 il épouse la sœur d'Arago. Sa proximité professionnelle et personnelle avec celui qui avait déclaré que l'analyse n'avait « pour but que de conduire à la mécanique » en fait un candidat selon les vœux des Conseils.

C'est peut-être encore plus vrai pour Claude Louis Marie Henri Navier qui succédera à Cauchy après une année de transition. Durant cette année, Gaspard-Gustave de Coriolis supplée Cauchy qui refuse de prêter serment à Louis Philippe à la suite de la révolution de 1830.

---

[98] ARAGO François, cité dans GILAIN Christian, op. cit., p. 14.
[99] CAUCHY Augustin-Louis, *Leçons sur le calcul différentiel*, Paris, Bure Frères, 1829, p. I.

Coriolis est répétiteur d'analyse depuis 1817 mais cependant, en 1831, le Conseil d'Instruction lui préfère Navier[100]. Né en 1775 à Dijon, Navier est fils d'un avocat. Après la mort de son père, il est confié à son oncle Emiland-Marie Gauthey, ingénieur puis Inspecteur général des ponts et chaussées. Reçu à l'École polytechnique en 1802, il a Poisson comme professeur d'analyse. Ingénieur des ponts et chaussées, il se fait remarquer en publiant en 1818 un mémoire sur l'utilisation des « forces vives », c'est-à-dire du travail, pour résoudre des problèmes de mécanique. En 1819 il est nommé suppléant du cours de mécanique appliquée à l'École des ponts et chaussées. En 1821 il publie le mémoire intitulé *Lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides,* considéré comme fondateur de la théorie de l'élasticité.[101] Ses travaux sur les solides incompressibles qui ont donné les équations dites aujourd'hui de Navier-Stokes datent aussi des années 1820-1821. En 1824 il est élu à l'Académie des sciences.

Ayant publié en 1823 un mémoire sur les *Ponts suspendus* après des missions en Angleterre, il conçoit un pont sur la Seine face à l'esplanade des Invalides. À peine terminé, le pont connaît des problèmes de structure et, bien que réparable, est abandonné. Les années 1828 et 1829 sont marquées par une polémique avec Poisson qui critique sa méthode employée pour le calcul de la résistance des matériaux mais des travaux de Gabriel Lamé et d'Émile Clapeyron confortent ses résultats. C'est donc avant tout un mécanicien et un ingénieur qui est désigné sur la chaire qu'occupait auparavant Cauchy à l'École polytechnique.

Pour Mathieu, nous avons utilisé le cours lithographié[102] distribué aux élèves de première année de l'École durant l'année 1835-1836, intitulé : *Résumé du cours d'analyse*[103]. En ce qui concerne Navier, nous connaissons le *Résumé des leçons d'analyse*, cours lithographié distribué aux élèves en 1832-1833[104]. Ce cours a été publié en 1840, après la mort de Navier, avec de légers changements dus, selon l'avertissement, aux modifications que Navier lui-

---

[100] Au sujet de ce cette nomination, on pourra lire « La chaire de Cauchy à Polytechnique » dans MOATTI Alexandre, *Gaspard-Gustave de Coriolis (1792-1843) : un mathématicien, théoricien de la mécanique appliquée*, Thèse de doctorat, Université Paris I – Sorbonne, Paris, 2011, p. 137-143.

[101] Un mémoire de 1820 de Navier sur l'élasticité, présenté à l'Académie des Sciences, et resté inédit, est à l'origine des travaux de Cauchy sur l'élasticité. Voir BELHOSTE Bruno, *op. cit*., p. 144-151.

[102] La lithographie est une technique mise au point dans les premières années du XIX^e^ siècle d'après une invention de l'allemand Aloys Senefelder. Elle consiste à imprimer sur papier à l'aide d'une presse, un écrit, un dessin, tracé à l'encre grasse ou au crayon gras sur une pierre calcaire. Peu onéreuse, elle était bien adaptée à l'impression de cours pour les élèves de l'École polytechnique.

[103] MATHIEU Louis, *Résumé du cours d'analyse : 1e année, 1835-1836*, CRH cours : Mathieu 1835-1836, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

[104] NAVIER Claude, *Résumé des leçons d'analyse données à l'École polytechnique : 1e année, 1832-1833,* CRH cours, Navier 1832-1833/RES, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

même avait apportées à ses leçons au cours des années suivantes[105]. En 1856, le livre connaîtra une deuxième édition qui reviendra sur certaines de ces modifications.

Les cours de Mathieu et Navier suivent, à quelques différences près, des plans qui correspondent au programme arrêté en 1825 par le Conseil de perfectionnement. En revanche, leur volume va du simple au triple : à peine 90 pages pour le cours de Mathieu, plus de 320 pour celui de Navier. La raison en est la volonté de ce dernier de détailler les notions abordées. Ainsi, si on ne regarde que les toutes premières notions, Navier détaille sur trois pages les généralités sur les fonctions là ou Mathieu n'en prend qu'une. Les définitions de la fonction dérivée et de la différentielle d'une fonction occupent sept pages chez Navier mais seulement quatre chez Mathieu qui, en plus, traite en exemple la différentiation de la fonction logarithme. Cette différence s'explique aussi par le nombre de figures géométriques dans ces deux cours. Rares chez le premier, figurant uniquement à l'occasion de l'application du calcul différentiel à la géométrie, elles sont fréquentes chez le second pour illustrer des définitions ou des propriétés.

Ce sont deux conceptions pédagogiques de ce que doit comporter un « résumé de cours » qui sont en jeu ici. Cela amène une nouvelle fois à se poser la question des différences existant entre ce que furent les leçons professées et la trace qu'en donnent ces cours lithographiés. Nous pouvons supposer ces leçons plus détaillées chez Mathieu et, au contraire, plus concises chez Navier. Malgré cette différence de volume, les cours de Mathieu et Navier présentent de nombreux traits communs. Nous les traiterons simultanément.

3 – 1 Fonctions, limites, continuité, dérivées et différentielles

La définition d'une fonction chez Navier correspond clairement à la première définition eulérienne. Celle de Mathieu évoque l'idée de dépendance entre les variables, mais sans cependant en dire plus. Aucun des deux ne définit la notion de limite. Précisons que cette notion était abordée dans l'enseignement secondaire, en algèbre élémentaire, à propos des sommes des termes d'une progression géométrique. Ainsi par exemple, dans les *Élémens d'algèbre* de Lacroix, pour une progression de raison q, comprise entre 0 et 1, et de premier terme a, le rapport $\frac{a}{1-q}$ est considéré

[105] NAVIER Henri, *Résumé des Leçons d'Analyse données à l'École Polytechnique, Cours de Première Année*, Paris, Carilian-Goeury et Vve Dalmont, 1840.

> comme la somme de la progression décroissante par quotiens, continuée à l'infini, […] mais on ne peut cependant s'en former une idée bien nette, qu'en l'envisageant sous le point de vue d'une limite.[106]

Ce que les élèves savaient de la notion de limite en entrant à l'École polytechnique devait leur sembler suffisant. Et, pour Navier et Mathieu, un infiniment petit est un accroissement moindre que toute grandeur donnée.

Navier n'évoque pas la notion de continuité qui est présente, d'une façon très discrète chez Mathieu lors de l'introduction de la fonction dérivée. Il considère une fonction f « qui croît continuellement depuis y jusqu'à $y + \Delta y$ quand la variable indépendante croît dans l'intervalle compris entre x et $x + \Delta x$ » avant de préciser que c'est « en vertu de la continuité de la fonction dans l'intervalle que l'on considère, [que] les accroissements $\Delta x, \Delta y$ diminuent ensemble et s'évanouissent ensemble à leur limite zéro » [107]. Le cours se contente d'affirmer que le rapport des accroissements de la fonction à ceux de la variable converge vers une fonction appelée fonction dérivée. En marge, l'élève auquel avait été distribué ce cours a ajouté « [On] prouve par la géométrie que ce rapport [n'est] généralement [pas] nul ni infini mais [peut] le devenir pour un [cas] particulier »[108]. Nous pouvons probablement lire, dans le texte et la mention marginale, des héritages de Lacroix, Ampère et Cauchy : la continuité pour ce dernier, un rappel d'Ampère de la démonstration que ce rapport n'est ni nul ni infini, et enfin la justification géométrique de Lacroix.

Mathieu mentionne à nouveau la continuité quelques pages plus loin lorsque, à propos de la représentation graphique d'une fonction, il affirme que si la fonction est continue la courbe l'est aussi, et réciproquement. Plus loin, lorsqu'il établit la *formule de Taylor-Lagrange* il indique que la fonction doit rester continue dans l'intervalle entre x et $x + h$.

La note de l'élève indique en outre que, même si les figures sont rares dans le cours de Mathieu, celui-ci s'y référait dans son explication. Cette absence de figure est malgré tout étonnante lorsque, en page 5, dans un paragraphe intitulé « Représentation géométrique des fonctions d'une variable », il écrit que la limite du rapport représente la tangente

---

[106] LACROIX Sylvestre-François, *Élémens d'algèbre à l'usage de l'École centrale des Quatre-Nations*, 4e éd., Paris, Courcier, 1804, p. 326.

[107] MATHIEU Louis, *Résumé du cours d'analyse : 1e année, 1835-1836*, CRH cours : Mathieu 1835-1836, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique, p. 2. C'est d'ailleurs dans cette phrase qu'apparaît pour la première fois le mot limite dans le texte de Mathieu.

[108] *Ibid.,* p. 2. Les mots entre crochets ont disparu ou sont difficilement lisibles en raison de l'état du papier.

trigonométrique de l'angle que fait la tangente avec l'axe des x, « angle dont l'existence n'est pas douteuse » [109] sans que ne soit fournie aucune figure. Nous pouvons supposer que, pendant sa leçon, Mathieu traçait des figures qui, faute de place, ne pouvaient être rajoutées par les élèves sur le cours.

Le recours à la géométrie est bien plus marqué chez Navier qui confond courbe et fonction dans son introduction de la fonction dérivée :

> Parmi les propriétés que peut offrir la fonction $y = f(x)$ ou la ligne qui représente cette fonction, la plus remarquable, celle qui est l'objet principal du calcul différentiel, et dont la considération se reproduit constamment dans toutes ses applications à la physique et aux arts, est le degré de rapidité avec lequel la fonction varie lorsque la variable indépendante x vient à varier.[110]

Cette introduction met en outre en évidence le choix de l'auteur, qui suit les Conseils de l'École, de se cantonner aux fonctions « utiles » à de futurs ingénieurs, choix que l'on peut bien sûr opposer à la rigueur revendiquée par Cauchy. Enfin ce « degré de rapidité avec lequel la fonction varie » renvoie à une conception newtonienne du calcul différentiel, référence qui se retrouve à la fin de la définition où Navier précise : « Il [le rapport $\frac{dy}{dx}$] exprime ce que Newton nommait la fluxion de l'ordonnée »[111]. Il ne fait guère de doute que le Navier mécanicien transparaît derrière ces conceptions. Soulignons aussi l'emploi presque exclusif chez lui du vocabulaire « coefficient différentiel » et de la notation $\frac{dy}{dx}$ au détriment de l'expression de « fonction dérivée » et de la notation lagrangienne.

Pour Mathieu et Navier les différentielles sont des différences qui deviennent infiniment petites. Ainsi, pour Mathieu qui a noté : $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + r$, r étant une quantité qui est nulle avec Δx, l'accroissement de la fonction $\Delta y = \{f'(x) + r\}\Delta x$ se réduit à $dy = f'(x)dx$ quand on attribue à x un accroissement infiniment petit dx. Navier adopte une définition identique en se référant à des grandeurs géométriques. Il conclut, dans un résumé du chapitre intitulé « Des Fonctions en général. Des Fonctions dérivées et des Différentielle » que, lorsque la variable passe de la valeur « x à une autre valeur A par un nombre infini de termes

[109] *Ibid.*, p. 5.
[110] NAVIER Claude, *Résumé des leçons d'analyse données à l'École polytechnique : 1e année, 1832-1833,* CRH cours, Navier 1832-1833/RES, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique, p. 4.
[111] *Ibid.*, p. 7.

intermédiaires séparés par l'intervalle constant dx »[112], la différentielle dy est déterminée par la connaissance de la limite $\frac{dy}{dx}$ du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ puisqu'on a toujours $dy = \frac{dy}{dx} dx$.

L'un et l'autre font un usage substantiel des infiniment petits, ainsi que le préconise le programme. Cependant la lecture comparée des deux textes permet de discerner chez Mathieu une conception plus algébrique du calcul différentiel. Alors que Navier s'exprime en utilisant tout autant le vocabulaire des limites que celui des infiniment petits, pour Mathieu le coefficient différentiel s'obtient lorsque dans $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ on fait $\Delta x = 0$ après l'avoir mis sous une forme adéquate. Par exemple, dans la recherche de la dérivée du logarithme[113], Mathieu écrit le rapport des accroissements sous la forme $\frac{1}{x} L \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$. Puis il note : « c'est dans cette expression qu'on doit faire $\Delta x = 0$ pour obtenir la fonction dérivée ». Mais il doit d'abord pour cela, en posant « $\Delta x = \frac{x}{n}$, n étant un nombre entier positif très grand que l'on rendra infini » [114] l'écrire sous la forme $\frac{1}{\Delta x} L \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et développer $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ en série entière. Notons aussi que Mathieu indique dans son introduction le lien entre signe de la dérivée et sens de variation de la fonction. Le résultat est simplement affirmé.

Le cours de Mathieu se signale d'ailleurs par la présence d'un certain nombre de résultats affirmés sans être démontrés. C'est notamment le cas pour le calcul de la dérivée et de la différentielle d'une racine énième : il se contente d'affirmer que la règle de la différentiation d'une puissance établie dans le cas d'un exposant positif peut être prolongée aux exposants négatifs ou fractionnaires.

3 – 2 Formule de Taylor, minima et maxima

La démonstration que donne Mathieu de la *formule de Taylor-Lagrange* pour une fonction continue est inspirée de la démonstration proposée par Ampère dès 1806. La question de la continuité des dérivées successives n'est pas évoquée. Navier, quant à lui, écrit:

> La considération des coefficients différentiels ou des fonctions dérivées des divers ordres, donne les moyens de développer une fonction quelconque en une série infinie ordonnée par rapport aux puissances entières de la variable.[115]

---

[112] *Ibid.*, p. 10.
[113] La fonction logarithme est la première qu'il choisit de dériver afin de l'utiliser dans la recherche des dérivées du produit et du quotient de deux fonctions.
[114] MATHIEU Louis, *op. cit.*, p. 4.
[115] NAVIER Claude, *op. cit.*, p. 71.

Notons que Navier a obtenu les coefficients différentiels des divers ordres en utilisant les différences finies successives. Pour y_1, valeur de la fonction en $x + \Delta x$, il écrit :

$$\Delta^2 y = \frac{\frac{\Delta y_1}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x}}{\Delta x}(\Delta x)^2,$$

et obtient, « lorsque Δx devient plus petite que toute grandeur donnée » [116]:

$$d^2 y = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}(dx)^2$$

Et, selon Navier, le développement en série de Taylor « convient à une fonction quelconque (abstraction faite des cas ou la fonction devient infinie entre les valeurs x et $x + h$ de la variable) tant que les quantités x et h demeurent indéterminées »[117].

Aucun d'eux n'aborde le contre-exemple donné par Cauchy où les dérivées successives de la fonction sont toutes nulles : pour Mathieu comme pour Navier, si la série de Taylor n'est pas fautive, on pourra continuer « jusqu'à ce qu'on arrive à deux dérivées de même ordre qui ne disparaissent pas ensemble »[118].

Enfin tous deux utilisent la *formule de Taylor-Lagrange* pour obtenir les maxima et minima d'une fonction.

3 – 3 Intégration

Avant d'aborder l'intégration Navier étudie, conformément au programme, la différentielle de l'aire d'une courbe. La démonstration qu'il fournit, employant limites et encadrement, s'éloigne de celle proposée par Lacroix et semble porter la marque d'une certaine rigueur héritée de Cauchy.

Notant Δu l'accroissement de l'aire correspondant à l'accroissement Δx de la variable, des considérations géométriques lui permettent d'affirmer : $\Delta u > \Delta x . f(x)$. Puis il utilise la relation de Taylor avec reste de Lagrange au rang 1 pour écrire, θ étant compris entre 0 et 1 :

$$\Delta u < \Delta x \left(f(x) + \frac{df(x + \theta \Delta x)}{dx} \Delta x \right). \quad (1)$$

---

[116] *Ibid.*, p. 44.
[117] *Ibid.*, p. 73.
[118] MATHIEU Louis, *op. cit.*, p. 28

Ainsi, lorsque Δx tend à devenir nul, le terme entre parenthèses dans la relation (1) tend vers $f(x)$ et donc $f(x)$ est la limite du rapport $\frac{\Delta u}{\Delta x}$.

La version publiée du cours lithographié n'emploie pas d'encadrement. N'employant que des considérations géométriques, la démonstration affirme que l'accroissement de l'aire est compris entre les rectangles de largeur commune Δx, de hauteurs respectives y et $y + \Delta y$, ce qui est traduit par la relation $\Delta u = y\Delta x \mp \omega\Delta x$, pour ω plus petit que Δy. Si l'on en croit les avertissements des deux éditions de ce texte, cette version est la dernière à avoir été enseignée par Navier.

Mathieu, quant à lui, n'aborde la différentielle de l'aire d'une courbe que dans le dernier chapitre, avec les applications du calcul intégral à la géométrie. La relation $dA = ydx$, où A désigne l'aire sous la courbe d'une fonction y est donnée sans démonstration.

Mathieu et Navier ne reprennent pas la définition de Cauchy de l'intégrale définie, et l'intégration redevient l'opération inverse de la différentiation. Suivant en cela scrupuleusement le programme ils démontrent ensuite que « l'intégrale prise entre des limites données est la somme des valeurs infiniment petites de la différentielles comprises dans ces limites »[119], lorsque la fonction ne devient infinie pour aucune valeur de x comprise entre les bornes d'intégration.

Pour Mathieu, lorsque l'intervalle de a à b est partagé en un nombre infini de quantités infiniment petites $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_n$, alors :

$$F(b) - F(a) = f(a)\delta_1 + f(a + \delta_1)\delta_2 + f(a + \delta_1 + \delta_2)\delta_3 + \cdots + f(b - \delta_n)\delta_n.$$

Sa démonstration repose sur le fait que chaque $\delta_i$est un infiniment petit et sur l'emploi de la relation différentielle : $dF(x) = f(x)dx$, la somme infinie étant traitée comme une somme finie.

Navier, quant à lui, réemploie les différences finies. L'intervalle de x_0 à x_n est décomposé en $x_0, x_0 + \Delta x, x_0 + 2\Delta x, \ldots, x_0 + n\Delta x$, les valeurs correspondantes de la fonction étant $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Il écrit :

$$y_n = y_0 + \left(\frac{\Delta y_0}{\Delta x} + \frac{\Delta y_1}{\Delta x} + \cdots + \frac{\Delta y_{n-1}}{\Delta x}\right)\Delta x$$

[119] « Programmes de l'École Royale polytechnique pour l'année scolaire 1825-1826 », *Rapports du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique,* CRH archives : X2B 10/1821-1830, p. 7.

Lorsque la différence Δx s'approche de 0, et que n augmente pour que $n\Delta x$ reste constant, la quantité $\left(\frac{\Delta y_0}{\Delta x}+\frac{\Delta y_1}{\Delta x}+\cdots+\frac{\Delta y_{n-1}}{\Delta x}\right)\Delta x$

> s'approche d'une limite qui est la somme des valeurs en nombre infini que prend la différentielle $\frac{dy}{dx}dx$ de la fonction proposée lorsqu'on fait croître la variable x par l'intervalle constant et infiniment petit dx, depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = x_0 + n\Delta x$.[120]

3 – 4 Conclusion

Les remplacements d'Ampère et de Cauchy par Mathieu et Navier se traduisent par un incontestable recul en ce qui concerne la rigueur mathématique dans l'enseignement de l'analyse à l'École polytechnique. En effet, la notion de continuité développée par Cauchy disparaît pratiquement des cours de ses successeurs. Conséquence logique, puisque toutes les fonctions sont considérées comme continues au sens où leur courbe l'est, la propriété des valeurs intermédiaires devient une évidence et ne fait l'objet d'aucun énoncé. Le concept de limite qui s'articulait chez Cauchy avec l'emploi des encadrements, s'il se retrouve chez Navier, est absent sous cette forme chez Mathieu. Il n'est plus employé, généralement, que d'une façon purement intuitive qui fait appel à la géométrie ou aux infiniment petits, sans symbolisme mathématique. Nous ne trouvons plus de démonstration en ε,η. Les cours de Mathieu et Navier sont d'ailleurs les premiers cours que nous rencontrons qui fassent un appel aussi fréquent à cette notion d'infiniment petits, accédant ainsi à des souhaits formulés par les Conseils de l'École dès la fin de la décennie 1800-1810.

Les fonctions $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $y = x\sin\frac{1}{x}$, $y = x^3\sin\frac{1}{x}$ qui remettaient en cause le développement d'une fonction en série de Taylor ou soulevaient des questions sur la continuité et la monotonie ne figurent pas non plus dans leurs cours[121]. Nous ne retrouvons pas non plus d'énoncé du *théorème des accroissements finis* que Cauchy employait pour la recherche des extrema et celle des fonctions constamment nulles dans le *Calcul infinitésimal*. Ce résultat n'est pour eux qu'un cas particulier de la *formule de Taylor-Lagrange*. Le rôle essentiel que

---

[120] NAVIER Claude, *op. cit.*, p. 241.

[121] La version publiée par Navier de la détermination de la différentielle de l'aire d'une courbe suppose implicitement que, pour toute fonction continue, on peut toujours trouver un intervalle sur lequel elle est monotone (la version lithographiée de cette démonstration utilise la *formule de Taylor-Lagrange* au rang un, c'est-à-dire le *théorème des accroissements finis*).

Cauchy faisait jouer à la notion d'intégrale définie disparaît aussi de l'enseignement de l'analyse.

L'absence de toutes ces questions fondamentales de l'analyse mathématique ne signifie pas, bien sûr, qu'elles étaient ignorées de Mathieu et Navier. Pour comprendre leurs cours il faut en revenir à ce qu'annonce Navier au début de ses leçons : il traite du calcul différentiel pour les fonctions que l'on rencontre dans le cadre de la mécanique, de la physique et des arts. L'objectif prépondérant de l'École est de former des ingénieurs ainsi qu'Arago l'exprimait lorsqu'il s'opposait à Cauchy au Conseil d'instruction. Et Mathieu et Navier, plus préoccupés dans leurs recherches de mathématiques appliquées que de mathématiques pures sont parfaitement en phase avec cet objectif de l'École.

4 – Les premiers enseignements de Duhamel dans la lignée de Cauchy (1836-1840) et le programme d'analyse de 1839 à l'École polytechnique

Navier meurt le 21 août 1836. Jean-Marie Constant Duhamel est choisi pour lui succéder. Ancien élève de l'École polytechnique qu'il intègre en 1814, Duhamel a donc eu Antoine André Louis Reynaud[122], qui supplée Poinsot, comme professeur d'analyse en première année, puis Cauchy en deuxième année. Il fait partie de la promotion qui sera licenciée en 1816[123].

Refusant la possibilité offerte aux élèves de deuxième année de passer les épreuves d'admission aux écoles d'application, il débute une carrière d'enseignant, dans le secondaire (il est nommé agrégé en 1826) et dans des institutions privées préparant à l'École polytechnique. En 1829 il est autorisé à ouvrir une école préparatoire aux Écoles polytechnique, Militaire et de la Marine, puis, en 1835 il fonde une institution privée, l'École

---

[122] Reynaud a déjà suppléé Poinsot à plusieurs reprises durant les années 1812-1813 et 1813-1814. Les élèves de la promotion 1814-1815, mécontents de l'enseignement de Reynaud, ont demandé à Poinsot de reprendre ses cours (voir BELHOSTE Bruno, *op. cit*., p. 61).

[123] Il n'existe pas de biographie récente et complète de Duhamel et certaines dates semblent contradictoires. Nous avons utilisé pour donner ces quelques éléments biographiques, en les recoupant avec nos propres informations, de JAMIN Jules, « Funérailles de M. Duhamel. Disours de M. Jamin au nom de l'Académie des Sciences », *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, t. 3, 1872, p. 314-317, de SARRAU Émile, « Duhamel (1797-1872) », *Livre du centenaire, 1794-1894, Tome I, L'École et la Science*, Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1895, p. 126-130, de LAURENTIN Jérôme, « Réflexions sur la triangulation des polygones convexes », *Bulletin de la Sabix*, n° 44, 2009, p. 141-150. Nous remercions aussi AUVINET Jérôme pour les indications fournies lors de son intervention du 17 juin 2014 intitulée « Duhamel et l'empreinte de son enseignement » dans le cadre du séminaire du Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, Univrsité de Nantes, *Circulation et réception des savoirs mathématiques : hommes, lieux, réseaux*, organisé par BARBIN Évelyne.

préparatoire Sainte-Barbe au sein du collège du même nom. Cette école connaîtra rapidement d'excellents résultats au concours de l'École polytechnique[124].

Duhamel intègre le corps professoral de l'École polytechnique dès 1830, remplaçant brièvement Coriolis en analyse, puis devenant répétiteur de géodésie en 1831 et examinateur d'admission en 1835. La même année il supplée Francoeur dans la chaire d'algèbre supérieure à la Faculté des sciences de Paris.

Parallèlement à cette carrière d'enseignant, son activité scientifique l'amène à participer, à la demande d'Ampère, à la rédaction, en 1826, de la *Théorie des phénomènes électro-dynamiques, uniquement déduite de l'expérience*, et à compléter, en 1827, des travaux de Navier sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques. À partir de 1830, il publie dans le Journal de *l'École Polytechnique* des travaux qui portent sur la propagation de la chaleur.

Nous utiliserons, concernant cette première période où Duhamel enseigne l'analyse à l'École, le cours lithographié intitulé *Cours de Calcul infinitésimal professé en 1838 à l'École Polytechnique par Mr Duhamel*. Ce texte d'environ 320 pages, donnera lieu, avec quelques modifications, à une publication en 1841 sous le titre *Cours d'analyse de l'École polytechnique, Première partie*, alors que Duhamel n'enseigne plus l'analyse à l'École mais est examinateur permanent. Une seconde édition, à nouveau modifiée, paraîtra en 1847. Duhamel est alors directeur des études de l'École polytechnique et enseigne depuis 1841 le calcul différentiel à l'École normale supérieure.

Nous utiliserons comme source le cours lithographié en signalant les différences avec les deux versions publiées.

4 – 1 De nouveaux développements pour l'introduction du calcul infinitésimal

Le cours lithographié se revendique donc dans le titre comme un cours de calcul infinitésimal et, nous verrons en effet que, pour Duhamel, les infiniment petits jouent un rôle fondamental. Cependant, le premier élément remarquable concernant ce cours est le développement donné par son auteur à l'introduction au calcul différentiel. Un tel développement est jusqu'à

[124] Voir BELHOSTE Bruno, « La préparation aux grandes écoles scientifiques au XIXe siècle : établissements publics et institutions privées », *Histoire de l'Éducation*, n° 90, 2001, p. 101-130.

présent inédit dans les cours de l'École polytechnique que nous avons examinés jusqu'à présent.

La définition du nombre dérivé, ou rapport différentiel pour Duhamel, n'arrive qu'en page 24, à la septième section du texte, précédée des six sections suivantes :

> Des fonctions en général, et de la continuité.
> Méthode des limites.
> De l'infini.
> Des quantités incommensurables.
> Des quantités infiniment petites. Comment elles s'introduisent dans le calcul.
> Ordres et classes d'infiniment petits.

La première de ces sections est elle-même précédée d'un texte de trois pages dans lequel Duhamel replace la méthode des limites dans un contexte historique, la décrivant comme la méthode à laquelle « les anciens géomètres » furent conduits « lorsque, dans la mesure des quantités géométriques, ils cherchèrent à aller au-delà des figures terminées par des lignes droites, et des corps terminés par des plans »[125]. Et, selon Duhamel, les modernes, sans rien changer au principe de la méthode, ont présenté les résultats d'une manière « plus naturelle et plus analytique », se passant des réductions à l'absurde employées par les anciens « surtout en présence de sophistes subtils qui trouvaient des arguments pour nier les choses les plus évidentes »[126].

La continuité, dont l'importance réapparaît avec l'enseignement de Duhamel, est d'abord celle des variables, indépendantes (ce que nous appelons actuellement des variables) ou dépendantes, c'est-à-dire des fonctions. Chez Duhamel, la notion de continuité précède la notion de fonction. Elle est exprimée en termes de valeurs intermédiaires. Une variable « est continue lorsqu'elle ne peut passer d'une valeur quelconque à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires »[127]. Et, par conséquent, une fonction définie comme chez Euler dans les *Institutiones calculi differentialis,* est continue

---

[125] DUHAMEL Jean-Marie Constant, *Cours de calcul infinitésimal professé à l'École polytechnique en 1838 par Mr Duhamel*, CRH cours : Duhamel 1838, Archives de l'École polytechnique, p. 1.
[126] *Ibid*, p. 3. Duhamel reprend ici à son compte une citation de Clairaut extraite de ses *Éléments de géométrie* publiés en 1741.
[127] *Ibid.*, p. 4.

> lorsqu'en faisant varier de manière continue les quantités dont elle dépend, elle est constamment réelle et varie elle-même d'une manière continue, c'est-à-dire qu'elle ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les intermédiaires.[128]

Ce qui, dans le texte, correspond à la définition de Cauchy, c'est-à-dire que « les accroissements [d'une fonction] peuvent devenir moindre que toute quantité donnée, pourvu que l'on donne des valeurs suffisamment petites aux accroissements de la variable »[129], est chez Duhamel une condition nécessaire et suffisante de la continuité. La démonstration qu'il propose de cette équivalence ne comporte aucun symbolisme ; elle paraît pour Duhamel du domaine de l'évidence. Il est donc le premier qui, dans le cours d'analyse à l'École polytechnique, réalise l'amalgame entre la définition de Cauchy de la continuité d'une fonction et la propriété des valeurs intermédiaires

Sa définition d'une limite est celle de Cauchy. Il y ajoute la propriété que nous qualifions d'unicité de la limite suivie de la propriété suivante : si deux fonctions sont égales et que l'une d'elles admet une limite, alors l'autre admet la même limite. Il poursuit en donnant ce qu'il appelle la proposition qui sert de base à la méthode des limites : lorsqu'on a, pour deux fonctions continues, $F(x, y, z, \dots) = f(x, y, z, \dots)$ pour toutes les valeurs des variables, si les variables $x, y, z, \dots$ tendent vers simultanément, de manière continue ou discontinue, vers les valeurs $a, b, c, \dots$, alors les fonctions tendent vers $F(a, b, c, \dots)$ et $f(a, b, c, \dots)$ et on a : $F(a, b, c, \dots) = f(a, b, c, \dots)$. Cette proposition est primordiale car, explique-t-il, la simplicité du choix des quantités variables qui ont pour limites les quantités proposées est essentielle. Il donne l'exemple de la recherche de la relation entre les surfaces de deux cercles et de leurs rayons :

> On considère ces cercles comme limites de polygones réguliers semblables, parce que la relation entre ces polygones et les rayons des cercles est très facile à obtenir, tandis qu'elle aurait été très difficile à découvrir si l'on avait supposé différents les nombres de côtés des deux polygones.[130]

La section sur l'infini permet à Duhamel de mettre en garde contre les emplois abusifs de ce terme et les idées fausses qu'il peut véhiculer. Plus remarquable est la section suivante

[128] *Ibid.*, p. 6.
[129] *Ibid.*, p. 7.
[130] *Ibid.*, p. 9.

portant sur les nombres incommensurables. C'est la première fois que nous rencontrons ce sujet dans un cours de calcul différentiel.

Le propos de Duhamel y est de définir l'égalité de deux nombres incommensurables. En effet, écrit-il, le calcul différentiel étudie des rapports de quantités et, « tant qu'on n'est pas obligé d'évaluer les quantités en nombres, il est indifférent qu'elles soient commensurables ou incommensurables ; mais il n'en est plus ainsi dès que l'on a à considérer les rapports des quantités »[131]. Et, après avoir rappelé comment la pluralité donne l'idée de nombre entier, comment on étend les significations des mots « nombre » et « rapport » aux nombres fractionnaires, Duhamel ajoute :

> mais il ne suffit pas que l'on convienne de dire que deux grandeurs incommensurables ont entre elles un rapport, et que ce rapport sera désigné sous le nom de nombre incommensurable ; il faut définir rigoureusement l'égalité des rapports, ou nombres, incommensurables. [132]

Dans l'édition de 1847 de son cours d'analyse, Duhamel précisera : « Notre manière de voir est entièrement conforme à celle d'Euclide »[133]. Il fait allusion à la deuxième proposition du « Livre X » des *Éléments* d'Euclide qui traite des grandeurs incommensurables. Il emploie la procédure des retraits alternés, appelée « anthyphérèse », pour démontrer que deux grandeurs sont incommensurables:

> Deux grandeurs inégales étant proposées, et si la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, de façon réitérée et en alternance, le dernier reste ne mesure jamais le reste précédent, les grandeurs seront incommensurables.[134]

Selon Duhamel, deux rapports de grandeurs incommensurables seront égaux lorsque, en partageant en un même nombre de parties égales la plus petite des grandeurs dans chacun des rapports, et en négligeant le reste, il en résulte deux suites de rapports commensurables égaux, quel que soit le nombre de parties considéré. Cette définition nécessite d'abord de démontrer, selon Duhamel, que « l'égalité des rapports commensurables respectifs est indépendante de la loi suivant laquelle les subdivisions décroissent indéfiniment »[135].

---

[131] *Ibid.*, p. 13.
[132] *Ibid.*, p. 14.
[133] DUHAMEL Jean-Marie Constant, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, 2e éd., Paris, Bachelier, 1847, p. 10.
[134] EUCLIDE, *Les éléments*, trad. Peyrard, Blanchard, Paris, 1996, p. 259.
[135] DUHAMEL Jean-Marie Constant, *Cours de calcul infinitésimal professé à l'École polytechnique en 1838 par Mr Duhamel*, CRH cours : Duhamel 1838, Archives de l'École polytechnique, p. 15.

Pour conclure, Duhamel ajoute qu'on peut parvenir à la notion de nombre incommensurables « par des considérations purement arithmétiques, comme par exemple, celles des racines, des logarithmes, etc » [136]. Il ne développe pas cette façon de procéder. Il indique seulement qu'on trouve « des nombres commensurables qui satisfont à des conditions de plus en plus voisines des proposées »[137]. Il précise que ces nombres, en prenant une unité quelconque, peuvent représenter des quantités concrètes tendant vers des limites déterminées.[138]

Terminons cette étude de la section qu'il consacre aux nombres incommensurables par ce paragraphe qui montre son souhait d'installer le calcul différentiel dans un cadre théorique rigoureux. On peut en outre y lire comme une réponse à Cauchy qui dans l'*Analyse algébrique*[139], écrivait, pour illustrer la notion de limite : « ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées »[140] . Le paragraphe est le suivant :

> Il est bon de remarquer que l'on n'exprimerait rien qui fût réellement contradictoire avec notre définition en disant, avec beaucoup de géomètres, que le rapport de deux quantités incommensurables est la limite des rapports des quantités commensurables de l'une d'elles et d'une quantité variable ayant la seconde pour limite. Mais il n'est pas permis de donner cette définition des rapports incommensurables, parce qu'elle supposerait qu'il existe un nombre limite, tandis qu'au contraire il est certain qu'il n'en existe pas, si l'on ne donne pas de l'extension au sens du mot nombre.[141]

La section concernant les nombres incommensurables ne figure pas, en 1841, dans la version publiée du cours de Duhamel, mais elle figure dans l'édition de 1847[142]. Inflexions dans les conceptions de Duhamel, conséquences de pratiques pédagogiques ou désaccords avec les Conseils de l'École ? Nous ne disposons d'aucun élément pour expliquer l'abandon puis la réintroduction de cette section.

---

[136] *Ibid.,* p. 17.
[137] *Ibid.*, p. 17.
[138] Nous pouvons nous demander ce que cette façon purement arithmétique de procéder doit à Eugène Catalan qui revendiquera plus tard avoir été le premier à définir un nombre incommensurable comme limite de nombres commensurables (lire à ce sujet JONGMANS François, *Eugène Catalan, géomètre sans patrie, républicain sans république*, Mons, Société belge des professeurs de mathématiques d'expression française, 1996). Mais Catalan définit les nombres incommensurables dans un cadre purement algébrique, indépendamment de l'analyse.
[139] Cet ouvrage de Cauchy est explicitement cité par Duhamel dans la version de son cours publiée en 1841
[140] CAUCHY Augustin-Louis, *Cours d'Analyse de L'École Royale Polytechnique, Première Partie. Analyse algébrique*, Paris, Imprimerie Royale, 1821, p. 4.
[141] DUHAMEL Jean-Marie Constant, *op. cit.,* p. 16.
[142] L'ordre des sections est modifié : la section intitulée « De l'infini » se retrouve après celle sur les quantités incommensurables.

Duhamel indique ensuite que les quantités à déterminer dans le calcul infinitésimal s'introduisent de deux manières : comme sommes ou comme rapports de quantités variables qui tendent indéfiniment vers zéro, c'est-à-dire, puisqu'il reprend la définition de Cauchy, comme sommes ou rapports d'infiniment petits. Ce qui le conduit à démontrer deux théorèmes :

> 1er Théorème : La limite du rapport de deux quantités infiniment petites n'est pas changée quand on remplace ces quantités par d'autres qui ne leur soient pas égales mais dont les rapports avec elles aient respectivement pour limites l'unité.[…]
>
> 2eme Théorème : La limite de la somme de quantités[143] infiniment petites dont le nombre augmente indéfiniment, n'est pas changée quand on remplace ces quantités par d'autres dont les rapports avec elles ont respectivement pour limites l'unité.[144]

Pour démontrer ce deuxième théorème, Duhamel considère les infiniment petits :

$$a_1, a_2, a_3 \ldots . a_n \text{ et } b_1, b_2, b_3 \ldots . b_n,$$

dont les rapports

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3} \cdots \frac{a_n}{b_n},$$

ont pour limite l'unité. Alors, écrit-il, la fraction

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n}$$

sera intermédiaire entre les fractions précédentes, et aura pour limite l'unité, d'où le résultat.

Après avoir démontré ces théorèmes, Duhamel précise qu'ils permettent « de négliger dans les quantités infiniment petites, la partie qui en rend la comparaison ou le calcul difficile »[145].

Il reprend ensuite la définition de Cauchy des ordres d'infiniment petits. Il introduit en plus les notions d' « infiniment petit principal », et de « classe d'infiniment petits ». L'infiniment petit principal est celui qui peut être choisi arbitrairement, auquel on rapporte les autres infiniment

---

[143] Dans les versions publiées de son cours, en 1841 et 1847, Duhamel rajoute ici le mot « positives ».

[144] DUHAMEL Jean-Marie Constant, *op. cit.,* p. 18-20. Sur les conceptions de Duhamel concernant les infiniment petits, leur importance à long terme sur l'enseignement du calcul infinitésimal en France, dont nous reparlerons plus loin, voir ZERNER Martin, « La transformation des traités français d'analyse (1870-1914) », 1994, https://hal-unice.archives-ouvertes.fr/hal-00347740/fr/ et à la section intitulée «Last Culmination Points of the *Infiniment Petits* » dans SCHUBRING Gert, *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century, France and Germany*, New-York, Springer, 2005, p. 574-600.

[145] *Ibid.*, p 21.

petits pour déterminer leurs ordres. Il correspond à la notion de base d'infiniment petits développée, comme nous l'avons vu, par Cauchy dans ses *Leçons sur le calcul différentiel* de 1829.

Les ordres d'infiniment petits étant des entiers, et par conséquent ne renfermant pas les infiniment petits de la forme $a^{\frac{p}{q}}$, où a est un infiniment petit et $\frac{p}{q}$ une fraction, Duhamel définit les classes d'infiniment petits. La n^e classe d'infiniment petits contient « toutes les quantités infiniment petites par rapport à celles de l'ordre $n-1$ »[146].

Duhamel définit ensuite les différentielles de fonctions ou de variables indépendantes comme des accroissements infiniment petits de ces variables ou fonctions. Cette conception est différente de celle adoptée dans tous les enseignements à l'École polytechnique depuis Fourier. Dans l'édition de 1847, il reviendra, pour des raisons pédagogiques, à des différentielles définies comme « des quantités dont les rapport sont égaux aux limites des rapports des accroissements ». En effet, écrit-il, cette « définition, qui est précisément celle que Leibnitz a donnée d'abord », présente l'avantage « de paraître plus clair[e] aux commençants »[147]. Il y rappelle que, dans sa première édition, les équations différentielles étaient les équations imparfaites de Carnot, confirmant cette filiation Carnot, Cauchy, Duhamel.

4 – 2 L'importance de la continuité chez Duhamel et le programme de 1839

Après ces préambules, Duhamel aborde, comme Ampère, la question de la dérivabilité d'une fonction continue. Il propose, comme Ampère, une démonstration par l'absurde de la dérivabilité d'une fonction continue. Il considère une fonction dont le rapport des accroissements n'a pas de limite finie sur un intervalle de a à b. Alors, affirme-t-il, ce rapport tend soit vers zéro, soit vers l'infini sur une partie de cet intervalle. Sa démonstration suppose implicitement, comme chez Ampère, qu'une fonction ne peut pas être constante sur un intervalle.

Duhamel considère un intervalle δ sur lequel la limite du rapport des accroissements est partout nulle, et partage δ en parties égales, de longueur α. Cette longueur α pouvant être

---

[146] *Ibid.*, p 23.

[147] DUHAMEL Jean-Marie Constant, « Avertissement », *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, Paris, Bachelier, 2e éd., 1847.

rendue aussi petite que voulue, les rapports des accroissements de la fonction à ceux de la variable pourront être rendus, sur chacune de ces parties, moindres que toute grandeur. Il en sera donc de même pour le rapport de la somme des accroissements de la fonction sur toutes ces parties à la somme des accroissements de la variable. Par conséquent la fonction sera une constante sur l'intervalle, ce qui contredit l'hypothèse. Le cas d'un rapport des accroissements dont la limite est partout l'infini se ramène au premier en inversant les rapports.

La fonction dérivée, expression à laquelle Duhamel déclare préférer celle de rapport différentiel[148], est donc la limite de ce rapport. D'après sa définition de la différentielle, il obtient dans un premier temps, pour une fonction F : $dy = (F'(x) + a)dx$, avec a infiniment petit. Les deux théorèmes cités plus haut lui permettent alors d'écrire :

> mais, soit que dy doive être considéré comme l'un des termes d'un rapport, soit qu'il doive l'être comme l'un des éléments d'une somme infiniment petite, nous avons démontré que les limites ne seraient nullement altérées si on en retranchait une quantité infiniment petite par rapport à dy.[149]

Et, donc, en négligeant adx, il obtient $dy = F'(x)dx$, poursuivant :

> cette égalité n'est pas exacte sans doute, mais nous savons qu'il n'en peut résulter aucune erreur dans les quantités que l'on a en vue de connaître, qui sont dans les limites de rapports ou de sommes d'infiniment petits.[150]

Ses théorèmes sur les limites de rapports et de sommes d'infiniment petits constituent une réponse à la question de la compensation des erreurs évoquée par Berkeley dès les débuts du calcul différentiel, et à laquelle Carnot avait apporté sa réponse dans ses *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*.

La recherche des extrema se fait à l'aide de la *formule de Taylor-Lagrange,* cette même formule ayant été établie, pour une fonction dont les dérivées successives sont continues, à partir du *théorème des accroissements finis*, lui-même, comme chez Cauchy, conséquence du *théorème des accroissements finis généralisés*.

---

[148] Duhamel déclare préférer à la recherche des dérivées celle des différentielles. En effet, bien que « ces deux questions se ramènent immédiatement l'une à l'autre », le différentielles peuvent être considérées autrement que dans la limite de leurs rapports. Et surtout, pour le cas de fonctions de plusieurs variables, elles permettent d'éviter « la supposition purement fictive » que ces fonctions ne dépendent que d'une seule variable.
[149] DUHAMEL Jean-Marie Constant, *op. cit.,* p. 27.
[150] *Ibid.*, p. 27.

Le lien entre signe de la dérivée et sens de variation est, comme chez Cauchy, une évidence. Signalons que Duhamel donne aussi le contre-exemple de Cauchy, $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$, pour montrer qu'il faut « se garder de croire que les séries de Taylor ou de Maclaurin puissent être employées toutes les fois qu'elles sont convergentes »[151].

La notion de tangente est abordée dans les applications géométriques du calcul différentiel. Il est à remarquer que, après avoir, dans les quelques pages d'introduction historique, expliqué comment la mesure des grandeurs géométriques courbes avaient conduit à la notion de limite, le cours sépare nettement les applications géométriques du calcul différentiel de leur introduction analytique.

Signalons, à propos de la notion de tangente, que Duhamel revient sur la définition qui chez Lagrange répondait à une exigence de rigueur. Il écrit en effet :

> On appelle en général tangente à une courbe la limite vers laquelle tend la direction d'une sécante qui passe par un point constant de cette courbe, et dont un second point d'intersection se rapproche indéfiniment du premier.
> Les anciens donnaient des définitions moins générales de la tangente : on les a abandonnées, à cause du grand nombre d'exceptions auxquelles elles donnaient lieu.[152]

Et, considérant une courbe d'équation $F(x, y) = 0$, il démontre que l'équation de la tangente au point de coordonnées x', y', est :

$$(y - y')\frac{dF}{dy'} + (x - x')\frac{dF}{dx'} = 0.$$

4 – 3 Intégration : un retour à Cauchy

L'intégration est pour Duhamel l'opération inverse de la différentiation mais, « il est nécessaire de démontrer que cette question admet toujours une solution »[153]. Malgré la séparation nette établie depuis le début de son cours entre théorie et application à la géométrie, c'est un argument géométrique qu'il va tout d'abord employer pour cette démonstration : le résultat sur la différentielle de l'aire d'une courbe. Ce résultat a été

---

[151] DUHAMEL Jean-Marie Constant, *op. cit.,* p. 100.
[152] DUHAMEL Jean-Marie Constant, *op. cit.,* p. 141.
[153] *Ibid.*, p. 230.

démontré précédemment dans les applications géométriques du calcul différentiel, en quelques lignes[154] :

> l'aire comprise entre deux ordonnées, l'axe des x et l'arc d'une courbe, croît d'une quantité comprise entre deux parallélogrammes dont la limite du rapport est l'unité, à mesure que dx tend vers 0.[155]

Mais, dès la page suivante, il précise : « on peut parvenir aux mêmes conséquences sans employer aucune considération géométrique, au moyen d'une proposition importante que nous allons établir »[156]. Il démontre que la somme :

$$F(x_1)dx_1 + F(x_2)dx_2 + \cdots + F(x_{m-1})dx_{m-1}$$

où la variable croît de x_1 à x_m par intervalles infiniment petits $dx_1, dx_2, \dots, dx_{m-1}$, admet une limite « indépendante du mode de subdivision de l'intervalle $x_m - x_1$ »[157]. Cette limite est « l'intégrale définie de la différentielle $F(x)dx$ entre les limites x_1 et x_m »[158]. Puis il démontre que l'intégrale définie, $\int_{x_1}^{x_m} F(x)dx$ a pour dérivée $F(x)$ lorsqu'on remplace la valeur particulière x_m par une valeur indéterminée x. Comme chez Cauchy, la notion d'intégrale indéfinie ne vient qu'ensuite.

Signalons en outre que les hypothèses ne précisent pas que la fonction $F(x)$ est continue, mais cela paraît implicite à la lecture de la démonstration. De plus, Duhamel suppose que $F(x)$ est, en termes actuels, monotone sur l'intervalle considéré, et si cela n'était pas le cas, il affirme qu'on pourrait partager cet intervalle en plusieurs autres sur lesquels elle le serait. Enfin, la démonstration utilise la propriété appelée aujourd'hui propriété des suites adjacentes, considérée comme une évidence.

Il propose ensuite une autre démonstration de l'existence pour une fonction donnée, de l'opération inverse de la différentiation. Considérant $f(x) - f(a)$ comme une somme d'accroissements infiniment petits, il utilise le théorème sur les limites de sommes d'infiniment petits pour justifier que l'accroissement de la fonction « peut toujours être

[154] À la différence de ce que nous avons rencontré jusqu'à présent, Duhamel établit la relation pour des axes non perpendiculaires
[155] *Ibid.*, p. 150.
[156] *Ibid.*, p. 231.
[157] *Ibid.*, p. 232.
[158] *Ibid.*, p. 233.

considéré comme la limite de la somme des produits de sa dérivée par l'accroissement de la variable »[159].

4 – 4 Le programme d'analyse de 1839

À la lumière de ce que nous venons d'étudier, le cours de Duhamel porte incontestablement l'empreinte de celui de Cauchy. Les apports fondamentaux de Cauchy sont tous présents chez Duhamel : la définition d'un infiniment petit, la continuité, l'importance du théorème des accroissements finis, le problème du développement d'une fonction en série de Taylor, l'importance accordée aux intégrales définies. Si nous ne retrouvons pas dans ses démonstrations avec les infiniment petits la rigueur qui était celle de Cauchy, avec notamment l'emploi des encadrements, les questions que pose Duhamel sur les nombres incommensurables, sur la dérivabilité d'une fonction, sur l'existence d'une limite indépendante de la subdivision de l'intervalle choisie, relèvent de la même exigence de rigueur que celle de celui qui fut son professeur.

Enfin, l'ancrage du calcul infinitésimal dans une histoire, la question de l'extension de la notion de nombre aux nombres incommensurables, l'importance accordée à ses théorèmes sur les rapports et les sommes d'infiniment petits, impriment sa marque propre à ses cours à l'École polytechnique. Nous verrons dans un prochain chapitre comment se développeront et s'amplifieront ses conceptions du calcul infinitésimal.

Cependant, l'année même où le cours de Duhamel accorde une nouvelle importance à la notion de continuité, le programme d'analyse de l'École polytechnique connait une modification qui se doit d'être signalée. Les deux premiers articles du programme de 1825, qui étaient : « Des fonctions en général, et des fonctions continues en particulier – Représentation géométrique des fonctions continues d'une seule variable »[160] deviennent : « Des fonctions en général - Représentation géométrique des fonctions d'une seule variable ».

---

[159] *Ibid.*, p. 235.

[160] « Programmes de l'École Royale polytechnique arrêtés par le Conseil de perfectionnement pour l'année scolaire 1839-1840 », *Rapports du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique,* CRH archives : X2B 10/1831-1839, p. 6.

La disparition de toute référence à la notion de continuité est-elle une conséquence de l'enseignement de Duhamel ? Nous ne disposons malheureusement pas d'information pour l'affirmer ou l'infirmer.

5 – Liouville et Sturm : de nouvelles questions à propos des fondements (1838-1850)

Sturm succède à Duhamel peu de temps après que Mathieu a été remplacé par Liouville. Ces deux jeunes mathématiciens entretenaient déjà depuis plusieurs années des collaborations dans leurs recherches mathématiques, et des relations d'amitié.

Liouville est né en 1809 à Saint-Omer[161]. Son père était capitaine d'artillerie. Entré à l'École polytechnique en 1825, il est donc l'élève d'Ampère. Il intègre en 1827 l'École des ponts et chaussées mais il renonce en 1830 à une carrière d'ingénieur pour l'enseignement. Alors qu'il est étudiant à l'École des ponts et chaussées il rédige ses premiers travaux qui portent sur la théorie de la chaleur. À partir de 1831 il devient le répétiteur de Mathieu à l'École polytechnique. En 1833 il est titulaire de la chaire de mécanique rationnelle à l'École centrale des arts et manufactures[162]. Reçu à l'agrégation de mathématiques en 1834, sa thèse est consacrée en 1836 au développement des fonctions en séries trigonométriques.

Il fonde en 1836 le *Journal de mathématiques pures et appliquées*. Sa collaboration avec Sturm pour des recherches sur les équations différentielles, donne naissance à ce qui est aujourd'hui connu sous le nom de théorie de Sturm-Liouville[163]. En 1838 il remplace Mathieu à l'École polytechnique. Il est élu à la section d'astronomie de l'Académie des sciences l'année suivante. Cette même année il rencontre Pierre Gustave Lejeune-Dirichlet lors d'un séjour de ce dernier à Paris. Il s'intéresse particulièrement aux travaux du mathématicien allemand qui inspireront

[161] Concernant Liouville on pourra consulter l'ouvrage de LÜTZEN Jesper, *Joseph Liouville 1809-1882 : Master of Pure and Applied Mathematics*, New-York, Springer-Verlag, 1990. Nous utilisons aussi le *Bulletin de la Sabix* N° 45 intitulé « Joseph Liouville : le bicentenaire (1809-2009) » et l'article de PEIFFER Jeanne, « Joseph Liouville : (1809-1882) : ses contributions à la théorie des fonctions d'une variable complexe », *Revue d'Histoire des Sciences*, Vol. 36, 1983, p. 209-248.

[162] Dans son *Histoire de l'École centrale des Arts et Manufactures,* Paris, Gauthier Villars, 1879, p. 79, Charles de COMBEROUSSE indique que Liouville abandonne dans son enseignement à l'École centrale les notions de calcul infinitésimal prévues dans le programme par Coriolis.

[163] Selon Jesper Lützen, cette collaboration entre ces deux jeunes mathématiciens est « peut-être la première collaboration significative dans l'histoire des mathématiques » (Voir VERDIER Norbert, « Entretien avec Jesper Lützen : une invitation à étudier ses travaux », *Bulletin de la Sabix*, N° 45, 2010, p. 23-26).

en partie les cours sur les intégrales définies qu'il professera au Collège de France pendant le premier semestre 1839-1840[164].

Sturm, né à Genève en 1803, a été l'élève de L'Huillier[165]. Engagé comme précepteur dans la famille de Broglie en 1823, il publie la même année ses premiers articles dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées,* journal fondé par Joseph-Diez Gergonne en 1810. Venu habiter Paris en 1825, muni d'une lettre de recommandation de L'Huillier, il rencontre Fourier, Ampère et Arago. En 1829 il publie le théorème qui porte son nom sur les racines d'une équation, théorème qui lui vaudra d'emblée la célébrité[166].

La révolution de Juillet lui permet d'entrer dans l'Instruction publique et la protection d'Arago lui vaut d'obtenir le poste de mathématiques spéciales au collège Rollin. De cette époque datent ses relations d'amitié avec Liouville. En 1836 il est élu à l'Académie des sciences. Nommé répétiteur d'analyse à l'École polytechnique en 1838, il seconde Liouville. Il succède à Duhamel en 1840. Liouville est membre du comité qui le propose pour ce poste. La même année il est nommé sur la chaire de mécanique à la Faculté des sciences de Paris.

Nous disposons pour Liouville et Sturm de cours lithographiés. Pour le premier il s'agit du *Cours d'analyse : cours de Calcul différentiel 1ère année,* de 1845-1846, du *Cours d'Analyse 2ème Division 1ère Année 1847-1848* et du *Calcul intégral 1e et 2e années, 2e et 1e divisions*[167]. Ils sont plus nombreux pour Sturm. Nous avons utilisé le *Cours d'Analyse, 1e année, 2edivision* et le *Cours d'analyse intégrale : 1e année : calcul intégral*. Ces textes, revus et corrigés par Eugène Prouhet, qui a de plus utilisé des notes de cours d'élèves de l'École polytechnique, ont servi pour la publication posthume, en 1857, du *Cours d'analyse de l'École polytechnique* de Sturm. Prouhet n'est pas un ancien de l'École polytechnique. Ayant obtenu sa licence de mathématiques en 1842, il a été l'élève de Sturm à la Faculté des sciences de Paris. Il sera

---

[164] Pour ces cours, voir BELHOSTE Bruno et LÜTZEN Jesper, « Joseph Liouville et le Collège de France », *Revue d'Histoire des Sciences*, Vol. 37, 1984, p. 255-304.

[165] Pour ces éléments biographiques sur Sturm, nous renvoyons à PROUHET Émile, « Notice sur la vie et les travaux de M. Ch. Sturm » dans STURM Charles*, Cours d'analyse de l'École polytechnique, publié d'après le vœu de l'auteur par M. E. PROUHET*, tome I, Paris, Mallet-Bachelier, 1857, ainsi qu'aux divers travaux déjà cités sur Liouville qui évoquent aussi la figure de Sturm.

[166] Soit P un polynôme, et $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_m$ la suite de Sturm définie par : $P_0=P$; $P_1=P'$; pour $n > 1$, P_n est l'opposé du reste de la division de P_{n-1} par P_{n-2}. Le théorème affirme que, sur un intervalle $[a, b]$ où a et b ne sont pas racines de P, le nombre de racines de P est égal à l'excès du nombre de changements de signe de la suite de Sturm entre les bornes de l'intervalle.

[167] Ces deux derniers cours ont été publiés en 1994 par les éditions Ellipses sous les titres *Calcul différentiel* et *Calcul intégral*.

répétiteur d'analyse à l'École polytechnique à partir de 1857. La rédaction de ce manuel l'aidera probablement à obtenir un tel poste, rarement attribué à quelqu'un qui n'était pas un ancien élève de l'École[168]. Ce Cours d'analyse connaîtra par la suite de nombreuses éditions, la quinzième datant de 1929.

Les plans des cours de Liouville et Sturm suivent assez fidèlement celui du programme d'analyse de 1839. Ce programme ne connaîtra pas non plus, durant la dizaine d'années qui nous intéresse ici, de changement concernant l'enseignement des éléments. Il convient cependant de noter que le programme d'analyse de première année prend de l'ampleur. Ainsi, par exemple, la différentiation et l'intégration sous le signe ∫ passe de deuxième en première année en 1844 et le programme prévoit l'étude de quelques intégrales définies.

5 – 1 De nouvelles questions à propos de la continuité et de la dérivabilité d'une fonction

Dans son cours de 1845, pour Liouville « une fonction d'une variable x [est] une expression ou une quantité dont la valeur dépend de cette variable ». Pour Sturm, l'année suivante

> on peut affirmer que deux quantités qui varient ensemble sont fonction l'une de l'autre, lorsqu'on sait qu'à chaque valeur de l'une d'elles correspond une valeur déterminée de l'autre, quand même la relation qui existe entre elles ne serait pas connue ni même susceptible d'être exprimée.[169]

Si la définition de Liouville reprend la seconde définition eulérienne d'une fonction, Sturm emploie le verbe correspondre. Dans la suite du texte, rien ne permet de relier cette définition à la notion de fonction proposée par Dirichlet. Liouville est plus explicite dans son cours de 1847. Après avoir défini comme Cauchy la continuité d'une fonction, il précise :

> En outre, parmi les fonctions discontinues, on ne s'occupera jamais de celles qui le sont constamment, comme le serait, par exemple, la fonction d'x qui serait nulle quand x est rationnel, et égale à l'unité quand x est irrationnel.[170]

Nous trouvons ici, pour la première fois dans notre étude, mention de la fonction proposée par Dirichlet dans son mémoire de 1829. Une telle mention, même s'il s'agit d'indiquer que de telles fonctions ne sont pas au programme, marque le désir de montrer aux élèves, au-delà

---

[168] Voir ZERNER Martin, *op. cit.,*p. 73.

[169] STURM Charles*, Cours d'Analyse, 1e année, 2edivision*, CRH cours, Sturm 1846-1848, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique, p. 1.

[170] LIOUVILLE Joseph, *Cours d'Analyse, 2ème Division, 1ère Année, 1847-1848*, CRH cours : Liouville 1847-1848, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique, p. 2.

de celles qui sont enseignées à l'École polytechnique, des mathématiques qui font l'objet de recherches, Dirichlet et lui-même étant d'importants acteurs de ces recherches.

La question de la continuité occupe d'ailleurs une place beaucoup plus importante dans son cours de 1847. Il réserve un traitement particulier à la discontinuité, illustrée par une figure (voir figure 4). Une fonction est discontinue « si elle ne conserve pas toujours une valeur finie » ou « si la fonction passe brusquement d'une valeur à une autre valeur, essentiellement différente de la première »[171].

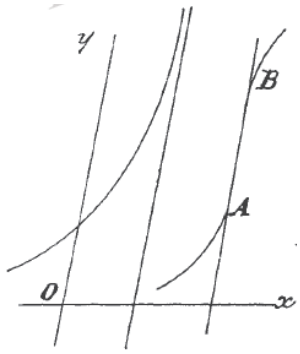


Figure 4: illustration de la discontinuité par Liouville

À ce point de son cours, Sturm n'insiste pas sur la continuité d'une fonction qu'il définit à partir de la continuité de la courbe :

> Ordinairement cette courbe est continue, c'est-à-dire que pour des valeurs de x qui varient par degrés insensibles, l'ordonnée varie aussi par degrés insensibles. Y est alors une fonction continue de x.[172]

Liouville ne définit pas la notion de limite alors que Sturm choisit d'y consacrer plusieurs pages après avoir défini la notion de continuité. Son propos est illustré d'exemples tirés de la géométrie (surface d'un cercle comme limite de la surface de polygones réguliers) et d'exemples purement numériques. La limite à l'infini de la fonction $\frac{\sin x}{x}$ lui permet de dire qu'une quantité variable peut devenir alternativement plus grande ou plus petite que la limite vers laquelle elle tend. Sturm ne donne cependant aucun théorème sur les limites, énonçant pour seule propriété générale la propriété suivante :

> Si deux quantités qui varient simultanément restent constamment égales entre elles dans tous les états de grandeur par lesquels elles passent, et qu'on sache

[171] LIOUVILLE Joseph, *op. cit.,* p. 3.
[172] STURM Charles*, op. cit.,* p. 3.

> que l'une d'elles tend vers une limite, il est évident que l'autre tend aussi vers la même limite ou vers une limite égale à celle-là.[173]

L'exemple qui illustre cette propriété, qui sera désignée comme « principe de la méthode des limites » dans la version publiée du cours, est celui de l'aire a d'un polygone régulier inscrit dans un cercle, de périmètre µ, d'apothème r. On a donc la relation : $a = \mu \times \frac{1}{2}r$. Selon Sturm, les quantités a et $\mu \times \frac{1}{2}r$ varient en restant égales. Leurs limites sont donc égales à A et $C \times \frac{1}{2}R$ où A, C et R désignent respectivement l'aire du cercle, sa circonférence et son rayon. Nous retrouvons là, exprimée sous une autre forme et sans la notion de continuité, la propriété des limites formulée par Duhamel, et qu'il jugeait jugeait essentielle.

La notion d'infiniment petit apparaît à cette occasion dans le cours de Sturm. Il indique : « lorsqu'une quantité variable prend des valeurs de plus en plus petites, ou tend vers zéro, on dit qu'elle devient infiniment petite »[174]. Aucune précision supplémentaire n'est apportée à cette notion.

Si Liouville ne consacre pas de leçon à la notion de limite, il signale les propriétés des limites lorsqu'il en éprouve la nécessité. Ainsi, lorsqu'il détermine la dérivée d'une fonction de fonction, il précise que la limite d'un produit est égale au produit des limites.

L'un et l'autre introduisent la dérivée par la recherche de la tangente à une courbe, définie comme la position limite d'une sécante. Et, malgré la définition géométrique de la continuité qu'il avait donnée, Sturm établit dans son cours une séparation entre continuité et dérivabilité plus nette que nous ne l'avons rencontrée jusqu'à présent. À la suite de la définition de la fonction dérivée il affirme : « il faut démontrer que cette limite existe pour toute fonction »[175]. Plus loin, il démontre, à la manière de Duhamel, que si la dérivée d'une fonction est constamment nulle sur un intervalle, la fonction est constante sur cet intervalle. Les rapports inverses lui permettent d'affirmer qu'elle ne peut pas non plus être constamment infinie sur un intervalle. Mais, là où Duhamel en concluait la dérivabilité de la fonction, Sturm écrit : « De là il résulte que la dérivée d'une fonction ne peut être ni nulle ni infinie seulement, on ne voit

[173] STURM Charles*, Cours d'Analyse, 1e année, 2edivision*, CRH cours, Sturm 1846-1848, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique, p. 5.
[174] *Ibid.* p. 6.
[175] *Ibid.*, p. 8.

pas qu'elle ne puisse être indéterminée »[176]. Cette phrase, qu'on peut considérer comme une forme de réponse à la démonstration de Duhamel, ne figure pas dans la version du cours publiée en 1857. À partir de l'édition de 1863, nous trouvons, en note de bas de page :

> La dérivée d'une fonction continue ne pouvant être nulle ou infinie que pour des valeurs particulières de la variable, il en résulte en général que l'accroissement d'une fonction est du même ordre que l'accroissement de la variable.[177]

Liouville évoque lui aussi, dans son cours de 1845, le cas où le rapport des accroissements n'a pas de limite déterminée mais uniquement en un point isolé. Après une définition de la fonction dérivée à partir de la recherche d'une tangente, définition qui laisse supposer que toute fonction est dérivable, il explique que le rapport $\sin\frac{\pi}{h}$ [178]n'a pas de limite déterminée en 0. La fonction $\sin\frac{1}{x}$, avait pour Cauchy une dérivée discontinue en zéro. Elle n'a, pour Liouville, pas de dérivée. Le cours de 1847 ne reprend pas cet exemple. Liouville se contene d'affirmer : « en général nous reconnaîtrons que cette limite existe »[179]. Remarquons que, lors de la définition de la dérivée, la notion d'infiniment apparaît incidemment chez Liouville. Il étudie la limite du rapport des accroissements $\frac{K}{h}$ « quand h tend vers zéro, ou en d'autres termes quand h est infiniment petit »[180].

Liouville et Sturm, partant de la relation $f(x+h) - f(x) = h(f'(x) + \varepsilon)$, établissent le lien entre signe de la dérivée et sens de variation de la fonction. Sturm précise, comme Cauchy le faisait, que la fonction est, pour un accroissement suffisamment petit, croissante ou décroissante, suivant le signe de la dérivée à partir de x, alors que Liouville indique seulement que cela a lieu « dans l'intervalle considéré ».

Ils définissent la différentielle d'une fonction comme le faisait Lacroix. Dans son cours de 1845-1846, c'est à l'occasion de la définition de la différentielle qu'apparaît pour la première fois chez Liouville la notion d'infiniment petit. Il écrit que la différentielle est égale au produit de la dérivée par « un accroissement tout à fait arbitraire, et il n'est pas nécessaire que ce soit

---

[176] *Ibid.*, p. 16.
[177] STURM Charles*, Cours d'analyse de l'École polytechnique, deuxième édition revue et corrigée par M. E. PROUHET*, tome I, Paris, Mallet-Bachelier, 1863, p. 22.
[178] Liouville ne précise nulle part la fonction dont il étudie la dérivée en 0, et qui ne peut être que $x\sin\frac{\pi}{x}$
[179] LIOUVILLE Joseph, *Cours d'analyse : cours de calcul différentiel, 1ère année*, CRH cours : Liouville 1845-1846, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique, p. 4
[180] *Ibid*, p. 4.

une quantité infiniment petite »[181]. Il semble en cela s'opposer à la définition de Duhamel. Dans aucun de ces deux cours il n'apporte de précision à la notion d'infiniment petit.

Liouville emploie cette même relation pour établir le théorème auquel il donne le nom de « théorème de Rolle », nom sous lequel nous le connaissons toujours. Nous rencontrons pour la première fois ce théorème les cours que nous avons analysés. Il est ainsi formulé :

> Si on fait varier x de a à b, si dans cet intervalle $f(x)$ et $f'(x)$ sont finies et continues, et si de plus on a $f(a) = 0$ et $f(b) = 0$, je dis que $f'(x)$ s'annulera au moins une fois et changera au moins une fois de signe dans le même intervalle (Théorème de Rolle).[182]

Il ne figure ni dans la version de 1847 du cours de Liouville, ni dans le cours de Sturm. Ce théorème figurait à l'époque dans certains manuels d'algèbre pour les candidats à l'École polytechnique, comme outil de séparation des racines d'une équation algébrique[183]. Liouville l'étend ici aux fonctions transcendantes.

Pour la recherche des extrema, l'un et l'autre emploient la *formule de Taylor-Lagrange*. Cette formule a été établie pour des fonctions dont les dérivées successives sont continues. Liouville et Sturm la démontrent tous deux de la même façon, sans faire appel au *théorème des accroissements finis* comme le faisait Cauchy dans les *Leçons sur le calcul différentiel*. Ce théorème est chez, l'un et l'autre, un cas particulier de la *formule de Taylor-Lagrange*. Leur démonstration de cette formule fait appel à la propriété des valeurs intermédiaires qui ne figure pas dans leurs cours, et n'est d'ailleurs pas au programme. Sans non plus être au programme du concours d'admission, elle est démontrée à cette époque dans certains manuels de mathématiques spéciales[184]. La *formule de Taylor-Lagrange* est suivie chez Sturm du contre-exemple de Cauchy, $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$. Il figure chez Liouville lors de l'étude de la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Tous deux emploient aussi, pour la recherche des extrema, la méthode utilisée par Cauchy, à savoir la recherche des valeurs pour lesquelles la dérivée s'annule et change de signe.

---

[181] LIOUVILLE Joseph, *op. cit.*, p. 9.

[182] LIOUVILLE Joseph, *Cours d'analyse : cours de calcul différentiel, 1ère année*, CRH cours : Liouville 1845-146, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique, p. 5.

[183] Voir par exemple dans MAYER Mathias et CHOQUET Charles, *Traité élémentaire d'Algèbre*, 4e éd., Paris, Bachelier, 1845, p. 603.

[184] Voir par exemple BLANCHET Pierre Henry, *Compléments de mathématiques spéciales,* Paris, Hachette, 1838, p. 7, dont nous parlerons au prochain chapitre, ou MAYER Mathias et CHOQUET, *op. cit.*, p. 401.

5 – 2 Intégration : les infiniment petits marginalisés

Les cours de Liouville et Sturm présentent à nouveau un certain nombre de similarités en ce qui concerne le calcul intégral. Appliquant le programme, tous deux étudient la différentielle de l'aire d'une courbe dans les applications géométriques du calcul différentiel. Après avoir démontré, par encadrement puis passage à la limite, que la différentielle dA de l'aire d'une courbe d'équation $y = f(x)$ est $dA = y \sin\theta \, dx$, où θ est l'angle que font entre eux les axes du repère, ils démontrent l'un et l'autre le théorème suivant : l'aire sous la courbe est la limite commune des sommes des aires des parallélogrammes inscrits et circonscrits à cette courbe.

À cette fin, Liouville démontre tout d'abord le lemme suivant :

> Soient $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \Delta_3 x, \ldots, \Delta_N x$, des quantités dont la somme constante est égale à X. Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_N$, des fonctions de x s'annulant respectivement avec $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \Delta_3 x, \ldots, \Delta_N x$. Zéro est la limite de la somme des produits $\varepsilon_1 \Delta_1 x, \varepsilon_2 \Delta_2 x, \varepsilon_3 \Delta_3 x, \ldots, \varepsilon_N \Delta_N x$ quand on suppose que les quantités $\Delta_1 x, \Delta_2 x, \Delta_3 x, \ldots$ diminuent indéfiniment à mesure que leur nombre augmente.[185]

Pour le démontrer, il majore la somme des produits par $\varepsilon_n X$, où ε_n désigne la plus grande des quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_N$, « abstraction faite de de leur signe » .

Il utilise ensuite ce lemme pour prouver que la somme des aires des parallélogrammes obtenus par différence des parallélogrammes exinscrits et inscrits est nulle.

Dans la version du cours de Sturm publiée en 1857, pour démontrer ce même théorème, ce lemme deviendra :

> Si une somme d'infiniment petits, dont le nombre augmente indéfiniment, a une limite finie, en les multipliant respectivement par d'autres infiniment petits, la somme des produits sera infiniment petite ou aura pour limite zéro. [186]

Cette propriété suit l'énoncé du premier des deux théorèmes énoncés par Duhamel sur les limites de rapport. Elle correspond au deuxième théorème de Duhamel, dont elle permet une nouvelle démonstration, sans doute plus satisfaisante aux yeux de Liouville et de Sturm. Elle

---

[185] LIOUVILLE Joseph, *Cours d'Analyse, 2ème Division, 1ère Année, 1847-1848*, CRH cours : Liouville 1847-1848, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique, p. 238.

[186] STURM Charles*, Cours d'analyse de l'École polytechnique, publié d'après le vœu de l'auteur par M. E. PROUHET*, tome I, Paris, Mallet-Bachelier, 1857, p. 168.

ne figure pas dans le cours lithographié de Sturm. Dans la suite de cette thèse, nous désignerons ce lemme comme le *lemme de Liouville*.

Pour Liouville et Sturm l'intégration est l'opération inverse de la différentiation, et c'est la différentielle de l'aire d'une courbe qui leur permet d'affirmer que cette opération est toujours possible, « pour une courbe $y = f(x)$ que [Liouville suppose] n'être pas constamment discontinue »[187]. Il s'agit de la seconde mention d'une fonction constamment discontinue dans le cours de Liouville, fonction pourtant signalée dès le début comme hors du cadre de son cours. Cette seconde mention montre non seulement un souci de formuler des hypothèses rigoureuses, mais aussi l'importance qu'il accorde à signaler à ses élèves des fonctions qui entrent de plus en plus dans le champ d'études des mathématiciens.

L'intégrale définie d'une fonction n'est introduite par l'un et l'autre qu'à la suite de l'étude des diverses méthodes d'intégration, puis interprétée comme une aire. Cette introduction de l'intégrale définie est à mettre en relation avec celle proposée par Liouville au Collège de France en 1839-140, dans laquelle il indiquait déjà qu'elle représentait une limite de somme de rectangles[188].

Liouville propose ensuite une démonstration « analytique » du théorème figurant au programme : l'intégrale définie est « la somme des valeurs successives infiniment petites que prend la différentielle entre les deux limites adoptées »[189]. Décomposant l'intervalle de a à b en n parties, désignant par $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$, les valeurs de successives de la variable et par $h, h_1, h_2, h_3, \dots, h_{n-1}$, les accroissements successifs de cette variable, en utilisant la relation $F(x+h) - F(x) = h(F'(x) + \varepsilon)$, il démontre que: $F(b) - F(a) = \sum(hf(a)) + \sum(h\varepsilon)$[190]. Par passage à la limite, la deuxième somme devient nulle et h devient un infiniment petit dx. La démonstration du cours de 1847 est plus précise en utilisant jusqu'au terme une notation indicielle, et la référence finale à la notion d'infiniment petit disparaît.

[187] LIOUVILLE Joseph, *Calcul intégral 1^e^ et 2^e^ années, 2^e^ et 1^e^ divisions*, CRH cours, Liouville 1847-1848/ANA, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique, p. 1.
[188] Voir BELHOSTE Bruno et LÜTZEN Jesper, *op. cit.,* p. 262.
[189] LIOUVILLE Joseph, *Cours d'analyse : cours de calcul différentiel, 1ère année*, CRH cours : Liouville 1845-146, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique, p. 269.
[190] Il faut bien sûr imaginer dans les deux sommes les indices que Liouville ne note pas.

Sturm donne d'abord une démonstration géométrique de ce théorème, utilisant le théorème précédent sur l'aire égale à la limite de la somme d'une infinité de rectangles. Illustrant son propos par la figure 5 ci-dessous, il conclut:

$$\int_a^b f(x)dx = lim \sum f(x)\Delta x = \sum f(x)dx$$ [191]

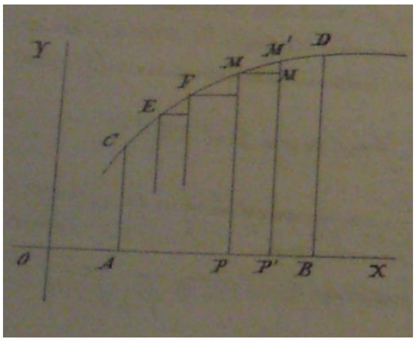
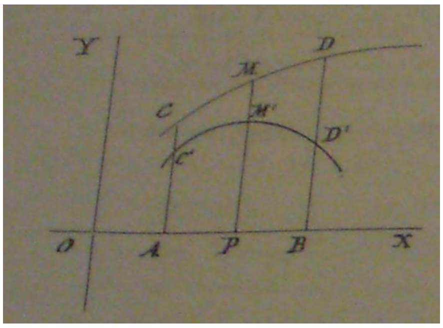


Figure 5 : Illustration par Sturm du théorème: l'aire sous une courbe est égale à la limite de la somme d'une infinité de rectangles

Cette démonstration est suivie d'une démonstration semblable à celle proposée par Liouville dans son cours de 1845, sans toutefois utiliser la notation indicielle.

Signalons une nouvelle fois la grande importance donnée par ces deux auteurs à l'emploi de figures géométriques pour illustrer leurs cours, ou démontrer des propriétés. Par exemple, à l'aide de la figure 6 ci-dessous, Sturm démontre la propriété de comparaison des intégrales : si $\psi(x) < f(x)$ pour toutes les valeurs de x de a jusqu'à b, alors $\int_a^b f(x)dx > \int_a^b \psi(x)dx$ [192]. Il en donne ensuite une démonstration analytique qui utilise la propriété liant signe de la dérivée et sens de variation de la fonction. Liouville, quant à lui, démontre la propriété dite aujourd'hui d'additivité de l'intégrale en utilisant, dans son cours de 1847, les figures 7 et 8.

[191] STURM Charles*, Cours d'Analyse, 1e année, 2edivision*, CRH cours, Sturm 1846-1848, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique, p. 77.
[192] Sturm fait suivre cette démonstration géométrique d'une démonstration analytique qui utilise la propriété liant signe de la dérivée et sens de variation de la fonction.



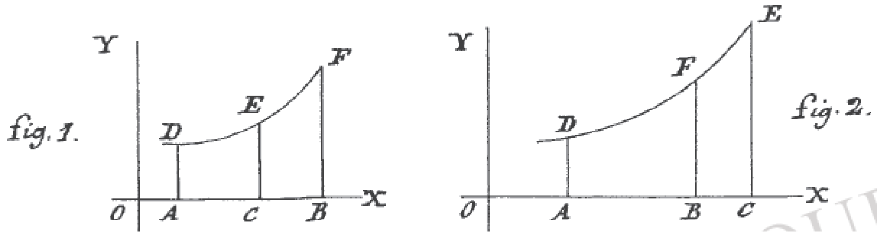


Figure 6, 7 et 8: démonstrations géométriques chez Sturm et Liouville

5 – 3 Conclusion

Il ne fait donc pas de doute, que, après les enseignements de Mathieu et Navier plus portés vers les applications mathématiques et physiques du calcul différentiel, ceux de Sturm et Liouville, prolongent la volonté de rigueur de Cauchy et d'Ampère en ce qui concerne la présentation des principes.

Arrivant après Duhamel qui avait le premier renoué avec cette rigueur mathématique, et à qui, nous l'avons vu, ils ont repris certaines notions, Sturm et Liouville s'en distinguent cependant sur plusieurs points. Ainsi, ils font un emploi beaucoup plus restreint des infiniment petits, se limitant aux exigences du programme. Ceci est particulièrement vrai pour Liouville qui n'y fait référence qu'en tout dernier ressort, presque à regret semble-t-il, le langage des limites suffisant à ses démonstrations.

Malgré tout, contrairement à Duhamel qui, après avoir expliqué les origines géométriques du calcul différentiel, abordait la théorie dans une approche essentiellement analytique, Sturm et Liouville font très souvent appel aux figures de la géométrie, que ce soit pour illustrer une notion, une démonstration ou même pour démontrer, même si une démonstration géométrique est en général suivie d'une démonstration purement analytique. Parmi ceux que nous avons rencontrés jusqu'à présent, leurs cours offrent un mélange inédit de recours à l'intuition géométrique et de rigueur théorique. Ceci explique probablement le grand succès que connaîtra la version publiée du cours de Sturm qui compte en outre de nombreux exercices qui ne figurent pas dans le cours lithographié lui-même, et dont nous pouvons imaginer qu'ils trouvaient place dans les répétitions.

6 – Conclusion

Le tableau 1 résume, pour les auteurs que nous avons analysés, la question des principes dans l'introduction du calcul différentiel et intégral à l'École polytechnique depuis la création de l'École. Dans ce tableau, nous considérons deux fois Ampère en raison des différences observées entre les cours de 1812 et 1821. Les dates indiquées pour les autres auteurs sont celles de leur désignation comme professeurs d'analyse, sauf pour Garnier où nous avons retenu la date de 1800, son cours annonçant qu'il se conforme à la méthode des limites apparue au programme cette année-là.

Lorsqu'une case est laissée en blanc, cela signifie que la notion considérée n'intervient pas comme fondamentale pour le calcul différentiel et intégral.

Pour les fonctions, nous avons indiqué la définition eulérienne adoptée : « E (1) » pour celle de l'*Introductio in analysin infinitorum,* « E (2) » pour celle des *Institutiones calculi differentialis*. Liouville est le seul à citer la définition introduite par Dirichlet, notée « D ».

Pour les auteurs qui utilisent le développement d'une fonction en série entière pour construire le calcul différentiel, nous indiquons par « a » si cette propriété est admise, par « d » s'ils en proposent une démonstration. Nous faisons de même pour le théorème de Taylor.

Les infiniment petits sont notés « L » lorsqu'ils sont considérés dans la conception leibnizienne propagée en France par le marquis de l'Hôpital, « C » si ce sont des quantités variables de limite nulle, comme les a définis Cauchy. Nous les notons « C/Du » lorsque figure les théorèmes de substitution de Duhamel.

Pour la notion de continuité, dont le terme apparaît explicitement avec Lacroix, nous indiquons qu'il s'agit seulement pour cet auteur de la notion « métaphysique » de « loi de continuité », puis par la suite « C » lorsqu'il s'agit de la définition de Cauchy, et « V.I. » lorsque, avec Duhamel, la continuité est définie en termes de valeurs intermédiaires.

Enfin nous adjoignons à ce tableau la notion d'intégrale définie comme fondement du calcul intégral. Nous notons « nt » lorsque le cours ne traite pas de l'intégrale définie.

Si chaque ligne de ce tableau est un cas particulier, chacun des enseignants ayant ses propres conceptions du calcul différentiel, il apparaît clairement que la notion de continuité et la question de la dérivabilité d'une fonction continue s'imposent après 1810. Nous savons à présent que les réponses apportées à cette question par Ampère, Mathieu ou Duhamel sont fausses, mais leurs démonstrations ont nourri la problématique des fondements dans l'enseignement à l'École, comme le montrent les doutes sur la validité de la démonstration de Duhamel exprimés par Sturm dans son cours de 1846-1847.

Il apparaît aussi que l'imposition de la méthode des infiniment petits par le Conseil de perfectionnement a contribué, à travers la réponse apportée par Cauchy, à imposer définitivement la méthode des limites.

C'est aussi à partir de Cauchy que s'imposent, sauf chez Navier, l'expression de « fonction dérivée » et la notation lagrangienne. La notation différentielle reste cependant d'autant plus usitée que la notion de différentielle, est très fréquemment employée pour les fonctions d'une variable. Même si cela nécessite chez Duhamel l'emploi des théorèmes de substitution des infiniment petits, cette notion essentielle à l'introduction de l'intégrale définie s'écrit dorénavant $f'(x)dx$. À nouveau liée à la notion d'infiniment petit chez Mathieu, Navier et Duhamel, elle s'en dissocie dans les enseignements de Liouville et Sturm qui terminent cette période.

Des nouveaux concepts fondamentaux dus à Cauchy, seule la notion d'intégrale définie comme fondement du calcul intégral ne s'est pas imposée.

Concernant les applications du calcul différentiel, Cauchy est le premier à avoir abordé la recherche des extrema à partir du sens de variation de la fonction déduit du signe de la dérivée. Il faut attendre Liouville et Sturm pour retrouver cette méthode liée à la notion de fonction croissante ou décroissante dans le voisinage d'une valeur. Ils ne l'emploient cependant qu'en complément de l'utilisation de la *formule de Taylor-Lagrange*.

	Fonction	Développement en série entière	Différences finies	Théorème de Taylor	Limites	Infiniment petits	Continuité	Dérivabilité	Intégrale définie	Nombres incommensurables
Prony (1795)	E (1)	a		d					nt	
Lagrange (1795)	E (1)	d		d						
Fourier (1795)	E (1)	a				L (cités)			nt	
Garnier (1800)	E (1)	d								
Lacroix (1800)	E (2)	a				L (cités)	loi de continuité			
Ampère (1812)	E (1)	d				L (utilisés)				
Ampère (1821)	E (2)						C		nt	
Cauchy (1815)	E (2)					C	C			
Mathieu (1827)	E (1)	d				L	C			
Navier (1831)	E (2)					L				
Duhamel (1836)	E (2)					C/Du	C/V.I.			
Liouville (1838)	E (2) (D citée)					C	C			
Sturm (1840)	E (2)					C	C			

Tableau 1: les fondements de l'analyse pour les professeurs de l'École polytechnique (1794-1850)

Enfin, la notion de tangente à une courbe n'est plus, sauf chez Mathieu, élève de Lacroix, une justification de la dérivabilité d'une fonction. Et aucun enseignant n'a plus défini la tangente à la manière des « anciens géomètres » comme l'avait fait Lagrange.

Si nous mettons ce tableau en regard des programmes de l'École polytechnique, il faut convenir que ces derniers ne dictent pas les enseignements des professeurs en matière de principes. L'imposition, en 1811, de l'introduction du calcul différentiel par la méthode des infiniment petits n'a que peu d'effet. Il en est de même pour la suppression de la notion de continuité dans le programme de 1839. La conclusion est toute différente pour les connaissances enseignées et l'ordre dans lequel elles sont présentées. Sur ce point, le programme est globalement respecté.

Dans le premier chapitre, nous avions distingué parmi les enseignements deux courants : le premier utilisait préférentiellement l'intuition géométrique, ou algébrique, pour introduire les différentes notions. Le second se revendiquait de la plus grande rigueur. Nous considérons les cours de Liouville et Sturm comme les plus caractéristiques du premier courant durant cette seconde période. Chez eux, la tangente introduit la notion de dérivée et les figures géométriques démontrent, même si la démonstration géométrique est suivie d'une démonstration analytique qui en garantit la rigueur. Les cours d'Ampère, de Cauchy et Duhamel nous paraissent être ceux qui, à l'opposé, se réclament de la plus grande rigueur analytique.

DEUXIÈME PARTIE : De l'introduction de la théorie des fonctions dérivées au concours d'admission à l'Ecole Polytechnique, à l'intégrale de Riemann dans des manuels destinés à la classe de mathématiques spéciales (1851-1896)

En 1850, le calcul différentiel et intégral est enseigné essentiellement dans le cours d'analyse de l'École polytechnique, dans les facultés des sciences et dans quelques écoles militaires et professionnelles. Il ne figure pas au programme du concours d'admission à l'École polytechnique. L'historiographie a cependant établi que des enseignements de l'analyse existaient dans les classes préparatoires à ce concours avant 1851, date à laquelle les premiers éléments de la théorie des fonctions dérivées vont être officiellement introduits au programme[1].

Dans le premier chapitre de cette seconde partie, nous nous attacherons à rechercher les traces de ces enseignements. Les sources sont multiples. Les manuels nous fourniront de précieuses indications. Ils sont souvent rédigés par d'anciens professeurs ou d'anciens élèves de l'École polytechnique qui diffusent l'enseignement du calcul différentiel à l'extérieur de l'École. Cependant, à partir de la fin des années 1830, certains sont écrits par des enseignants de mathématiques spéciales. Les résultats de la première partie de cette thèse nous permettront d'examiner plus finement ces ouvrages. D'autres sources que les manuels s'offrent à nous, comme le *Manuel des aspirants à l'École polytechnique* de Georges Ritt, un guide pratique à destination des candidats publié en 1839[2], mais aussi des documents internes à l'École et les notes qu'Auguste Comte prenait alors qu'il était examinateur d'admission. Nous examinerons aussi dans ce chapitre les conceptions des principes du calcul différentiel d'Antoine-Augustin Cournot l'un des acteurs majeurs de l'enseignement des mathématiques dans les années 1840.

Le deuxième chapitre sera consacré à ce premier moment de l'histoire de l'enseignement de l'analyse dans le secondaire qui va de 1851 à 1885. Rappelons en effet, qu'à cette époque, la classe de mathématiques spéciales était partie intégrante de l'enseignement secondaire. La décision de 1851 d'introduire les premiers éléments de l'analyse au concours d'admission à l'École polytechnique est prise dans un contexte politique et institutionnel particulier. L'analyse de ce contexte et des programmes adoptés nous permettra de comprendre la première étape du processus de passage des éléments de l'analyse de l'enseignement supérieur vers l'enseignement secondaire qui est l'objet de cette thèse. Ce chapitre se

[1] Voir le chapitre 14, « Projets de réforme à l'École polytechnique » dans MOATTI Alexandre, *Gaspard-Gustave de Coriolis (1792-1843) : un mathématicien, théoricien de la mécanique appliquée,* Thèse de doctorat, Université Paris I – Sorbonne, Paris, 2011.

[2] RITT Georges, *Manuel des aspirants à l'École Polytechnique*, Paris, Hachette, 1839.

poursuivra par la recherche de ce qui fut enseigné en classe de mathématiques spéciales. L'examen de manuels rédigés par certains des plus importants acteurs de cet enseignement sera notre outil principal. Il nous permettra de comprendre les liens entre ce qui s'enseigne et les modifications progressives que connaît le programme d'admission à l'École polytechnique.

Le premier chapitre se clôt en 1885, date à laquelle se produit ce qui apparaît comme une nouveauté essentielle dans l'enseignement secondaire de l'analyse. Le calcul infinitésimal, les notions de différentielle et d'intégrale définie apparaissent au programme d'admission à l'École polytechnique. Le deuxième chapitre de cette partie s'attachera à comprendre les conditions de cette apparition, en recherchant notamment comment étaient enseignées ces différentes notions à l'École polytechnique, mais aussi dans les autres lieux les plus importants de l'enseignement supérieur français. L'analyse de deux manuels postérieurs à cette réforme des programmes sera là encore une indication sur la façon dont elles ont pu être enseignées en classe de mathématiques spéciales. Nous les avons choisis de manière à encadrer un moment qui semble essentiel pour cette réforme des programmes : en 1887, un ouvrage du mathématicien belge Paul Mansion remet en cause l'un des principes essentiels de la méthode infinitésimale introduite en 1885. Nous verrons la réponse qu'y apporte l'un des manuels qui rencontre un grand succès éditorial à la fin de ce siècle.

Les années 1870 marquent un tournant dans l'élaboration des fondements de l'analyse sous l'impulsion de l'École allemande, en particulier de Karl Weierstrass et de Bernhard Riemann. Des travaux essentiels sont publiés. Ils clarifient les notions de continuité et de dérivabilité. Les différentes constructions des nombres irrationnels du début des années 1870 parachèvent l'arithmétisation de l'analyse. Elles permettent de démontrer, avec toute la rigueur exigée de nos jours, les théorèmes fondamentaux de l'analyse que nous désignons sous les noms de *théorème de Bolzano-Weierstrass*, *théorème de Rolle*, *théorème des accroissements finis*, etc. Simultanément, Georg Cantor élabore les premiers éléments de la théorie des ensembles, fournissant un outil puissant à la théorie des fonctions. Dans le troisième chapitre de cette partie, après avoir rappelé les grandes étapes de ces inventions, nous analyserons l'impact de ces théories nouvelles sur l'enseignement en mathématiques spéciales. Nous verrons comment, s'appuyant sur des ouvrages de Jules Tannery à l'École normale supérieure et de Camille Jordan à l'École polytechnique, ces nouvelles théories trouvent un débouché dans l'enseignement de mathématiques spéciales. De tels enseignements débordent largement du programme officiel. Nous étudierons les résistances qu'ils suscitent. Elles se lisent dans certains manuels de mathématiques spéciales, mais proviennent surtout de l'École polytechnique. En 1896, une nouvelle modification du programme du concours d'admission à cette École met un frein à ces enseignements. Nous terminerons ce chapitre par l'analyse des circonstances dans lesquelles est élaboré le nouveau programme d'admission qui apparaît aux yeux de certains comme un retour en arrière.

Chapitre 3 : La diffusion de l'enseignement de l'analyse (1800-1850)

À la charnière des XVIII^{e} et XIX^{e} siècles s'élaborent les structures de ce qui deviendra l'enseignement secondaire. Les difficultés d'ordre matériel et pédagogiques rencontrées par les écoles centrales voulues par la Convention, en 1795, provoqueront leur suppression. Les lycées, créés par Napoléon, moins nombreux, plus élitistes, où règne une discipline militaire, succèdent en 1802 à ces écoles qui reprenaient en partie le projet d'un enseignement encyclopédique des Idéologues[1]. La nécessité de former des professeurs pour ces lycées sera à l'origine de la refondation en 1808 de l'École normale. Les lycées sont aussi le cadre dans lequel sont instituées, cette même année, les facultés académiques de lettres et de sciences. Lycées, facultés et École normale sont placés sous le contrôle de l'Université, administration centralisée et autoritaire fondée en 1806. Elle est dirigée par un « grand-maître », sous l'autorité duquel les recteurs, inspecteurs et proviseurs occupent les principaux postes hiérarchiques. Ce cadre institutionnel ne sera guère affecté par les soubresauts des différents changements de régime que connaîtra le XIX^{e} siècle.

Durant la première moitié du XIXe siècle, le calcul différentiel ne figure pas au programme du concours d'admission à l'École polytechnique. Mais l'attraction de l'École polytechnique, dont le prestige s'accroit rapidement, oriente l'enseignement mathématique avant même la création des lycées. Les candidats à cette École sont formés dans des classes préparatoires, constituées des classes de mathématiques spéciales des 46 lycées publics du pays, et de tout un réseau d'institutions privées. Dans les faits, cinq grands lycées parisiens regroupent plus de la moitié des élèves de mathématiques spéciales. Il s'agit des lycées Louis-le-Grand, Henri IV, Saint Louis, Charlemagne et Bonaparte. En raison du monopole de l'Université sur l'enseignement secondaire, les élèves des sept ou huit grandes institutions privées de Paris qui préparent à ce concours doivent fréquenter ces lycées. Les plus renommées sont

[1] Ce groupe de penseurs auquel appartient Condorcet, a été fondé en 1795. Inspiré notamment par Étienne Bonnot de Condillac, il se situait dans un courant philosophique qui pensait que la communauté des savants devait s'occuper de l'organisation de la cité. On pourra notamment consulter, sur Condillac, AUROUX Sylvain, « La philosophie mathématique de Condillac », *Bulletin de la Société Française de Philosophie,* vol. 75, 1981, p. 7-17, et sur les Idéologues, TAKEDA Chinatsu, « Deux origines du courant libéral en France », *Revue Française d'Histoire des Idées Politiques*, n° 18, 2003, p. 233-257.

l'institution Mayer, fondée en 1824, et l'institution Sainte-Barbe, adossée au lycée Louis-le-Grand. En 1853, plus d'un tiers des élèves admis à l'École polytechnique sont des élèves de cette dernière institution. Les professeurs de lycées sont majoritairement d'anciens élèves de l'École normale supérieure. Dans les institutions privées, ce sont bien souvent d'anciens polytechniciens, voire même des répétiteurs de l'École qui assurent la préparation au concours[2].

À ses débuts, les épreuves du concours étaient uniquement orales. Vers la fin des années 1830, des épreuves écrites ont été ajoutées, mais les épreuves orales sont toujours considérées comme celles qui permettent de jauger le plus précisément les capacités du candidat. Dans ce cadre, il peut être amené à montrer ses connaissances en calcul différentiel et intégral. La façon dont ce calcul est enseigné à l'École polytechnique est donc la référence pour les candidats.

Ce chapitre est consacré à la diffusion de l'enseignement de l'analyse à l'extérieur de l'École polytechnique jusqu'en 1850. Les *Leçons élémentaires de mathématiques* de Pierre Tedenat ouvrent une fenêtre nouvelle sur un enseignement à destination des écoles centrales. Les ouvrages de Louis-Benjamin Francœur, de Jean-Baptiste d'Estienne du Bourguet, et de Jean-Guillaume Garnier publiés entre 1809 et 1812 permettent d'avoir une idée précise de cet enseignement à la suite des changements institutionnels du début du XIX^{e} siècle. À ces trois textes nous ajouterons celui de Jean-Louis Boucharlat. Il est le résultat d'un enseignement dans une école d'artillerie. Le public particulier auquel il est destiné et son succès dans la durée justifient sa place dans notre étude.

La question de l'introduction du calcul différentiel au concours d'admission à l'Ecole polytechnique est récurrente durant ce demi-siècle. Elle est débattue au sein des Conseils d'instruction et de perfectionnement en 1812 et 1842. L'historiographie a déjà relevé, dans des contextes différents, l'épisode de 1842 qui engage le mathématicien Gaspard-Gustave de Coriolis[3]. Nous en reprendrons les grandes lignes dans le cadre de notre problématique. À

[2] Sur le concours d'admission à l''Ecole polytechnique, voir, de BELHOSTE Bruno, « La préparation aux grandes écoles scientifiques au XIXe siècle : établissements publics et institutions privées », *Histoire de l'éducation*, n° 90, 2001, p. 101-130, et « Anatomie d'un concours. L'organisation de l'examen d'admission à l'École polytechnique de la Révolution à nos jours », *Histoire de l'éducation*, N°. 94, Paris, INRP, 2002, p. 141-175.

[3] On lira à ce sujet, dans BELHOSTE Bruno, *La formation d'une technocratie : L'École polytechnique et ses élèves de la Révolution au Second Empire*, Paris, Belin, 2003, les pages 222-223 et le « Chapitre 14. Projets de réforme

notre connaissance, celui de 1812 n'avait pas encore été signalé. Nous examinerons aussi la méthode d'introduction du calcul différentiel proposée par Joseph-Diez Gergonne, en 1830, dans son journal, les *Annales de mathématiques pures et appliquées*. Elle émane d'un acteur institutionnel de premier plan et est destinée aux enseignants de mathématiques. Elle fournit une indication sur la diffusion des principes du calcul différentiel auprès de la communauté enseignante.

Cette question de l'introduction du calcul différentiel au concours d'admission à l'École polytechnique se retrouve dans les ouvrages destinés aux candidats à ce concours, que ce soit dans des manuels d'enseignement ou dans le guide à l'usage de ces candidats écrit par Georges Ritt : *Manuel des aspirants à l'École polytechnique*. L'examen de cet ouvrage, et des manuels pour les élèves de mathématiques spéciales de Pierre Henry Blanchet et d'Édouard Gouré nous permettront d'appréhender ce qui pouvait s'enseigner en calcul différentiel dans les classes préparatoires au tournant des années 1840.

Nous consacrerons une section de ce chapitre à l'enseignement d'Antoine-Augustin Cournot. Bien que Cournot n'ait été professeur que quelques années dans les facultés des sciences de Lyon puis de Grenoble, son texte nous paraît essentiel. Non seulement il apporte un éclairage sur un enseignement en faculté, mais surtout, il émane d'un des acteurs majeurs de l'enseignement des mathématiques en France dans les années 1840.

Enfin nous nous demanderons quel rôle ont pu jouer les manuels étrangers dans l'enseignement français du calcul différentiel. Parmi les manuels français que nous avons examinés, nombreux sont ceux qui ont connu une ou plusieurs traductions. Nous chercherons quelle a été, en retour, la diffusion en France des manuels publiés en Europe.

1 – Le cadre institutionnel de l'enseignement de l'analyse durant la première moitié du XIX^e^ siècle

La même confiance en la « méthode révolutionnaire » qui devait permettre une formation accélérée des élèves de la première promotion de l'École polytechnique préside à l'organisation des leçons de l'École normale de l'An III. Les « cours révolutionnaires » et les

de l'école polytechnique » dans MOATTI Alexandre, *Gaspard-Gustave de Coriolis (1792-1843) : un mathématicien, théoricien de la mécanique appliquée*, Thèse de doctorat, Université Paris I – Sorbonne, Paris, 2011, p. 294-311.

leçons de l'École normale débutent presque simultanément : fin décembre 1794 pour les premiers, fin janvier 1795 pour les secondes.

L'École normale est prévue pour accueillir 1400 élèves destinés à propager le savoir dans le cadre d'un vaste programme d'instruction publique qui ne sera arrêté qu'en octobre de la même année, avec la création des écoles centrales. Le calcul différentiel et intégral est dès l'origine, pensé comme l'un des éléments du bagage intellectuel des futurs instituteurs qui sortiront de l'école. En effet, Pierre-Simon Laplace fait figurer l'analyse infinitésimale dans le programme qu'il trace pour ses leçons à l'École normale, le 1er pluviôse An III (20 janvier 1795)[4]. Ce n'est que par manque de temps, l'école étant fermée par décret le 30 Floréal an III (19 mai 1795), qu'il ne peut l'enseigner. Ceci n'empêchera pas l'existence d'un tel enseignement dans un grand nombre des 104 écoles centrales qui seront effectivement créées.

Moins ambitieuses que les instituts proposés par Condorcet, ces écoles centrales font cependant une part jusque-là inédite à l'enseignement des sciences, et en particulier des mathématiques. L'enseignement dans ces écoles est divisé en trois sections, suivant l'âge des élèves : première section de douze à quatorze ans, deuxième section de quatorze à seize ans, et troisième après seize ans. L'enseignement des mathématiques est dispensé dans la deuxième section[5]. La plupart des enseignants de mathématiques sont expérimentés, issus des anciens collèges ou ayant exercé dans un cadre privé. Un certain nombre sont membres de l'Institut ou de sociétés savantes[6].

Les élèves n'étaient pas tenus d'assister à tous les cours d'une section mais il semble bien que, conséquence de l'attractivité de la toute nouvelle École polytechnique, le cours de mathématiques ait été, avec le cours de dessin, celui auquel les élèves se montraient le plus

---

[4] DHOMBRES Jean, « L'affirmation du primat de la démarche analytique », dans Jean DHOMBRES (dir.), L'École normale de l'An III, *Leçons de mathématiques : édition annotée des cours de Laplace, Legendre et Monge*, Paris, Dunod, 1992, p. 11-43.

[5] BELHOSTE Bruno, *Les Sciences dans l'Enseignement secondaire français, Textes officiels. Tome I: 1789–1914*, Paris, Institut national de recherche pédagogique, 1995, p. 71-72.

[6] Voir EHRHARDT Caroline et d'ENFERT Renaud, « Les mathématiques dans les écoles centrales (1795-1802) : un chaînon entre l'Ancien Régime et le XIXe siècle » dans Christian GILAIN et Alexandre GUILBAUD (dir.), *Sciences mathématiques, 1750-1850, Continuités et ruptures*, Paris, CNRS Éditions, 2015, p. 155-180.

assidus[7]. L'admission à cette École est même, pour certains professeurs, la finalité de l'enseignement des mathématiques[8].

La gestion décentralisée des écoles centrales ne permet pas de se faire une idée générale de ce qu'y fut un enseignement des mathématiques que la loi n'avait pas souhaité uniformiser. Ainsi, dans la lettre que Lucien Bonaparte, ministre de l'Intérieur, adresse le 9 ventôse an 8 (1er mars 1800) aux professeurs de mathématiques des écoles centrales, il rappelle qu'il « serait sans doute contraire à la liberté qui doit régner dans la République des lettres […] d'exiger que l'enseignement fût uniforme dans toutes les Écoles publiques »[9]. Cependant un cours de calcul différentiel et intégral y trouva fréquemment place en deuxième année de la deuxième section. Dans la plupart des cas, les professeurs, choisis par des jurys départementaux, se référaient pour préparer leurs cours aux manuels de Bézout, que ce soit dans leur version originelle ou dans l'une des versions revues et modifiées qui paraîtront à partir de 1797. Ainsi, à une enquête ordonnée en l'an VII (1798-1799) par l'administration centrale afin de connaître l'état de l'enseignement dans les écoles centrales, 50 professeurs sur 69 déclaraient avoir utilisé les manuels de Bézout pour préparer leurs cours, 31 affirmant les avoir utilisés à l'exclusion de tout autre[10]. Mais ces enseignements ne resteront pas à l'écart des méthodes les plus récentes d'introduction au calcul différentiel et intégral comme le prouve la parution en 1801 des *Leçons élémentaires de mathématiques* de Tedenat, professeur à l'école centrale de l'Aveyron, ouvrage sur lequel nous reviendrons. Néanmoins, la circulaire de Lucien Bonaparte qui vise à « mettre l'enseignement des écoles centrales en contact avec celui de l'École polytechnique »[11], et qui présente aux professeurs le programme d'admission à l'École polytechnique, n'évoque pas le calcul différentiel et intégral.

---

[7] Voir VALLÉE Gustave, « L'École centrale de la Vienne (1795-1805) », *Annales révolutionnaires*, t.9, Paris, Armand Colin, 1917, p202-220, PALMER Robert R., « The Central Schools of the First French Republic: A Statistical survey », *Historical Reflexions*, Vol. 7, 1980, p. 223-247 et MÉROT Catherine, « La fréquentation des écoles centrales », *Bibliothèque de l'École des Chartes*, vol. 145, 1987, p. 407-426.
[8] Voir EHRHARDT Caroline et d'ENFERT Renaud, *op. cit.*
[9] BONAPARTE Lucien, cité dans BELHOSTE Bruno, *op. cit.,* p. 74. Bruno BELHOSTE précise que le véritable auteur de cette circulaire est Lacroix.
[10] Voir le chapitre V intitulé « Les cours de la seconde section » dans LAMANDÉ Pierre, « La Mutation de l'enseignement scientifique en France (1750-1810) et le rôle des écoles centrales : l'exemple de Nantes », *Sciences et Techniques en Perspective*, vol. 15, Université de Nantes, 1988-1989.
[11] BONAPARTE Lucien, *op. cit.*, p. 75.

Cette uniformisation de l'enseignement est réalisée avec la création des lycées par la loi du 11 floréal an X (1er mai 1802)[12]. Les 32 lycées qui vont succéder aux écoles centrales sont des internats dont la discipline s'apparente à celle d'une caserne[13]. Bien éloignés des idéaux révolutionnaires, réservés à une élite, situés à Paris pour les plus importants d'entre eux, l'enseignement qu'ils dispensent est centré à l'origine sur l'étude du latin et des mathématiques. Le cours des études classiques y est partagé en cinq années qui se terminent par la classe de première. Il est prévu, après la classe de première, deux années de mathématiques transcendantes. En première année figure « l'application du calcul différentiel à la mécanique et à la théorie des fluides »[14]. Le programme de mathématiques transcendantes est revu l'année suivante par une commission composée de Laplace, Monge et Lacroix. La première partie du *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral* de Lacroix doit être enseignée la première année, sous le titre : « Applications du calcul différentiel et intégral aux courbes ». La deuxième partie du *Traité élémentaire*, jusqu'à l'intégration des équations différentielles partielles exclusivement, est enseignée en deuxième années, sous le titre : « Application du calcul du calcul différentiel à la mécanique et aux fluides ». À l'occasion d'un nouveau plan d'études des lycées en 1809, le choix des livres pouvant être utilisé par les professeurs sera élargi.

Le 19 septembre 1809, un arrêté réorganise le plan d'études des lycées. Les classes de mathématiques transcendantes n'y figurent plus. Certaines subsisteront néanmoins dans quelques grands lycées jusqu'en 1815. La classe de mathématiques spéciales apparaît dans le plan d'études des lycées. Le programme de cette classe préparatoire au concours d'admission à l'École polytechnique ne comporte pas de calcul différentiel et intégral. Ce programme sera modifié par un arrêté du 10 février 1843[15]. Le calcul différentiel et intégral n'y figure toujours pas.

---

[12] Cette loi prévoit aussi l'existence d'écoles secondaires établies par les communes ou tenues par des maîtres particuliers. Ces écoles seront à l'origine d'un réseau de collèges qui dispenseront tout ou partie de l'enseignement des lycées.

[13] On pourra consulter, sur la création des lycées, PROST Antoine, *Histoire de l'enseignement en France, 1800-1967*, Paris, Armand Colin, 1968 et SAVOIE Philippe, « Construire un système d'instruction publique : de la création des lycées au monopole renforcé (1802-1814) », dans Jacques-Olivier BOURDON (dir.), *Napoléon et les lycées*, Paris, Nouveau Monde Éditions, 2004, p. 39-55.

[14] Arrêté du 19 frimaire an XI (10 décembre 1802) cité dans BELHOSTE Bruno, *op. cit.*, p. 78.

[15] Voir BELHOSTE Bruno, *op. cit*., le texte n° 36, « 10 févier 1843 : *Programmes de mathématiques élémentaires et de mathématiques spéciales* », p. 191-194.

Cependant, il faut remarquer que, même si les programmes de la classe de mathématiques spéciales de cette première moitié du XIXe siècle ne l'indiquent pas explicitement, la notion de polynôme dérivé y est enseignée pour répondre aux exigences du programme d'admission à l'École polytechnique[16]. Celui-ci prévoit explicitement, à partir de 1826[17], la méthode des racines égales pour la résolution des équations, c'est-à-dire la recherche des racines multiples d'un polynôme, et la résolution des équations numériques par approximations. L'emploi de la notion de polynôme dérivé permet de parvenir à ces résultats. Le même programme exige aussi la règle des signes de Descartes pour la résolution des équations, règle qui peut aussi s'obtenir par l'emploi du polynôme dérivé. Mais le polynôme dérivé pouvant être obtenu de façon purement algébrique, par développement du polynôme en série de Taylor, sa définition ne nécessite pas l'emploi du calcul différentiel. L'apparition, en 1850, dans la partie algèbre de ce même programme, de la résolution des équations numériques par la méthode de Newton se fait aussi sans introduction du calcul différentiel[18].

Le 10 mai 1806 est fondée l'Université impériale, corporation publique jouissant du monopole de l'enseignement, placée sous l'autorité d'un grand maître. En 1808 un décret crée les facultés de sciences et lettres, dites académiques car placées auprès du lycée principal du chef-lieu d'Académie[19]. Leur rôle essentiel est la collation des grades et diplômes indispensables pour accéder aux postes importants de la hiérarchie civile et militaire. L'organisation du baccalauréat est bientôt l'une des tâches majeures des enseignants en facultés. Les objectifs fixés par la loi ne seront pas remplis en province puisque, à la fin de

---

[16] Cette notion se trouve dans des manuels d'algèbre avant même 1826. On pourra voir REYNAUD Antoine-André-Louis, *Traité d'algèbre*, 5e éd., Paris, Vve Courcier, 1821, p. 275. Reynaud généralise même cette notion comme le coefficient de la première puissance de h dans le dans le développement en série de la fonction et l'applique aux fractions rationnelles et aux fonctions irrationnelles.

[17] Voir les « Programmes d'enseignement de l'École royale polytechnique arrêtés par le Conseil de perfectionnement pour l'année 1825-1826», *Rapports du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique*, CRH archives : X2B 10/1819-1830, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique, p. 4-5.

[18] Voir « Programmes d'enseignement de l'École royale polytechnique arrêtés par le Conseil de perfectionnement pour l'année 1849-1850», *Rapports du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique*, CRH archives : X2B 10/1839-1850, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique, p. 5-6.

[19] Sur la création de l'Université impériale et des facultés on pourra lire MAYEUR Françoise, *Histoire de l'enseignement et de l'éducation*, tome III, 2e éd., Paris, Perrin 2004, et MINOT Jacques, *Histoire des universités françaises*, Paris, Presses Universitaires de France, 1991.

l'Empire, sur le territoire français contemporain, on compte vingt-deux académies mais seulement dix facultés des sciences, dont trois seront supprimées à la Restauration[20].

Ce sont les programmes des classes de mathématiques transcendantes instaurées en 1802 qui correspondent aux premiers enseignements des facultés des sciences. Et le premier titulaire de la chaire de calcul différentiel et intégral à la faculté des sciences de Paris est le mieux placé pour enseigner le programme puisqu'il s'agit de Lacroix lui-même, comme nous l'avons déjà indiqué.

Les facultés, initialement pensées pour les élèves, où les professeurs avaient pour objectif de mettre en concordance leur enseignement avec l'actualité des connaissances, deviendront bien vite, après la Restauration, « des espaces publics où les enjeux politiques et sociaux devancent de loin les préoccupations scientifiques et pédagogiques »[21]. À côté d'un public mondain, sans doute plus rare aux cours de mathématiques, prennent place des personnes en quête de savoir et de « véritables » et rares étudiants dont l'assiduité demeure. Ainsi Cournot signale qu'en 1822, « dans les cours de mathématiques supérieures […] on se compte facilement, même à la Sorbonne »[22]. Et, une douzaine d'années plus tard, lorsque le même Cournot inaugure un cours de calcul différentiel à la faculté des sciences de Lyon tout juste rétablie, la salle est pleine, son auditoire poussant « la complaisance jusqu'à patienter un mois », à la suite de quoi il acheva son année, « comme cela devait être, avec une dizaine d'auditeurs »[23].

C'est également en 1808, qu'un décret refonde l'École normale, à laquelle sera ajouté le qualificatif de « supérieure » en 1843[24]. Le projet reste ambitieux car il prévoit d'établir un pensionnat pour 300 élèves « qui y seront formés à l'art d'enseigner les lettres et les sciences »[25] pour les lycées nouvellement créés, nombre qui ne sera jamais atteint. En 1810

---

[20] Après la suppression des facultés de Besançon, Lyon et Metz, il ne reste plus en 1815, en dehors de Paris, que les facultés des sciences de Caen, Dijon, Grenoble, Montpellier, Strasbourg et Toulouse. On pourra à ce sujet consulter le site du Laboratoire de Recherche Historique Rhône-Alpes, *Les professeurs des facultés des lettres et des sciences en France au XIXe siècle (1808-1880),* http://facultes19.ish-lyon.cnrs.fr/ .

[21] NOGUÈS Boris, « Élèves ou auditeurs? Le public des facultés de lettres et de sciences au XIXe siècle (1808-1878) », *Histoire de l'éducation*, N°. 120, Paris, INRP, 2008, p. 83.

[22] COURNOT Antoine-Augustin, *Souvenirs (1760-1860*), Paris, Hachette, 1913, p. 77.

[23] *Ibid.*, p. 156.

[24] Les indications qui suivent sur l'École normale sont tirées de DUPUY Paul, « L'École normale (1810-1883) », *Revue Internationale de l'Enseignement*, t. 6, 1883, p. 887-918, p. 937-955, p. 1057-1075.

[25] Article 110 du décret impérial du 17 mars 1810 cité par DUPUY Paul, *op. cit.*, p. 894.

quarante-cinq élèves y sont admis, effectif qui ne sera guère dépassé par la suite durant le XIXe siècle. Les élèves se destinant à l'enseignement des sciences sont à peine vingtaine. La durée initiale des études est de deux ans. Elle passera à trois ans en 1815, la première année étant alors commune à tous les élèves. Les élèves qui souhaitent enseigner les sciences mathématiques et physiques suivent d'abord des cours à l'École polytechnique puis, à partir de 1811, à la Faculté des sciences de Paris. Les élèves doivent « prendre leurs grades » dans les facultés, c'est-à-dire obtenir le baccalauréat en fin de première année, et la licence la deuxième année.

La période 1822-1826 voit la suppression de l'École normale dans une période de réaction ultra-catholique. Des écoles normales partielles sont créées dès 1821 auprès des collèges royaux des chefs-lieux d'Académie. Ces écoles laissant à désirer, il est prévu, en 1826, des écoles préparatoires à l'issue desquelles les élèves pourront présenter les premiers concours des agrégations de lettres, grammaire, et sciences, qui existent depuis 1821[26]. Une seule verra le jour, à Louis-Le-Grand, avant le rétablissement de l'École normale en 1830. Les élèves de cette école préparatoire suivent les cours des facultés. En section sciences, chacun dispose de trois ouvrages de mathématiques : deux d'algèbre, un de Antoine-André-Louis Reynaud et un de Pierre Louis Marie Bourdon, et le *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral* de Lacroix[27]. Jusqu'en 1850 ce sont donc Lacroix, puis Lefébure de Fourcy, qui lui succède en 1843, qui initient les élèves de l'École normale au calcul différentiel et intégral. Il faut ajouter à ces professeurs de la Sorbonne les maîtres chargés de conférences sur le calcul différentiel à l'École elle-même. Leurs conceptions ont pu marquer plus durablement leurs élèves que celles des professeurs de la faculté. C'est par exemple le cas de Duhamel, qui y enseigne de 1841 à 1849. Son enseignement de calcul différentiel et intégral sera la référence affichée du *Cours de calcul infinitésimal* de Jules Houël en 1871-1872[28].

[26] Les premiers concours de l'agrégation datent de 1766, après l'expulsion des jésuites de 1862. Le statut d'agrégé est créé par décret impérial en 1808. Jusqu'en 1821 les agrégés sont nommés, par arrêté, sur recommandation du recteur d'Académie. Voir http://rhe.ish-lyon.cnrs.fr/?q=agregsecondaire.

[27] *Maîtres & élèves, célébrités & savants, l'École normale supérieure, 1794-1994*, Paris, Archives nationales, 1994, p. 42.

[28] D'après PLANTADE François dont la thèse sur Jules Houël, préparée à l'Université de Nantes sous la direction d'Évelyne BARBIN, doit être soutenue en avril 2018.

2 – Un enseignement dans les classes centrales : Les *Leçons élémentaires de mathématiques* de Tedenat (1801)

L'ouvrage de Tedenat présente l'intérêt, comme nous l'avons déjà dit, d'avoir été écrit par un professeur de mathématiques d'école centrale. Né en 1756, à Saint Geniez, dans l'Aveyron, Tedenat étudie au collège royal de Rodez puis à Paris[29]. Il est l'auteur de mémoires qui seront lus à l'Académie des Sciences où il se présente et obtient quelques voix. À la Révolution il quitte Paris pour Heidelberg où il est agrégé à l'université de cette ville. De retour à Paris en 1792, il devient membre de la Société philomatique et est nommé chef des conférences mathématiques de l'École normale lors de la fondation de cette école. Il y côtoie donc Laplace, Lagrange, Monge, mais aussi probablement les autres mathématiciens-enseignants que nous avons évoqué précédemment, comme Prony, Lacroix, etc. Lors de la création des écoles centrales il choisit la chaire de mathématiques de l'école centrale de l'Aveyron. Il publie des *Leçons élémentaires d'arithmétique et d'algèbre* et des *Leçons élémentaires de géométrie et de trigonométrie* en l'an VII (1798-1799). En 1801 il publie un ouvrage en deux tomes qu'il désigne comme la deuxième partie de ses *Leçons élémentaires de mathématiques*, *Contenant un Supplément aux Éléments d'Algèbre, l'Application de l'Algèbre à la Géométrie, et les principes du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*.

Dans « l'Avertissement » à ces *Leçons élémentaires de mathématiques*, il annonce avoir voulu faire un ouvrage élémentaire qui renfermerait les théories nouvelles puisées dans « les ouvrages d'Euler, de Dalembert, de Lagrange, de Laplace, de cousin, de Legendre, de Bossut, de Lacroix … &c. dans les leçons de l'École Normale, dans les cahiers de l'École Polytechnique »[30]. Cet objectif, qui s'inscrit parfaitement dans ce moment où l'histoire des mathématiques croise le renouvellement révolutionnaire du système éducatif, est celui d'un texte destiné selon Tedenat à

> préparer les élèves qui fréquentent les Ecoles Centrales, à étudier avec fruit, dans les livres originaux, les théories dont je ne leur présente que l'analyse, et dans

[29] Cette brève notice sur Tedenat est tirée de la *Biographie universelle et portative des contemporains*, t. 5, Paris, Levrault, 1834 et de *La France littéraire ou dictionnaire bibliographique*, t. 9, Paris, Didot Frères, 1838. Tedenat qui était aussi docteur ès-lettres sera le premier titulaire de la chaire de philosophie de la Faculté des lettres de Nîmes, en 1809.

[30] TEDENAT Pierre, *Leçons élémentaires de mathématiques*, t. 1, Paris, Duprat, 1801, p. V.

> laquelle je n'ai souvent fait que rétablir les calculs intermédiaires nécessaires pour l'intelligence du texte.[31]

Cet ouvrage, qui veut rendre abordables les textes originaux, est destiné aux élèves qui préparent les examens d'admission à l'École polytechnique, « conformément aux avis du Ministre de l'Intérieur, dans sa circulaire du 9 ventôse an 8 ». Or ces examens, ainsi que nous l'avons vu, ne prévoient pas d'initiation au calcul différentiel, ni à la théorie des fonctions analytiques que Tedenat va proposer.

La proximité entre ces *Leçons élémentaires de mathématiques* et le *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral* de Lacroix est signalée par l'auteur, que ce soit pour les matières traitées ou les méthodes. Mais, si Tedenat affirme avoir pu consulter cet ouvrage de Lacroix, il se plaint surtout, en raison de son éloignement de Paris, d'être « dépourvu de la plus grande partie des livres originaux, privé du conseil et des avis des personnes éclairées »[32].

C'est dans le supplément d'algèbre du premier tome, dans une section intitulée « Du développement en série des fonctions algébriques » que Tedenat aborde la théorie des fonctions analytiques de Lagrange, après avoir proposé une démonstration du binôme de Newton pour un exposant non entier. Dans la cinquantaine de pages qu'il consacre à ce sujet nous retrouvons la notion de fonction introduite en reprenant, comme Lagrange le faisait, la définition d'Euler de l'*Introductio in analysin infinitorum,* la démonstration du théorème de Lagrange sur le développement en série d'une fonction, l'application de ce principe aux fonctions usuelles, algébriques, logarithmiques et circulaires ainsi que le développement en série des fonctions de deux variables. Afin de rendre l'exposé plus abordable, il y détaille les explications, et les exemples qu'il fournit sont plus nombreux que dans la *Théorie des fonctions analytiques*, ouvrage auquel il se réfère. Enfin la méthode lagrangienne de recherche des tangentes et du cercle osculateur est employée dans la seconde partie de l'ouvrage intitulée « Application de l'Algèbre à la Géométrie ». Fidèle à l'esprit dans lequel Lagrange a écrit la théorie des fonctions analytiques, ce premier tome des *Leçons élémentaires de mathématiques* n'emploie ni le vocabulaire ni les notations du calcul différentiel.

---

[31] *Ibid.*, p. IX.
[32] *Ibid.*, p. IX.

Il est intéressant de remarquer que les premiers éléments de la théorie des fonctions analytiques sont abordés dans un ouvrage dont ce n'est pas l'objectif unique. Il s'agit avant tout d'étudier les suppléments d'algèbre et l'application de l'algèbre à la géométrie nécessaires aux élèves pour préparer le concours d'admission à l'École polytechnique. Ces connaissances inscrites au programme occupent l'essentiel du texte. L'ouvrage de Tedenat semble inédit à cette époque en ce sens où il incorpore, à des mathématiques considérées comme élémentaires, l'introduction d'une théorie de mathématiques dites supérieures. Mais, ce faisant, l'auteur pense être fidèle à l'esprit de Lagrange, car, écrit-il, ce dernier « a fixé les vrais élémens de cette analyse en liant immédiatement les nouveaux Calculs à l'Algèbre, et en les faisant dépendre uniquement du développement en série des fonctions analytiques »[33].

Ce n'est que dans le second tome qu'il est question de calcul différentiel et intégral, et ce dans l'optique de montrer que le calcul différentiel de Leibniz, les fluxions de Newton, les quantités évanouissantes d'Euler, la théorie des limites de d'Alembert et la théorie des fonctions analytiques de Lagrange sont des méthodes qui ne comportent pas de différences essentielles. Il convient de s'arrêter un peu plus longuement sur ce second tome. Comme Lacroix dans son *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, mais à l'intention d'un public moins savant, Tedenat essaye, à la charnière des XVIII^e^ et XIX^e^ siècles, de relier ces différentes approches théoriques.

Le second tome commence par une étude du calcul aux différences finies avant d'aborder le calcul différentiel, placé d'emblée sous le signe de la géométrie en considérant toute équation algébrique entre deux variables comme l'équation d'une courbe. Les notations Δx et Δy sont tout simplement remplacées par dx et dy pour désigner que ces accroissements sont infiniment petits, c'est-à-dire moindres que toute grandeur assignable, puisqu'on peut toujours supposer deux points d'une courbe infiniment près l'un de l'autre, idée précisée à l'occasion de la différentiation de l'équation $y = mx - b$. Cette équation d'une droite est telle qu'en prenant « l'ordonnée immédiatement consécutive »[34] on a : $y' = mx' - b$. Et Tedenat obtient, en les retranchant : $dy = mdx$.

[33] TEDENAT Pierre, *Leçons élémentaires de mathématiques*, t. 2, Paris, Duprat, 1801, p. 5.
[34] *Ibid.*, p.50.

Tedenat fait suivre cette introduction au calcul différentiel des critiques habituellement faites à l'encontre de ce calcul dont, écrit-il, les principes « n'ont pas le degré d'évidence qui caractérise les vérités mathématiques »[35]. Il classe ces critiques en quatre points. Tout d'abord, les infiniment petits sont présentés comme des quantités réelles alors que ce ne sont que des limites de quantités finies. De plus, on y suppose plusieurs ordres d'infiniment petits, supposition « impossible à concevoir ». Ensuite, les différentielles secondes sont considérées comme des infiniment petits du second ordre alors que, étant des différences entre des différentielles premières, rien n'empêche de les concevoir comme des infiniment petits du premier ordre. Enfin, en négligeant dans les calculs des infiniment petits d'ordre supérieur, on donne lieu à des erreurs qui sont compensées par la manière d'appliquer les calculs à la solution des questions. Le calcul différentiel n'étant donc qu'un « calcul d'erreurs compensées », la méthode des limites, qu'il aborde ensuite, va permettre de « l'asseoir sur des principes plus solides »[36] répondant mieux aux critères exigés des vérités mathématiques.

« Pour faire sentir l'analogie […] avec le calcul différentiel »[37], la méthode des limites est appliquée à la recherche des tangentes. La considération de la tangente et d'une sécante à une courbe permet à Tedenat d'affirmer que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a pour limite $\frac{y}{PT}$, PT étant la sous-tangente[38].

Pour obtenir de façon générale la limite de ce rapport il faut, écrit-il, considérant la différence finie de l'équation de la courbe, « laisser dans un membre le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, qu'on changera en $\frac{dy}{dx}$ pour avertir que c'est la limite ; égaler ensuite à 0 tous les termes qui seront multipliés par Δx ou Δy ; les termes restans seront l'expression de $\frac{dy}{dx}$ en termes finis »[39]. Cette méthode est illustrée par l'exemple de la parabole d'équation $y^2 = px$. Obtenant la relation $\frac{dy}{dx} = \frac{p}{2y}$, il déduit $2ydy = pdx$, ce qui montre que « la méthode des limites mène au même résultat que le calcul différentiel »[40].

---

[35] *Ibid.*, p.83.
[36] *Ibid.*, p.84.
[37] *Ibid.*, p.84.
[38] Les notations sont celles de la figure 2, chapitre 1.
[39] TEDENAT Pierre, *op. cit.*, p. 86.
[40] *Ibid.*, p. 87.

Nous retrouvons, comme nous l'avons vu chez Fourier, le problème du passage d'une notation globale, $\frac{dy}{dx}$ à une individuation des notations dy et dx. Tedenat n'évoque pas non plus la question de l'identité de ces notations dans la méthode des limites avec les infiniment petits du calcul différentiel.

La méthode des limites présente donc l'avantage, selon Tedenat, de ne pas négliger de quantités infiniment petites par rapport aux quantités considérées mais uniquement des quantités qui sont véritablement zéro. De même, la méthode des limites ne considère jamais des infiniment petits d'ordre supérieur car « d^2y doit toujours être divisée par dx^2 : or $\frac{d^2y}{dx^2}$ désigne une quantité finie »[41]. Par la suite, il démontre le « théorème de Taylor » par la méthode des limites, en partant de l'expression aux différences finies de l'accroissement d'une fonction.

La méthode des limites est, comme le calcul différentiel, suivie des critiques qui lui sont adressées. D'une part, il expose la critique émise par Lagrange de la sous-tangente qui n'est pas limite de la sous-sécante. D'autre part, rappelle Tedenat, « pour déterminer la limite, ou dernier rapport de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, on regarde l'accroissement de x et y comme nuls, ce qui réduit leur rapport à l'expression vague de $\frac{0}{0}$ »[42]. Et bien qu'il propose quelques exemples pour convaincre que ce rapport n'est pas absurde, il conclut que, malgré l'exactitude de la méthode d'Euler qui considère les accroissements

> non avant qu'ils s'évanouissent, non après qu'ils sont évanouis, mais à l'instant qu'ils s'évanouissent, […] on n'en conçoit pas mieux la nature de ces quantités évanouissantes, auxquelles on assigne toujours en quelque sorte une place entre l'existence et le néant.[43]

La méthode des fluxions de Newton est traitée dans un court paragraphe. Considérant les quantités mathématiques comme engendrées par le mouvement pour éviter l'emploi des infiniment petits, cette méthode s'accorde au fond, selon Tedenat, avec le calcul différentiel et est sujette aux mêmes difficultés.

[41] *Ibid.*, p. 88.
[42] *Ibid.*, p. 96.
[43] *Ibid.*, p. 99.

Il se propose d'établir ensuite l'identité entre méthode des limites, calcul différentiel, méthode des fluxions et théorie des fonctions analytiques puisque « toutes les différentes méthodes dont nous venons de parler n'ont d'autre but que de donner le moyen d'obtenir, séparément, les premiers termes du développement en série d'une fonction »[44].

Dans le développement en série suivant la théorie lagrangienne d'une fonction F, il ne considère que le premier terme, c'est-à-dire $\Delta y = \Delta x F'.x$, dont il affirme qu'il peut être rendu plus grand que la somme de tous les autres par un choix convenable de Δx. Il l'appelle différentielle car il n'est qu'une partie de la différence. Il substitue pour cette raison la notation d à la notation Δ. Obtenant ainsi $\frac{dy}{dx} = F'.x$, il écrit qu'il est « aisé de se convaincre » que calcul différentiel et théorie des fonctions analytiques donnent des résultats identiques, les deux prescrivant de remplacer x soit par $x + dx$, soit par $x + \Delta x$, et de développer ensuite jusqu'au second terme. Pour convaincre sans doute plus sûrement son lecteur, Tedenat donne l'exemple de la fonction $y = x^n$ pour laquelle le calcul différentiel donne $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$, soit, comme attendu, $\frac{dy}{dx} = F'.x$ avec l'expression de $F'.x$ donnée par la théorie lagrangienne.

Poursuivant son raisonnement aux dérivées successives, il démontre que « la formule donnée par la théorie des fonctions analytiques pour le développement des fonctions en série est absolument la même que le théorème de Taylor »[45].

Ouvrage d'un auteur convaincu de la supériorité de la théorie des fonctions analytiques en ce qui concerne la rigueur mathématique, les *Leçons élémentaires de mathématiques* réaffirment cependant l'intérêt pratique du calcul différentiel dont l'objet est de donner « les moyens abrégés de trouver dans tous les cas les valeurs de ces fonctions dérivées »[46]. Cet avantage du calcul différentiel est rappelé plus loin, à l'occasion du développement en série des fonctions de plusieurs variables.

Il serait encore une fois audacieux de déduire de l'examen de ce manuel ce que fut l'enseignement de Tedenat. Il semble malgré tout raisonnable de supposer que l'enseignement des fonctions analytiques donné dans le premier tome ait été dispensé à

[44] *Ibid.*, p. 99.
[45] *Ibid.*, p. 104.
[46] *Ibid.*, p. 104.

certains élèves de l'école centrale de l'Aveyron, en particulier à ceux qui préparaient le concours d'admission à l'École polytechnique.

L'ouvrage s'adressait aussi aux autres professeurs d'écoles centrales. Nous ne disposons pas d'éléments pour l'évaluer l'impact du manuel de Tedenat sur ces professeurs. Il faut malgré tout rappeler qu'il avait été maître de conférences à l'École normale, puis qu'il sera Recteur de l'Académie de Nîmes à partir de 1815. Il est l'un des auteurs cités par Louis Puissant, ancien élève de l'École normale, professeur de l'école centrale du Lot-et-Garonne, qui publie en 1801 un *Recueil de diverses propositions de géométrie*[47]. À partir de 1812, Tedenat donnera une vingtaine de contributions aux *Annales de mathématiques pures et appliquées*[48]. Tedenat était donc un nom connu des mathématiciens et des enseignants de mathématiques dans les premières décennies du XIX^{e} siècle.

Enfin, paraissant chez l'éditeur de Lacroix, cet ouvrage s'adressait sans doute aussi à la communauté des mathématiciens parisiens. Pour Tedenat qui se plaignait de son éloignement dans une petite ville de province, et était depuis 1796 membre associé non résidant de la Classe des sciences de l'Institut, ce livre était probablement une occasion de se rappeler aux membres de cette communauté.

3 – Les premiers enseignements en classes préparatoire (1809-1811) : Francoeur, Bourguet, Garnier

À la fin de la décennie 1800-1810, en dehors de certaines écoles professionnelles comme les écoles d'artillerie, l'enseignement des premiers éléments du calcul différentiel est donc officiellement cantonné à l'École polytechnique, aux quelques facultés des sciences alors créées, et aux classes de mathématiques transcendantes qui ont subsisté dans certains lycées durant quelques années. Le succès de l'École polytechnique, et, probablement, celui espéré de l'École normale avec le dimensionnement prévu par le décret de 1808, vont susciter la parution de cours de mathématiques incluant les premiers éléments de calcul différentiel.

---

[47] Voir MOUSSARD Guillaume, *Les notions de problèmes et de méthodes dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie en France (1794-1891*), Thèse de doctorat, LMJL, Université de Nantes, Nantes, 2015, p. 156.

[48] L'une d'elles est analysée dans BARBIN Évelyne, « Historicité de la notion d'évidence en géométrie. Entre évidence visuelle et évidence manipulatoire », *Historia e Educacao Matematica*, Université de Braga, 1996, p. 124-135.

Le premier que nous identifions, dès 1809, est le *Cours complet de mathématiques pures* de Francœur dont nous avons vu qu'il avait été répétiteur d'analyse auprès de Lacroix. Élève de la première promotion de l'École, Francœur[49] avait fait partie, en 1795, des vingt-cinq chefs de brigade élus par leurs pairs à l'initiative de Monge, chargés de répéter auprès de leurs camarades la leçon magistrale et de donner des explications complémentaires. Recruté comme répétiteur d'analyse en 1798, il fut à partir de 1801 « assez souvent chargé de remplacer Lacroix »[50]. À partir de 1803 il enseigne à l'école centrale de la rue Saint-Antoine puis, à partir de 1805, il est chargé d'enseigner les mathématiques transcendantes au lycée Charlemagne, nouveau nom de l'école centrale. En 1804, il est nommé examinateur d'admission à l'École polytechnique. En 1808, il devient le premier titulaire de la chaire d'algèbre supérieure à la Faculté des sciences de Paris.

Son cours en deux volumes[51] est, selon la page de garde, un « ouvrage destiné aux élèves des Écoles Normale et Polytechnique et aux candidats qui se préparent à y être admis »[52]. Francœur précise les notions qui ne sont pas exigées des candidats. Elles occupent l'essentiel du deuxième tome, et comportent notamment les 250 pages de calcul différentiel et intégral qui termine ce tome. Rien ne permet donc d'affirmer que cet ouvrage ait été le support d'une initiation au calcul différentiel pour les candidats à ces concours. Le double public visé, candidats et lauréats aux concours, amène cependant à se poser la question. En effet, les concours qui éliminent une forte proportion des candidats instaurent une très nette ligne de démarcation entre candidats et lauréats. Nous ne retrouvons pas cette démarcation dans l'ouvrage. La ligne de partage entre notions au programme d'admission et notions enseignées dans les deux Écoles ne correspond pas au partage du cours en deux tomes mais traverse chacun d'entre eux, même si le premier tome est surtout destiné aux candidats et le second aux lauréats.

[49] Les informations sur Francoeur sont tirées de CALLANDREAU Pierre , « Francoeur (1773-1849) » dans *École Polytechnique, Livre du centenaire, 1794-1894, Tome I, L'École et la Science*, Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1895, p. 223-335 et de l'entrée « Francoeur (Louis-Benjamin) » dans la *Biographie universelle des musiciens*, t. 4, Bruxelles, Méline, Cans et Compagnie, 1837, p. 178 (Francoeur était fils de musicien et lui-même musicien).

[50] *Ibid.*, p. 224.

[51] Le cours dédié à Alexandre Premier, empereur de Russie, pour des raisons que nous n'avons pu identifier dans la biographie de Francoeur.

[52] FRANCOEUR Louis-Benjamin, *Cours complet de Mathématiques pures*, Paris, Bernard et Didot 1809.

La question de savoir si l'ouvrage a servi ou non de support à un enseignement ne se pose pas avec les *Traités élémentaires de calcul différentiel et de calcul intégral* que fait paraître en 1810 Jean-Baptiste-d'Estienne du Bourguet, professeur de mathématiques spéciales au Lycée Impérial, nom du lycée Louis-Le-Grand sous l'Empire[53]. Cet ancien capitaine de Vaisseau né en 1760, connu à l'époque pour un ouvrage intitulé *L'art du calcul astronomique des navigateurs* publié en 1801, annonce dans le « Discours préliminaire » à ses traités avoir exposé à ses élèves la démonstration de Lagrange du *Calcul des fonctions* sur le développement d'une fonction en série de Taylor. Les difficultés rencontrées par les élèves pour comprendre cette démonstration l'avaient incité à en donner sa propre version dans cet « *Ouvrage mis à la portée des Commençans* »[54] comme l'annonce la page de garde.

La question ne se pose pas non plus à propos des *Leçons de calcul différentiel* de Garnier[55] qui paraît en 1811. La page de garde présente l'auteur comme « Ancien professeur à l'École polytechnique, Docteur ès-Sciences, Instituteur à Paris »[56]. Ce dernier titre ne correspond à aucune des fonctions officielles de l'enseignement dans les lycées qui distinguait alors les professeurs de mathématiques transcendantes, les professeurs de mathématiques spéciales, les professeurs de mathématiques élémentaires et les professeurs de mathématiques pour les deux années d'humanités[57]. Il semble plus probable que Garnier désigne sous ce titre d'instituteur sa fonction à la pension qu'il tenait au Gros-Caillou et qui fut l'un des plus importants établissements privés parisiens qui, sous l'Empire, était spécialisé dans la préparation au concours d'admission à l'École polytechnique[58]. Dans le discours préliminaire Garnier explique que l'ouvrage est le fruit d'un travail de révision de son cours à l'École polytechnique « complетté […] à l'occasion d'un cours sur cette matière [qu'il] fit l'année dernière à plusieurs de [ses] élèves »[59].

---

[53] Sur du Bourguet, voir GERINI Christian et VERDIER Norbert, « Enseigner les mathématiques au XIXème siècle. Portraits d'acteurs : du Bourguet, Miquel et l'abbé Aoust », *Repères-IREM*, n° 83, 2011, p. 57-74.
[54] BOURGUET (du) Jean-Baptiste-d'Estienne, *Traités élémentaires de calcul différentiel et de calcul intégral*, Paris, Courcier, 1810.
[55] Sur Garnier, voir la « Notice sur Jean Guillaume GARNIER », http://www.academieroyale.be/academie/documents/GARNIERJeanGuillaumeARB_184158077.pdf
[56] GARNIER Jean Guillaume, *Leçons de calcul différentiel*, 3e éd., Paris, Vve Courcier, 1811.
[57] Voir l'arrêté du 19 septembre 1809 dans BELHOSTE Bruno, *op. cit.*, p. 83-86
[58] BELHOSTE Bruno, « La préparation aux grandes écoles scientifiques au XIXe siècle : établissements publics et institutions privées », *Histoire de l'éducation*, No. 90, 2001, p. 114.
[59] GARNIER Jean-Guillaume, *op. cit.*, p. V.

Rappelons qu'à partir de 1810, la querelle sur la méthode d'introduction du calcul différentiel et intégral se déroule à l'École polytechnique. Les plaintes de l'École du Génie surviennent en 1810 et la décision de substituer les infiniment petits à la méthode des limites est prise en 1811.

3 – 1 Le *Cours complet de mathématiques pures* de Francœur (1809)

Comme nous l'avons indiqué, le calcul différentiel et le calcul intégral se situent dans le deuxième tome du cours de Francœur. Ils sont l'objet des Livres VII et VIII, ce tome commençant par les Livres V, « Algèbre transcendante » et VI, « Analyse appliquée aux trois dimensions ».

Francoeur définit une fonction dans le Livre V, pour la résolution des équations. Il adopte la première définition d'Euler et donne la classification eulérienne des fonctions. La dérivée est définie au début du Livre VII comme la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable. Mais, bien qu'il soit un ancien répétiteur de Lacroix, qu'il a suppléé à de nombreuses reprises, l'emploi de la méthode des limites est pratiquement réduit chez lui à cette définition de la dérivée, et au problème de la quadrature des courbes qu'il résout d'une façon semblable à celle que nous avons vu employée chez Lacroix. Le vocabulaire et la notation lagrangiennes des fonctions dérivées y ont une place essentielle. Le théorème de Taylor, s'il n'est pas premier, est établi rapidement après la différentiation des fonctions algébriques et lui sert à dériver les fonctions exponentielle, logarithme et circulaires.

Le cours de Francœur est, comme nous l'avons indiqué au chapitre précédent, marqué par le questionnement d'Ampère sur la dérivabilité d'une fonction. Le calcul différentiel s'ouvre par la démonstration de la dérivabilité d'une fonction qui « ne devienne ni infinie, ni brusquement interrompue dans l'intervalle depuis $x = a$ jusqu'à $x = a + h$ »[60]. La démonstration est, selon Francœur, empruntée au cours que fit Ampère à l'École polytechnique en 1808, « qu'il a bien voulu [lui] communiquer, avec les modifications que Binet aîné y a introduites »[61]. En fait, des modifications de Binet, nous retrouvons la notation indicielle qui rend la démonstration plus lisible mais pas la notion de fonction monotone. Le texte ne permet pas non plus de savoir si Ampère avait déjà intégré ces modifications, dues à Binet, ou si c'est Francœur lui-même qui

[60] FRANCOEUR Louis-Benjamin, *Cours complet de Mathématiques pures*, tome II, Paris, Bernard et Didot 1809, p. 207.
[61] *Ibid.*, p. 207.

choisit de les introduire. Outre cette question cruciale de la dérivabilité d'une fonction, la démonstration que donne Francœur du théorème de Taylor est annoncée comme également due à Ampère.

La notion de différentielle et son emploi marquent aussi les différences de conception entre Lacroix et Francœur. Pour ce dernier, une différentielle est « une expression synonyme de dérivée, qui n'en diffère que par la notation qu'elle exige », cette notation $\frac{dy}{dx}$ « dans laquelle le diviseur dx est = 1 indiquera que dans le calcul la variable principale est x »[62]. C'est dans ce cadre qu'il différentie ensuite les fonctions implicites et les fonctions de plusieurs variables, les notations dy et dx n'étant jamais considérées individuellement pour les fonctions d'une seule variable.

La recherche des extrema utilise le développement de la fonction en série de Taylor et le *principe de troncature*. Ce développement en série sert aussi pour la recherche des tangentes, dans une approche lagrangienne, sans cependant aborder la théorie de l'osculation. Il l'utilise aussi pour introduire le calcul intégral qui est chez les auteurs de cette époque, l'inverse du calcul différentiel.

Bien que fortement inspiré par les conceptions lagrangiennes, la méthode des infiniment petits est cependant loin d'être absente du *Cours de mathématiques pures*. Francœur n'y consacre tout d'abord que quatre pages, soit la toute dernière section du Livre VII sur le calcul différentiel, intitulée « De la méthode infinitésimale ». Il commence par revenir sur le calcul de l'aire du cercle effectué dans le premier tome. Il y avait indiqué, en note de bas de page, qu'on pouvait, dans ce calcul, négliger des quantités appelées à disparaître ensuite[63], ce qui était le fondement de la méthode des infiniment petits, et il renvoyait aux *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* de Carnot. Cette méthode, écrit-il alors, qui permet d'avance de dégager les calculs des infiniment petits du deuxième ordre, est « précieuse » pour abréger les calculs, « pour graver des résultats dans la mémoire, mais encore pour des spéculations analytiques compliquées »[64]. Elle peut même, selon lui, être présentée « avec la

---

[62] *Ibid.*, p. 214.

[63] En l'occurrence, dans ce calcul qu'il réalisait par la méthode des limites, il s'agissait de l'excès de l'aire du cercle sur celle du polygone inscrit et de sa différence avec le périmètre du polygone (voir FRANCOEUR Louis-Benjamin, *Cours complet de Mathématiques pures*, tome I, Paris, Bernard et Didot 1809, p. 251).

[64] FRANCOEUR Louis-Benjamin, *Cours complet de Mathématiques pures*, tome II, Paris, Bernard et Didot 1809, p. 328.

rigueur géométrique, en prouvant que les quantités omises sont au rang de celles qui doivent être ôtées »[65]. Il l'applique ensuite brièvement aux problèmes de recherche des tangentes et des plans tangents, à la rectification et à la quadrature des courbes, aux coordonnées polaires et aux cubatures.

Il revient à nouveau sur la méthode infinitésimale dans le Livre VIII consacré au calcul intégral, après avoir étudié les différentes techniques d'intégration. Dans la section intitulée « Des quadratures et rectifications », après avoir étudié les cas des coniques et de la cycloïde, il écrit :

> Quoique la méthode infinitésimale n'ait pas le caractère de l'évidence, cependant comme on peut toujours la remplacer par une analyse rigoureuse, dont elle n'est, pour ainsi dire, que l'abrégé, on ne doit pas faire difficulté de l'employer. C'est même ce que nous ferons dorénavant, autant pour la facilité qu'elle offre pour l'introduction des limites dans le calcul, que parce qu'elle est usitée dans les traités les plus célèbres, tels que les Mécaniques céleste et analytique, etc… et qu'il convient d'y être très exercé.[66]

Peut-on dire que ce paragraphe nous donne la clef de la composition du cours de Francœur ? Son introduction du calcul différentiel conjugue à la fois l'emploi de la méthode des limites dont il a pu constater, comme répétiteur de Lacroix, l'intérêt pour l'enseignement à des « commençants », l'utilisation de la notion de fonction dérivée, et les derniers apports théoriques d'Ampère aux questions fondamentales. Mais cette rigueur due aux « commençants » ne doit pas empêcher l'emploi de la méthode infinitésimale pour les applications du calcul différentiel et intégral, méthode simple et pefficace dont il faut d'autant moins se priver que les plus grands eux-mêmes l'utilisent, comme Laplace dans sa *Mécanique céleste,* et même Lagrange dans sa *Mécanique analytique*.

Nous avons déjà évoqué le succès du cours de Francœur qui, outre ses quatre éditions françaises en une trentaine d'années, connaîtra une cinquième édition en Belgique en 1837 et sera traduit en Espagnol en 1809, en Anglais en 1829, en Italien en 1840 et réédité dans cette langue en 1849, l'année du décès de l'auteur. Le fait de disposer en deux volumes d'un cours qui regroupe tout ce qui à l'époque était appelé mathématiques élémentaires, complété par ce qui correspondait approximativement au programme de première année d'analyse à

---

[65] *Ibid.,* p. 328.
[66] *Ibid.*, p. 374.

l'École polytechnique a probablement contribué à ce succès. De plus, Francoeur a su adapter les éditions successives, non seulement aux programmes du concours d'admission à l'École polytechnique, mais aussi au cours d'analyse de l'École. Ainsi, par exemple, dans la troisième édition, en 1828, les deux Livres « Calcul différentiel » et « Calcul intégral » sont regroupés en un seul. Enfin, le grand nombre d'exemples proposés participe lui aussi de ce succès. La recherche des maxima et des minima est suivie de quatorze exemples, celle des tangentes de six exemples, de même pour la recherche des points multiples, etc. C'était donc un véritable outil pour s'exercer aux mathématiques que Francoeur mettait entre les mains des enseignants et des élèves.

3 – 2 Les *Traités élémentaires de calcul différentiel et de calcul intégral* de Bourguet (1810)

La conception lagrangienne qui préside à l'écriture de ces traités est affichée dans le sous-titre qui renvoie à la *Théorie des fonctions analytiques* puisque les traités sont annoncés comme *indépendans de toutes notions de quantités infinitésimales et de limites*[67]. Un « Discours préliminaire » d'une vingtaine de pages situe ces traités dans la lignée des textes, étudiés au premier chapitre, qui posaient la question des fondements du calcul différentiel. Bourguet ne reprend pas l'historique de ce calcul mais justifie longuement ses choix théoriques dans un nouveau cadre, à la fois institutionnel à la suite des réformes de la Révolution et de l'Empire, conceptuel avec les travaux de Lagrange, et pédagogique avec une quinzaine d'années de recul sur un enseignement de l'analyse destiné à un public élargi et la publication de nouveaux manuels.

Pour Bourguet, les quantités infinitésimales n'existent pas. En effet, si on regarde une quantité infinie comme plus grande que toute quantité donnée, on ne peut, selon lui, dire avec Leibniz et les frères Bernoulli qu'une quantité infinitésimale doit être considérée « comme la troisième proportionnelle géométrique à la quantité infinie et à la finie »[68]. Car, pour lui, l'infini ne peut avoir son opposé que dans le « zéro absolu », et non dans une quantité qui, « si elle n'est pas rigoureusement le zéro absolu, est évidemment infiniment plus grande que ce

[67] BOURGUET (du) Jean-Baptiste-d'Estienne, *Traités élémentaires de calcul différentiel et de calcul intégral*, t. 1 et 2, Paris, Courcier, 1810.
[68] *Ibid.*, p. VI. C'est-à-dire que la quantité infinie est à la quantité finie come la quantité finie est à la quantité infinitésimale.

zéro »[69]. Ce raisonnement conduirait, « suivant la loi de symétrie qui existe dans les grandeurs de continuité »[70] à ce qu'une quantité infiniment petite ait pour opposée une quantité finie. Enfin la considération des infiniment petits conduit à écrire des relations comme $x \pm dx = x$ qui n'est vraie que si dx est le zéro absolu.

À la notion de limite, il oppose la critique suivant laquelle une limite est une grandeur constante que la variable ne peut jamais atteindre rigoureusement. Nous retrouvons le contre-exemple donné par Lagrange sur la sous-tangente qui ne peut être limite des sous-sécantes et Bourguet rajoute que, dans le cas où $u = ax^m$, « il est, suivant [lui], notoirement absurde de considérer max^{m-1} comme la limite de $\frac{u'-u}{h}$ [...] car dans le cas $h = 0$, la quantité $\frac{u'-u}{h}$ est rigoureusement égale à max^{m-1} »[71].

Ces reproches, qui ne sont pas nouveaux, visent dans le propos de Bourguet l'ouvrage de référence de cette première décennie du XIX^e siècle, le *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral* de Lacroix. Car s'il ouvre « au hasard » cet ouvrage qu'il qualifie de « meilleur Traité élémentaire connu jusqu'à présent »[72], il y retrouve les marques de l'une et l'autre des méthodes qu'il proscrit de ses traités. En effet, écrit-il :

> Il serait trop long de citer tous les passages de l'ouvrage de M. Lacroix, où l'on retrouve les quantités dites infinitésimales. Si l'on ajoute à cela les notions de limite [...] sur lesquelles le savant auteur que je viens de nommer, a fait poser les principes du calcul différentiel, on sera convaincu, comme je le suis moi-même, que l'ouvrage que je publie sera très-utile à l'enseignement de la partie si essentielle des sciences que je traite.[73]

Rappelons que nous avons exhibé, au premier chapitre, les rares passages du *Traité élémentaire* de Lacroix où figurent explicitement la notion d'infiniment petit. Nous pouvons donc supposer que, selon Bourguet, il se trouverait dans cet ouvrage de nombreux infiniment petits « implicites ».

Mais la théorie lagrangienne, même enseignée par d'autres que Lagrange est difficile. Tedenat annonçait avoir rendu plus accessible le texte de Lagrange. À propos du développement d'une fonction en série, Bourguet écrit, que, contrairement au « Géomètre

[69] *Ibid.*, p. VI.
[70] *Ibid.*, p. VII.
[71] *Ibid.*, p. XIII.
[72] *Ibid.*, p. IX (note de bas de page).
[73] *Ibid.*, p. X (note de bas de page).

consommé » pour qui la démonstration donnée par Lagrange dans ses *Leçons sur le calcul des fonctions* apparaît « pleine de clarté et d'évidence », « les commençants » n'en jugent pas ainsi, « car, ayant d'abord exposé cette démonstration avec très-peu de modifications aux élèves de ma classe, j'ai eu à répondre à un grand nombre d'observations qui m'ont été faites, et à aplanir beaucoup de difficultés »[74]. Bourguet a donc réécrit l'introduction à la théorie des fonctions analytiques en utilisant les différences finies pour rédiger une démonstration dans laquelle les élèves ne « percevaient plus de difficultés ». Précisons à ce propos que Bourguet ne définit pas la notion de fonction. Il s'adresse à des élèves qui, manifestement, la connaissent.

Signalons que, comme chez Tedenat, la relation notée chez Bourguet:

$$\Delta y = \pm f'x\Delta x + f''x\frac{\Delta x^2}{2} \pm f'''x\frac{\Delta x^3}{2.3} + f^{iv}x\frac{\Delta x^4}{2.3.4} \pm etc \dots$$

n'est pas appelée « théorème de Taylor », cette dénomination étant réservée à la formule utilisant la notation différentielle obtenue dans le cinquième chapitre.

Les *Leçons sur le calcul des fonctions* de Lagrange présentent selon Bourguet un autre inconvénient. Celui qui n'aurait eu pour s'initier à l'analyse que cet ouvrage éprouverait de sérieuses difficultés à appliquer ses connaissances à la mécanique et aux différentes sciences physico-mathématiques. Car, pour peu rigoureuses qu'elles soient, les considérations sur les infiniment petits et leurs notations, « qui doivent être absolument exclues des Mathématiques pures, sont reçues, et j'ose même dire nécessaires dans les sciences physico-mathématiques »[75]. Il lui faut donc, après une introduction à la rigueur lagrangienne, conserver l'avantage des notations du calcul différentiel.

Il part de la relation :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'x + f''x\frac{\Delta x}{2} + f'''x\frac{\Delta x^2}{2.3} + f^{iv}x\frac{\Delta x^3}{2.3.4} + etc \dots$$

qui se réduit à $\frac{0}{0} = f'x$ lorsque Δx, et donc aussi Δy sont égaux à 0. La notation différentielle est alors introduite avec la relation $\frac{dy}{dx} = f'x$, « dans laquelle dy et dx sont des zéros qui

[74] *Ibid.*, p. XV (note de bas de page).

[75] *Ibid.*, p. X (note de bas de page). Ces considérations sur les sciences physico-mathématiques qui ne nous apparaissent, selon Bourguet, que comme soumises à des lois approximatives, lui permettent au passage de justifier les écarts à la rigueur qui lui avaient été reprochés dans son *Traité de navigation*.

rappellent respectivement les différences Δy et Δx »[76]. La différentielle d'une fonction s'obtient alors en cherchant le deuxième terme dans le développement en série. Et c'est par la suite la notation différentielle que Bourguet emploie essentiellement dans son texte.

Pour les dérivées successives, il obtient dans un premier temps : $f''x = d.\frac{dy}{dx}$, qu'il note successivement $\frac{ddy}{dx}$ puis $\frac{d^2y}{dx^2}$, exprimant ainsi que « que la différentielle de $\frac{dy}{dx}$ doit être prise suivant les variations uniformes de x et variables de y, [...] comme si dy représentait une variable et dx une constante »[77].

Le « théorème de Taylor » est alors noté :

$$f(x + \Delta x) = y + \frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{ddy}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{2} + \frac{d^3y}{dx^3}\frac{\Delta x^3}{2.3} + etc \ldots$$

Signalons pour terminer cette analyse que, si la recherche des extrema est abordée à partir de la *formule de Taylor-Lagrange* et du *principe de troncature*, ce n'est pas le cas de la recherche des tangentes. L'équation de la tangente est obtenue à partir de celle des sécantes, $y' - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x' - x)$. Dans cette relation, il fait $\Delta y = 0$ et $\Delta x = 0$, d'où il conclut :

$$y' - y = \frac{dy}{dx}(x' - x).$$

Quant à la quadrature des courbes planes, la méthode employée est proche de celle que nous avons vue avec Lacroix mais là encore Bourguet ne considère pas une limite mais un rapport d'accroissements dans lequel numérateur et dénominateur deviennent égaux à 0.

Enfin, pour le calcul intégral, inverse du calcul différentiel, Bourguet précise que la notation « ∫ » rappelle l'idée de sommation, qui selon lui est fausse car, précise-t-il en note de bas de page,

> les géomètres qui considéraient le calcul différentiel comme la décomposition des quantités variables finies en quantités dites infiniment petites, devaient aussi considérer le calcul intégral qui est l'inverse du calcul différentiel, comme celui de la sommation du nombre infini de parties dites infiniment petites qui, suivant eux, composaient la quantité finie ou intégrale de la formule différentielle donnée.[78]

[76] *Ibid.*, p. 11.
[77] Ibid., p. 51.
[78] *Ibid.*, p. 276. Bourguet reprend des critiques formulées par Euler, dans son *Institutionum calculi integralis* de 1768. Euler critiquait l'idée de Leibniz qui considérait le calcul intégral comme une somme de rectangles de

Les deux tomes de l'ouvrage de Bourguet occupent plus de mille pages et couvrent à peu près le programme des deux années d'analyse de l'Ecole polytechnique. Entièrement consacrés au calcul différentiel et intégral, ils semblent plus s'adresser aux d'élèves de cette École ou de la faculté des sciences qu'à ceux de mathématiques spéciales. L'enseignement que Bourguet annonce avoir dispensé à ses élèves ne devait concerner que les éléments, et ses *Traités élémentaires de calcul différentiel et de calcul intégral* semblent destinés à concurrencer le *Traité élémentaire* de Lacroix. Cependant, même si nous trouvons dans l'ouvrage de Bourguet comme dans celui de Francœur, de nombreux exemples d'application de la théorie, la rigueur affichée par Bourguet, son refus en particulier d'utiliser la notion de limite, se faisait sans doute au détriment d'une certaine simplicité dans la présentation des différentes notions. Ces traités ne pouvaient probablement pas rivaliser avec le *Traité élémentaire* de Lacroix.

3 – 3 Les *Leçons de calcul différentiel et les Leçons de calcul intégral* de Garnier (1811-1812)

Les *Leçons de calcul différentiel* que Garnier publie en 1811 est un ouvrage annoncé comme étant une troisième édition. Cependant l'auteur explique dans un « Discours préliminaire » que la première édition était une réédition d'un cours de Bézout et que la deuxième correspondait à son cours distribué aux élèves de l'École polytechnique. Nous avons vu que ce cours, édité à la demande du Conseil de perfectionnement, avait été contraint par les programmes adoptés en 1800 et qu'il laissait supposer un désaccord quant aux méthodes d'introduction du calcul différentiel entre Garnier et Lacroix. Ces *Leçons de calcul différentiel* sont donc à considérer, finalement, comme la première édition qui soit conforme aux conceptions de l'auteur.

Le « Discours préliminaire » confirme que Garnier se situe dans la lignée de Lagrange puisqu'il annonce avoir « pris pour texte de cet Ouvrage la *Théorie des fonctions analytiques* de l'illustre M. Lagrange », mais « en employant cependant la notation de Leibniz adoptée par tous les géomètres du continent »[79]. Il s'agit donc, pour Garnier comme pour Bourguet précédemment, d'allier à la rigueur lagrangienne la souplesse et l'efficacité du vocabulaire et des notations leibniziennes.

---

largeur infinitésimale (voir le dans le chapitre 5, « Approximate integration and conceptions of the integral » dans CARAMALHO DOMINGUES João, *Lacroix and the Calculus*, Bâle, Birkhäuser, 2008).

[79] GARNIER Jean Guillaume, *Leçons de calcul différentiel*, 3e éd., Paris, Vve Courcier, 1811, p. V.

L'introduction des *Leçons de calcul différentiel,* qui fait reposer ce calcul sur le « théorème de Taylor », est en tout cas purement lagrangienne contrairement au cours donné par Garnier à l'École polytechnique. Les préliminaires reprennent même une longue citation de Lagrange sur la notion de fonction, tirée des *Leçons sur le calcul des fonctions*. C'est d'ailleurs probablement plus ce texte de Lagrange que la *Théorie des fonctions analytiques* qui a servi de référence à Garnier pour la rédaction de son ouvrage. Ainsi la démonstration de la proposition sur le développement de toute fonction en série entière et la quadrature des courbes sont, ici, plus proches du second ouvrage de Lagrange.

En revanche, là où Lagrange se contentait de remarquer l'identité entre les fonctions dérivées $f'x, f''x$, … et les coefficients différentiels $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, …, Garnier introduit ces derniers coefficients à partir des différences finies. Ainsi, dans l'expression de $f(x+\Delta x)$, le coefficient $\frac{\Delta y}{\Delta x} = P + P'\Delta x + etc$ … , se change en $\frac{dy}{dx}$ pour exprimer que P est la vraie valeur de ce rapport lorsque $\Delta x = 0$. Mais il n'est pas question ici d'infiniment petits puisque ces coefficients $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$, … « ne sont pas des rapports, mais de simples notations qui rappellent des valeurs vraies »[80].

Les différentielles, qui ne figurent pas dans les ouvrages de Lagrange, sont alors introduites comme « les termes successifs du développement de la différence finie $f(x+i) - f(x)$, pris abstraction faite des dénominateurs numériques 1.2, 1.2.3, etc »[81]. La notation Δy est changée en dy pour indiquer qu'on ne s'intéresse qu'à une partie de l'accroissement et, comme « rien n'empêche de remplacer dans l'accroissement $f(x+i)$, […] i par dx, l'accroissement dx étant fini comme i »[82], Garnier peut noter : $dy = \frac{dy}{dx}dx$, et ainsi différentier les fonctions tout en conservant la rigueur de la théorie lagrangienne.

À cette présentation très lagrangienne sont ajoutées, à la fin de l'ouvrage, des « Notes sur la méthode infinitésimale et la méthode des limites », ces méthodes méritant malgré tout d'être

[80] GARNIER Jean Guillaume, *Leçons de calcul différentiel*, 3e éd., Paris, V[ve] Courcier, 1811, p. 17.
[81] *Ibid.*, p. 17.
[82] *Ibid.*, p. 19.

connues, « parce que, dans la mécanique et dans toutes les applications, on emploie toujours la première, et qu'assez généralement on expose le calcul différentiel par la seconde »[83].

La note sur la méthode infinitésimale couvre à peine vingt pages et est intitulée « Abréviation par les infiniment petits ». Garnier ne s'intéresse pas une métaphysique des infiniment petits mais, reprenant la supposition de Leibniz que les grandeurs prennent des accroissements infiniment petits qu'on doit négliger devant les quantités finies, il justifie cet autre point d'achoppement de la théorie leibnizienne que sont les infiniment petits d'ordre supérieur. Dans le calcul de la différentielle de xy, on peut négliger $dxdy$ par rapport à dx et dy, en le considérant comme le quatrième terme de la proportion $1 : dx :: dy :: dxdy$. Justifier que d^2x et d^2y sont du même ordre que dx^2 et dy^2 est plus difficile. Différentiant $Mdx + Ndy$, M et N étant des fonctions de x et y, il obtient : $Md^2x + Nd^2y + Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2$. Et Garnier conclut que, $dx^2, dy^2, dxdy$ étant des infiniment petits par rapport à dx, dy, il faut pour « l'homogénéité des expressions différentielles » [84], que d^2x et d^2y soient du même ordre que dx^2 et dy^2.

Le « théorème de Taylor » est à nouveau démontré, avec les infiniment petits et en utilisant les résultats sur les différences finies obtenus au début du livre pour introduire la notation $\frac{dy}{dx}$. Considérant probablement que sa démonstration qui néglige les différentielles d'ordre supérieur reste critiquable, il propose par la suite une nouvelle démonstration du théorème de Taylor avec la seule supposition que toute fonction d'une variable comporte une différentielle première, propriété qui renvoie à la note suivante intitulée « Des limites ».

Cette note de quinze pages commence par une nouvelle citation de Lagrange extraite des *Leçons sur le calcul des fonctions* qui reprend les objections déjà vues à la notion de limite. Son introduction du calcul différentiel par la méthode des limites utilise à nouveau le calcul aux différences finies. Elle est proche de celle proposée une dizaine d'années auparavant à l'École polytechnique. Garnier renvoie à

> M. Carnot [qui], dans ses Réflexions sur la métaphysique du Calcul infinitésimal, […] discute avec une rare sagacité les principes de ce calcul, [et qui] observe qu'en

[83] *Ibid.*, p. XIX.
[84] *Ibid.*, p. 440.

> vertu de la loi de continuité, les quantités évanouissantes gardent encore le rapport dont elles se sont approchées par degrés avant de s'évanouir.[85]

Ayant expliqué comment passer des limites aux différentielles, et réciproquement, la fin de la note est consacrée à la démonstration de la propriété supposée dans la note précédente, c'est-à-dire à la démonstration d'Ampère-Binet que toute « fonction continue » admet une différentielle première, expression employée par Garnier.

Comment faut-il les interpréter cette trentaine de pages consacrées à la méthode infinitésimale et la méthode des limites à la fin de ce volume ? Faut-il lire la présence de la méthode des infiniment petits comme une conséquence de la décision du Conseil de perfectionnement de réintroduire cette méthode pour présenter le calcul différentiel[86]? Faut-il de même lier la présence de la démonstration d'Ampère-Binet de la dérivabilité d'une fonction continue, et aussi de la démonstration due à Ampère du théorème de Taylor à la nécessité, pour Garnier, de faire accepter son livre par la Commission des livres classiques, condition *sine qua non* pour qu'il puisse être utilisé dans l'Université ?

Nous avons vu que Ampère avait été nommé Inspecteur général de l'Université. Il avait été désigné rapporteur des *Leçons de calcul différentiel*. Le rapport qu'il devait transmettre au Grand Maître était décisif pour l'avenir du livre. Dans la lettre que Garnier lui adresse pour demander « avec franchise », son opinion sur un livre qui ne fait que « développer le traité des fonctions et le compléter par des applications »[87], il y a peut-être la crainte de l'auteur de n'avoir pas écrit un texte conforme aux exigences du moment. On y lit aussi que se joue, en arrière-plan, le sort de la troisième édition des *Elémens d'Algèbre* que Garnier souhaite faire avaliser par la Commission. Un rapport favorable d'Ampère sur les *Leçons de calcul différentiel* ouvrirait la porte à une reconnaissance de l'ouvrage d'algèbre. Les manuels sont pour lui une source de revenus, et nous pouvons imaginer que les élèves de l'institution privée qu'il dirige sont de ses clients[88]. Le public espéré pour les *Elémens d'Algèbre* est plus vaste que pour son

---

[85] *Ibid.*, p. 465.
[86] C'est la thèse soutenue dans la section 2.5.2 intitulée « The impact outside the École » de SCHUBRING Gert, *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century, France and Germany*, New-York, Springer, 2005, p. 402-408.
[87] GARNIER Jean-Guillaume, *Correspondance d'Ampère, Lettre L 1058*, Archives de l'Académie des sciences, Paris, http://www.ampere.cnrs.fr/amp-corr1058.html , consulté le 01/09/2017.
[88] Au moment de la parution des *Leçons de calcul différentiel* chez V^{ve} Courcier, Garnier publie aussi chez cet éditeur les manuels suivants : un *Traité d'Arithmétique*, les *Elémens d'Algèbre*, une *Seconde section de l'Algèbre*,

ouvrage de calcul différentiel. Il apparaît dans sa lettre qu'il préfère sacrifier ce dernier livre en cas d'avis défavorable d'Ampère, lui demandant même la faveur de ne pas transmettre de rapport défavorable au Grand Maître, préservant ainsi ses chances pour le livre d'algèbre.

Ces diverses considérations se trouvent probablement derrière la présence dans les « Notes » d'une brève présentation de la méthode infinitésimale et de celle des limites. Mais il y a sans doute aussi, tout simplement, la volonté d'un enseignant de se montrer exhaustif quant aux méthodes d'introduction du calcul différentiel.

3 – 4 Conclusion

Au tournant des années 1810, alors que le Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique préconise l'emploi des infiniment petits mais que, contraint par la manque de manuels, le *Traité élémentaire* de Lacroix reste l'ouvrage de référence dans cette école, l'examen de ces trois ouvrages nous propose un panorama plus varié quant aux méthodes d'introduction du calcul différentiel.

L'inspirateur majeur reste Lagrange. La méthode des limites telle qu'en use Lacroix est loin de faire l'unanimité. Quant à la méthode infinitésimale, aucun de ces auteurs ne la juge suffisamment rigoureuse pour introduire le calcul différentiel et intégral, même si tous reconnaissent que sa présentation est indispensable en raison de l'emploi qu'en font les applications des mathématiques. Le « théorème de Taylor » occupe une place essentielle, qu'il soit employé comme « principe fondamental » ou comme un outil de premier plan pour la dérivation des fonctions transcendantes, le développement en série ou l'étude des extrema. Si les trois auteurs emploient la notation lagrangienne des fonctions dérivées, la notation différentielle a leur préférence et la notion de différentielle est privilégiée par la plupart. Le calcul différentiel et intégral qu'ils proposent est donc malgré tout assez éloigne du « calcul des fonctions » de Lagrange.

Ces manuels, écrits par des auteurs dont l'enseignement était, professionnellement, l'activité mathématique principale, portent ainsi la marque des contraintes liées à l'enseignement. Elles sont essentiellement de deux ordres. D'ordre pédagogique d'une part : il leur faut rendre accessible aux élèves la théorie lagrangienne. D'ordre mathématique d'autre part : ils

---

des *Elémens de Géométrie*, *Les Réciproques de la Géométrie*, des Elémens de Géométrie analytique et des *Leçons de Statique*.

introduisent la notion d'infiniment petit, car il paraît bien difficile de s'en passer pour les applications à la géométrie et à la mécanique. Enfin, et cela est vrai au moins pour Garnier dont le manuel paraît au moment de la modification des programmes de l'École polytechnique : il lui faut tenir compte du retour de la méthode des infiniment petits.

4 – Un enseignement en école d'artillerie : les *Elémens de calcul différentiel et de calcul intégral* de Boucharlat (1813)

Boucharlat est né à Lyon en 1773 dans une famille qui comptait déjà un mathématicien célèbre, membre de l'Académie des sciences, belles lettres et arts de Lyon, Jacques Mathon de la Cour (1712-1770)[89]. Élève de la première promotion de l'École polytechnique, il occupe ensuite la chaire de mathématiques à l'École communale de Lyon. S'adonnant à la poésie, il semble que ce soit pour se rapprocher des milieux littéraires parisiens qu'il se fixe à Paris où il est recruté comme répétiteur adjoint à l'École polytechnique en 1804. Alors qu'il occupe ce poste, il publie une *Théorie des courbes et des surfaces du second ordre*, aidé des conseils de Lagrange, auquel il dédicace l'ouvrage. Cet ouvrage connaît un certain succès puisqu'il est réédité en 1810. En 1807, ne pouvant obtenir la place de répétiteur, il accepte une chaire de mathématiques au Prytanée militaire de La Flèche.

Une division d'artillerie est annexée au Prytanée militaire en 1810 et Boucharlat est nommé sur la chaire de mathématiques transcendantes. Les *Elémens de calcul différentiel et de calcul intégral* qu'il publie en 1813 sont le fruit de cet enseignement qui ne durera que jusqu'en 1815, la chute de l'Empire entraînant la dissolution de l'école.

Au moment de la parution de la première édition de cet ouvrage, Boucharlat n'avait donc pas la position institutionnelle des trois auteurs précédents. Le manuel connaîtra cinq éditions avant 1850 (la cinquième date de 1838). Son succès dépasse largement le public d'une école d'artillerie pour lequel il a été initialement conçu. Ceci légitime l'examen d'un texte qui, en outre, ouvre une fenêtre sur un enseignement d'analyse dans un cadre professionnel qui reste à explorer au XIX^e^ siècle. De plus, les tirages des premières éditions dont nous disposons donnent 2000 exemplaires pour les traités de Bourguet, 1500 pour les *Leçons de calcul intégral*

[89] Les données biographiques sur Boucharlat proviennent de la *Biographie des hommes du jour*, t. 6, 2e partie, Paris, Krabbe, 1842, p. 376-382.

de Garnier, et seulement 500 pour le livre de Boucharlat[90]. Ces tirages initiaux sont probablement en rapport avec les positions institutionnelles de leurs auteurs, et correspondent donc aux ventes attendues en fonction de leur notoriété. Le succès du manuel de Boucharlat n'en est que plus remarquable.

La première édition de l'ouvrage de Boucharlat est un texte court d'environ 250 pages, sans préface, partagé équitablement entre calcul différentiel et calcul intégral. Il ne suit pas le programme d'analyse de l'Ecole polytechnique, traitant par exemple la recherche des extrema après la recherche des tangentes et des asymptotes, contrairement au programme de l'École. De plus le « théorème de Taylor » n'est pas étendu aux fonctions de deux variables. Il s'agit donc bien d'un ouvrage destiné au public particulier des écoles d'artillerie. La deuxième édition qui date de 1820, est qualifiée par l'auteur de « considérablement augmentée »[91]. Elle couvre en effet les différents articles du programme de l'École polytechnique. Boucharlat a donc adapté les éditions suivantes de son ouvrage à l'enseignement de cette école.

L'ouvrage paraît, dès les premières pages, inspiré du *Traité élémentaire* de Lacroix. Après avoir défini une fonction, comme une expression analytique, c'est en effet à partir de l'exemple de la fonction $y = x^3$ que Boucharlat introduit la limite du rapport $\frac{y'-y}{h}$. Lacroix l'introduisait à partir de la fonction $u = ax^2$ avant de traiter le cas $u = ax^3$.

La définition qu'il donne de la différentielle est cependant assez différente de celle proposée par Lacroix. Après avoir remarqué que l'équation $\frac{0}{0} = 3x^2$ « n'a rien d'absurde, parce que l'algèbre nous apprend que $\frac{0}{0}$ peut représenter toutes sortes de quantités »[92], il choisit de représenter ce symbole $\frac{0}{0}$ par $\frac{dy}{dx}$. Ce symbole « rappellera que la fonction était y et que la

[90] Source *Bibliographie de la France, Première année*, Paris, Pillet Aîné, 1811 et 1812. Nous ne disposons pas des tirages pour l'ouvrage de Francoeur, ni pour les *Leçons de calcul différentiel* de Garnier. On peut néanmoins supposer, pour ce dernier ouvrage, qu'il a dû être semblable au tirage des *Leçons de calcul intégral* paru l'année suivante.

[91] À propos de cet ouvrage de Boucharlat, on pourra aussi consulter ZERNER Martin, « La transformation des traités français d'analyse (1870-1914) », 1994, https://hal-unice.archives-ouvertes.fr/hal-00347740/fr/ consulté le 31/08/2017, p 43-45. Dans cet article, ZERNER juge Boucharlat inspiré par Lagrange. Nous pensons montrer ici que ce texte doit plus à Lacroix qu'à Lagrange pour la partie que nous étudions.

[92] BOUCHARLAT *Jean-Louis, Eléments de calcul différentiel et de calcul intégral*, Paris, Béchet, 1813, P. 3

variable était x. Mais dy et dx n'en seront pas moins des quantités nulles »[93]. Puis, indiquant que dans $\frac{dy}{dx}$, dx doit toujours être placé sous dy, il continue :

> cependant, pour faciliter les opérations de l'algèbre, on peut momentanément faire évanouir le dénominateur de l'équation, et l'on a $dy = 3x^2dx$. Cette expression $3x^2dx$ est la différentielle de l'expression y.[94]

Cette introduction de la notion de différentielle est moins satisfaisante du point de vue mathématique que celle de Lacroix, mais elle présente l'avantage d'éviter la question des principes. Car, si nous observons chez Boucharlat comme chez Lacroix la même importance accordée aux exemples introductifs, nous constatons aussi le même refus de questionner les principes du calcul différentiel. Boucharlat va plus loin dans ce refus avec sa « définition » de la différentielle. De même, il élude la question de l'existence d'une limite au rapport $\frac{y'-y}{h}$, que ce soit lorsqu'il l'introduit de façon analytique ou lorsqu'il l'utilise pour la recherche des tangentes. Nous ne trouvons aucune mention de la continuité d'une courbe. Il est cependant possible que, dans son enseignement, Boucharlat abordait cette question en géométrie analytique puisqu'elle fait l'objet d'un traitement dans sa *Théorie des courbes et des surfaces du second ordre*[95].

Et, de même que Lacroix « se hâtait » ensuite de définir les différentielles successives pour établir le « théorème de Taylor » afin de dériver les fonctions exponentielles et logarithmiques, Boucharlat démontre le « théorème de Maclaurin » pour l'employer à cet effet. Comme Lacroix, il emploie la notion de différentielle et n'utilise pas la notation lagrangienne des dérivées. On peut encore noter chez Boucharlat des méthodes semblables à celles de Lacroix et éloignées de celles de Lagrange pour la dérivation de la fonction sinus ou la recherche des tangentes.

La recherche des extrema est semblable à celle de Lacroix. La quadrature des courbes en diffère légèrement. Il encadre l'accroissement de l'aire de la courbe par l'aire par deux rectangles d'aires respectives $f(x+h).h$ et $fx.h$. Constatant que la limite de ce rapport est égale à l'unité, il conclut qu'il en est donc de même pour la limite du rapport de

[93] *Ibid.*, p. 3.
[94] *Ibid.*, p. 3.
[95] Voir les BOUCHARLAT Jean-Louis, *Théorie des courbes et des surfaces du second ordre*, Paris, 2nde éd., Paris, Courcier, 1810, p. 35-36.

l'accroissement de l'aire au rectangle d'aire $fx.h$. Ayant développé l'aire s en série entière, ce rapport est égal à :

$$\frac{\frac{ds}{dx}h + \frac{d^2s}{dx^2}\frac{h^2}{2} + etc}{fx.h}.$$

Après simplification, et en faisant $h = 0$, il obtient $\frac{ds}{dxfx} = 1$, soit $ds = ydx$.

La proximité des conceptions pédagogiques de Lacroix et Boucharlat apparaît plus nettement encore dans la préface à la deuxième édition. Lacroix ne voulait pas épuiser les débutants en « de vaines subtilités » ; Boucharlat écrit dans cette préface :

> ce n'est qu'à force de précision qu'on peut éviter les longueurs si nuisibles à l'ensemble d'une théorie ; et la difficulté devient plus encore grande lorsqu'une partie de l'ouvrage est consacrée à rendre raison de ces choses.[96]

La méthode infinitésimale a cependant sa place dans les éléments selon Boucharlat. Elle fait l'objet d'une brève présentation de cinq pages à partir de la page 111. Affirmant que « les notions que nous avons de l'infini se réduisent à cette seule proposition : une quantité n'est pas infinie lorsqu'elle est susceptible d'augmentation »[97], il déduit que, dans $x + a$, si x devient infinie, il faut supprimer a. Cette quantité a est donc infiniment petite par rapport à x. La fraction $\frac{a}{\infty}$, où a est une quantité finie, lui fournit une quantité infiniment petite par rapport à une quantité finie.

Il n'y a donc pas, chez Boucharlat, d'infiniment petits absolus, ce qui lui permet de développer la notion d'ordre d'infiniment petits. Ainsi, la proportion $a: x: : x: x^2$ lui permet de prouver que, si x est infiniment petit par rapport à une grandeur finie a, x^2 est à x ce que x est à a.

Le développement d'une fonction en série entière :

$$f(x + dx) = fx + Adx + Bdx^2 + Cdx^3 + etc$$

lui donne, en supprimant les infiniment petits d'ordre supérieur, sa différentielle Adx. La différenciation de la fonction sinus, la recherche des tangentes et la différentielle de l'arc sont ensuite déterminées par la méthode des infiniment petits qui se clôt sur ces phrase :

> la méthode des infiniment petits, moins satisfaisante pour le raisonnement que celle des limites, compense ce désavantage par la brièveté des opérations,

[96] BOUCHARLAT Jean-Louis, *Eléments de calcul différentiel et de calcul intégral*, 2e éd. Paris, Courcier, 1820, p. VII.
[97] BOUCHARLAT *Jean-Louis, Eléments de calcul différentiel et de calcul intégral*, Paris, Béchet, 1813, P. 111.

> qu'elle peint en quelque sorte à la vue. Comme ces méthodes ont entr'elles, une grande analogie, il était utile d'en faire le rapprochement.[98]

Par la suite, il montre brièvement comment utiliser les infiniment petits à l'occasion de la quadrature des courbes, de la détermination des aires et de la cubature des solides de révolution. Il ne s'agit à chaque fois que d'un aperçu d'une méthode employée dans les applications de ce calcul. Ce qui ne modifie nullement la ligne directrice des éléments selon Boucharlat : la méthode qu'il propose est bien héritée de celle adoptée par Lacroix dans son enseignement. Il nous semble donc qu'il faut, pour Boucharlat comme pour Garnier, attribuer la présence de la méthode des infiniment petits au retour des infiniment petits à l'École polytechnique, et à la nécessité pour un enseignant et un auteur de manuels, de se montrer exhaustif quant à la présentation des méthodes qui ont cours.

Signalons pour terminer que, dans la deuxième édition, la section sur les infiniment petits est suivie d'un paragraphe intitulé : « De la méthode de Lagrange pour démontrer les principes du Calcul différentiel, sans la considération des limites, des infiniment petits, ou de toute quantité évanouissante ».

Le texte de Boucharlat est, nous venons de le voir, proche de celui de Lacroix. Leurs succès en France[99] sont aussi très semblables comme le montre le tableau ci-dessous :

N° de l'édition	1ère	2e	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e
Traité élémentaire de Lacroix	1802	1806	1820	1828	1837	1861	1867	1874	1881
Elémens de Boucharlat	1813	1820	1826	1830	1838	1852	1858	1881	1891

Tableau 2: Les éditions françaises du *Traité élémentaire* de Lacroix et des *Élémens* de Boucharlat au XIXe siècle

Neuf éditions pour chacun durant le XIXe siècle dont cinq avant 1840, la plupart regroupées entre 1820 et 1840, les autres allant s'espaçant durant la deuxième moitié du siècle, alors que les textes sont de moins en moins en adéquation avec les programmmes.

La simplicité d'exposition des principes sur des exemples, commune aux deux ouvrages et, plus particulièrement pour le manuel de Boucharlat, les nombreux exercices traités ne sont

[98] *Ibid.*, p. 116.

[99] La carrière à l'étranger du livre Boucharlat est tout aussi brillante. Traduit en allemand en 1823, en anglais en 1828, en néerlandais en 1835, en ourdou en 1845, en espagnol en 1850 il a aussi, selon Martin ZERNER, *op. cit.*, p. 44, une traduction russe dont nous n'avons pas retrouvé l'année. Le traité de Lacroix connaît deux éditions anglaises en 1816 et 1820, et deux éditions allemandes en 1817 et 1830. Signalons aussi que le texte de Boucharlat est à nouveau édité en France en 1926.

probablement pas étrangers à ce succès. En 18881, la préface à la huitième édition des *Éléments de calcul différentiel et de calcul intégral* de Boucharlat est revue et annotée par Hermann Laurent. Laurent est répétiteur d'analyse à l'École polytechnique et prépare aussi à ce concours dans une institution privée. Il note que « cet Ouvrage, déjà ancien, est toujours recherché par les étudiants »[100]. On peut penser que ce sont bien les étudiants qui ont fait le succès de cet ouvrage.

5 – Le débat autour de l'enseignement de l'analyse dans les classes préparatoires

5 – 1 La proposition de Durivau au Conseil d'instruction (1812) et les commentaires de Reynaud (1819-1821)

L'enseignement des éléments du calcul différentiel se développe donc au début du XIXe siècle, que ce soit dans des institutions privées préparant au concours d'admission aux Écoles polytechnique et normale ou à l'intérieur même des lycées en classe de mathématiques spéciales. La première proposition faite au Conseil d'instruction d'introduire le calcul différentiel au concours d'admission est probablement à relier à cet enseignement.

Lors de la séance du Conseil d'instruction du 28 septembre 1812, le directeur des études, Étienne Pierre Henri Durivau, polytechnicien de la première promotion, juge qu'il serait nécessaire aux élèves « de pouvoir s'arrêter d'avantage sur certains points de la science qui demandent à être muris pour devenir profitables ». Mais, « dans l'impossibilité d'ajouter au tems du cours d'étude », il propose de tirer « avantage » de « la grande concurrence qui a lieu depuis quelques années pour l'entrée de l'école », en ajoutant « au Programme d'admission plusieurs connaissances élémentaires auxquelles il faut nécessairement employer une partie considérable des deux années du cours Polytechnique »[101]. Parmi ses propositions, il pense « qu'on pourrait exiger que les candidats fussent instruits des éléments de la géométrie descriptive et de ceux du calcul différentiel »[102].

[100] LAURENT Hermann, « Préface », dans BOUCHARLAT Jean-Louis, *Éléments de calcul différentiel et de calcul intégral*, 8e éd., Paris, Gauthier-Villars, 1881, p. 1.
[101] Procès-verbal de la séance du Conseil d'Instruction du 25 septembre 1812, *Registre des procès-verbaux du Conseil d'Instruction*, X2C/30, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.
[102] *Ibid.*

Une commission est désignée au sein du Conseil d'instruction pour étudier ces propositions. Elle est composée de Siméon Denis Poisson, professeur de mécanique, de Louis Jacques Thénard, professeur de chimie, de Jean Nicolas Pierre Hachette, professeur de géométrie descriptive et de André Marie Ampère et Jean-Baptise Labey, professeurs d'analyse. Lors de la séance du 10 octobre, cette commission admet l'intérêt d'une telle mesure, mais, considérant les programmes comme déjà suffisamment chargés, elle propose d'ajourner une telle modification. Des membres non nommés dans le procès-verbal proposent que, « sans être de rigueur, [ces connaissances] seront prises cependant en considération par le jury »[103]. Il est alors rappelé que « le Conseil de perfectionnement [s'est] déjà prononcé pour qu'il ne fut pas fait de question au candidat au-delà du programme »[104]. Mise aux voix, la proposition de Durivau est rejetée par le Conseil d'Instruction.

Cette décision du Conseil d'instruction n'empêche pas le développement en classe préparatoire de l'enseignement de l'analyse. Ainsi, dans « l'Avis » qui introduit son *Traité d'application de l'algèbre à la géométrie, et de trigonométrie à l'usage des élèves qui se destinent à l'École royale polytechnique,* Reynaud, examinateur d'admission de l'École polytechnique, indique avoir constaté les « nombreuses difficultés »que présente l'application de l'algèbre à la géométrie. Il affirme vouloir « aplanir ces difficultés et […] préparer les candidats aux Cours de l'École Polytechnique » [105]. La troisième partie de l'ouvrage intitulée « Des points, des lignes et des surfaces dans l'espace », contient notamment les formules du calcul différentiel et intégral utiles pour leur application à la géométrie.

Les connaissances des candidats se sont révélées dans les examens d'admission malgré les exigences rappelées par le Conseil de perfectionnement au moment de la proposition de Durivau. Elles semblent ne pas avoir été toujours appréciées comme nous pouvons le lire dans l'« Avertissement » à la cinquième édition, en 1821, du *Traité d'algèbre à l'usage des élèves qui se destinent à l'École royale polytechnique et des élèves de l'École spéciale militaire* du

---

[103] Procès-verbal de la séance du Conseil d'Instruction du 10 octobre 1812, *Registre du Conseil d'Instruction*, archives III2, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.
[104] *Ibid.*
[105] REYNAUD Antoine André Louis, *Traité d'application de l'algèbre à la géométrie*, Paris, Vve Courcier, 1819, p. VI.

même Reynaud. Il semble contredire ses propos de 1819. Après avoir mis en garde les candidats contre « l'écueil dangereux » qui consiste à répondre

> quelques fois d'une manière peu satisfaisante aux questions que leur adresse l'Examinateur, parce qu'ils parcourent superficiellement les diverses parties du programme pour se livrer à l'études des théories qui ne sont pas exigées,

il poursuit :

> je les engage à ne pas étudier d'avance le Calcul différentiel, car les notions métaphysiques qu'ils auraient acquises, pourraient différer de celles qui sont adoptées par les Professeurs de cette École.[106]

Ces deux positions antagonistes révèlent l'ambigüité de la position de professeurs, mais aussi d'examinateurs du concours d'admission, face à un enseignement qui existe, de fait, dans certaines classes préparatoires, publiques ou privées, sans être officiellement au programme.

5 – 2 L'exposition des principes du calcul différentiel par Gergonne (1830)

Le premier journal français consacré exclusivement aux mathématiques, les *Annales de mathématiques pures et appliquées* (*Journal de Gergonne*) est fondé à Nîmes en 1810 par Joseph-Diez Gergonne, et Joseph-Esprit Thomas Lavernède. Il est destiné à la communauté enseignante[107]. Gergonne, né en 1776, a été élève au collège de Nancy mais a acquis seul une partie de ses connaissances mathématiques. Officier d'artillerie durant la Révolution, il revient à la vie civile et est nommé professeur à l'école centrale de Nîmes puis professeur de mathématiques transcendantes au lycée qui succède à cette école. En 1816, il est nommé sur la chaire d'astronomie à l'Université de Montpellier. Il devient Recteur de l'Académie de Montpellier en 1830. Gergonne rencontre Thomas Lavernède au lycée de Nîmes, où ce dernier est lui aussi professeur de mathématiques. Gergonne gèrera rapidement seul l'édition de ce journal. Le nom de Thomas Lavernède ne figure en effet plus au titre après le tome 2.

L'étude des contributions consacrées au calcul différentiel dans le *Journal de Gergonne*, ce qu'elles apprennent de la diffusion des principes de l'analyse et ce qu'elles leur apportent en propre, a déjà été faite[108]. Nous ne reviendrons ici que sur l'article que Gergonne fait paraître

---

[106] REYNAUD Antoine André Louis, *Traité d'algèbre*, 5e éd., Paris, Vve Courcier, 1821.

[107] Voir DHOMBRES Jean et OTERO Mario H., « Les Annales de mathématiques pures et appliquées, le journal d'un homme seul au profit d'une communauté enseignante » dans Elena AUSEJO et Mariano HOMIGON (éd.), *Messenger of mathematics : European mathematical journals, 1800-1946*, Madrid, Siglo XXI, 1993.

[108] Voir GERINI Christian, *Les Annales de Gergonne, apport scientifique et épistémologique dans l'histoire des mathématiques*, Villeneuve d'Ascq, Éd. Du Septentrion, 2002.

en 1830. Intitulé « Exposition élémentaire des principes du calcul différentiel », ce long texte de 73 pages nous intéresse plus particulièrement puisqu'il propose dans un journal destiné aux enseignants, de faire descendre « [l'analyse infinitésimale] des hautes régions où l'on semble avoir voulu la reléguer, et de l'abaisser, de plein pied, s'il est possible, avec l'analyse ordinaire »[109].

Gergonne précise qu'il s'adresse à des lecteurs « assez avancé[s] dans l'analyse ordinaire » pour savoir que toute fonction algébrique est susceptible d'un développement en série entière, et qui connaît les développements des principales fonctions transcendantes. Il ne définit donc pas la notion de fonction.

Considérant le polynôme $Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \cdots$, qu'il nomme la « fonction primitive », il appelle « fonction dérivée » le polynôme $\alpha Ax^{\alpha-1} + \beta Bx^{\beta-1} + \gamma Cx^{\gamma-1} + \cdots$. Par la suite, en notant X la fonction primitive, il note dX la fonction dérivée. Dans le cas d'une fonction S de deux variables x et y, il convient de noter $\frac{dS}{dx}$ et $\frac{dS}{dy}$ les dérivées par rapport à chacune des variables pour faire disparaître « toute équivoque »[110].

Sa définition lui permet d'obtenir les dérivées d'une somme, d'une différence et d'un produit de fonctions polynômes, formules qu'il peut généraliser « comme il n'est aucun fonction connue qui ne soit développable en une suite de monomes »[111]. Il en déduit la dérivée d'une fonction racine, puis de la racine n^ème^ d'une fonction. Les développements en série des principales fonctions transcendantes supposés connus lui permettent d'obtenir les dérivées des fonctions circulaires, logarithme et exponentielle.

Il définit ensuite d^2X comme $d.dX$, puis les dérivées successives des fonctions d'une variable. Il démontre alors le « Théorème de Taylor » d'une manière semblable à celle de Lacroix dans son *Traité élémentaire*.

Puis, pour une constante g quelconque, écrivant

$$f(x+g) - fx = d.fx.g + d^2.fx.\frac{g^2}{1.2} + d^3.fx.\frac{g^3}{1.2.3} + \cdots,$$

[109] GERGONNE Joseph-Diez, « Exposition élémentaire des principes du calcul différentiel », *Annales de mathématiques pures et appliquées,* t. 20, 1829-1830, p. 213.
[110] *Ibid.*, p. 220.
[111] *Ibid.*, p. 229.

il appelle $d.fx.g$ la différentielle de la fonction. Dans la relation :

$$\frac{f(x+g)-fx}{g}=d.fx+d^2.fx.\frac{g}{1.2}+d^3.fx.\frac{g^2}{1.2.3}+\cdots,$$

il appelle $d.fx$ le coefficient différentiel. Et,

> comme à mesure que g devient plus petit, son second membre tend sans cesse à se réduire à ce premier terme $d.fx$, on peut dire encore que la dérivée ou le coefficient différentiel d'une fonction est la limite du rapport entre l'accroissement de la fonction et celui de la variable.[112]

Il démontre que ce nouveau procédé pour obtenir la dérivée est équivalent à celui qu'il a utilisé et conclut qu'il aurait pu, dès le début, l'adopter

> mais il nous a paru beaucoup plus naturel, et conséquemment plus convenable, de choisir de préférence, pour définition des dérivées, une opération fort simple que nos premiers pas dans l'analyse et dans son application à la géométrie des courbes et des surfaces doivent nous avoir rendu tout à fait familière.[113]

Pour Gergonne, c'est donc la familiarité des élèves avec les développements en série entière qui rend cette approche purement algébrique préférable à la méthode des limites. Remarquons aussi que son introduction passe sous silence le contre-exemple de Cauchy d'une fonction qui n'est pas développable en série de Taylor.

5 – 3 Le calcul différentiel à l'épreuve orale du concours d'admission à l'École polytechnique dans le *Manuel des aspirants à l'École polytechnique* de Georges Ritt (1839) et dans les interrogations d'Auguste Comte

Georges Ritt, né à Toulon en 1801, est un ancien élève de l'École normale dont il est licencié en 1822 à la fermeture de cette école[114]. Après un séjour en Russie, il est nommé en 1836 Inspecteur des écoles primaires du département de la Seine. Il fait paraître en 1839 un *Manuel des aspirants à l'École polytechnique*. Il est présenté, sur la page de garde du manuel comme « Auteur de problèmes de géométrie, d'algèbre et d'application de l'algèbre à la géométrie »[115]

---

[112] *Ibid.*, p. 253.
[113] *Ibid.*, p. 254.
[114] Les indications fournies sur Georges Ritt sont tirées de l'édition électronique du *Nouveau dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire publié sous la direction de Ferdinand Buisson*, édition de 1911, Institut Français de l'Éducation,
http://www.inrp.fr/edition-electronique/lodel/dictionnaire-ferdinand-buisson/document.php?id=3543 consulté le 28/08/2017.
[115] RITT Georges, *Manuel des aspirants à l'École Polytechnique*, Paris, 1839.

Après avoir rappelé les textes officiels concernant l'admission à l'École polytechnique, Ritt détaille les connaissances exigées et écrit, à propos de la détermination du centre de gravité en statique :

> Ces problèmes et ces théorèmes n'exigent d'aucune façon l'emploi du calcul différentiel et intégral. Sans doute les méthodes tirées de cette haute analyse sont d'une application plus générale et plus vaste ; mais il ne peut y avoir qu'avantage à tirer des méthodes élémentaires tout ce qu'elles peuvent donner.[116]

Il poursuit par une mise en garde lorsqu'il aborde la question des « Connaissances supplémentaires en dehors du programme d'admission » :

> Quelques élèves croient pouvoir commencer l'étude du calcul différentiel et intégral avant d'avoir subi l'examen d'amission. Outre le danger de confondre les méthodes, nous pensons qu'il y a peu d'avantages réels à charger la mémoire de notions incomplètes.[117]

Mais, dans la partie consacrée à l'examen oral, il écrit :

> Après avoir répondu sur les connaissances exigées, les candidats peuvent demander à être interrogés de nouveau sur les connaissances en dehors du programme, telles que la physique, la chimie, la géométrie à trois dimensions et l'analyse supérieure et infinitésimale.[118]

Nous n'avons pas trouvé de texte officiel qui va dans ce sens. Il s'agit donc ici d'une pratique dont nous pouvons penser qu'elle était courante pour figurer dans un tel ouvrage. Remarquons qu'elle ne contrevient pas aux exigences su Conseil de perfectionnement puisque c'est le candidat qui demande cette interrogation.

Ritt rappelle cependant le risque qu'il y a pour les candidats à s'exposer à une épreuve qu'ils ne maîtriseraient pas correctement. Malgré tout, il insiste sur l'intérêt d'une épreuve « qui pourrait ajouter de nouveaux avantages aux avantages déjà obtenus, » chacun comprenant « aisément combien il importe de mériter un rang distingué dans l'opinion et sur la liste de d'examinateur »[119].

Il poursuit en indiquant

---

[116] *Ibid.*, p. 31.
[117] *Ibid.*, p. 41.
[118] *Ibid.*, p. 152.
[119] *Ibid.*, p. 152.

> les grandes questions théoriques qui peuvent faire apprécier sur-le-champ leur degré d'instruction en chaque matière spéciale. […]
>
> En calcul différentiel et intégral: Les théorèmes de Taylor et de Mac Laurin; la théorie des maxima et des minima, la méthode générale des tangentes, la théorie des développées et des rayons de courbure; l'intégration des fractions rationnelles; les quadratures et les cubatures; l'intégration des équations différentielles, etc.[120]

Ceci correspond à une bonne partie du programme de première année d'analyse à l'École polytechnique.

Le risque pour un candidat à utiliser le calcul différentiel apparaît dans les commentaires rédigés par Auguste Comte à l'occasion de sa tournée dans l'ouest en 1837[121]. En effet, les examinateurs du concours d'admission se déplaçaient en France depuis 1796 pour interroger les candidats dans les principales villes de province[122]. Comte examine cette année-là 93 candidats dans les villes de Rouen, Rennes, Lorient, La Flèche, Angoulême, Toulouse, Montpellier et Bourges. Rédigeant des notes sur chaque candidat on y trouve des appréciations sans ambiguïté. En voici les exemples qui évoquent le calcul différentiel.

Il signale, à propos de la discussion de la courbe $y = \frac{x^3}{1+x^2}$ que « les deux minima ont été heureusement déterminés par la méthode purement algébrique élémentaire »[123]. Un autre candidat, invité à déterminer un cylindre maximum « veut y employer le Calcul différentiel ; mais, rappelé à la question, il reconnaît que la maximum correspond à une racine double de son équation »[124]. Un troisième est « invité […] à chercher le maximum par la méthode élémentaire (quoiqu'il voulût appliquer la règle différentielle) »[125]. Enfin un autre, à propos du volume de la sphère, « commence par montrer qu'il a évidemment saisi, plus qu'aucun autre jusqu'ici, l'esprit fondamental de la méthode des cubatures »[126].

---

120 *Ibid.*, p. 153.

121 Auguste Comte a été examinateur d'admission à l'École polytechnique de 1837 à 1843. Les questions posées et ses notes sur les candidats durant sa tournée de 1837 font l'objet de quatre articles publiés par Pierre LAFFITE en 1894 dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

122 Voir BELHOSTE Bruno, « Anatomie d'un concours. L'organisation de l'examen d'admission à l'École polytechnique de la Révolution à nos jours », *Histoire de l'Éducation*, no 94, 2002, p. 141-175.

123 COMTE Auguste, cité dans LAFFITE Pierre, « Auguste Comte, examinateur d'admission à l'École Polytechnique », *Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série*, tome 13, 1894, p. 410.

124 *Ibid.*, p. 411.

125 *Ibid.*, p. 413.

126 *Ibid.*, p. 418.

Peut-on parler de généralisation d'un enseignement du calcul différentiel en classe de mathématiques spéciales dans les années 1830-1850 ? Les disparités entre les différentes classes ouvertes dans la quarantaine de collèges royaux de ces années l'interdit probablement. L'écart est trop important entre les classes des grands lycées parisiens dont l'effectif dépasse la cinquantaine d'élèves et celles de certains lycées de province qui n'ont que quelques élèves, le professeur ne les préparant parfois pas au concours de l'École polytechnique s'il estime leur niveau insuffisant[127]. C'est ce que nous confirme l'analyse des lettres annexées au rapport de Gaspard-Gustave de Coriolis, directeur des études à l'École polytechnique. Ces documents figurent dans un dossier des archives de l'École polytechnique, le rapport étant intitulé, « Note sur les changements à faire au programme d'admission de l'École polytechnique » et portant la date 1840.

5 – 4 Le rapport de Coriolis (1840) : pour un enseignement du calcul différentiel et intégral en mathématiques spéciales

En 1839, Coriolis, directeur des études à l'École polytechnique prend l'initiative de proposer une réforme des études aux Conseils de l'École. Il se situe dans une perspective qui englobe la totalité de la formation d'un ingénieur. Pour dégager du temps dans les écoles d'application et mieux y former les élèves aux spécificités de chacune, il propose d'enseigner dès l'École polytechnique un certain nombre d'applications étudiées dans ces écoles, comme la résistance des matériaux, l'effet des machines, etc. Le temps nécessaire à cet enseignement serait gagné en renforçant le programme d'admission, et notamment en y intégrant les éléments de calcul différentiel et intégral.

S'il est difficile de savoir exactement quand et comment Coriolis fait ces propositions, il est intéressant pour nous de citer, quelques constats faits par Coriolis ainsi que certaines des lettres qu'il a reçues à la suite de ces propositions.

Parmi les avantages que présenterait l'introduction du calcul différentiel et intégral dans le programme d'admission, Coriolis y voit tout d'abord un intérêt concernant le concours lui-même :

> les examinateurs trouvant dans le calcul différentiel et intégral des points propres à sonder la capacité des candidats seront moins portés à sortir de la partie du

[127] Voir BELHOSTE Bruno, op. cit.

> programme ainsi limitée seulement par les mathématiques élémentaires et spéciales.[128]

Cette introduction éviterait aussi selon lui des « doubles méthodes », que ce soit pour le calcul des surfaces et des volumes, où la recherche des tangentes. Il estime d'ailleurs, à propos du calcul infinitésimal :

> il ne faut pas s'exagérer les difficultés qu'éprouvent les élèves à comprendre ce calcul ; elles ne sont pas plus grandes que celles que présentent les propositions de géométrie de Legendre sur les évaluations des surfaces courbes et les volumes des corps ronds.[129]

Plusieurs lettres reçues par Coriolis figurent dans le dossier. Citons tout d'abord celle de « Mr Michelot[130], chef d'institution honoraire et ancien officier du génie »[131] qui affirme que 17 ans d'expérience dans l'enseignement mathématique et dans la direction d'une école préparatoire lui font soutenir pleinement ses propositions. Il ajoute, que, « depuis très longtemps les professeurs des collèges royaux de Paris ne se contentent pas d'enseigner ce qu'on appelle l'exigé », y ajoutant notamment « les éléments de calcul différentiel et un peu de calcul intégral »[132]. Il estime en outre que les professeurs d'institution trouveraient là l'occasion de se servir de leurs connaissances en mathématiques transcendantes.

Une lettre d'Auguste Comte ne va pas dans le même sens[133]. Il lui semble que

> le renvoi aux études d'admission de la majeure partie du calcul infinitésimal, me paraîtrait fort dangereuse, comme tendant à altérer profondément l'unité et la pureté de l'enseignement mathématique de l'école, dont la plus importante portion passerait dès lors entre des mains bien inférieures, le plus souvent, à cette éminente attribution, et d'ailleurs trop multipliées pour être suffisamment cohérentes »[134].

L'argument est double. D'une part « l'analyse transcendante » doit rester un domaine réservé de l'École par souci de cohérence dans l'enseignement[135]. D'autre part Comte craint le niveau

---

[128] CORIOLIS (de) Gaspard-Gustave, « Note sur les changements à faire au programme d'admission de l'École polytechnique (1840) », III/ 3/a, carton n°1, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.
[129] *Ibid.*
[130] Il s'agit probablement de Jean Charles Auguste Michelot, polytechnicien de la promotion 1810.
[131] MICHELOT, III/ 3/a, carton n°1, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.
[132] *Ibid.*
[133] Il s'agit de la « copie conforme » d'une lettre datant de 1840. La copie est signée « H Tarry », probablement Harold Honoré Félix Tarry, élève de l'École de la promotion 1857.
[134] COMTE Auguste, III/ 3/a, carton n°1, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.
[135] Alexandre MOATTI estime que Comte va ici dans le même sens que Liouville (MOATTI Alexandre, op. cit., p. 306). Il situe d'autre part la position de Comte dans le cadre de la succession de Duhamel pour le poste d'analyse.

insuffisant des professeurs de classes préparatoires. Une autre lettre exprime cette même crainte, bien qu'elle soutienne le projet de Coriolis.

Elle émane de Pierre Joseph Étienne Finck[136] et date d'octobre 1842. Né en 1797, Finck est admis à l'École polytechnique en 1815. Admis au service de l'artillerie, il devient répétiteur de mathématiques à l'École d'artillerie de Strasbourg, puis professeur en 1827. À partir de 1829 il enseigne également en classe de mathématiques spéciales au lycée de Strasbourg. En 1842, il est nommé professeur suppléant d'astronomie à la Faculté des sciences de Strasbourg.

Cette lettre figure dans le même dossier mais sa teneur, et la date qu'elle porte (les autres lettres datent de 1839 ou 1840) laissent penser que Finck n'a pas, comme Michelot, été consulté par Coriolis sur ce projet de réforme, mais qu'il a écrit de sa propre initiative. On y lit, à propos du programme d'admission : « une addition me paraît nécessaire au programme : les premiers éléments de calcul différentiel devraient être, sinon exigés, du moins tolérés aux examens »[137]. Il rappelle que la notation des fonctions dérivées est déjà employée en algèbre mais ajoute, un peu plus loin :

> les professeurs des collèges sont-ils tous en état [mesure][138] de l'enseigner. Admettons que non. Eh bien qu'il soit permis aux examinateurs de tolérer l'emploi de ce calcul et j'affirme qu'au bout de trois ans on pourra l'exiger.[139]

Une autre lettre, envoyée par Finck en 1843 confirme notre hypothèse. Elle commence ainsi : « J'ai lu avec intérêt la note que vous avez eu l'obligeance de me communiquer par le canal de Mr. Couturat »[140]. Il semble que Coriolis ait fait passer sa « Note » à Finck après avoir reçu le premier courrier. Ce dernier espère d'ailleurs que les arguments qu'il faisait valoir dans sa première lettre pourraient aider Coriolis dans sa démarche.

Enfin, un peu plus loin, Finck écrit :

> j'ai introduit les infiniment petits rigoureux dans l'enseignement de la géométrie, et c'est à l'occasion de la première édition de ma géométrie que le Conseil royal

[136] Les renseignements biographiques sur Finck proviennent essentiellement de SHALLIT Jeffrey, « Origins if the Analysis of the Euclidean Algoritm », *Historia Mathematica*, vol. 21, 1994, p. 401-419.
[137] FINCK Pierre Joseph Étienne, III/ 3/a, carton n°1, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.
[138] Ce mot figure au-dessus du mot « état » dans la lettre.
[139] FINCK Pierre Joseph Étienne, *op. cit.*
[140] *Ibid.* Parmi les anciens élèves de l'Ecole polytechnique figure un Augustin François clément Couturat, de la promotion 1808.

a prescrit l'emploi exclusif des inft pts pour les mesures des surfaces et des volumes dans nos Collèges.[141]

L'ouvrage qu'évoque Finck est la *Géométrie élémentaire basée sur la théorie des infiniment petits* qu'il a publiée en 1838. La prescription des infiniment petits à laquelle il fait allusion concerne le programme des conférences préparatoires de mathématiques instaurées en 1840. Ces conférences sont ouvertes, à partir de la 4e, aux élèves qui se destinent aux écoles spéciales du gouvernement. L'arrêté du 14 septembre 1841 indique, pour le calcul de la circonférence du cercle : « Rapport des circonférences considérées comme des polygones réguliers semblables, d'un nombre infini de côtés infiniment petits ». Le même arrêté indique : « Donner la mesure de la surface de la sphère, et passer à celle de son volume par la considération des infiniment petits »[142]. Il ne s'agit cependant pas d'une complète nouveauté car le programme de 1833 pour la géométrie de 3e précise, à propos des pyramides : « Pyramides équivalentes, considérées comme des séries de tranches parallèles et infiniment minces »[143].

Une lettre de 1839 d'Arthur Morin, directeur de l'École d'application de l'artillerie et du génie de Metz évoque aussi cette introduction des infiniment petits en géométrie élémentaire et va dans le même sens que celle de Finck, sans cependant émettre de crainte sur la formation des enseignants des classes préparatoires[144].

Les propositions de Coriolis seront étudiées par les Conseils d'instruction et de perfectionnement en 1842 et 1843. Ils s'y opposeront, et le projet sera définitivement classé en janvier 1843[145]. Coriolis meurt en septembre de la même année.

Les réactions à ce projet nous permettent de constater, au début des années 1840 des situations très disparates à propos l'enseignement du calcul différentiel et intégral dans les classes préparatoires à l'admission à l'École polytechnique. Ce calcul est, semble-t-il, enseigné dans tous les lycées parisiens mais à Strasbourg Finck ne va visiblement pas jusque-là. Ceci paraît confirmé par l' « Avertissement » du *Traité élémentaire d'analyse infinitésimale* qu'il a

[141] *Ibid.*
[142] BELHOSTE Bruno, *Les Sciences dans l'Enseignement secondaire français, Textes officiels. Tome I: 1789–1914*, Paris, Institut national de recherche pédagogique, 1995, p. 170-173.
[143] *Ibid.*, p. 133.
[144] Voir MOATTI Alexandre, *op. cit.*, p. 301-302.
[145] Voir MOATTI Alexandre, *op. cit.*, p. 307-309.

publié en 1834 où il écrit avoir « enseigné l'analyse infinitésimale en leçons publiques à l'Académie de Strasbourg, et en leçons particulières»[146]. Enfin, il existe un doute sur la capacité des enseignants des classes préparatoires à assurer correctement cet enseignement. Un certain nombre des professeurs de mathématiques d'écoles centrales avaient obtenu une chaire en lycée après 1802. Certains, formés aux « cours révolutionnaires » de l'École normale de l'An III, n'avaient probablement pas complété leur formation en analyse[147]. De plus, la formation des professeurs de lycée de l'École normale supérieure était encore récente. Tout ceci justifie certainement les inquiétudes exprimées par Comte et Finck.

5 – 5 Le calcul différentiel et intégral dans des manuels pour la classe de mathématiques spéciales

La parution d'ouvrages contenant une initiation au calcul différentiel tels que les *Compléments de mathématiques spéciales* en 1838, de Pierre Blanchet, professeur au Collège Saint-Louis où les *Théories générales de géométrie analytique* en 1842, de Édouard Gouré, professeur de mathématiques spéciales au Collège royal de Limoges officialisent en quelque sorte l'enseignement du calcul différentiel pour la préparation au concours d'admission à l'École polytechnique. La difficulté du concours, le fait qu'il devenait de plus en plus rare que les candidats intègrent l'École polytechnique à l'issue d'une année de mathématiques spéciales, comme le rappelle Ritt dans son ouvrage, est aussi l'une des raisons du développement de cet enseignement. L'ouvrage de Blanchet est en effet « principalement destiné aux élèves qui font leur seconde année de mathématiques spéciales »[148]. Les grands lycées parisiens pouvaient organiser une préparation différenciée suivant que les candidats préparaient ou non le concours pour la première fois, et aller plus loin dans le cadre de la deuxième année.

Aucun programme officiel ne guidant les professeurs des classes préparatoires aux concours des Écoles polytechnique et normale, il faut parler au pluriel : Il s'agit bien *des* enseignements du calcul différentiel dont nous aller rechercher des traces dans les manuels de Blanchet et de Gouré.

Le manuel de Blanchet est sous-titré *Méthodes pour la discussion des courbes algébriques de degrés supérieurs, données par des équations résolues*. Il fait suite, selon l'auteur, à la

---

[146] FINCK Pierre Joseph Étienne, *Traité élémentaire d'analyse infinitésimale*, Bachelier, 1834, p. V.
[147] EHRHARDT Caroline et d'ENFERT Renaud, *op. cit.*
[148] BLANCHET Pierre, *Compléments de mathématiques spéciales*, Paris, Hachette, 1838, p. I.

tendance apparue dans les années précédentes, au concours d'admission, de donner comme sujet des discussions de courbes de degré supérieur à deux. Pour Blanchet, qui est l'un des professeurs de classes préparatoires les plus en vue de Paris[149], « le temps semble donc venu d'indiquer des méthodes pour ce genre de questions »[150]. Gouré ne justifie pas son texte mais le sous-titre du livre, *appliquées à la discussion des courbes algébriques de degrés supérieurs*, montre bien que l'origine en est la même. Nous avons ici un exemple de ce qui sera régulièrement dénoncé au cours du XIXe siècle, et dont nous reparlerons plus loin : l'inflation des matières préparées pour l'examen, consécutive aux questions posées par les examinateurs.

Les **Compléments de mathématiques spéciales** *de Blanchet (1838): un livre inspiré par Cauchy*

La page de garde indique que Blanchet est agrégé de physique au collège Saint-Louis. Si son livre, d'à peine deux cents pages est, ainsi que nous l'avons vu, surtout destiné aux élèves qui font leur seconde année de mathématiques spéciales, l'introduction précise que les connaissances nécessaires à la lecture d'un tel ouvrage le rendent accessible à des élèves de première année.

Le texte est partagé en deux sections. La première section, purement analytique est intitulée « Développement des fonctions algébriques explicites » et ne comporte pas de géométrie. L'application des résultats de cette section à la géométrie se trouve dans la seconde section intitulée « Discussions des lignes courbes données par des équations algébriques explicites ». La cinquantaine de pages de la première section est un abrégé de la « théorie des fonctions », pour reprendre le vocabulaire de l'époque, qui offre une introduction tout à fait remarquable au calcul différentiel.

La définition d'une fonction indique que Blanchet est indiscutablement un lecteur de Cauchy, même s'il ne le cite pas. En effet, pour lui, une fonction est « une variable tellement liée à une autre variable, qu'un changement de valeur dans la seconde entraîne un changement correspondant dans la première »[151]. Cette expression « tellement liée » se retrouvait sous la

---

[149] Voir BELHOSTE Bruno, « La préparation aux grandes écoles scientifiques au XIXe siècle : établissements publics et institutions privées », *Histoire de l'éducation*, N°. 90, 2001, p. 101-130.

[150] BLANCHET Pierre Henry, *Compléments de mathématiques spéciales*, Paris, Hachette, 1838, page d'introduction.

[151] *Ibid.,* p. 1.

plume de Cauchy dans chacun des trois textes publiés à l'occasion de son cours d'analyse à l'École polytechnique. Mais, plus particulièrement, c'est au *Leçons sur le calcul différentiel*, de 1829, que Blanchet se réfère. On retrouve en effet chez lui, après les définitions d'une limite et d'un infiniment petit semblables à celles de Cauchy, la notion de « base d'infiniment petits » qui ne se trouve pas dans les deux premiers ouvrages de Cauchy, ainsi qu'une une série de neuf théorèmes sur les propriétés des infiniment petits. Bien qu'inspirés directement de Cauchy, un certain nombre d'entre eux ne figurent dans aucun des ouvrages de ce dernier. L'objectif de Blanchet est de démontrer, avec toute la rigueur de celui qu'il prend indiscutablement pour modèle, que toute fonction algébrique est développable en série entière.

Mais, précédant ces théorèmes, Blanchet donne tout d'abord une démonstration purement analytique du théorème des valeurs intermédiaires[152]. Il a auparavant défini une fonction continue « dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable indépendante »[153] x_0 comme une fonction pour laquelle $\lim[f(x_0+h)-f(x_0)]=0$ pour h infiniment petit.

Après une étude des séries qui lui permet de parvenir au développement en série « d'une fonction algébrique explicite quelconque d'une variable infiniment petite ou infiniment grande »[154], Blanchet aborde la notion de dérivée d'une fonction quelconque. Elle est définie comme la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable, quand ce dernier converge vers 0, sans employer la notion d'infiniment petit. Par la suite, s'intéressant à des fonctions algébriques, puisque c'est l'objet du livre, et utilisant son théorème sur le développement en série entière de toute fonction algébrique, il en déduit que $f'(x)$ est le coefficient de h dans le développement : $f(x+h)=f(x)+Ah+A_1h^2+A_2h^3+\cdots R$, R étant un reste infiniment petit. Il utilise ce résultat pour établir les formules de dérivation des somme, produit, quotient et fonction de fonctions. Remarquons enfin, que si Blanchet utilise

[152] Sa démonstration du théorème des valeurs intermédiaires n'est pas recevable de nos jours. Blanchet considère un intervalle de x_0 à X. Et pour C comprise entre $f(x_0)$ et $f(X)$, il appelle A la plus grande des valeurs parmi celles qui sont plus petites que C, et B la plus petite des valeurs parmi celles qui sont plus grandes que C. En termes actuels il admet donc l'existence d'un plus grand élément et d'un plus petit élément pour des intervalles de la forme $[\alpha\,; C[$ et $]C; \alpha]$. On semble pouvoir lire dans cette erreur la conception des nombres de d'Alembert rappelée au chapitre 1 : des nombres formant une quantité discrète.

[153] *Ibid.*, p. 5.

[154] *Ibid.*, p. 43.

la notion d'infiniment petits de Cauchy, il n'emploie jamais la notation leibnizienne ni ne définit la différentielle d'une fonction.

La deuxième section définit la tangente comme position limite d'une sécante puis, étudiant d'abord le cas d'une courbe passant par l'origine, la continuité de la courbe justifie le fait que le rapport $\frac{f(x)}{x}$ converge vers une limite qui est la tangente trigonométrique de l'angle entre la tangente à la courbe et l'axe des x. Ceci est ensuite étendu au cas général. Blanchet précise qu'on pourra toujours trouver la tangente par un calcul algébrique direct ou par le développement de $f(x_0+h)-f(x_0)$ suivant les puissances de h. Ce sont les deux méthodes qu'il emploie par la suite dans les exemples traités. Nous citons pour conclure les trois exemples proposés dans l'ouvrage.

> Exemple I : $y=\frac{X^3-3X+2}{x+1}$. Trouver la tangente au point dont l'abscisse est 3.
>
> Exemple II : $y=x^2\pm\sqrt{x^2+1}$. Chercher l'équation générale de la tangente et trouver la tangente au point dont l'abscisse est 2.
>
> Exemple III : $y=\pm\sqrt{\frac{x^3\pm x^2\sqrt{x^2-3}}{x-1}}$. Trouver la tangente au point dont l'abscisse est 2 et dont l'ordonnée est 2.[155]

Blanchet ne précise pas s'ils ont été donnés au concours d'admission à l'École polytechnique, mais l'avertissement laisse à penser qu'ils se rapprochent des exigences des examinateurs. Ils permettent aussi de se faire une idée de celles des professeurs dans certaines classes de mathématiques spéciales. Il faut en effet se garder de l'idée que ce manuel est représentatif de l'enseignement de l'analyse dans cette classe. La situation était, nous l'avons vu, bien différente entre les grands collèges parisiens où enseignait Blanchet, et les collèges de province.

Les Théories générales de géométrie analytique *de Gouré (1842)*

Gouré, qui enseigne au Collège royal de Limoges en 1842, au moment où il publie ses *Théories générales de géométrie analytique*, est confronté à la seconde situation. Nous ne connaissons pas l'effectif de la classe de mathématiques spéciales à Limoges en 1842 mais nous savons qu'en 1865 cette classe n'existe plus. Nous n'avons pas d'autre information sur Gouré qui n'est pas un ancien élève de l'École normale supérieure ou de l'École polytechnique. Son nom ne figure pas non plus parmi les lauréats de l'agrégation.

[155] *Ibid.,* p. 82, 83, 84.

Contrairement à Blanchet, Gouré ne fait pas précéder sa discussion des courbes d'une partie analytique. Son texte débute par la définition d'une ligne, ou d'un système de lignes, « suite continue de tous les points [...] dont l'équation $f(x,y)=0$ est la représentation analytique »[156], l'existence d'une telle relation entre abscisse et ordonnée caractérisant les lignes susceptibles d'une « définition rigoureuse ». Cette équation n'est considérée que quelques pages plus tard comme l'expression d'une fonction, terme non défini, l'ouvrage de Gouré s'adressant visiblement à un public supposé familier de cette notion.

Le premier chapitre porte sur la recherche des tangentes considérées comme positions limites de sécantes. Pour déterminer l'équation de la tangente passant par deux points de coordonnées x', y' et x'', y'', Gouré calcule la limite du rapport $\frac{y''-y'}{x''-x'}$. Ne considérant que des expressions algébriques, qui peuvent donc se ramener à des polynômes en x, y, il obtient des expressions divisibles par $x''-x'$ et $y''-y'$. La limite est obtenue en posant $x''=x'$ et $y''=y'$. Il reconnaît dans cette expression les dérivées relatives à x et y du polynôme $f(x,y)$, qu'il note $f'(x)$ et $f'(y)$. L'équation de la tangente devient donc avec ses notations :

$$y-y'=-\frac{f'(x')}{f'(y')}(x-x')$$

Puis il observe que le « coefficient d'inclinaison » de la tangente, c'est-à-dire le rapport $-\frac{f'(x')}{f'(y')}$, « caractérise la marche de la courbe aux environs du point de contact » : l'angle de la tangente avec l'axe des abscisses, suivant qu'il est aigu ou obtus donnera, pour des abscisses croissantes, des ordonnées croissantes ou des décroissantes suivant le signe de ce coefficient. Et donc, « il suit de là que, toutes les fois qu'il y a un maximum ou minimum de l'ordonnée, le coefficient d'inclinaison de la tangente doit changer de signe ». Remarquons malgré tout que la méthode qu'il décrit par la suite pour la recherche des extrema utilise la proposition réciproque.

La détermination des tangentes lui permet aussi de déterminer les asymptotes à une courbe en les considérant comme des tangentes dont le point de contact est infiniment éloigné. Notons aussi, qu'à l'occasion des asymptotes, Gouré emploie les expressions « infiniment grand » et « infiniment petit », sans fournir de définition. Il apparaît cependant à la lecture du

[156] GOURÉ Émile, *Théories générales de géométrie analytique*, Paris, Bachelier, 1842, p. 1.

texte, qu'une quantité infiniment petite est, implicitement, une quantité variable de limite zéro.

Une même critique pour ces deux approches

L'année de parution de l'ouvrage de Gouré, 1842, est celle de la fondation des *Nouvelles Annales de Mathématiques* par Olry Terquem et Camille Gerono. Nous reviendrons plus loin sur cette revue qui se veut, comme son sous-titre le revendique, le *Journal des candidats aux Écoles polytechnique et normale*. Nous ne nous intéressons ici qu'à la critique simultanée de ces deux manuels à laquelle se livre Terquem dans l' « Analyse d'ouvrages » proposée par ce journal.

L'article est intitulé « Théories générales de géométrie analytique appliquées à la discussion des courbes algébriques de degrés supérieurs, à l'usage des candidats à l'École Polytechnique, par É. Gouré ». Il reprend le titre de l'ouvrage de Gouré mais Terquem évoque tout d'abord celui de Blanchet, paru quelques années plus tôt. Il lui reproche de vouloir « rendre rigoureuse la logique des infiniment petits ». Une telle exposition des infiniment petits leur fait perdre, selon Terquem, l'avantage de la rapidité. Elle devient alors « plus pénible, plus obscure, plus difficile à retenir que les limites de d'Alembert ou les dérivées de Lagrange », et ne consiste finalement qu'à un retour à la méthode d'exhaustion d'Archimède, où on représente « abstractivement par des lettres ce que les anciens figuraient et rendaient intuitif par des *lignes* »[157].

Quant à l'emploi de la notion de limite par Gouré, qu'il qualifie de « limite *prétendue* », Terquem reprend à son compte les critiques formulées par Lagrange que nous avons déjà indiquées à plusieurs reprises. À cette méthode, Terquem, pourtant ancien élève de Lacroix à l'École polytechnique, préfère celle de Lagrange, écrivant : « M. Gouré s'est privé d'un grand avantage, en ne prenant pas pour point de départ, le théorème de Taylor, base fondamentale de toute l'analyse et de ses applications à la géométrie et à la mécanique »[158].

[157] TERQUEM Olry, « Théories générales de géométrie analytique appliquées à la discussion des courbes algébriques de degrés supérieurs, à l'usage des candidats à l'École Polytechnique, par É. Gouré », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1e série, tome 1, Paris, Carilian-Goeury et Dalmont, 1842, p. 405.
[158] TERQUEM Olry, *op. cit.*, p. 406.

Des enseignements du calcul différentiel en classe de mathématiques spéciales

Ces deux manuels répondent à de nouvelles exigences des examinateurs du concours d'admission à l'École polytechnique. Leurs réponses sont bien différentes. Blanchet fournit une véritable introduction au calcul différentiel suivant les critères d'une rigueur à la Cauchy, la développant même avec de nouveaux théorèmes sur les infiniment petits adaptés à son propos. Gouré se contente de retrouver, dans le rapport des accroissements, la notion de polynôme dérivé. Il emploie une notion vague d'infiniment petit, mais effectue la recherche des extrema en étudiant le signe de la dérivée, méthode que nous avons vue employée pour la première fois par Cauchy.

Nous pouvons supposer que ces réponses différentes résultent de pratiques enseignantes différentes, Blanchet dans l'un des cinq grands collèges parisiens, Gouré dans un collège provincial qui peine à recruter pour la classe de mathématiques spéciales. Cette supposition paraît d'autant plus plausible si nous prenons en compte les propos de Blanchet dans son introduction où il prescrit plus particulièrement son livre aux élèves effectuant leur deuxième année de mathématiques spéciales. Ces ouvrages confirment que l'enseignement des éléments du calcul différentiel qui s'était généralisé dans les lycées parisiens se développait aussi dans les lycées de province. Il s'avère cependant fort disparate, allant d'une approche intuitive fondée sur des images géométriques, à une présentation rigoureuse des principes de ce calcul.

Quant aux exigences nouvelles des examinateurs, puisqu'elles ne correspondent pas à des modifications du programme d'admission au concours de l'École polytechnique, nous pouvons envisager qu'elles sont la conséquence de la maîtrise par certains candidats de nouvelles notions. Une épreuve orale est la forme d'épreuve idéale pour tester les candidats au plus loin de leurs connaissances. Nous avons probablement plus à faire, en ce qui concerne les sujets du concours, à une dynamique entre enseignants en classes préparatoires et examinateurs d'admission qui a pour résultat une généralisation de l'enseignement des éléments du calcul différentiel, plus qu'à une responsabilité attribuable directement aux uns ou aux autres.

6 – Un enseignement à la faculté de Lyon : les conceptions de Cournot

6 – 1 Cournot, philosophe et pédagogue des mathématiques

Cournot, né en 1801 à Gray, en Haute-Saône, reconnu aujourd'hui comme l'un des philosophes français majeurs du XIXe siècle, est l'auteur d'une œuvre multiforme qui a exploré les champs des connaissances mathématiques, économiques, philosophiques et historiques[159]. Admis à l'École normale en 1821, il suit les cours de la Sorbonne à la fermeture de celle-ci, en 1822. Il a donc Lacroix pour professeur de calcul différentiel et intégral, en qui il reconnaît un « géomètre érudit et point inventeur », mais aussi un « assez mauvais professeur […] [qui] ne pouvait pas se passer de son livre et de ses notes »[160]. Il s'y lie avec Johan Peter Gustav Lejeune-Dirichlet, relation qu'il entretiendra, de façon épisodique, jusqu'à la mort de ce dernier.

À partir de 1826 il publie un certain nombre de comptes rendus et d'articles, portant principalement sur la mécanique, dans le *Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques*, de Férussac. En 1829 il obtient son doctorat ès sciences. Sa thèse principale traite du mouvement d'un solide sur un plan fixe[161]. Ses travaux sont remarqués de Poisson auquel il devra sa chaire de mathématiques à la faculté des sciences de Lyon rétablie en 1834[162]. Il lui doit aussi le poste de Recteur de l'Académie de Grenoble, en 1835, poste qu'il cumule avec la chaire de mathématiques dans cette même ville, jusqu'en 1838. Cette même année, il publie son premier livre. Celui-ci, intitulé *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, traite d'économie. Toujours en 1838, Poisson intervient pour qu'il succède officiellement à Ampère comme Inspecteur Général des Études, poste qu'il occupera durant quinze ans[163]. En 1839 Poisson le fait nommer à la

[159] Les données biographiques de cette section sont tirées de ROBINET André, « Avant-Propos, Une vie », dans *Etudes pour le centenaire de la mort de A. Cournot,* Paris, Economica, 1978, p. 1-3, de SAINT-SERNIN Jane, «Portrait de Cournot » dans Thierry MARTIN (éd.), *Actualité de Cournot*, Paris, Vrin, 2005, p. 17-29, et bien sûr de COURNOT Antoine-Augustin, *Souvenirs (1760-1860),* Paris, Hachette, 1913.

[160] COURNOT Antoine-Augustin, *op. cit.*, p. 79.

[161] On pourra lire à ce sujet GRATTAN-GUINESS Ivor, « Cournot et la mécanique (1826-1834) et particulièrement son utilisation des inégalités » dans Thierry MARTIN (éd.), *Actualité de Cournot*, Paris, Vrin, 2005, p. 69-86.

[162] Créée en 1810, dans le mouvement qui institue les facultés des sciences et des lettres, la faculté des sciences de Lyon avait été supprimée à la Restauration.

[163] Dès 1836, après la mort d'Ampère à Marseille lors de sa tournée d'inspection, Cournot l'avait suppléé dans ce poste d'Inspecteur Général.

présidence au jury du concours de l'agrégation de mathématiques[164], poste éminemment important dont il écrira « qu'il [l']assimilait presque, dans l'opinion de [son] corps, aux membres du Conseil royal »[165].

Le rôle institutionnel de premier plan tenu par Cournot dans le système éducatif français justifie que nous portions un intérêt tout particulier au *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal*, qu'il publie en 1841. Ce traité, tiré de sa brève expérience d'enseignant en faculté, est celui d'un homme qui fut le « pilier des études mathématiques en France »[166]. Ouvrage d'un des membres les plus éminents de l'Université telle que l'avait voulue Napoléon, ce livre est aussi le premier que nous étudions qui s'adresse explicitement à « des jeunes gens qui se préparent [aux] grades et [aux] concours universitaires »[167], c'est-à-dire la licence et l'agrégation, même si son propos en dépasse les programmes

C'est aussi l'ouvrage d'un homme qui se dit « porté depuis longtemps par goût vers l'étude de la philosophie des sciences », et qui s'estime ainsi préparé « à traiter un sujet où les considérations de ce genre sont inévitables, et où chacun fait, bon gré mal gré, sa *métaphysique* »[168]. Et, dans la préface, Cournot nous livre sa propre métaphysique du calcul infinitésimal.[169]

Il reconnaît un même mérite originel à Newton et à Leibniz. Mais, allant plus loin que les ouvrages étudiés dans les sections précédentes, il ne suffit pas selon lui de donner un aperçu des liens qui unissent ces deux théories. L'enseignement des deux est une nécessité car

> Le développement parallèle des idées de Newton et de celles de Leibniz n'est pas seulement un fait historique ; il tient au fond du sujet et ne peut être négligé dans une exposition didactique[170] sans que l'exposition pèche en quelques

[164] *Ibid.*., p. 162. Cournot reconnaît devoir beaucoup à Poisson qui l'imaginait avoir un grand avenir dans le domaine de la « pure spéculation mathématique ». Cournot se voyait pour cette raison « l'erreur de Poisson », comme Poinsot avait été celle de Lagrange.

[165] On sait le pouvoir qu'avait eu Victor Cousin sur l'enseignement de la philosophie en France grâce à son poste de président du jury de l'agrégation de philosophie.

[166] SAINT-SERNIN Jane, op. cit., p. 22.

[167] COURNOT Antoine-Augustin, *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal*, tomes I, Paris, Hachette, 1841, p. XIII.

[168] *Ibid*., p. VII.

[169] On lira à ce propos MARTIN Thierry, « Cournot et les mathématiques », dans Évelyne BARBIN et Maurice CAVEING (dir.), *Les philosophes et les mathématiques*, Paris, Ellipses, 1996, p. 193-211.

[170] Cournot emploie le terme didactique qui, à cette époque, fait plus directement référence à ce qui concerne l'enseignement. La pédagogie renvoie de façon plus générale à l'éducation des enfants.

> points : les deux théories se complètent l'une l'autre, sans qu'on n'en puisse assigner une troisième qui ne rentre au fond dans l'une ou dans l'autre.[171]

Ce retour à Newton et à Leibniz signe aussi, pour Cournot, l'échec de la tentative de Lagrange « de fonder […] tout le calcul différentiel sur de simples identités algébriques »[172]. Dans le corps du texte, revenant sur cet échec, il cite non seulement le contre-exemple de Cauchy mais aussi le cas des fonctions empiriques pour lesquelles

> le tracé de la courbe étant arbitraire entre les valeurs $z = x$ et $z = x + h$, et ne dépendant point de la forme de la courbe dans le voisinage du point initial, il serait absurde que les quantités
>
> $$fx, f'x, f''x, f'''x, \ldots.$$
>
> qui se rapportent toutes au point initial, déterminassent le tracé de la courbe dans tout l'intervalle que l'on considère.[173]

Les deux ouvrages de Lagrange sur son enseignement à l'École polytechnique, « d'abord accueillis, par toute une génération de jeunes géomètres, comme fixant les bases de l'enseignement », reposent selon Cournot sur

> un de ces paralogismes métaphysiques dans lesquels les plus grands maîtres peuvent tomber, lorsque la nature de leur sujet les force à sortir de l'analyse et de la synthèse scientifique, pour entrer dans la critique des idées qui sont le matériau même de la science.[174]

Selon lui, Lagrange reprend la méthode de Newton. Il ne reconnaît pas de mérite à la notation lagrangienne qui ne diffère guère de la notation newtonienne, ni aux « épithètes vagues de *primitives* et de *dérivées* [qui] ne valent pas les dénominations de *fluentes* et de *fluxions* »[175]. Dans son exposition de la théorie des fonctions dérivées, Cournot utilise le vocabulaire et les notations lagrangiennes. Mais, ce n'est pour lui, qui s'adresse à de « jeunes étudiants », qu'une concession, la reconnaissance d'un état de fait puisqu' « il faut parler le langage actuellement reçu dans les écoles »[176]. Il nous faut sans doute entendre ici, l'École polytechnique et l'École normale supérieure.

Il ne signale pas non plus ce que son titre doit à Lagrange. Là où la théorie lagrangienne tentait « d'éluder […] dans le passage de la discontinuité à la continuité, l'emploi de toute notion

[171] COURNOT Antoine-Augustin, *op. cit.*, p. IX.
[172] *Ibid.*, p. IX.
[173] *Ibid.*, p178.
[174] *Ibid.*, p182.
[175] *Ibid.*, p. IX.
[176] *Ibid.*, p. IX.

auxiliaire de limite, de fluxion ou d'infiniment petit »[177], sa théorie « a pour objet les propriétés générales des fonctions continues : que ces fonctions s'expriment ou non par les signes de l'algèbre ou par d'autres symboles d'une valeur mathématiquement définie »[178]. Cournot élargit son propos à une gamme plus étendue de fonctions, donnant à rôle central à la continuité et rompt définitivement avec Lagrange en ajoutant à son titre le calcul infinitésimal.

Cet élargissement aux fonctions qui ne s'expriment pas par les signes de l'algèbre, celles qui, nous le verrons plus loin, expriment des phénomènes physiques, économiques, voire sociologiques, n'est pas étranger au premier précepte qui, selon lui, guide la rédaction de son traité : un « continuel usage des courbes […] ce signe si naturel et si commode, [qui] rend presque évidents une foule de résultats dont la preuve exige, pour être suivie, un certain effort d'esprit, quand on ne s'aide pas de considérations graphiques »[179]. Le corps du texte revient sur cette question de méthode, essentielle pour Cournot. Elle dépasse le simple cadre pédagogique et prend valeur d'outil mathématique en termes de démonstration. Il fait en effet de cet emploi des courbes la réciproque de la conception cartésienne d'application de l'algèbre à la géométrie. Appliquant ainsi la géométrie à l'algèbre, « la courbe n'est plus alors que le signe graphique et conventionnel de la loi algébrique qui lie les variables entre elles ; […] signe conventionnel […] merveilleusement adapté à la nature de la chose signifiée »[180].

Un second précepte a, selon lui, présidé à la rédaction de l'ouvrage. « L'enchaînement logique des propositions » qui n'éclaire pas nécessairement l'esprit est, s'il le faut, sacrifié pour faciliter le travail des « esprits ordinaires ». Cournot écrit :

> J'avoue même que je mettrais moins de prix à mettre dans la démonstration d'un théorème cette rigueur extrême, si recherchée maintenant de quelques personnes, qu'à faire clairement apercevoir la raison de ce théorème et ses connexions avec les autres vérités mathématiques. [181]

Sur ces deux derniers points il est difficile de ne pas voir des connexions entre Cournot et Lacroix. C'étaient bien chez Lacroix les considérations géométriques qui prouvaient l'existence de la dérivabilité d'une fonction continue. Et ce professeur « assez mauvais », Cournot le

[177] *Ibid.*, p180.
[178] *Ibid.*, p. VIII.
[179] *Ibid.*, p. X.
[180] *Ibid.*, p. 3.
[181] *Ibid.*, p. XIV.

reconnaissait dans ses *Souvenirs* comme un « auteur didactique [...] clair »[182]. Mais ces préceptes n'ont pas seulement chez Cournot une portée pédagogique. Ils procèdent de ses conceptions philosophiques[183]. Dans son *Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique*, il écrira en 1851 :

> La prétention d'y [en philosophie, en astronomie, en physique, en histoire, en affaires] tout réduire à la démonstration logique, et même la tendance à rechercher de préférence ce genre de preuves, ne peuvent aboutir qu'au scepticisme, comme l'atteste l'expérience de tous les siècles, et comme l'indiquent a priori les lois de l'intelligence humaine.[184]

6 – 2 Le *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal* (1841) : revenir avec Newton et Leibniz à la « nature des choses »

Nous nous concentrerons sur le « Livre premier » de cet ouvrage en deux tomes de plus de 500 pages chacun. Intitulé « Principes », ce « Livre » d'une centaine de pages, découpé équitablement en quatre chapitres, couvre les différents thèmes qui nous intéressent.

Il s'agit en effet d'un texte particulièrement dense[185]. Il multiplie les notions historiques, les renvois à des exemples tirés des sciences physiques ou sociales et les considérations de philosophie des sciences en général, et des mathématiques en particulier. La composition, qui donne une telle importance aux principes, est incontestablement la conséquence du goût d'un homme porté vers la philosophie des sciences ainsi qu'il l'affirmait dans sa préface. Peut-être faut-il aussi l'attribuer à l'auditoire très particulier des facultés de l'époque. Nous avons vu que Cournot indiquait que son auditoire se disséminait dans la durée, au fur et à mesure que les calculs mathématiques prenaient de l'ampleur. Mais il ne s'agissait probablement pas que d'un auditoire mondain. Dans une ville de la taille de Lyon, il se trouvait sans doute un public curieux et averti. Les considérations historiques et philosophiques des premières leçons permettaient sans doute de capter l'attention d'un tel public. D'autant plus que la perception de ces cours publics par les inspecteurs était très ambivalente. Si ceux-ci regrettaient le peu

[182] COURNOT Antoine-Augustin, *Souvenirs (1760-1860),* Paris, Hachette, 1913, p. 79.
[183] On pourra lire à ce sujet VATIN François, « Comte et Cournot. Une mise en regard biographique et épistémologique. », *Revue d'Histoire des Sciences Humaines*, n° 8, 2003, p. 9-40.
[184] COURNOT Antoine-Augustin, *Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique*, Paris, Hachette, 1851, p. 172.
[185] Ce travail d'analyse de l'ouvrage de Cournot prend appui sur POINCARÉ Henri, « Cournot et les principes du calcul infinitésimal », *Revue de Métaphysique et de Morale*, Paris, XIIIe année, 1905, p. 293-306 et sur DUGAC Pierre, « Cournot et le calcul infinitésimal » dans *Etudes pour le centenaire de la mort de A. Cournot*, Paris, Economica, 1978, p. 66-73.

d'instruction qu'ils procuraient, « la capacité à attirer un public non spécialiste [était] devenue un critère déterminant de la réussite professorale »[186].

Fonctions, continuité

Le premier chapitre est intitulé « Des fonctions en général, et de la théorie des fonctions ». Cournot ne donne pas de définition de cette notion mais il indique, après en avoir rappelé le premier sens chez les anciens algébristes : « le terme de fonction a dépouillé depuis longtemps cette acception particulière pour en prendre une beaucoup plus générale, et dont la généralité dénote l'un des progrès de l'abstraction mathématique »[187].

Cournot distingue les fonctions mathématiques, connues par des lois mathématiques, algébriques ou non, des fonctions empiriques[188]. Il illustre cette notion de fonction empirique par des exemples tirés des sciences physiques, économiques et sociales : mouvement du pendule pesant, force élastique de la vapeur d'eau, quantité demandée d'une denrée, rapport du nombre d'individus de chaque âge à la population totale. S'il n'apporte pas de nouveauté à cette conception déjà à l'œuvre dans les *Institutiones calculi differentialis* d'Euler, un développement d'une telle ampleur de cette notion est inédit dans notre étude. Il correspond aux recherches de l'auteur. Il lui permet de mettre d'emblée en avant ce qu'il avait désigné dans sa préface comme le but principal de l'analyse : ses applications aux sciences physiques et sociales.

Tout aussi remarquable est la question de la continuité, ou plus précisément de la discontinuité, chez Cournot. Il est, chronologiquement, le premier des auteurs de manuels que nous étudions à donner un exemple de fonction qui soit partout discontinue. Après avoir défini la continuité d'une fonction à la manière de Cauchy, il traite de la fonction $y = (-a)^x$ avec a positif. En effet, écrit-il, chaque fois que x est une fraction de numérateur impair et de dénominateur pair, la fonction devient imaginaire et,

---

[186] NOGUÈS Boris, *op. cit.*, p. 90.

[187] COURNOT Antoine-Augustin, *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal*, tomes I, Paris, Hachette, 1841, p. 1.

[188] Pierre DUGAC, *op. cit.*, p. 69, considère que Cournot avait une conception de la notion de fonction très proche de la nôtre lorsqu'il écrit que dans la notation $y = f(x), f$ désigne non une quantité mais une caractéristique de fonction analogue aux abréviations log ou sin. Nous pensons plutôt qu'il s'agit d'une remarque à caractère pédagogique. Ce que semble confirmer l'ouvrage de Cournot, *De l'origine et des limites entre la correspondance et la géométrie*, Paris Hachette, 1847. Il appelle fonction la grandeur « dont les variations sont censées subordonnées à celles de la variable indépendante » (p. 278).

> comme on peut toujours intercaler entre deux valeurs de x, si voisines qu'on les conçoive une infinité de fractions à numérateurs impairs et à dénominateurs pairs, il s'ensuit qu'on ne peut joindre par un trait continu deux points correspondants à deux systèmes de valeurs réelles pour les coordonnées x et y, quelques voisins qu'on les suppose.[189]

Cournot qualifie ces fonctions de fonctions « anormales », juge qu'elles ne sont pas « susceptibles de s'appliquer à la mesure des phénomènes naturels », et ne jouent « jusqu'ici qu'un rôle très-borné en analyse pure » [190].

Cependant, ce type de questionnement, qui sera aussi présent comme nous l'avons vu dans les cours de Liouville et Sturm, introduit une problématique de la recherche mathématique dans l'enseignement supérieur des éléments de l'analyse. En effet, nous savons que Cournot connaissait bien Dirichlet. Il n'ignorait donc pas la fonction introduite par ce dernier. Le choix cette fonction dont nous dirions aujourd'hui qu'elle n'est pas définie pour les valeurs considérées, mais pour laquelle le passage par des valeurs imaginaires ne posait pas problème à l'époque, révèle probablement la volonté de Cournot de proposer à ses lecteurs un exemple plus probant de fonction partout discontinue que ne pouvait l'être la fonction de Dirichlet. La fonction choisie par Cournot, mathématiquement exprimable par une relation qui utilise les signes de l'algèbre, devait paraître plus convaincante qu'une fonction dont l'arbitraire de la définition devait surprendre des lecteurs habitués à la notion de grandeur variable. On peut aussi se demander si Cournot suivait Dirichlet sur cette conception d'une fonction. L'importance de la notion de variable indépendante dans son ouvrage, que nous évoquerons par la suite, semble soutenir cette hypothèse.

La question de la discontinuité d'une fonction est illustrée un peu plus loin par un exemple pris à la physique. Cournot considère la mesure de la densité dans le cas de la superposition de deux liquides hétérogènes, eau et mercure. Même s'il pense que c'est en raison de l'imperfection de nos connaissances des milieux naturels qu'on « est autorisé à admettre, pour certaines valeurs physiques, […] des solutions de continuité résultant du passage brusque d'une valeur finie à une autre »[191], cette justification des notions mathématiques par des

---

189 COURNOT Antoine-Augustin, *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal*, tomes I, Paris, Hachette, 1841, p. 5.
190 *Ibid.,* p. 5.
191 *Ibid.,* p. 9.

appels aux sciences physiques est une nouvelle fois caractéristique des conceptions mathématiques et pédagogiques de Cournot.

Observer, démontrer à l'aide des courbes, puis justifier par des considérations physiques : c'est l'approche de Cournot lorsqu'il aborde les propriétés dont jouissent les fonctions continues. Les deux « propriétés » abordées dans les « Principes » sont celles que « la représentation graphique des fonctions par les courbes rend manifestes »[192].

La première est que l'accroissement proportionnel des fonctions est « sensiblement proportionnel » à l'accroissement de la variable, pour des variations très petites de cette dernière. Afin de la faire comprendre Cournot utilise tout d'abord une méthode numérique. Pour la fonction $y = \frac{x^2-7x+6}{x-10}$ il calcule deux séries de valeurs du rapport des accroissements de la fonction à ceux de la variable, pour x variant par pas de 1/100^{e} de 1 à 1,03 puis de 6 à 6,03. Tables de valeurs complétées par un argument géométrique : l'arc de courbe se confond d'autant plus avec la tangente que cet arc est plus petit. Les progrès des sciences physiques viennent corroborer cette propriété :

> Plusieurs principes de physique, découverts par l'expérience, et donnés comme des faits d'observation, ne sont que des conséquences du principe mathématique que l'on vient de rappeler.[193]

Nous retrouvons la même argumentation, inversée, pour la seconde propriété des fonctions continues, à savoir qu'une fonction reste sensiblement stationnaire dans le voisinage des minima ou des maxima. Tout d'abord, « ceci ressort […] de l'inspection des courbes »[194], puis des tables de valeurs au voisinage de $x = 4$ et $x = 16$ pour lesquelles la fonction déjà citée connaît un maximum et un minimum confortent le premier argument. Enfin la physique appliquée et l'économie assoient la pertinence d'une telle propriété qui

> trouve sans cesse son application dans la pratique, et notamment dans la mécanique industrielle, où il s'agit surtout d'apprécier la valeur d'une certaine grandeur, qui correspond à un maximum d'effet utile pour la même dépense d'argent ou de force, ou à un minimum de dépense pour la production du même effet utile.[195]

[192] *Ibid.,* p. 9.
[193] *Ibid.,* p. 11.
[194] *Ibid.,* p. 12.
[195] *Ibid.,* p. 13.

Dérivées et primitives

La « Théorie des fonctions dérivées » est traitée au chapitre 3, le chapitre 2 étant consacré à la classification des fonctions et à leur développement en série. Nous ne signalerons, à propos du deuxième chapitre où Cournot reprend notamment la classification des fonctions que nous avons déjà rencontrées, que deux points remarquables.

Premièrement, et c'est une conséquence de l'importance qu'il accorde aux fonctions empiriques, Cournot traite de la question de l'interpolation. Deuxièmement, il aborde le développement d'une fonction en série trigonométrique ainsi que les séries qui sont ou non commutativement convergentes. Cela fait de lui le premier auteur de manuels que nous avons étudié à poser ces questions. Rappelons que c'est en 1837, quatre ans seulement avant la parution du livre, un an avant que Cournot ne cesse d'enseigner, que Dirichlet avait publié ses travaux sur la convergence commutative[196].

La présentation de la notion de fonction dérivée est originale. Selon lui, la question fondamentale du calcul différentiel est celle du rapport de deux grandeurs qui s'évanouissent simultanément. Cournot présente donc la recherche de la fonction dérivée comme un cas particulier d'un problème plus général, celui de la limite de la fonction $u = \frac{fx}{Fx}$ quand les fonctions f et F s'évanouissent à la fois. Dans le cas général, la considération des courbes permet alors de « concevoir » l'existence d'une limite à ce rapport. Si $Fx = x$, il considère d'abord le cas où la courbe de la fonction f passe par l'origine des axes. La limite dont il vient de « reconnaître l'existence » dans le cas général est alors la tangente trigonométrique que fait, avec l'axe des abscisses, la tangente à la courbe tracée à l'origine. Il en déduit ensuite la dérivée comme la limite du rapport des accroissements $\frac{fx_1 - fx}{x_1 - x}$ dans le cas le plus général. À nouveau, les courbes interviennent dans la démonstration, et malgré l'originalité du point de vue de Cournot, nous pouvons sans doute y lire un héritage de Lacroix.

Le lien entre signe de la dérivée et sens de variation est ensuite traité par des considérations graphiques. Cournot en déduit la recherche des extrema qui se ramène à la recherche des valeurs qui annulent la dérivée. Et, toujours par des considérations géométriques, il remarque que la valeur absolue de $f'x$ mesure la « rapidité de l'accroissement ou du décroissement de

[196] Voit le chapitre intitulé « Dirichlet ouvre la voie à la topologie générale » dans DUGAC Pierre, *Histoire de l'analyse*, Paris, Vuibert, 2003, p. 112-118.

fx », car « bien que le terme de rapidité ne s'applique, dans le sens propre, qu'au phénomène du mouvement, chacun comprend l'acception extensive que nous lui donnons ici »[197]. Cette notion que « chacun comprend » est appliquée à la question de la convexité des courbes et à la recherche des points d'inflexion.

La question inverse, de recherche de la fonction primitive connaissant la fonction dérivée suit presque immédiatement. Cournot en donne sa « signification géométrique » en recherchant l'aire sous la courbe d'une manière semblable à celle que nous avons analysée chez Lacroix, même s'il n'emploie pas la notion de différentielle qu'il n'a pas encore abordée.

Une « Note sur la théorie des fluxions », de plus de trois pages, termine ce chapitre d'introduction à la théorie des fonctions dérivées. C'est la première fois que nous observons une référence aussi longue et explicite à la théorie de Newton depuis le début de notre recherche. Les notations newtoniennes des fluxions, $\dot{y}, \ddot{y}$, …, y figurent. Cournot élargit le champ d'application des fluxions à des problèmes de physique car, « si on peut avec Newton, prendre pour type des quantités fluentes la distance x d'un point fixe O à un point m en mouvement », on peut aussi, « choisir tout autre exemple sans nuire à la clarté des idées » comme la température de la surface d'un corps qui se refroidit car « on se fait de la vitesse du refroidissement une idée aussi directe et aussi claire que de la vitesse variable d'un point mobile »[198]. La fin de cette phrase ne peut pas ne pas être lue comme une objection à Lagrange qui, dans sa *Théorie des fonctions analytiques*, affirmait n'avoir pas une idée bien nette d'une vitesse variable[199].

Quant aux reproches habituellement faits à Newton, si Cournot accepte celui d'avoir introduit le mouvement dans sa théorie, il réfute celui d'employer la notion de temps car elle intervient « naturellement » dans la théorie des fonctions puisque « le temps est la seule variable essentiellement indépendante, et la seule dont la variation soit essentiellement uniforme, ou la fluxion constante »[200].

[197] *Ibid.,* p. 53.
[198] *Ibid.,* p. 70.
[199] Voir *supra*, Chapitre 1, p. 63.
[200] COURNOT Antoine-Augustin, *op. cit.*, p. 71.

Cournot reviendra longuement dans son *Traité de l'enchaînement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire* publié en 1861 sur le rôle particulier et unique joué par la variable temps, à l'origine selon lui de la théorie newtonienne des fluxions, écrivant :

> Le temps, tel que nous le concevons, s'écoule uniformément et indépendamment de tous les phénomènes qui s'accomplissent dans le temps. De là l'idée qu'a eue Newton de comparer le changement, ou, pour employer son langage, l'écoulement (*fluxio*) de toutes les grandeurs à l'écoulement du temps, et de considérer de considérer toutes les grandeurs variables comme des fonctions du temps. Ce n'est point-là, comme des esprits éminents l'ont pensé une comparaison artificielle et arbitraire ; elle tient au contraire à l'essence des choses, autant qu'il nous est possible d'en juger.[201]

La théorie des infiniment petits

Le chapitre 3 se clôt sur ce retour à Newton. Le chapitre suivant revient aux infiniment petits mais il ne s'agit pas d'un simple retour aux notions développées par Leibniz. La « Théorie des infiniment petits et principes du calcul infinitésimal » est précédée de « Notions sur les différences des divers ordres ». Cournot « [remarque] que le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ converge indéfiniment vers la limite $f'x$, quand Δx décroît indéfiniment »[202], d'où, « avec une approximation indéfinie, et d'autant plus grande que Δx est une fraction plus petite,

$$\Delta y = f'x.\Delta x$$ »[203].

Il obtient de même, $\Delta^2 y = f''x.\Delta x^2$ et $\Delta^3 y = f'''x.\Delta x^3$.

Il observe ensuite que les rapports de $\Delta^2 y$ à Δy, de $\Delta^3 y$ à $\Delta^2 y$, …, sont d'autant plus petits que la différence Δy est petite, et donc que l'erreur commise en négligeant $\Delta^2 y$, $\Delta^2 x$ vis-à-vis de Δy et Δx, $\Delta^3 y$, $\Delta^3 x$ vis-à-vis de $\Delta^2 y$ et $\Delta^2 x$, …, devient inférieure à toute grandeur donnée pour Δx assez petite. Selon lui, Leibniz exprimait cette même idée

> d'une manière plus brève en disant que $\Delta^2 y$, $\Delta^2 x$ sont rigoureusement négligeables vis-à-vis de Δy, Δx ; que $\Delta^3 y$, $\Delta^3 x$ le sont pareillement vis-à-vis de $\Delta^2 y$, $\Delta^2 x$, et ainsi de suite lorsque la différence Δx est infiniment petite.[204]

---

[201] COURNOT Antoine-Augustin, *Traité de l'enchainement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire*, tomes I, Paris, Hachette, 1861, p. 86.
[202] COURNOT Antoine-Augustin, *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal*, tomes I, Paris, Hachette, 1841, p. 75.
[203] *Ibid.*, p. 76.
[204] *Ibid.*, p.81.

Et donc, désignant avec Leibniz par dx et dy des quantités infiniment petites propres à « exprimer la même chose avec la concision qui est propre à l'écriture algébrique » il obtient :

$$dy = f'x.dx\,, d^2y = f''x.dx^2, d^3y = f'''x.dx^3, \text{etc.}$$

Il démontre la supériorité de l'algorithme leibnizien, en calculant la dérivée de la fonction : $y = x^3 + ax^2 + bx + c$, puis en la différentiant. Cette supériorité est telle que,

> quelque adresse que l'on mette à employer la méthode des limites, et quelques simplifications que les progrès des sciences apportent dans les théories mathématiques et physiques, on arrive toujours à des questions pour lesquelles il faut renoncer à cette méthode et y substituer, dans le langage et dans les calculs, l'emploi des infiniment petits de divers ordres.[205]

Mais surtout, pour Carnot, plus « qu'un artifice ingénieux », la méthode infinitésimale « est l'expression naturelle du mode de génération des grandeurs physiques qui croissent par éléments plus petits que toute grandeur finie »[206], assertion qu'il justifie en considérant l'exemple de la perte de température d'un corps qui se refroidit et celui des distances parcourues par un corps en chute libre. Ce qui lui permet d'affirmer que, « sous ce point de vue, on a pu dire avec fondement, que les infiniment petits *existent dans la nature* »[207].

La théorie des infiniment petits selon Cournot est donc très éloignée de la présentation originelle de Leibniz ou de l'enseignement qu'en donnait Bézout dans son *Cours de mathématiques*. Elle est éloignée aussi de la théorie de Cauchy, même si toutes deux ont pour base la notion de limite, car

> le concept d'infiniment petit ne peut se définir logiquement que d'une manière indirecte, par l'intermédiaire des limites ; de sorte qu'au point de vue logique et subjectif, la rigueur démonstrative appartient directement à la méthode des limites et indirectement à la méthode infinitésimale en tant que celle-ci devient, à l'aide de certaines définitions de mots, une pure traduction de la première.[208]

Par suite, l'intégrale définie de Cournot, adepte des infiniment petits, est sans surprise pour une fonction $y = fx$ prise entre les valeurs x et x_0 « la somme des incréments infiniment petits ou des éléments différentiels $dy = f'x.dx$, par l'accession successive desquels la

[205] *Ibid.*, p.86.
[206] *Ibid.*, p.86.
[207] *Ibid.*, p.87.
[208] *Ibid.*, p.88.

fonction a passé de la valeur y_0 à la valeur y »[209]. Cette définition de Cournot est identique à celle préconisée à l'époque par le programme de l'École polytechnique.

Terminons en signalant une autre originalité du livre de Cournot, qui mène de front calcul différentiel et calcul intégral. En effet, Cournot énonce parallèlement les théorèmes généraux sur les différentielles et sur les intégrales : la différentielle d'une somme est suivie de l'intégrale d'une somme ; la différentielle d'un produit est suivie de l'intégrale du produit d'une fonction par une constante et du théorème d'intégration par parties.

6 – 3 Conclusion

Les références de Cournot à Newton et Leibniz sont, selon lui, un retour à l'ordre des connaissances qui est l'objet du *Traité de l'enchainement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire*. Dans le même ouvrage il aborde les problématiques les plus récentes des fonctions partout discontinues ou de la convergence commutative. Sans doute souhait-t-il, avec sa présentation du calcul différentiel, être l'un de ceux qui aident « à mettre d'accord la sagesse de leur siècle avec la sagesse des siècles qui l'ont précédé »[210].

Car il faut avant tout lire ce *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal* comme le manuel d'un auteur convaincu qu'enseigner le calcul différentiel c'est d'abord en poser les principes. Les siens, ainsi qu'il l'écrivait dans sa préface, ne s'expriment pas dans une rigueur extrême. Mais il n'est pas pour lui question de progresser sans avoir établi un ordre des connaissances. Et cet ordre est clairement exprimé dans la critique formulée contre d'Alembert selon qui on devait, pour définir une « vitesse continuellement variable […] toujours recourir à la considération des limites ». En faisant ainsi « on a mal à propos subordonné la précision des idées à leur définition logique. Un concept existe dans l'entendement, indépendamment de la définition qu'on en donne »[211]. Aux définitions logiques souvent compliquées, si elles existent, Cournot préfère l'ordre de simplicité des idées. On peut en ce sens parler avec Cournot d'une troisième voie dans l'enseignement du

[209] *Ibid.*, p.90.
[210] COURNOT Antoine-Augustin, *Traité de l'enchainement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire*, tomes I, Paris, Hachette, 1861, p. IX.
[211] COURNOT Antoine-Augustin, *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal*, tomes I, Paris, Hachette, 1841, p. 72.

calcul différentiel qui n'est ni la compréhension en cheminant de Lacroix qui exclut les principes rigoureusement posés, ni la rigueur de Cauchy.

Nous avons vu en quoi il importait de se pencher en détail sur l'ouvrage de Cournot, l'une des personnalités majeures de l'enseignement secondaire des années 1840. La seconde édition du *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal* date de 1857, trois ans après que Cournot eut quitté ses fonctions d'Inspecteur général des Études pour occuper le poste de Recteur de l'Académie de Dijon. Il n'y aura pas d'autre édition.

Quel a été, dans la durée, l'héritage de Cournot pour l'enseignement du calcul différentiel ? Nous proposons simplement ici trois éléments de réponse. En 1877, le *Dictionnaire général des sciences théoriques et appliquées* cite en deuxième, après le *Traité élémentaire* de Lacroix et avant les ouvrages de l'abbé Moigno, de Duhamel, de Navier et de Sturm, le texte de Cournot « parmi les ouvrages ou l'on peut apprendre le calcul différentiel »[212]. En 1870, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, Jules Houël évoque « l'excellente *Théorie des fonctions* de M. Cournot »[213]. Cependant, lorsqu'en 1905 la *Revue de Métaphysique et de Morale* consacre une série d'articles à Cournot à l'occasion d'un projet de réédition de ses ouvrages, la rédaction précise vouloir attirer l'attention du public « sur une œuvre que trop généralement il ignore »[214]. Personnage important de son temps pour l'enseignement des mathématiques, nous devons malgré tout nous demander si l'autorité de son œuvre d'enseignant a survécu longtemps à son rôle institutionnel.

7 – Les manuels étrangers de calcul différentiel et intégral dans la presse mathématique (1810-1850)

Nous avons vu que les ouvrages de Lacroix, Francoeur et Boucharlat ont connu de nombreuses traductions. En retour, nous nous sommes demandé quelle connaissance des manuels étrangers de calcul différentiel ont pu avoir les enseignants français ?

---

[212] *Dictionnaire général des sciences théoriques et appliquées,* 1ère partie, Paris, Delagrave et Garnier, 1877, p. 348.

[213] HOUËL Jules, « SCHLÖMILCH (O) : Compendium der höheren Analysis", *Nouvelles Annales de Mathématiques*, *2ème série*, t. 9, 1870, p. 389.

[214] *Revue de Métaphysique et de Morale*, 13eme année, 1905, p. 292. Parmi ces articles figure celui de Henri Poincaré intitulé « Cournot et les principes du calcul infinitésimal », p. 293-306. Poincaré y revient longuement sur la conception cournotienne de l'infiniment petit et sur sa distinction entre « ordre logique » et « ordre rationnel ».

Pour aborder cette question, nous avons choisi d'interroger les journaux mathématiques. Il ne suffit pas qu'un livre soit traduit pour connaître une diffusion significative. Même non traduit, qu'il soit signalé, et mieux, analysé, dans un des journaux d'une presse mathématique qui connaît son essor dans cette première moitié du XIX^{e} siècle, accroît la potentialité d'une audience[215]. C'est le critère que nous avons retenu dans cette section.

Le *Journal de Gergonne*, ne nous apporte malheureusement pas d'exemple de recension d'un manuel étranger de calcul différentiel[216]. Le *Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques* est un peu plus riche d'informations[217].

Fondé en 1824 par André d'Audebard, baron de Fréussac, ce journal n'est que la première section d'un *Bulletin universel des sciences et de l'industrie* qui en comporte huit. Le programme de cet ensemble est particulièrement ambitieux puisqu'il doit répondre, selon son concepteur, à la nécessité de « réaliser une topographie statistique de la science en général, qui éclairerait la marche des savants »[218]. Seize tomes de la première section paraîtront entre 1824 et 1831. S'il ne s'agit pas d'un journal destiné à la communauté enseignante, les questions d'enseignement ne sont pas absentes et chaque numéro comporte, en mathématiques une bibliographie où sont signalés un certain nombre de manuels d'enseignement, français ou étrangers. Les seize tomes du *Bulletin de Férussac* ne mentionnent que six ouvrages étrangers d'enseignement du calcul différentiel et intégral, dont aucun ne semble avoir été traduit en français.

Nous les avons répertoriés dans le tableau suivant, indiquant en première colonne l'année et le tome du *Bulletin de Férussac* qui mentionne ces ouvrages. Les noms indiqués dans la dernière colonne sont notés (1) lorsqu'il s'agit, selon le texte de la recension, d'un auteur de référence pour le manuel. Si la recension ne fournit aucun nom, ils sont notés (2) lorsqu'il

---

[215] Pour les informations concernant les journaux mathématiques durant cette période, nous utilisons plus particulièrement VERDIER Norbert, « Les journaux de mathématiques dans la première moitié du XIXe siècle en Europe », *Philosophia Scientae*, 13-2, 2009, p. 97-126.

[216] Sur « le journal de Gergonne » on pourra lire DHOMBRES Jean et OTERO Mario H., « Les Annales de mathématiques pures et appliquées, le journal d'un homme seul au profit d'une communauté enseignante » dans Elena AUSEJO et Mariano HOMIGON (éd.), *Messenger of mathematics : European mathematical journals, 1800-1946*, Madrid, Siglo XXI, 1993 et GERINI Christian, Les « Annales » de Gergonne, apport scientifique et épistémologique dans l'histoire des mathématiques, Villeneuve d'Ascq, Éd. Du Septentrion, 2002.

[217] Ce journal sera par la suite désigné, comme il est habituel, sous le nom de *Bulletin de Férussac*.

[218] Sur Férussac on pourra lire BRU Bernard et MARTIN Thierry, « Le baron de Férussac, la couleur de la statistique et la topologie des sciences », *Journ@l Électronique d'Histoire des Probabbilités et de la Statistique*, vol. 1, n°2, 2005, www.jehps.net, p. 8.

s’agit des références revendiquées par l’auteur, dans le cas de Baden Powell, ou (3) lorsqu’il s’agit de références que nous attribuons nous-mêmes aux ouvrages. Aucune référence à un auteur français ne nous paraît attribuable au manuel de Franchini.

Année	Titre	Auteur	Référence
1825 (t. 3)	*Anfangs Gründe der Differential -Und Integral- Rechnung*	C.G. Zimmerman	Lagrange (1)
1826 (t. 5)	*Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral*	D. Lardner	Lagrange (3)
1827 (t. 7)	*Saggio di nuovo ricerche sul calcolo differenziale*	M.C. Conti	Lagrange et Leibniz (1)
1827 (t. 8)	*La scienza del calcolo sublime*	M. Franchini	
1831 (t. 15)	*Elements of the diffrential calculus*	J.R. Young	Lacroix (3)
1831 (t. 15)	*A short treatise on the principles of the differential and integral calcul*	Baden Powell	Boucharlat et Lacroix (2)

Tableau 3 : les manuels étrangers de calcul différentiel et intégral mentionnés dans le *Bulletin de Fréussac*

Indiquons pour être complet que le tome 5 du *Bulletin de Férussac* mentionne aussi un ouvrage de Arthur Brown, *A short view of the principles of the differential calculus* qui est un essai et non un manuel d’enseignement. De plus, le tome 15 signale, toujours de Baden Powell, *An Elementary treatise on the geometry of curves and curved surfaces* qui emploie le calcul différentiel.

Cela fait peu, d’autant plus que les commentaires sur les ouvrages ne font que quelques lignes, aucun n’étant signé. La circulation de manuels étrangers en France durant les huit années d’années que dure le *Bulletin de Férussac* semble particulièrement restreinte, ce que confirme l’auteur de la recension, un peu plus étoffée, de l’ouvrage de Lardner :

> D’ailleurs, les grandes découvertes, qui seules entrent de suite en circulation, sont pour les savants ; il y a des choses moins relevées, mais fort utiles pour les maîtres et les élèves, et qui franchissent rarement les portes d’une ville ou les frontières d’un pays : puisse notre Bulletin en favoriser la communication.[219]

Entre la faillite du *Bulletin de Férussac* en 1831 et la publication du premier numéro des *Nouvelles Annales de Mathématiques* en 1842, nous avons trouvé la traduction française de l’ouvrage de Samuel Ferdinand Lubbe, traduit de l’allemand par Maurice Kartscher. Lubbe est privatdozent à l’Université de Berlin. Il publie en 1825 un *Lehrbuch des höhern Kalkuls* destiné selon l’auteur aux enseignants et aux étudiants désireux d’apprendre par eux-mêmes le calcul différentiel et intégral. Maurice Kartscher, à propos duquel nous n’avons pas retrouvé

[219] *Bulletin de Férussac*, t. V, p 168.

d'information, mais qui semble lui aussi lié à l'Université de Berlin, fait paraître chez Bachelier, en 1832, une traduction de ce texte sous le titre *Traité de Calcul différentiel et de calcul intégral*. Ce livre figure dans la bibliographie du *Journal für die reine und angewandte Mathemati*k de 1832[220].

La préface de Kartscher semble vouloir attester du rôle des ouvrages français dans la conception du texte car à l'exception d'Euler, n'y figure que des noms français : Lagrange, Lacroix, Carnot et Fontaine. Il ne faut cependant pas oublier qu'il s'agit de vendre un manuel étranger à un public français. Que le texte de Lubbe ait puisé dans Lagrange, Lacroix ou d'autres auteurs français traduits en allemand est probable mais il paraît difficile de lui attribuer un auteur de référence. Le principal argument mis en avant par Kartscher pour vanter les mérites du livre est d'ordre pédagogique : le grand choix d'exercices et les nombreux exemples permettent au commençant de s'exercer sur la théorie.

Les numéros des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, de 1842 à 1850, proposent moins de recensions de manuels étrangers de calcul différentiel et intégral que le *Bulletin de Férussac*. Nous y trouvons uniquement un ouvrage belge, en 1845, *Essai sur les principes fondamentaux de l'analyse transcendante, Suivi des éléments de calcul différentiel résumés à un point de vue purement algébrique*, de Ernest Lamarle[221], et, en 1850, un recueil anglais d'exercices de Gregory intitulé : *Exercices et problèmes de calcul différentiel et intégral*.

Lamarle est ancien élève de l'École polytechnique, de la promotion 1825. Il a donc eu Ampère pour professeur d'analyse. Ingénieur des ponts et chaussées, il est nommé en 1832 professeur à l'Université de Gand. L'analyse de l'ouvrage n'est pas signée mais, en raison du style, nous pensons pouvoir l'attribuer à Terquem[222]. Ce dernier cite tout d'abord Liouville qui a présenté le livre à l'Académie des Sciences et s'est contenté d'affirmer, de façon assez évasive que, « d'après le talent de l'auteur […] on doit être assuré d'y trouver des remarques utiles pour

---

220 KARTSCHER Maurice, « Traité de calcul différentiel et de calcul intégral par Mr. le Prof. S.F. Lubbe », *Journal für die reine und angewandte Mathemati*k, 1832, p. 419-420.

221 Faut-il considérer un ouvrage belge de 1845, de langue française, écrit par un ancien polytechnicien, comme un ouvrage étranger ? Nous faisons ce choix, tout d'abord, car le texte est édité à Liège. Ensuite, nous suivons Martin ZERNER, *op. cit.*, qui considère que se développe en Belgique une tradition propre de l'enseignement des mathématiques.

222 TERQUEM Olry, « Essai sur les principes fondamentaux de l'analyse transcendante », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 4, 1845, p. 365-366.

l'enseignement »[223]. Terquem est beaucoup plus critique, reprochant à Lamarle comme il l'avait fait à Blanchet de vouloir définir les infiniment petits, de vouloir rendre claire « l'idée *certaine*, *innée*, du coefficient différentiel », et concluant : « les efforts que font les *métaphysiciens* pour expliquer la certitude, introduisent une source inépuisable d'obscurité dans toutes les sciences, sans en excepter les mathématiques »[224]. Signalons simplement à propos de cet ouvrage que Lamarle, après avoir rappelé les méthodes de Leibniz, Newton et Lagrange, expose le calcul différentiel d'un point de vue très personnel qui n'emploie pas le vocabulaire des infiniment petits.

L'ouvrage de Gregory[225], diplômé de Cambridge en 1838 et auteur d'articles dans le *Cambridge Mathematical Journal*, est publié chez Bachelier. Il est traduit de l'anglais par Léonce Clarke. Ce dernier est désigné sur la page de garde comme « professeur de mathématiques à Paris », titre qui semble indiquer qu'il enseignait dans une institution privée. Clarke, sur lequel nous n'avons pas trouvé plus d'information, annonce dans la préface avoir suivi les cours de la Sorbonne et affirme que ce sont de jeunes professeurs, auditeurs du cours, qui l'ont engagé à traduire le livre de Gregory. La recension de ce livre, que nous attribuons là aussi à Terquem[226], s'insère dans une problématique plus vaste que nous aborderons au chapitre suivant, celle d'une série de textes publiés dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* visant à promouvoir l'introduction du calcul différentiel au concours d'admission à l'École polytechnique. L'ouvrage, que Terquem attribue à Clarke, faciliterait selon lui l'introduction de cette théorie dans l'enseignement secondaire. La forme de l'ouvrage, un recueil d'exercices sans rappels théoriques, qui emploie les notations leibniziennes, ne permet pas de rattacher le texte à un auteur que nous avons étudié.

Terquem espère en outre que le succès du livre de Gregory facilitera la traduction d'auteurs comme Euler, Hamilton et Jacobi. Ce souhait montre la difficulté de la traduction de textes

[223] LIOUVILLE Joseph cité dans le *Compte rendu des séances de l'Académie des Sciences*, t. 20, p. 1642.
[224] TERQUEM Olry, *op. cit*., p. 366.
[225] Gregory est un jeune mathématicien anglais mort prématurément en 1844 à l'âge de 33ans. Il fait partie avec de Morgan, Cayley, Stokes, Boole et Sylvester des élèves des « pionniers », Babbage, Herschel et Peacock. On pourra lire CRILLY Tony, « The *Cambridge Mathematical Journal* and its descendants : the linchpin of a research community in the early and mid-Victorian Age », *Historia Mathematica*, Vol. 31, 2004, p. 455-497.
[226] TERQUEM Olry, « Exercices et problèmes de calcul différentiel et intégral, par M. F.-D. Greory », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 9, 1850, p. 44-45. Les expressions employées dans cette recension et dans les quelques lignes consacrées à la suite à un recueil d'exercices de trigonométrie de Clarke laissent peu de doute sur l'identité de l'auteur à quiconque est un peu familier des articles de Terquem.

mathématiques majeurs dans la France de cette période. Il n'est donc pas surprenant que la traduction de manuels d'enseignement rencontre de semblables difficultés. Si les auteurs français de manuels de calcul différentiel et intégral ont été abondamment traduits durant la première moitié du XIXe siècle, il ne semble pas y avoir eu de retour, et l'enseignement de cette discipline en France paraît être resté à l'écart des pratiques des autres pays européens.

8 – Conclusion

Dès 1800, la circulaire de Lucien Bonaparte présente L'École polytechnique comme un modèle aux professeurs de mathématiques des écoles centrales. Ce modèle est en quelque sorte confirmé par l'adoption du *Traité élémentaire* de Lacroix comme programme de calcul différentiel et intégral des classes de mathématiques transcendantes, embryon des futures facultés des sciences. Que ce calcul, emblème des mathématiques supérieures et marque de l'enseignement à l'École polytechnique, se développe rapidement dans un enseignement préparatoire au concours d'admission à cette école apparaît comme une conséquence logique. L'opposition des Conseils de l'École en 1812 et 1842 n'y change rien. Le manque de formation de certains enseignants non plus. La forme du concours d'admission y contribue malgré les préventions de certains examinateurs contre l'emploi de méthodes non élémentaires. Le candidat peut en effet demander à être interrogé sur une bonne partie du programme d'analyse de première année de l'École. La concurrence entre candidats les pousse nécessairement à élargir le champ de leurs connaissances. Concours et préparation à ce concours interagissent.

Les exigences du programme d'analyse de l'École se retrouvent, par l'intermédiaire du concours d'admission et du système de classes préparatoires, dans les manuels établis pour cet enseignement préparatoire. Il semble donc inévitable que Tedenat, ancien maître de conférences à l'École normale de l'An III, expose la théorie de Lagrange au tournant du XIXe siècle. Tout comme la méthode des infiniment petits, à nouveau prescrite à l'École polytechnique, doit trouver sa place dans les manuels des années 181O. Ceci ne suffit cependant pas à expliquer la présence d'une méthode infinitésimale dans tous ces manuels. Tedenat l'introduisait déjà dans ses *Leçons élémentaires de mathématiques* bien avant ce changement de conception à l'École. Les infiniment petits s'enseignent toujours à l'époque, ne serait-ce qu'au travers des manuels de Bézout, encore édités au début du siècle. Un manuel de calcul différentiel et intégral qui vise le plus large public ne peut faire l'impasse sur cette méthode dont l'efficacité pour le calcul ou les applications est admise par tous, y compris par Bourguet, le plus lagrangien de tous les auteurs que nous avons analysés.

La théorie des fonctions de Lagrange reste un modèle pour certains auteurs durant toute cette période. Si elle est rejetée par Cournot, le « théorème de Taylor » est toujours le principe fondamental de l'analyse pour Terquem au début des années 1840. Le rôle institutionnel de Cournot est indubitable. Il ne faut cependant pas sous-estimer l'importance de Terquem qui diffuse ses conceptions à travers les *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

Comme à l'École polytechnique, la méthode des limites, au moins dans la version minimale que pratiquait Lacroix, s'impose pour introduire la notion de « fonction dérivée », expression qui s'est elle aussi imposée, avec sa notation. Deux autres notions développées par Cauchy font leur apparition dans l'enseignement de mathématiques spéciales : la continuité d'une fonction et les infiniment petits définis comme des quantités de limite égale à zéro. L'ouvrage de Blanchet qui date de 1838 montre que les idées de Cauchy pénètrent l'enseignement préparatoire alors même que Mathieu, qui n'applique pas ces conceptions, enseigne encore à l'École polytechnique.

La rigueur de Cauchy est cependant remise en question par Cournot et Terquem. Les conceptions philosophiques de ces deux mathématiciens sont essentielles dans ce questionnement, mais, puisqu'il s'agit d'enseigner à des « commençants », la question de la pédagogie est elle aussi essentielle. Elle est une autre clef de lecture de tous ces textes. Quelle place faut-il accorder à l'intuition et quelle rigueur analytique doit-on employer ? Les succès des ouvrages de Francœur et de Boucharlat semblent apporter des réponses contradictoires. Il apparaît plus probablement que ces deux façons d'aborder le calcul différentiel et intégral, mises en évidence depuis le premier chapitre de notre travail, ont chacune leur place dans l'enseignement, un enseignement qui durant ce demi-siècle ne paraît pas s'être ouvert aux manuels étrangers.

Le tableau 3 en page suivante synthétise le transfert de méthodes d'introduction du calcul différentiel et intégral de l'École polytechnique vers l'enseignement hors de l'École. Il reprend celui fourni au chapitre précédent et y introduit les différents auteurs analysés dans ce chapitre, entourés en gras pour faciliter les comparaisons. Les dates indiquées pour ces auteurs sont celles de la publication de leur ouvrage. On y relèvera aussi le positionnement très particulier de Cournot dans l'enseignement du calcul infinitésimal.

	Fonction	Développement en série entière	Différences finies	Théorème de Taylor	Limites	Infiniment petits	Continuité	Dérivabilité	Intégrale définie	Nombres incommensurables
Prony (1795)	E (1)	A		D					nt	
Lagrange (1795)	E (1)	D		D						
Fourier (1795)	E (1)	A				L (cités)			nt	
Garnier (1800)	E (1)	D								
Lacroix (1800)	E (2)	A				L (cités)	loi de continuité			
Tedenat (1801)	E (1)	D								
Francœur (1809)	E (1)	A				L (utilisés)			nt	
Bourguet (1810)		D		D	(citées)	L (utilisés)				
Garnier (1811)	E (1)	D		D	(utilisées)	L (utilisés)				
Ampère (1812)	E (1)	D				L (utilisés)				
Boucharlat (1813)	E (1)					L (utilisés)			nt	
Ampère (1821)	E (2)						C		nt	
Cauchy (1815)	E (2)					C	C			
Mathieu (1827)	E (1)	D				L	C			
Navier (1831)	E (2)					L				
Duhamel (1836)	E (2)					C/D	C/V.I.			
Liouville (1838)	E (2) (D citée)					C	C			
Blanchet (1838)	E (2)					C	C		nt	
Sturm (1840)	E (2)					C	C			
Cournot (1841)	E (2) (D citée)					L	C			
Gouré (1842)							C		nt	

Tableau 3: les fondements de l'analyse dans cours et les manuels (1794-1850)

Chapitre 4 : La théorie des fonctions dérivées en classe de mathématiques spéciales : entre programmes et manuels (1851-1885)

Dans les chapitres précédents, nous avons établi les principes fondateurs du calcul différentiel tels qu'ils se présentent dans différents cours et manuels à la fin des années 1840, alors que l'analyse n'est pas encore au programme officiel du concours d'admission à l'École polytechnique.

Tous ces textes présentent la notion de fonction comme le concept central du calcul différentiel. En 1850, une fonction est une quantité variable déterminée, selon les auteurs, soit par une expression analytique qui lie des variables et des constantes, soit plus largement par toute méthode. Il s'agit toujours des deux définitions proposées par Euler au siècle précédent. La deuxième permet d'englober les fonctions qui expriment des lois physiques, économiques ou sociales quelconques. L'extension du concept de fonction comme relation arbitraire entre deux variables, proposée par Pierre-Gustave Lejeune-Dirichlet dès 1829, ne s'est pas répandue. Elle n'est évoquée que dans le cours de Joseph Liouville à l'École polytechnique, pour indiquer immédiatement qu'il ne s'en occupera pas.

La méthode des limites, un temps contestée à l'École polytechnique, a supplanté l'introduction leibnizienne telle qu'Étienne Bézout la pratiquait dans son *Cours de mathématiques à l'usage du corps d'artillerie,* l'introduction à partir des différences finies d'Euler dans les *Institutiones calculi differentialis*, et l'introduction purement algébrique de Joseph-Louis Lagrange dans la *Théorie des fonctions analytiques*. Cependant la notion de fonction dérivée et sa notation, introduites par Lagrange, se sont imposées.

Une fonction dérivée est donc la limite du rapport des accroissements de la fonction à ceux de la variable. La tangente est définie comme la position limite d'une sécante malgré la volonté de Lagrange de revenir aux définitions des géomètres de l'Antiquité.

La dérivabilité d'une fonction a été justifiée par sa continuité pour la première fois dans le cours de Lacroix à l'École polytechnique. La loi de continuité qu'il invoquait était plus métaphysique que mathématique. Par la suite, Augustin-Louis Cauchy a fait de la continuité un concept mathématique qui s'impose à partir de la fin des années 1830. Cependant, si

Cauchy démontre le théorème des valeurs intermédiaires à partir de sa définition de la continuité, Jean-Marie Constant Duhamel, prend la propriété des valeurs intermédiaires comme définition de la continuité et « démontre » l'équivalence avec la définition de Cauchy. Les connaissances mathématiques ne permettent pas encore de distinguer clairement ces deux notions.

Il en va de même de la continuité et de la dérivabilité. André-Marie Ampère, dès 1806, pense démontrer l'existence d'une dérivée pour toute fonction sauf en des points isolés. Duhamel donne une nouvelle démonstration en 1838. La dérivabilité des fonctions continues est une propriété qui n'est pas remise en cause dans l'enseignement au début des années 1850.

Mais l'analyse de cette époque reste un calcul différentiel et non un calcul des dérivées. La différentielle reste en effet l'outil privilégié du calcul. Définie par Sylvestre-François Lacroix comme la partie de l'accroissement de la fonction proportionnelle à l'accroissement de la variable, la différentielle d'une fonction y est $dy = f'(x)dx$, dx désignant la différentielle de la fonction $y = x$ et non un infiniment petit. Cette définition est reprise par presque tous les auteurs. Jean-Marie Constant Duhamel, en 1838, considérait la différentielle comme l'accroissement infiniment petit de la fonction avant de revenir, en 1847, à une différentielle égale à la partie de l'accroissement de la fonction qui est proportionnelle à l'accroissement infiniment petit de la variable : dy et dx sont donc pour lui des infiniment petits.

La notion d'infiniment petit, considérée comme particulièrement efficace dans les applications à la géométrie et à la mécanique, reste une notion essentielle. Des mathématiciens comme Antoine-Augustin Cournot ou Olry Terquem restent attachés à la conception des infiniment petits propagée en France par le marquis de l'Hospital. Cependant la définition de Cauchy d'un infiniment petit comme variable de limite nulle s'impose. Elle permet de définir rigoureusement la notion contestée d'ordre des infiniment petits. Chez Duhamel, les infiniment petits ont un rôle essentiel. Il introduit deux théorèmes de substitution des infiniment petits, dans les rapports et dans les sommes de quantités infiniment petites. Ces théorèmes lui permettent de remplacer dans les calculs l'accroissement infiniment petit de la fonction par $f'(x)dx$. Pour les auteurs qui mettent en avant l'emploi des infiniment petits, le calcul différentiel est avant tout un calcul infinitésimal.

Dans les années 1840, Liouville et Charles Sturm privilégient à l'École polytechnique le langage des limites à celui des infiniment petits, tout en respectant le programme qui définit l'intégrale définie comme la somme des valeurs infiniment petites que prend la différentielle entre deux valeurs données. Cette définition de l'intégrale reste liée à la notion d'aire sous une courbe et le calcul intégral reste l'inverse du calcul différentiel. Les conceptions de Cauchy qui fondait le calcul intégral sur une définition de l'intégrale définie indépendante de considérations géométriques ne se sont pas imposées. Seul Duhamel les a reprises durant les quelques années où il a enseigné l'analyse.

Dans ce chapitre, nous montrerons dans un premier temps l'action de Terquem dans les *Nouvelles annales de mathématiques* en faveur de l'introduction du calcul infinitésimal dans l'enseignement secondaire. Nous analyserons ensuite les programmes de 1851 et 1853 : pour la première fois, la théorie des dérivées est introduite au programme des concours de l'École polytechnique, puis de la classe de mathématiques spéciales. Nous verrons dans quel contexte institutionnel ont lieu ces modifications de programmes et nous essaierons de comprendre ce qui conduit à l'introduction de cette théorie. Les résultats obtenus dans les premiers chapitres de cette thèse nous aideront à comparer les exigences de ces nouveaux programmes à ce qu'était alors l'enseignement des principes de l'analyse.

Nous analyserons ensuite les manuels produits à l'occasion de ces réformes par Joseph Bertrand, Charles Choquet, Charles Briot et Eugène Catalan. Tous sont des acteurs majeurs de l'enseignement préparatoire à l'École polytechnique. Bertrand et Briot enseignent dans les grands lycées parisiens, Choquet et Catalan dans des institutions privées. Leurs ouvrages nous permettront comprendre la mise en œuvre de la réforme et d'apprécier la conformité de ces manuels aux exigences du nouveau programme.

Notre analyse de ces ouvrages publiés dans les années qui suivent la réforme sera complétée par une étude dans la durée. Nous comparerons les différentes éditions des manuels de Bertrand et Briot, ainsi que les manuels publiés à distance des réformes de 1851-1853 par Charles de Comberousse en 1861, Hermann Laurent en 1867, 1875 et 1881, et Gaston Gohierre de Longchamps en 1883. Il s'agit à nouveau de trois a auteurs au rôle institutionnel de premier plan. La comparaison de ces manuels avec les modifications de programmes intervenues entre 1883 et 1885 permettra de savoir si nous retrouvons le même processus que celui observé dans la première moitié du siècle, à savoir l'introduction d'enseignements qui précède leur inscription dans les programmes.

Si l'on excepte l'ouvrage de Comberousse plus spécialement destiné aux candidats à l'École centrale des arts et manufactures, tous ces manuels préparent au concours d'admission à l'École polytechnique. Durant la période qui nous intéresse ici, les épreuves écrites se développent mais l'épreuve orale reste l'épreuve essentielle pour l'admission à cette École.

1 – L'engagement de Terquem pour l'introduction du calcul différentiel au concours de l'École polytechnique dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1842-1850)

Olry Terquem a été l'un des acteurs principaux du *Journal de mathématiques pures et appliquées* fondé par Joseph Liouville en 1836[1]. Le journal *Nouvelles Annales de Mathématiques* (*NAM*), qu'il fonde en 1842 avec Camille Gerono, ne s'adresse pas à un public de mathématiciens mais, d'après son sous-titre, J*ournal des candidats à l'École polytechnique*, à des élèves de mathématiques spéciales.

Composé d'articles de fond en mathématiques, proposant des sujets et des solutions des épreuves des concours d'admission aux Écoles polytechnique et normale, ainsi que du Concours général[2], le journal s'articule aussi autour de Questions/Réponses et comporte, de façon plus ou moins régulière, un bulletin bibliographique que nous avons déjà évoqué. Une étude portant sur les contributeurs de la revue a montré qu'il est difficile d'affirmer que le journal a, depuis sa création jusqu'en 1862, réellement atteint les candidats à l'École polytechnique. En revanche, durant cette même période, il a indiscutablement atteint le public des enseignants des classes de mathématiques spéciales[3].

Dans ce journal fortement marqué par l'empreinte de Terquem, nous recensons jusqu'en 1851, date d'inscription de la théorie des fonctions dérivées au programme du concours de l'École polytechnique, une série d'articles qui militent pour l'inscription des éléments du calcul

[1] Voir VERDIER Norbert, « Les journaux de mathématiques dans la première moitié du XIXe siècle en Europe », Philosophia Scientae, 13-2, 2009, p. 97-126.
[2] Le Concours général a été créé en 1744 par l'université de Paris à l'initiative de l'abbé Legendre.
[3] ROLLET Laurent et NABONNAND Philippe, « Un journal pour les mathématiques spéciales : les Nouvelles Annales de Mathématiques (1842-1927) », Conferenze e seminari de l'Associazione Subalpina Mathesis, 2010-2011, p. 217-230.

infinitésimal à ce programme. Terquem est à l'avant-garde de ces « militants », engageant ainsi le journal dont il est fondateur.

Ancien élève de l'école centrale de Metz, puis de Lacroix à l'École polytechnique où il est admis en 1801, Terquem est nommé adjoint aux répétiteurs d'analyse à l'issue de sa scolarité avant d'aller enseigner les mathématiques transcendantes au lycée de Mayence, en 1804[4]. En 1811, il est nommé professeur à l'École d'artillerie de Mayence. En 1812 il obtient d'office le titre de docteur ès sciences, sans examen. Refusant un poste au lycée de Reims, il est nommé en 1814, bibliothécaire au Dépôt d'artillerie de Paris avec le titre de professeur attaché au Comité de l'artillerie. Enrichissant considérablement cette bibliothèque, il occupera jusqu'à sa mort ce poste qui lui permettait de rester au contact de l'actualité des connaissances. Outre ses très nombreux articles, Terquem est l'auteur d'un *Manuel d'Algèbre* en 1828, d'un *Manuel de Géométrie* en 1829, d'un *Manuel de Mécanique* et d'un recueil d'*Exercices de mathématiques élémentaires* en 1842. De confession juive, il écrira également les *Lettres tsarphatiques* pour promouvoir une réforme du culte judaïque[5]. La problématique religieuse est liée pour Terquem aux mathématiques, qui sont selon lui une « révélation permanente de l'intervention divine dans la structure et dans la vie des mondes »[6].

L'autre personnage central de cette série d'articles est Pierre Joseph Étienne Finck. Nous l'avons déjà rencontré, au chapitre précédent, lors de la tentative avortée de réforme du programme d'admission à l'École polytechnique initiée par Gaspard-Gustave de Coriolis. Nous avons vu que Finck était l'auteur d'un *Traité élémentaire d'analyse infinitésimale* en 1834, destiné aux élèves de l'École polytechnique, et, pour l'enseignement secondaire, d'une *Géométrie élémentaire basée sur la théorie des infiniment petits*, parue en 1838. Il a également publié, pour l'enseignement secondaire, un *Système d'algèbre élémentaire*[7] en 1839, et en

[4] Les références biographiques sur Terquem sont tirées de PROUHET Eugène, « Notice sur la vie et les travaux d'Olry Terquem », *Bulletin de Bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques*, t 8, 1862, p. 81-90. Ce bulletin a été annexé aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* de 1855 à 1862.
[5] On pourra lire sur Terquem et la problématique religieuse LANDAU Philippe-Efraïm, « Olry Terquem (1782-1862) : régénérer les juifs et réformer le judaïsme », *Revue des Études juives*, vol. 160, 2001, p. 169-187.
[6] TERQUEM Olry, « Bibliographie », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1ère série, t. 12, 1853, p. 298
[7] Il est intéressant de signaler que cet ouvrage de Finck renferme une démonstration purement analytique du théorème des valeurs intermédiaires qui commet la même erreur que Blanchet, signalée dans le chapitre précédent (voir FINCK Pierre Joseph Étienne, *Système d'algèbre élémentaire*, Strasbourg, Derivaux, 1839, p. 423).

1841 un *Traité élémentaire d'arithmétique*[8]. Il publie aussi, en 1841, un bref opuscule d'une quarantaine de pages intitulé *Principes de l'analyse infinitésimale*.

Selon Finck, son *Traité élémentaire d'analyse infinitésimale* doit beaucoup à ses professeurs d'analyse, Cauchy et Ampère. Il y définit notamment un infiniment petit à la manière de Cauchy, les ordres d'infiniment petits et démontre quelques théorèmes sur les propriétés des infiniment petits.

Dans son *Système d'algèbre élémentaire* de 1839, destiné aux candidats à l'École polytechnique, Finck propose en « Appendice », des « Éléments de la théorie des infiniment petits ». Il n'introduit pas le calcul différentiel mais se contente de définir un infiniment petit, de l'appliquer sur un exemple arithmétique[9], de formuler les théorèmes sur la somme et le produit de deux infiniment petits ainsi qu'un dernier théorème énoncé de la façon suivante : « On peut négliger l'infiniment petit à côté des quantités invariables »[10]. Ces quelques pages peuvent être vues comme un prélude à une « Théorie des infiniment petits » telle que celle qui introduira ses *Principes de l'analyse infinitésimale* deux années plus tard. Le public auquel est destiné ce dernier ouvrage n'est pas précisé. Il faut probablement considérer ce texte comme un complément au *Traité élémentaire d'analyse infinitésimale* paru sept ans plus tôt. Finck développe considérablement dans ce second ouvrage une étude des infiniment petits qui n'était qu'esquissée dans le premier.

Sans que Terquem désigne explicitement les *Principes de l'analyse infinitésimale* de Finck, nous pouvons penser qu'il adressait à cet ouvrage, comme à celui de Pierre Henry Blanchet, le reproche d'avoir voulu définir rigoureusement la notion d'infiniment petit, ainsi que nous l'avons vu au chapitre précédent à l'occasion de l'analyse de l'ouvrage de Édouard Gouré.

En 1842, une lettre de Finck aux *NAM,* marque le début d'une série d'articles militant pour l'introduction du calcul différentiel en classe de mathématiques spéciales. Finck revient sur une « Note » d'un professeur au collège Saint-Louis, M. A.-J.-H. Vincent, publiée dans le

---

[8] C'est dans ce traité qu'il discute le nombre d'opérations nécessaires pour la recherche du PGCD par l'algorithme d'Euclide (voir SHALLIT Jeffrey, *ibid*.)

[9] Avec nos notations actuelles, il démontre que, pour n entier tendant vers l'infini, $lim \frac{5+n}{7+n} = 1$.

[10] FINCK Pierre Joseph Étienne, *Système d'algèbre élémentaire*, Strasbourg, Derivaux, 1839, p. 554.

numéro de juin de la revue[11], dans laquelle Vincent évalue l'erreur commise lors de l'élaboration de tables de sinus. Après avoir établi que :

$$\sin a > 3^n \sin\frac{a}{3^n} - 4\frac{a^3}{27}\left\{1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \cdots\right\},$$

il fait « $n = \infty$ », et, l'arc « infiniment petit $\frac{a}{3^n}$ »[12] se confondant avec son sinus, il en déduit :

$$\sin a > a - \frac{1}{6}a^3.$$

Commentant cette note, Finck écrit :

> La note que M. Vincent a fait insérer dans votre numéro de juin […], me confirme dans une opinion que j'ai depuis longtemps adoptée, savoir qu'il serait convenable d'exiger des candidats à l'École polytechnique les premiers éléments du calcul différentiel, sauf à restreindre quelques détails d'algèbre, de sections coniques, etc. On éviterait par là quelques embarras, doubles emplois, notamment pour la théorie des courbes (*).[13]

L'astérisque a été rajouté par la rédaction et renvoie à une note de bas de page que nous attribuons à Terquem. Elle précise : « Cette opinion du savant professeur est d'autant plus plausible que le calcul différentiel existe déjà dans les éléments, théorie et pratique, mais sous d'autres noms »[14].

Terquem fait probablement allusion ici à l'emploi des infiniment petits en géométrie, dans le programme des conférences préparatoires de mathématiques instaurées en 1840[15].

Ce premier exemple, très bref et très allusif, est caractéristique d'une série de prises de position de ces deux acteurs, qu'il inaugure et qui vont s'étoffer. En 1842, lors de la recension, analysée au chapitre précédent, de l'ouvrage de Gouré pour la classe de mathématiques spéciales, Terquem souhaite que le binôme de Newton s'écrive ainsi pour un exposant entier positif :

$$y = x^m, (x+h)^m = y + y'h + y''\frac{h^2}{1.2} + y'''\frac{h^3}{1.2.3} + \cdots$$

---

[11] Il s'agit probablement de l'abbé Alexandre-Joseph Vincent, ancien élève de l'École normale, agrégé de physique en 1820 (source : Laboratoire de recherche historique Rhône-Alpes, Ressources numériques en histoire de l'éducation, http://rhe.ish-lyon.cnrs.fr/?q=agregsecondaire , consulté le 20/08/17.

[12] VINCENT A.-J.-H., « Note sur la construction des tables de sinus naturels », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 1, 1842, p. 272-277.

[13] FINCK Pierre Joseph Étienne, « Lettre », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 1, 1842, p. 353.

[14] TERQUEM Olry dans FINCK Pierre Joseph Étienne, *op. cit.,* p. 353.

[15] Voir supra, p. 232.

> Car, il est important d'expliquer aux élèves le plus tôt possible, les dérivations et leurs algorithmes ; opérations plus faciles que les extractions de racines. En s'y prenant ainsi, le théorème de Taylor deviendrait aussi familier aux élèves que le binôme qui n'en est qu'un particulier, et on propagerait, on populariserait pour ainsi dire, une proposition qui renferme toute la philosophie mathématique.[16]

Terquem revient sur cette question en 1844, à l'occasion d'une démonstration élémentaire du théorème de Newton : « si on prend un point E sur le côté BC d'un triangle rectiligne ABC, et qu'on mène par ce point la transversale EFG, infiniment rapprochée de EC et coupant AB en F et AC en G, on a l'équation : $\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{CG}} = \frac{\mathrm{EB.AB}}{\mathrm{EC.AC}}$ »[17]. La démonstration, très courte (trois lignes) est suivie d'un corollaire (trois lignes aussi) et d'une « Observation » de près d'une page qui semble l'objet principal de l'article. Il y propose d'introduire le calcul différentiel et des éléments de dynamique dans l'enseignement élémentaire.

Précisément, il suggère d'introduire le calcul différentiel à l'occasion d'un théorème de géométrie « bien connu » : la parallèle à un côté d'un triangle coupe les deux autres côtés proportionnellement. Il écrit :

> quelque rapprochée que soit cette parallèle du sommet, les deux segments infiniment petits partant du sommet, ont toujours pour rapport fini celui des côtés ; il en est de même lorsque la parallèle s'éloigne à l'infini du sommet. C'est ici l'occasion de donner aux élèves une première notion de la théorie différentielle qui ne consiste qu'à trouver les rapports finis entre des quantités infiniment petites ou infiniment grandes.[18]

Il rappelle que près d'un siècle auparavant, d'Alembert proposait « d'introduire le calcul differentiel, d'une facilité si vulgaire, dans l'enseignement élémentaire » et que cette proposition avait été « récemment renouvelée par feu M. de Coriolis »[19].

Finck rebondit sur cette « Observation » de Terquem dans l'un des premiers numéros des *NAM* de l'année suivante. En 1845, dans un article intitulé « Sur l'élimination », il propose un nouveau théorème sur l'élimination entre deux équations algébriques à deux inconnues. À la suite de la démonstration il critique le nouveau programme d'admission à l'École

---

[16] TERQUEM Olry, « Théories générales de géométrie analytique appliquées à la discussion des courbes algébriques de degrés supérieurs, à l'usage des candidats à l'École Polytechnique, par É. Gouré », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 1, 1842, p. 406.
[17] TERQUEM Olry, « Démonstration élémentaire d'un théorème de Newton », *Nouvelles Annales de Mathématiques,* t. 3, 1844, p. 580.
[18] *Ibid.*, p. 581. Terquem décrit ici la façon dont il a lui-même procédé dans son *Nouveau manuel de géométrie*, 2e éd., Paris, Roret, 1838, p. 97.
[19] *Ibid.*, p. 581.

polytechnique concernant la théorie de l'élimination puis il revient sur la position de Terquem et sur son allusion à Coriolis. Il rappelle avoir « proposé à feu Coriolis [ses] vues »[20] au sujet de l'introduction du calcul différentiel au programme du concours d'admission à l'École. Nous avons analysé cet épisode au chapitre précédent. Il affirme avoir dit : « que l'on commence […] par tolérer ce calcul, et au bout de deux ou trois ans, tous les candidats seront en mesure »[21]. Cette phrase semble ici ne concerner que la capacité des candidats à étudier cette théorie. Rappelons cependant que, dans la lettre adressée à Coriolis, Finck évoquait la compétence des professeurs de lycée pour l'enseigner.

Terquem ajoute une longue note à la suite de l'article de Finck. Il commence par y rappeler que d'Alembert proposait d'introduire le calcul différentiel dans les éléments, puis il promet, pour un numéro suivant, de retranscrire le passage de *l'Encyclopédie* relatif à ce sujet. N'allant pas jusqu'à demander « un cours spécial de calcul infinitésimal tel qu'il existe à l'École polytechnique » en classe de mathématiques spéciales, il propose, dans l'esprit de son « Observation », « d'entremêler l'enseignement de la géométrie et de l'algèbre, avec les principes de ce calcul »[22], et notamment de repartir de l'écriture du binôme sous une forme taylorienne, comme il l'avait déjà évoqué en 1842.

L'année suivante, en 1846, en conclusion d'un article des NAM intitulé « Théorèmes sur les puissances des Nombres », Terquem écrit : « Admettons donc dans nos collèges le calcul différentiel pour faciliter, abréger, étendre les études, et la théorie des nombres pour en augmenter la force »[23].

Faut-il voir une nouvelle allusion à l'introduction de ce calcul dans les collèges dans son « Avis » qui conclut la solution d'une « Question d'examen » concernant des coniques en 1847 ? Si le calcul différentiel n'est probablement pas la seule théorie suggérée, elle nous semble bien présente dans l'esprit de Terquem lorsqu'il écrit :

> Nous engageons les candidats à traiter cette dernière question directement. Les méthodes générales sont toujours les meilleures sous le point de vue scientifique, mais ne valent rien pour les examens où l'on ne donne que des petits

[20] FINCK Pierre Joseph Étienne, « Sur l'élimination », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 4, 1845, p. 203.
[21] *Ibid.*, p. 203.
[22] TERQUEM Olry, « Note », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 4, 1845, p. 203-205.
[23] TERQUEM Olry, « Théorèmes sur les puissances des Nombres», *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 5, 1846, p. 78.

> cas particuliers qui exigent de petits expédients auxquels il faut être préparé d'avance, sous peine d'échouer, les plus forts comme les plus faibles.[24]

La méthode infinitésimale est en revanche bien citée la même année dans sa note qui conclut la réponse à une question proposée sur des volumes d'ellipsoïdes : « Si l'élève […] n'a pas fait usage ici des symboles abréviateurs du calcul infinitésimal, c'est sans doute pour ne pas sortir de la voie collégiale ordinaire »[25].

En 1848, dans un article intitulé : « Pensées de d'Alembert sur divers sujets de mathématiques », Terquem retranscrit les citations de d'Alembert promises en 1844. Il s'agit d'extraits des articles « Ellipse » et « Géométrie » tirés des tomes V et VII de l'*Encyclopédie*. Dans le premier article d'Alembert propose de placer les principes du calcul différentiel au début d'un traité des sections coniques, et il écrit : « les principes de la géométrie infinitésimale étant applicables à tout, on ne saurait les donner trop tôt, et il est bien aisé de les expliquer nettement »[26]. Dans le second article, d'Alembert propose que le traité contienne aussi les règles du calcul intégral. Il précise en outre, qu'après avoir expliqué sa métaphysique « très simple et très lumineuse » du calcul différentiel, c'est-à-dire la méthode des limites, « on pourra se servir d'*infiniment petit* et d'*infini* pour abréger les expressions et les démonstrations »[27].

Terquem conclut son article des *NAM* par une « Note » sans appel dont nous retranscrivons la plus grande partie :

> Nous voyons [que d'Alembert] conseillait il y a près d'un siècle l'enseignement du calcul infinitésimal dans l'enseignement élémentaire ; et toutefois, en 1848, ce calcul, non seulement n'est pas admis, mais est encore superstitieusement repoussé, à tel point que beaucoup de professeurs ignorent ce calcul, que le grand nombre l'oublie, et qu'une classe entière de savants, les médecins et chirurgiens, n'en entendent jamais parler et restent ainsi complètement étrangers aux lois dynamiques, qui occupent une place si importante dans le jeu des fonctions vitales. L'Université, devenue républicaine, modifiera-t-elle son système d'éducation nationale, si défectueux dans la partie scientifique, si stérile dans la partie littéraire ? Je l'espère peu. La commission formée pour réformer les hautes études l'entreprendrait, qu'elle n'y réussirait pas[28] ; en France, il est

---

[24] TERQUEM Olry, « Avis », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 6, 1847, p. 204.
[25] TERQUEM Olry, « Note », *op. cit.*, p. 434.
[26] d'ALEMBERT Jean le Rond, Article « Ellipse », *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, Arts et des Métiers,* tome V, 1755, p. 1745.
[27] d'ALEMBERT Jean le Rond, Article « Géométrie », *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, Arts et des Métiers*, tome VII, 1757, p. 638.
[28] Terquem écrit dans une période de réformes de l'enseignement secondaire dont nous reparlerons dans la prochaine section.

> plus facile de changer dix formes gouvernementales qu'une seule forme pédagogique. Des préjugés mensuellement émargés sont inexpugnables.[29]

Il est bien difficile de comparer le système éducatif du milieu du XIX^e siècle à l'enseignement tel qu'il se pratiquait un siècle plus tôt. Même si, à l'époque où écrit Terquem, l'étude des coniques trouve place dans le programme de mathématiques spéciales, son utilisation des articles de d'Alembert pour appuyer sa position peut paraître anachronique. D'autant plus que le souhait de Terquem dépasse, on le voit, l'introduction du calcul différentiel en classe de mathématiques spéciales. Il s'agit bien de l'enseignement des mathématiques élémentaires en vue de l'obtention du baccalauréat qui est concerné puisqu'ici Terquem évoque professeurs, médecins et chirurgiens qui ignorent ce calcul.

Terquem est très probablement l'auteur d'un article des *NAM* de 1849 dont le titre suffit à montrer la virulence : « Programme rétrograde d'admission à l'École polytechnique, 1849 ». Dénonçant « une tendance exclusive [qui] semble se manifester vers la règle et le compas, et un éloignement des formules algébriques », il propose d'admettre dans ce programme « la théorie générale des dérivées, le symbolisme infinitésimal » car ainsi « tout se facilite, tout s'abrège, et vous aurez gagné le plus précieux de tous les biens, qu'on nomme le temps »[30].

Enfin, en 1850, dans la recension de l'ouvrage de Duncan Farquharson Gregory évoquée au chapitre précédent, Terquem affirme : « combien l'introduction [des procédés élémentaires du calcul différentiel] ferait économiser de temps et de peines, et populariserait de précieuses connaissances »[31].

L'analyse des arguments de Terquem et Finck en faveur de l'introduction du calcul différentiel dans l'enseignement secondaire nous montre qu'ils sont de trois ordres. Un premier argument est purement mathématique : la généralité de la méthode simplifierait l'étude de toute une catégorie d'objets et de problèmes mathématiques : courbes, recherches d'extrema, etc. Le second, conséquence du premier, est le gain de temps que provoquerait l'introduction de ce calcul, qui pourrait être mis à profit pour renforcer les études. Le troisième est d'ordre social.

---

[29] TERQUEM Olry, « Pensées de d'Alembert sur divers sujets de mathématiques », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 7, 1848, p. 276.

[30] TERQUEM Olry, « Programme rétrograde d'admission à l'École polytechnique, 1849 », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 8, 1849, p. 74.

[31] TERQUEM Olry, « Exercices et problèmes de calcul différentiel et intégral, par M. F.-D. Greory », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 9, 1850, p. 44.

Il devient nécessaire de répandre une théorie que toute une catégorie d'acteurs, médecins, chirurgiens, professeurs, mais aussi peut-être *l'honnête homme* du XIX^e siècle, ne peut ignorer.

À travers ces différents articles, Terquem propage ses réflexions dans le milieu des professeurs du secondaire, déjà pour partie acquis à un enseignement en mathématiques spéciales qui intègre des éléments de calcul différentiel. Ce n'est pas seulement l'avis de l'un d'entre eux, mais l'engagement du rédacteur d'une revue qui compte dans la communauté mathématique française. Mais il s'agit surtout pour Terquem, dont les propos laissent supposer un accord implicite des professeurs, de s'adresser aux rédacteurs des programmes, membres du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique et responsables du Ministère de l'Instruction publique.

2 – La théorie des fonctions dérivées dans les programmes de la classe de mathématiques spéciales (1851-1853)

2 – 1 La commission Le Verrier et l'introduction de la théorie des dérivées au concours d'admission à l'École polytechnique (1851)

Les souhaits exprimés par Terquem vont être partiellement réalisés en 1851, à l'occasion d'une des crises majeures que connaîtra l'École polytechnique au XIX^e siècle. À l'image du Royaume-Uni où des inventeurs, qui sont les principaux acteurs de la révolution technique, se désignent eux-mêmes sous le titre d'*engineers*, l'essor de l'industrie en France va provoquer une remise en cause de la formation polytechnicienne. Des techniciens indépendants vont revendiquer, contre le monopole de l'État, le titre d'ingénieur civil[32].

En 1829, Théodore Olivier, polytechnicien, Eugène Péclet, normalien ayant fréquenté Saint-Simon, beau-frère de Coriolis, Jean-Baptiste Dumas, chimiste, répétiteur à l'École polytechnique, et Alphonse Lavallée, juriste de formation, homme d'affaires, proche des milieux saint-simoniens fondent l'École centrale des arts et manufactures[33]. Ils considéraient

---

[32] Voir BELHOSTE Bruno, *La formation d'une technocratie : L'École polytechnique et ses élèves de la Révolution au Second Empire*, Paris, Belin, 2003, p. 135-157.

[33] Pour une étude détaillée du rôle de l'École centrale des arts et manufactures dans ces décennies on lira RIBEIL Georges, « Profil des ingénieurs civils au XIXe siècle. Le cas des centraux », dans André THÉPOT (dir*.), L'ingénieur dans la société française*, Paris, Les éditions ouvrières, 1985, p. 111-125, et WEISS John Hubble, *The Making of Technological Man. The Social Origins of French Engineering Education*, Cambrige, MITP Press, 1982. Sur l'histoire du premier demi-siècle de cette école, on lira aussi COMBEROUSSE (de) Charles, *Histoire de l'École centrale des Arts et Manufactures*, Paris, Gauthier Villars, 1879.

que l'enseignement à l'École polytechnique était devenu trop théorique et trop éloigné des applications à l'industrie, et qu'elle ne pouvait pas former les ingénieurs dont le pays avait besoin. Dans ses *Mémoire de géométrie descriptive, théorique et appliquée*, Olivier accuse Laplace, Poisson et Cauchy, « ces hommes incapables de comprendre autre chose que l'algèbre »[34], d'en avoir fait une école où « on s'efforce de former deux ou trois savants sans s'inquiéter si les autres élèves seront aptes ou non à être ingénieurs »[35].

L'École centrale délivre un diplôme d'ingénieur civil à l'issue de trois ans d'études. Étroitement liée au monde du travail, son succès est presque immédiat. Il est favorisé par le développement de la grande industrie qui s'opère en France à partir des années 1830.

Dans le même temps, l'École polytechnique refuse de former des ingénieurs civils et choisit au contraire de se spécialiser en reprenant en 1830 le statut d'École militaire abandonné en 1816. L'École des ponts et chaussées y voit un moyen de conserver le monopole sur les travaux publics, monopole que lui contestent de plus en plus des entrepreneurs privés. En revanche, les ingénieurs du corps des Mines désapprouvent majoritairement ce choix et rejoignent des polytechniciens saint-simoniens, démissionnaires du service public, passés dans l'industrie.

À partir des années 1840, les idées de ces ingénieurs civils s'étendent aux milieux académiques et politiques. La révolution de 1848 favorise l'émergence de critiques contre l'École polytechnique. Elle fait l'objet d'une violente campagne de la part des ingénieurs civils qui ont fondé cette année-là la Société centrale des ingénieurs civils. Leur objectif est de remettre en cause l'hégémonie des ingénieurs d'État. Cette campagne est relayée à l'Assemblée et au gouvernement par la majorité conservatrice qui juge l'École polytechnique trop républicaine. Le démembrement de l'École polytechnique est envisagé. Le président Louis-Napoléon y renonce mais une remise en ordre de l'École est décidée. L'astronome Urbain Le Verrier, élu député à l'Assemblée législative est chargé de cette mission.

Cet ancien élève de l'École y a été admis en 1831. Il a donc eu Mathieu comme professeur d'analyse. Répétiteur d'astronomie en 1837, élu à l'Académie des sciences en 1846 pour des travaux de mécanique céleste, il est auréolé de la gloire que lui vaut la découverte de la

---

[34] OLIVIER Théodore, *Mémoires de géométrie descriptive, théorique et appliquée*, Paris, Carilian-Gœury et V^ve^ Dalmont, 1851, p. XI.
[35] *Ibid.*, p. XII.

planète Neptune la même année. S'étant rapproché du groupe des savants proches des milieux industriels, dominé par Dumas, il est politiquement proche des conservateurs. Après avoir remis des rapports à l'Assemblée proposant la suppression de la gratuité des études, et se prononçant contre l'abolition du statut militaire, il propose la création d'une commission mixte chargée de réviser les programmes du concours et de l'enseignement à l'École. La loi est votée le 5 juillet 1850. Le lendemain un décret nomme les membres de la commission. Elle est présidée par le chimiste Louis Thénard, ancien professeur de Dumas dont il avait facilité la carrière. Le Verrier en est le rapporteur. Les autres membres de cette commission sont le général François Joseph Noizet, professeur à l'École d'application de l'artillerie et du génie, le général Jean-Victor Poncelet, commandant de l'École polytechnique, le général Guillaume Piobert, le contre-amiral Pierre Louis Aimé Mathieu, Duhamel, alors directeur des études à l'École, Jules Mary, inspecteur divisionnaire de l'École des ponts et chaussées, professeur à cette école, le colonel Arthur Morin, directeur du Conservatoire des arts et métiers, Victor Regnault, ingénieur des Mines, Olivier, professeur au Conservatoire des arts et métiers et A. Debacq, chef du bureau des États-majors et des écoles militaires. Thénard, Le Verrier, Poncelet, Piobert, Duhamel, Morin et Regnault sont membres de l'Académie des sciences. Dix des douze membres sont polytechniciens, sept sont membres de l'Académie des sciences. La commission est dominée par les savants proches des milieux industriels. Nommé rapporteur de la commission, Le Verrier y joue un rôle considérable, au point qu'elle est parfois désignée comme la *Commission Le Verrier*.

La commission sera appelée à remplir les fonctions du Conseil de perfectionnement jusqu'à la fin 1852. Du 16 juillet au 6 novembre 1850 elle siègera quatre fois par semaine au ministère de la Guerre. Elle rend un rapport de 440 pages qui sera publié fin novembre 1850, et, le 12 janvier 1851, dans un *Supplément* du *Moniteur Universel,* qui est le *Journal Officiel de la République Française*[36]. Les travaux de cette commission ont été décrits avec dureté par Ernest Mercadier, directeur des Études, dans le *Livre du Centenaire* de l'École polytechnique[37]. Il y dénonce la brutalité de cette commission aux ordres de Le Verrier qui provoque, selon lui,

---

[36] La publication dans ce *Supplément* ne contient pas les programmes pour l'admission et l'enseignement à l'École. Les programmes du concours d'admission étaient publiés le même jour dans le N°12 du *Moniteur Universel* pour l'année 1851.

[37] Voir MERCADIER Ernest, « Histoire de l'Enseignement de l'École Polytechnique » dans *École Polytechnique, Livre du centenaire, 1794-1894,* Tome I, L'École et la Science, Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1895, p. 65-71.

les départs de Jean-Marie Duhamel, Joseph Liouville, Michel Chasles et Eugène Catalan[38]. Cette commission, qui juge trop théorique l'enseignement à l'École et insiste sur l'utilité des applications, sera également brocardée par Terquem dans une série d'articles publiés dans les *NAM*[39].

Concernant le concours d'admission à l'École, la commission formule ces mêmes critiques d'un enseignement trop abstrait, éloigné des applications concrètes. La commission s'appuie sur un document transmis par le Conseil de l'École des ponts et chaussées dont elle adopte les conclusions. Ce texte cite lui-même un rapport de Dumas, de 1847, sur l'état de l'enseignement scientifique dans les collèges, les écoles intermédiaires et le primaire. Dumas y fustigeait les « dangers d'un enseignement scientifique [...] qui prend sa base dans l'abstraction pure », y affirmait que « la discussion de l'infini vient dès les premiers pas troubler la pensée » et concluait que l'étude abstraite des sciences est « une des épreuves les plus redoutables qu'on puisse faire subir à la civilisation »[40].

Le document de l'École des ponts et chaussées, déplore un accroissement des connaissances exigées pour l'examen depuis les trente dernières années. Mais surtout, il reproche aux professeurs des classes préparatoires et aux examinateurs de s'être « tacitement entendus » pour donner un développement excessif et abstrait à cet enseignement, descendant sur chaque question « jusqu'à des arguties ridicules »[41]. La commission en conclut à la nécessité de fournir des programmes plus détaillés pour limiter ces excès. Ce qui sera fait. Par exemple, pour l'algèbre, dans deux versions dont la typographie est comparable, le programme d'admission passe de neuf lignes à plus de quatre pages. Enfin elle réaffirme ses exigences d'éviter toute abstraction superflue et d'aller vers ce qu'elle considère comme la plus grande « simplicité » dans les démonstrations. Cette simplicité se conjugue pour elle avec la rapidité

[38] On pourra par exemple, pour ne s'en tenir qu'à des enseignants rencontrés dans ce travail, lire les critiques d'un examen de Liouville ou du cours de Sturm lors de la séance 11 janvier 1851 (*Rapports du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique,* CRH archives : X2B 10/1849-186O, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique).

[39] On pourra notamment lire de TERQUEM Olry, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, « Sur un article additionnel au programme d'examen d'admission à l'École polytechnique, en 1850 », t. 9, 1850, p. 268-271 et la « Bibliographie », t. 10, 1851, p. 153-156.

[40] « Rapport sur l'état actuel de l'enseignement scientifique par la faculté des sciences de Paris » cité dans le « Rapport sur l'enseignement de l'École polytechnique », *Supplément au N°12 du Moniteur Universel,*1851, p. IV.

[41] *Ibid.*, p. IV.

des méthodes, les méthodes plus longues ralentissant « tellement la marche des premières études, grâce à un rigorisme poussé jusqu'à l'abus »[42].

À propos de l'introduction des éléments de l'analyse, la commission constate que « les fonctions dérivées, bornées à celle des polynômes entiers ne rendent pas dans les études antérieures à l'admission, tous les services qu'on pourrait en tirer si elles étaient étendues à toutes les fonctions »[43]. Poursuivant, qu'il est « assez d'usage, dans l'enseignement [préparatoire au concours], de donner les dérivées des fonctions algébriques et fractionnaires, des fonctions transcendantes, logarithmiques, exponentielles et circulaires », la commission conclut qu'elle n'ajoutera « réellement rien » à cet enseignement préparatoire « en régularisant cet usage par l'introduction dans le programme élémentaire du calcul des dérivées de ces sortes de fonctions »[44]. Cette mesure, poursuit-elle, non-seulement sera « d'un grand secours dans l'enseignement de la géométrie analytique », mais encore « facilitera les premières leçons de calcul infinitésimal à l'École polytechnique, et permettra au professeur de passer plus rapidement sur ces commencements »[45].

Il s'agit donc pour la commission d'introduire la théorie des fonctions dérivées et non le calcul infinitésimal au concours d'admission à l'École polytechnique. L'enseignement de ce dernier reste l'apanage de l'École.

Les programmes du concours d'admission sont publiés le même jour par le *Moniteur Universel*. Pour les sciences, ils sont divisés en « Arithmétique », « Géométrie », « Algèbre », « Trigonométrie », « Géométrie analytique », « Géométrie descriptive », « Mécanique », « Physique et Chimie » et « Cosmographie ». La théorie des « Fonctions dérivées » apparaît dans le programme d'algèbre. Celui-ci est divisé en sept sections qui sont, dans l'ordre : « Calcul algébrique », « Équations du premier degré », « Équations du second degré à une inconnue », « Des séries », « Des logarithmes et de leurs usages », « Fonctions dérivées » et « De la résolution numérique des équations ». Nous recopions intégralement la section « Fonctions dérivées ».

> Développement d'une fonction entière $F(x+h)$ du binôme $(x+h)$. – Dérivée d'une fonction entière. – Revenir de la dérivée à la fonction.

[42] *Ibid.*, p XIII.
[43] *Ibid.*, p. XII.
[44] *Ibid.*, p. XII.
[45] *Ibid.*, p. XII.

La dérivée d'une fonction de x est la limite vers laquelle tend le rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement h de la variable, à mesure que h tend vers zéro.
Dérivées des fonctions trigonométriques.
Dérivées des fonctions exponentielles et logarithmiques.
Règles pour trouver la dérivée d'une somme, d'un produit, d'une puissance, d'un quotient de fonctions de x dont les dérivées dont connues.[46]

Remarquons tout d'abord que cette section ne correspond, en volume, qu'à environ 5% du programme d'algèbre. Il s'agit avant tout d'introduire en mathématiques spéciales un outil qui sera employé en algèbre, en géométrie analytique et en mécanique.

En algèbre la théorie des dérivées est utilisée pour la résolution des équations que le nouveau programme étend aux équations transcendantes.

En géométrie analytique, dans la section intitulée « Géométrie à deux dimensions », le programme précise, dans les généralités qui précèdent l'étude des coniques : « Problème des tangentes. – Le coefficient d'inclinaison, sur l'axe des abscisses, de la tangente à la courbe, est égal à la dérivée de l'ordonnée par rapport à l'abscisse » [47]. Une note de bas de page impose l'usage de cette propriété pour toutes les courbes du second degré.

Le programme de mécanique indique, dans la section « Mouvement simple ou composé », pour la détermination de la vitesse d'un mouvement varié : « Vitesse à un instant donné. Comment elle se détermine par le calcul ou par le tracé d'une tangente à une courbe, quand l'espace est une fonction donnée du temps »[48]. Une note de bas de page précise que la dérivée doit être recherchée par des méthodes graphiques lorsque la relation entre espace et temps ne sont connues que par des données expérimentales.

Le choix des rédacteurs des programmes est celui d'une introduction purement analytique de la théorie des fonctions dérivées, bien séparée de la notion géométrique de tangente. Ceci ne sera pas le cas dans le programme de première année du « Cours d'analyse » de l'École polytechnique adopté par la même commission. La recherche de la tangente y suit immédiatement la définition de la dérivée.

---

[46] « Programmes des connaissances exigées pour l'admission à l'École polytechnique », *Moniteur Universel*, N° 12, 1851, p. 110.
[47] *Ibid.*, p. 110.
[48] *Ibid.*, p. 111.

Si le lien avec le développement du binôme correspond aux conceptions défendues par Terquem qui souhaitait ainsi familiariser les élèves avec la formule de Taylor, il ne s'agit pas d'une présentation lagrangienne de cette théorie puisque la commission fait le choix de la méthode des limites. Cette méthode a fait ses preuves depuis Lacroix. La commission la légitime en s'appuyant sur un rapport de Poisson de 1826, à une époque où Cauchy et Ampère enseignaient l'analyse. Après avoir regretté que les professeurs n'aient pas adopté plus franchement la méthode des infiniment petits, Poisson poursuivait : « on pourrait exposer les principes du calcul différentiel et les règles de la différentiation indépendamment de cette méthode [les infiniment petits], pourvu qu'on l'employât exclusivement dans les applications à la géométrie et à la mécanique »[49]. Et la commission conclut : « Tel est, à peu de choses près, la marche effectivement suivie aujourd'hui. La considération des limites ne paraît que très rarement dans les applications à la géométrie »[50]. La méthode des limites qui se pratique à l'École pour l'introduction du calcul différentiel sera donc celle de la classe de mathématiques spéciales pour introduire la notion de dérivée.

Remarquons aussi que ce programme n'intègre ni la dérivation d'une fonction de fonction, ni le rapport entre signe de la dérivée et variation de la fonction. Un strict respect du programme limite singulièrement l'intérêt de la théorie des fonctions dérivées. L'étude de toute une gamme de fonctions est ainsi exclue et, pour l'étude des variations et la recherche des extrema, seule la méthode élémentaire reste autorisée[51].

La notion de continuité, est abordée dans la partie suivante du programme, « De la résolution numérique des équations ». Le premier article indique :

> Changements qu'éprouve une fonction entière $f(x)$ quand x varie d'une manière continue entre $-\infty$ et $+\infty$. – Lorsque deux nombres a et b substitués dans une fonction entière f(x) donnent des résultats de signes contraires, l'équation $f(x) = 0$ a au moins une racine réelle comprise entre a et b. Cette propriété subsiste pour toute espèce de fonction dès qu'elle reste continue pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b (3). [52]

[49] POISSON Siméon Denis, cité dans *ibid.*, p. XVI.
[50] *Ibid.*, p XVI.
[51] Pour une fonction f donnée, cette méthode consiste à résoudre l'équation paramétrique : $f(x) = m$.
[52] « Programmes des connaissances exigées pour l'admission à l'École polytechnique », *Moniteur Universel*, N° 12, 1851, p. 110.

La note de bas de page précise : « On doit se préoccuper des équations transcendantes qui, dans les applications, sont plus communes que les équations algébriques »[53].

La notion de continuité d'une fonction sur un intervalle et un énoncé du *théorème des valeurs intermédiaires* figurent pour la première fois dans le programme d'admission. Comme pour les dérivées, ces notions sont d'abord étudiées pour les fonctions entières avant d'être généralisées à des fonctions quelconques. Nouvelles dans le programme d'algèbre, ces notions étaient cependant déjà enseignées ainsi que nous l'avons vu au chapitre précédent dans les *Compléments de mathématiques spéciales* de Pierre-Henry Blanchet.

Le programme exclut aussi deux notions qui resteront du domaine de l'enseignement de l'École polytechnique : la notion de différentielle et les infiniment petits. Même si les travaux de la commission n'en porte pas trace, il semble bien qu'il y ait eu la crainte qu'introduire la notion de différentielle ne soit au-dessus de la portée des élèves. On peut le lire dans la deuxième édition du *Cours de mathématiques* de Charles de Comberousse, qui parait en 1887, deux ans après l'introduction de cette notion au concours d'admission à l'École polytechnique. Dans son « Avertissement », Comberousse écrit : « Pendant de longues années, de crainte d'aller trop vite et trop loin, la Théorie des Dérivées a été enseignée aux élèves de Mathématiques spéciales, sans que le mot de *différentielle* fût prononcé »[54]. L'exclusion de ces notions avait pour conséquence d'exclure la notion d'intégrale définie qui était alors considérée comme la somme des valeurs infiniment petites prises par la différentielle entre les bornes d'intégration.

Ceci ne signifiait pas non plus l'exclusion complète de la notion d'infiniment petits en classe de mathématiques spéciales. Dans la partie « Machines » du programme de mécanique, le programme indique :

> On ne saurait trop insister sur la nécessité de préférer, autant que cela est possible, les démonstrations rapides de la géométrie et des infiniment petit aux formes, soit disant plus rigoureuses, de l'analyse algébrique et de la méthode des limites ou du raisonnement à l'absurde.[55]

[53] *Ibid.*, p. 110.

[54] COMBEROUSSE (de) Charles, *Cours de Mathématiques, Tome troisième, Algèbre supérieure, Première Partie*, 2e éd., Paris Gauthier-Villars, 1887, p. V.

[55] « Rapport sur l'état actuel de l'enseignement scientifique par la faculté des sciences de Paris » cité dans le « Rapport sur l'enseignement de l'École polytechnique », *Supplément au N°12 du Moniteur Universel,*1851, p. XIII.

La méthode des limites employée pour introduire la fonction dérivée, considérée par la même commission comme « un véritable progrès, quant à l'esprit de l'enseignement »[56] lorsqu'il s'agit de calculer la circonférence et l'aire d'un cercle, est ici rejetée au profit d'une méthode plus rapide.

L'introduction mesurée d'éléments du calcul différentiel au programme du concours d'admission par l'enseignement de la théorie des fonctions dérivées procède de la reconnaissance d'un double état de fait et vise trois objectifs. Elle entérine un enseignement qui se pratique dans la plupart des classes préparatoires et reconnaît l'efficacité de la méthode en vigueur à l'École pour introduire ce calcul. Elle fournit aux professeurs de mathématiques spéciales un outil efficace, et enfin elle répond aux vœux de ceux qui, à l'École, pensent ainsi simplifier et alléger leur enseignement.

Nous sommes cependant loin des vœux de Terquem concernant l'introduction du calcul différentiel. Il écrira dans la recension de l'*Appendice* au *Traité d'algèbre* publié par Joseph Bertrand pour prendre en compte les nouveaux programmes : « on donne les principes du calcul aux différences et du calcul aux différentielles, sans nommer ces calculs. Pourquoi ne pas mettre ces deux admirables instruments entre les mains des élèves ? »[57]. Et nous sommes loin aussi de ce qui pouvait s'enseigner dans certaines classes préparatoires avant la réforme des programmes. Au chapitre précédent, l'analyse du manuel de Blanchet nous a en effet montré, dès les années 1830, un enseignement basé sur les infiniment petits définis à la manière de Cauchy.

Soulignons enfin, que l'introduction de la théorie des dérivées dans le programme d'algèbre du concours de l'École polytechnique sous-entend qu'il n'existe pas de difficulté sur la capacité des professeurs des classes préparatoires à le mettre en œuvre. Les doutes de Finck et Auguste Comte, relevés au chapitre précédent lors du projet de Coriolis, sont levés. Il est vrai que nous sommes une dizaine d'années plus tard. Le remplacement des professeurs non formés par ceux issus de l'École normale supérieure a eu lieu naturellement.

[56] *Ibid*., p X.
[57] TERQUEM Olry, « Appendice, 1851 », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 10, 1851, p. 154-156.

2 – 2 Le programme d'admission à l'École polytechnique comme programme de la classe de mathématiques spéciales (1853)

Les réformes que connaissent les programmes d'admission à l'École polytechnique ont vocation à se répercuter sur la classe de mathématiques spéciales dont l'objectif principal est de préparer les élèves à ce concours. Le ministre de la Guerre, dont dépend l'École polytechnique, demande donc à Hippolyte Fortoul, ministre de l'Instruction publique, de créer une commission mixte pour mettre en concordance les programmes des lycées avec les programmes d'admission aux écoles spéciales du gouvernement. Le Verrier semble une nouvelle fois à l'initiative de cette commission, instituée en juin 1852. Le ministre de La Guerre désigne, Thénard, Le Verrier, Amédée Bommart, inspecteur divisionnaire de l'École de ponts et chaussées qui a remplacé Duhamel comme directeur des études à l'École polytechnique, le général Alexandre-Alban Rolin, commandant de l'École d'application de l'État-major, et le lieutenant-colonel Yves-Delphis Bugnot, directeur des études à l'École spéciale militaire. Le ministre de la Marine nomme Mathieu et Guibert, examinateur des aspirants à l'École de la marine. Henri Vicaire, conservateur des forêts, et Adolphe Parade, directeur de l'École forestière, sont désignés par le ministre des Finances. Celui de l'Instruction publique nomme Dumas, Jacques-Étienne Bérard, professeur à la Faculté de Médecine, Inspecteur général, Adolphe-Théodore Brongniart, professeur au Muséum et à l'École centrale, membre des Académies des Sciences et de Médecine, Désiré Nisard, Inspecteur général pour l'enseignement supérieur des lettres, académicien, le général Morin, physicien, professeur au Conservatoire national des arts et métiers, Hippolyte Sonnet, professeur d'analyse à l'École centrale, Inspecteur de l'Académie de Paris, et Augustin Henri Lesieur, Inspecteur général honoraire de l'enseignement supérieur. Les personnalités qui dominent cette commission dont Dumas est chargé de rédiger le rapport, sont les mêmes que celles qui dominaient la commission chargée de réformer l'École polytechnique[58].

La création de cette commission se place dans le cadre d'un vaste mouvement de réforme du système éducatif français. L'enseignement secondaire public est alors vivement concurrencé par les établissements privés. Votée en mars 1850, la loi Falloux renforce cette concurrence en abolissant le monopole de l'Université sur l'enseignement. Les établissements privés ne

---

[58] Sur la désignation de cette commission et sur son rapport, on pourra lire le texte 45 dans BELHOSTE Bruno, *Les Sciences dans l'Enseignement secondaire français, Textes officiels. Tome I: 1789–1914*, Paris, Institut national de recherche pédagogique, 1995, p. 258-272.

sont plus tenus d'inscrire leurs élèves dans les lycées. S'appuyant sur le rapport Dumas de 1847, Fortoul prépare un nouveau plan d'études pour les lycées dont l'objectif est de renforcer l'enseignement scientifique. Il aboutit, en avril 1852, à un décret qui institue ce qui sera appelé la réforme de la « bifurcation »[59]. Cette réforme crée, à partir de la classe de 3e, une section littéraire et une section scientifique. Ce sont donc tous les programmes de l'enseignement scientifique des lycées que cette commission est chargée de réviser. Nous reviendrons plus en détail, au chapitre 7, sur cette réforme de l'enseignement secondaire.

Les nouveaux programmes pour le lycée paraissent en août 1852, à l'exclusion de ceux de la classe de mathématiques spéciales. Ces derniers font l'objet d'un arrêté, le 26 janvier 1853. Reprenant de façon un peu plus détaillée les textes élaborés par la commission Le Verrier, ils deviennent officiellement les programmes des concours d'admission aux École polytechnique et normale supérieure.

En ce qui concerne la théorie des fonctions dérivées, les programmes ajoutent à celui de 1851 la dérivée d'une fonction de fonction, les dérivées des fonctions circulaires inverses, ainsi que les articles suivants :

> Une fonction est croissante ou décroissante suivant que sa dérivée est positive ou négative.
> Deux fonctions qui ont des dérivées égales ne peuvent différer que par une constante. – Revenir de la dérivée à la fonction primitive dans les cas où cette opération peut se faire immédiatement. [60]

L'ajout de la dérivée d'une fonction de fonction et du lien entre signe de la dérivée et variation de la fonction élargit la gamme de fonctions qui peuvent être étudiées, simplifie l'étude des variations et la recherche des extrema.

La commission ajoute aussi des articles concernant l'utilisation de cette théorie pour le développement en série des fonctions $\log(1+x)$ et $\arctan x$, ainsi que des applications de ces développements. Il est intéressant de noter cet accroissement des programmes consécutif au passage à une commission élargie. Il ne concerne pas uniquement les fonctions dérivées. L'allègement des programmes initialement réclamé par la commission Le Verrier, dont

[59] Sur cette réforme, voir HULIN Nicole, *L'organisation de l'enseignement des sciences: la voie ouverte par le Second Empire,* Paris, Éditions du C.T.H.S., 1989.
[60] « Arrêté du 26 janvier 1853 » dans BELHOSTE Bruno, *op. cit.*, p. 301-320.

certains doutaient déjà à la lecture de la version de 1851[61], est un peu plus mise à mal. Enfin, se retrouvent dans ces programmes les applications à la géométrie analytique et la mécanique évoquées précédemment.

En 1854, à la suite de la réforme de la bifurcation, une longue instruction est envoyée aux Recteurs pour en faciliter l'exécution. La partie relative aux mathématiques, semble-t-il de la main de Le Verrier[62], revient sur les programmes de mathématiques spéciales et met en garde enseignants et examinateurs contre de futures dérives :

> Le programme du cours de mathématiques spéciales est aujourd'hui nettement défini : comme c'est précisément celui qui formera désormais la matière des examens des candidats à l'École polytechnique et à l'École normale, les professeurs n'ont rien de mieux à faire que de s'y conformer scrupuleusement. […] Le gouvernement y tiendra la main ; il serait d'ailleurs impossible que les examinateurs des écoles spéciales, appelés à se prononcer comme juges sur les grands intérêts remis à leur arbitre, s'écartassent des programmes, sans méconnaître les premières règles que la justice et l'équité leur imposent et dont leur caractère garantit l'exacte observation.[63]

Cette circulaire sonne comme une mise en garde adressée aux professeurs des classes préparatoires et aux examinateurs d'admission. Le ministère de l'Instruction publique entend que ne se reproduise plus le développement excessif des programmes dénoncé par la Commission Le Verrier, et dont elle rendait responsables professeurs et examinateurs.

Les programmes de la classe de mathématiques spéciales resteront officiellement inchangés jusqu'en 1905, ce qui ne sera pas le cas des programmes d'admission à l'École polytechnique qui connaîtront en 1885 et en 1896 des changements significatifs concernant le calcul différentiel.

Parallèlement à la modification des programmes, sous l'impulsion de Le Verrier et Dumas, l'enseignement préparatoire public aux écoles du gouvernement va être réformé. La collaboration entre les établissements publics et les institutions privées qui existait de fait va être abandonnée[64]. La préparation aux concours dans les lycées reprend les méthodes qui ont

[61] Voir MERCADIER Ernest, *op. cit.*, p. 68-69.
[62] Selon BELHOSTE Bruno, *op. cit*., p. 321.
[63] « Arrêté du 26 janvier 1853 » dans BELHOSTE Bruno, *op. cit*., p. 365.
[64] Voir BELHOSTE Bruno, « La préparation aux grandes écoles scientifiques au XIXe siècle : établissements publics et institutions privées », *Histoire de l'éducation*, No. 90, 2001, p. 101-130.

fait leurs preuves dans les institutions privées : organisation de conférences, répétitions et examens individuels.

De plus, à partir de 1865, le ministre de l'Instruction publique Victor Duruy organise des écoles préparatoires publiques sur le modèle de ce qui se faisait dans le privé. C'est en particulier le cas du lycée Saint-Louis à Paris. Il comporte un cours préparatoire aux mathématiques élémentaires, un cours de mathématiques élémentaires avec trois sections où les élèves préparent l'École navale dans la première, Saint-Cyr dans la deuxième et la classe de mathématiques spéciales pour la troisième. La classe de mathématiques spéciales est elle-même divisée en deux cours : un pour les nouveaux élèves et un pour les vétérans. Des lycées de province comme Nancy et Douai créent eux-aussi de véritables écoles préparatoires. Progressivement, les lycées publics, et tout particulièrement les grands lycées parisiens, deviennent les établissements de référence pour la préparation des concours aux écoles du gouvernement. Leurs enseignants deviennent les enseignants de référence. En 1862, le proviseur du lycée Saint-Louis écrit, dans son rapport sur Briot :

> M. Briot est connu comme le premier professeur de mathématiques spéciales des lycées de Paris. Sa réputation est très grande, il est très fort en mathématiques, et il a un talent d'exposition hors ligne. Son enseignement lui appartient en propre, il est de sa création.[65]

Briot a alors une classe de 100 élèves.

3 – Premiers manuels de mathématiques spéciales intégrant la théorie des fonctions dérivées (1851-1857)

3 – 1 Quatre auteurs de manuels qui enseignent en classes préparatoires

Les manuels d'algèbre d'avant la réforme traitaient des dérivées des fonctions polynômes. Certains, comme les *Leçons d'algèbre* de Paul-Louis Cirodde, élargissaient la notion de dérivée aux fractions rationnelles, définissant la dérivée à partir des limites. À compter de 1851 tous les manuels utilisent cette définition qui figure dorénavant au programme, alors que le champ des fonctions étudiées s'élargit aux fonctions transcendantes.

Nous avons retenu quatre auteurs pour étudier la façon dont ils exposent les nouveaux programmes dans leurs manuels. Tout d'abord Charles Choquet, enseignant à l'institution

[65] Cité dans BRASSEUR Roland, *op. cit.*

Mayer, l'une des principales institutions privées parisiennes depuis plusieurs décennies. Né en 1798, nous ne savons pas où il a effectué ses études supérieures. Après avoir été répétiteur à l'École d'artillerie de La Flèche, Choquet enseigne à l'institution privée fondée par le polytechnicien Mathias Mayer en 1824. Il obtient en 1842 un doctorat ès sciences à la Sorbonne en soutenant des thèses d'astronomie et de physique. Il est le beau-père de Le Verrier, ancien élève de l'institution Mayer, qui a épousé sa fille en 1837. Choquet avait co-écrit avec Mayer un *Traité élémentaire d'algèbre* qui en était à sa cinquième édition en 1849[66]. Mayer étant décédé en 1841, il publie en 1851, sous son seul nom, un *Complément d'algèbre* que nous n'avons pu consulter. Nous avons donc retenu l'édition de de 1856 du *Traité d'algèbre* qui prend aussi en compte les programmes de 1853.

Le deuxième auteur est Eugène Catalan qui publie en 1857 un *Manuel des aspirants à l'École polytechnique*. Mathématicien prolifique[67], élève de Mathieu à l'École polytechnique où il est admis en 1833, Catalan enseigne à l'École des Arts et Métiers, au lycée Charlemagne et obtient un poste de répétiteur à l'École polytechnique. Durant les années 1840, il fait partie des examinateurs qui interrogent les élèves de l'institution Mayer. Démissionnaire de l'École polytechnique pendant les travaux de la commission Le Verrier, il enseigne ensuite en mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis, puis dans des classes préparatoires privées après avoir refusé de prêté serment à Napoléon III.

Le troisième auteur est Joseph Bertrand. Enfant prodige, il suit à l'âge de onze ans les cours de l'École polytechnique à la demande de son oncle Duhamel, après avoir été l'élève de ce dernier à l'Institution Sainte Barbe. Bertrand est licencié ès sciences en 1838 à l'âge de seize ans, docteur ès sciences l'année suivante[68]. La même année il est également admis premier à l'École polytechnique et est reçu premier à l'agrégation de mathématiques en 1841. Auteur de travaux sur la convergence des séries et les surfaces orthogonales, il devient en 1844

---

[66] Ce *Traité élémentaire* est le premier à avoir publié le théorème de Sturm, Mayer en ayant acquis les droits auprès de Sturm. Ce fait rapporté par Terquem (TERQUEM Olry, « Théorème de M. Sturm », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 2, 1843, p. 97-106) montre bien la concurrence que se livreaient les auteurs de manuels à l'époque.

[67] Sur Catalan, on pourra lire JONGMANS François, *Eugène Catalan, géomètre sans patrie, républicain sans république,* Mons, Société belge des professeurs de mathématiques d'expression française, 1996 et le numéro spécial de la *Sabix* qui lui a été consacré à l'occasion du bicentenaire de sa naissance : « Eugène Catalan (1814-1894, X 1833) Le bicentenaire et le fonds d'archives Catalan-Jongmans », *Sabix*, n° 57, 2014.

[68] Sur Bertrand on pourra consulter de DARBOUX Gaston, « Éloge historique de Joseph-Louis-François Bertrand», 1901, http://www.academie-sciences.fr/pdf/eloges/bertrand_vol3262.pdf, consulté le 20/08/17.

professeur de mathématiques élémentaires au collège Saint-Louis et répétiteur d'analyse à l'École polytechnique. Il y devient examinateur d'admission en 1848. Il est aussi, en 1847, nommé maître de conférences à l'École normale supérieure. En 1852 il abandonne ses fonctions d'examinateur d'admission à l'École polytechnique pour le poste de professeur de mathématiques spéciales au lycée Napoléon, ancien collège Henri IV[69]. Sa nomination à ce poste semble être une conséquence de la volonté du gouvernement de renforcer les classes préparatoires publiques : Bertrand au lycée Napoléon, comme Briot au lycée Saint-Louis et Jan-Claude Bouquet au lycée Bonaparte, faisait partie des professeurs « éprouvés »[70] auxquels on confiait les chaires les plus importantes. En 1856 il remplace Sturm comme professeur d'analyse à l'École polytechnique.

Bertrand a publié en 1850 un *Traité élémentaire d'algèbre* qui ne contenait pas les matières du programme d'admission à l'École polytechnique. En février, le mois suivant la publication des programmes dans le *Moniteur Universel*, il publie une édition de cet ouvrage, complétée par un « Appendice » de 130 pages conforme au nouveau programme[71]. En 1853 paraîtra une nouvelle édition qui comportera des « Additions » d'une quinzaine de pages pour répondre aux programmes de 1853, mais il faudra attendre l'édition de 1855, indiquée comme la deuxième édition, pour que les programmes « universitaires » soient pleinement pris en compte. Ce manuel sera fréquemment réédité, connaissant une 19e édition en 1908. À partir de la troisième édition, il est co-écrit par Henri Garcet, ancien élève de l'École normale, professeur de mathématiques au lycée Napoléon depuis 1847. Après le départ de Bertrand pour l'École polytechnique, nous pouvons imaginer que Garcet est, jusqu'à sa mort en 1871, l'auteur principal du *Traité d'algèbre*[72].

Le quatrième auteur est Charles Briot. Ancien élève de Lacroix à l'Ecole normale où il est admis en 1837, il est reçu premier ex-aequo avec Bertrand à l'agrégation de mathématiques en 1841[73]. Il obtient son doctorat ès sciences l'année suivante, en soutenant des thèses de

---

[69] Avec le retour de l'Empire, les collèges royaux redeviennent lycées impériaux.
[70] Voir DARBOUX Gaston, *op. cit.*, p. CCCXL.
[71] L'*Appendice* paraît seul, quelques jours plus tard, paginé de 405 à 532.
[72] Il reste, semble-t-il, sous le contrôle étroit de Bertrand. Jules Verne, cousin de Garcet, annonce faire relire les calculs qui figurent dans ses romans lunaires par son cousin Garcet, « le collaborateur de Bertrand ». Garcet n'a semble-t-il enseigné les mathématiques spéciales qu'en 1848-1849.
[73] Sur la biographie de Briot, voir la notice « Briot Charles, 1817-1882 » sur le site de BRASSEUR Roland, https://sites.google.com/site/rolandbrasseur/home, consulté le 20/08/17.

mécanique et d'astronomie. Après avoir enseigné au collège d'Orléans et à la Faculté des sciences de Lyon, il est nommé à Paris, au lycée Bonaparte en 1851, puis, en 1852, au lycée Saint-Louis. De 1853 à 1857, Briot est également répétiteur adjoint du cours des machines et de géodésie à l'École polytechnique. À partir de 1855 il est chargé de la conférence d'astronomie et de mécanique à l'École normale supérieure en remplacement de Victor Puiseux. Il sera nommé maître de conférences sur cette même chaire en 1857 et l'occupera jusqu'à sa mort.

Briot publie en 1855 la deuxième partie, destinée à la classe de mathématiques spéciales, des *Leçons d'Algèbre*. La première partie renferme l'algèbre élémentaire et a été publiée en 1853. Cet ouvrage aura un succès aussi important que celui de Bertrand puisqu'il connaîtra une 17e édition en 1898.

Ces quatre auteurs sont, ou ont été, enseignants en classes de mathématiques spéciales ou en institutions privées lorsqu'ils publient leur manuel d'algèbre. Ils représentent à la fois ces institutions privées dont le rôle est essentiel dans la préparation aux concours durant la première moitié du XIXe siècle et perdure après les réformes du début des années 1850, et les lycées parisiens qui, après ces réformes, deviennent les établissements de référence dans la préparation aux concours. Tous sont liés de façon étroite à l'École polytechnique et/ou à l'École normale supérieure. Catalan, Bertrand et Briot y ont exercé ou y exercent des fonctions d'enseignement ou d'examinateur d'admission. Choquet côtoie à l'institution Mayer, des personnes qui exercent ces fonctions. Enfin Catalan, Bertrand et Briot ont publié d'autres manuels scolaires à destination de l'enseignement secondaire: des *Éléments de géométrie* pour Catalan en 1847, un *Traité d'arithmétique* pour Bertrand en 1849, et, pour Briot, des *Leçons nouvelles de géométrie analytique,* avec Bouquet en 1847, des *Leçons nouvelles d'arithmétique* en 1849, un *Cours de cosmographie* en 1853 et des *Éléments de géométrie* en 1856.

3 – 2 La théorie des fonctions dérivées dans ces manuels

Un plan qui suit la progression des programmes

L'édition de 1851 du *Traité d'algèbre* de Bertrand présente un plan particulier, conséquence probable du délai extrêmement court (deux mois) entre la parution des programmes d'admission à l'École polytechnique et la publication de l'ouvrage. Le manuel a visiblement été conçu en suivant les anciens programmes. Les nouveautés sont présentées dans un « Appendice » de douze chapitres et quatre « Notes » à l'édition de 1850. La « Théorie des fonctions dérivées » est le second de ces chapitres. Il est long de dix-huit pages, sur un ouvrage d'environ 560 pages dont près de la moitié sont consacrées au programme d'algèbre de mathématiques élémentaires.

Mais Bertrand par la suite, Briot, et Catalan adopteront tous un plan qui reprend exactement la progression indiquée dans le programme d'algèbre. Briot regroupe toute la théorie en un chapitre d'environ 60 pages sur les 350 du manuel, soit 17%. Dans l'édition de 1855, Bertrand la découpera en deux chapitres : « Théorie des dérivées » et « Séries qui servent au calcul des logarithmes ». Ils occupent 40 pages sur environ 280 pages consacrées au programme de mathématiques spéciales, soit 14 %. Catalan distingue quatre chapitres : « Théorie des dérivées », « Application des dérivées à la discussion des fonctions », « Des fonctions primitives », « Séries logarithmiques et circulaires », soit environ 40 pages sur 250, soit 16%.

Pour Choquet, la théorie des dérivées est incluse dans un chapitre intitulé : « Des séries – Limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ – Fonctions dérivées – Séries qui donnent les valeurs des logarithmes ». Ce chapitre ne suit pas immédiatement l'étude des logarithmes mais précède celui sur les équations. De plus, le manuel de Choquet est celui où la théorie des dérivées occupe la plus faible place : 15 pages sur 550, soit 3%. Ces différences chez Choquet sont probablement dues à l'adaptation d'un manuel ancien aux nouveaux programmes. La lecture de la table des matières fait en effet apparaître des notions hors programme comme la théorie de l'élimination. Cette théorie ne figurait pas non plus dans le programme précédent. Nous pouvons imaginer qu'elle faisait cependant l'objet de questions au concours d'admission.

La notion de fonction

Tous proposent une définition de la notion de fonction proche de la première version donnée par Euler : une fonction est une expression analytique. Ils reprennent la définition qui avait cours dans les manuels de mathématiques spéciales bien avant la réforme de 1851.

Nous nous arrêterons cependant sur la définition proposée par Briot. Il écrit tout d'abord, dans le chapitre sur la théorie des logarithmes où il ne considère que l'expression $y = a^x$ qu'il désigne sous le nom de fonction : « on appelle fonction en mathématique une expression contenant une lettre désignant une quantité variable »[74]. Puis, dans la théorie des dérivées, pour « abréger », il note $f(x)$ un polynôme, notation qui, écrit-il, « servira plus tard à désigner une fonction quelconque de x »[75]. La dérivation d'un polynôme est pour lui l'occasion d'utiliser la notation et le mot « fonction », notation et mot qu'il emploie par la suite pour une fonction quelconque, sans plus de détail. Il est intéressant de relier cette approche de la notion de fonction à la pédagogie de Lacroix dont Briot a suivi les cours à la Sorbonne comme élève de l'École normale. Dans son *Traité élémentaire,* Lacroix écrivait : « l'usage que nous ferons de ce mot [de fonction] par la suite en éclaircira la signification »[76].

La notion de continuité

Nous avons vu que le programme n'aborde la notion de continuité qu'à la suite de la théorie des fonctions dérivées, pour la résolution des équations. Mais cette notion est abordée de façon explicite par Bertrand, Briot et Catalan une première fois, avant même l'étude des fonctions dérivées. Il s'agit pour eux de démontrer la continuité de la fonction exponentielle $y = a^x$. En effet, dans la partie du programme intitulée « Des logarithmes et de leurs usages », qui précède immédiatement « Des fonctions dérivées », un article précise : « En formant toutes les puissances d'un nombre quelconque positif, plus grand ou plus petit que *un*, on peut reproduire tous les nombres »[77]. La démonstration de cette propriété repose en effet sur la continuité de la fonction exponentielle. Notons que Choquet utilise lui aussi la notion de continuité à l'occasion de cette démonstration mais de façon implicite, sans employer le mot.

Ainsi, à propos de la fonction exponentielle, Bertrand écrit :

> si […] l'exposant x reçoit des accroissements suffisamment petits, l'expression a^x peut varier aussi peu qu'on le voudra. On dit d'après cela que cette expression est une fonction continue de x et l'on entend par là qu'elle ne peut passer brusquement d'une valeur à une autre sans être susceptible d'acquérir les valeurs intermédiaires.[78]

[74] BRIOT Charles, *Leçons d'algèbre*, tome II, Paris, Carilian-Goeury et V^ve Dalmont,1855, p. 86.
[75] *Op. cit.*, p. 108.
[76] LACROIX Sylvestre-François, *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*, Paris , Duprat, p. 2 (voir *supra*, p. 107).
[77] « Programmes des connaissances exigées pour l'admission à l'École polytechnique », *Moniteur Universel*, N° 12, 1851, p. 110.
[78] *Ibid.*, p. 249.

Bertrand est l'élève de Duhamel qui définissait la continuité en termes de valeurs intermédiaires et démontrait l'équivalence avec la définition de Cauchy.

L'équivalence entre la définition de Cauchy de la continuité d'une fonction et la propriété des valeurs intermédiaires se trouve aussi chez Catalan qui écrit :

> une variable x est continue lorsqu'elle ne peut passer d'une valeur quelconque α à une autre valeur quelconque β sans passer par toutes les valeurs intermédiaires. Une fonction y est continue depuis $x = \alpha$ jusqu'à $x = \beta$, quand elle est réelle et finie pour toutes les valeurs de x comprises entre α et β, et que, dans cet intervalle, elle peut varier par degrés aussi petits que l'on veut(*).[79]

La note de bas de page à laquelle renvoie l'astérisque précise :

> S'il est possible de rendre l'accroissement de x assez petit pour que l'accroissement correspondant de y soit, en valeur absolue, inférieur à une quantité quelconque δ, y passera par toutes les valeurs intermédiaires entre celles qui répondent aux valeurs extrêmes de x : la seconde définition ne diffère donc pas essentiellement de la première.[80]

Briot démontre d'abord « que l'on peut donner à la variable x un accroissement h assez petit pour que la fonction a^x éprouve un accroissement plus petit que toute quantité donnée α »[81]. Il donne ensuite la définition de la continuité d'une grandeur puis d'une fonction :

> On dit qu'une grandeur varie d'une manière continue lorsqu'elle ne peut aller d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires. Une fonction est continue lorsqu'à une variation infiniment petite de la variable correspond une variation infiniment petite de la fonction[82].

La propriété des valeurs intermédiaires apparaît plutôt chez lui, comme une conséquence de la continuité de la fonction. Il faut noter l'expression de « variation infiniment petite » qu'emploie Briot. Cette notion n'est pas définie mais sa signification apparaît dans la citation donnée plus haut : un accroissement infiniment petit est un accroissement moindre que toute quantité donnée α.

Remarquons que, pour Bertrand, Catalan et Choquet il s'agit de la continuité sur un intervalle. La définition de Briot est plus ambigüe, mais fait penser à la continuité en une valeur.

---

[79] CATALAN Eugène, *op. cit.*, p. 87.
[80] *Ibid.*, p. 87.
[81] BRIOT Charles, *Leçons d'algèbre*, tome II, Paris, Carilian-Goeury et V^ve Dalmont, 1855, p. 87.
[82] *Ibid.*, p. 88.

La définition de la fonction dérivée

Bertrand définit, pour un polynôme F, ses dérivées successives comme les coefficients de $h, \frac{h^2}{1.2}, \frac{h^3}{1.2.3}$, etc., dans le développement de $F(x+h)$ suivant les puissances croissantes de h. L'écriture sous la forme $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ lui permet de donner une nouvelle définition de la dérivée comme limite de ce rapport quand h tend vers 0. Il peut ainsi étendre cette notion à toute fonction. Le problème de la dérivabilité d'une fonction n'est pas abordé. Les formules de dérivation des fonctions transcendantes du programme et les dérivées des somme, produit, quotient et puissance de fonctions sont obtenues également à partir des limites. Il n'y pas de différence notable dans la présentation qu'en donne Choquet.

Briot, s'il introduit de façon semblable la dérivée d'une fonction à partir de la dérivée d'une fonction entière (un polynôme), se préoccupe de l'existence d'une limite au rapport des accroissements. Il fait pour cela appel à la géométrie. Il explique comment construire la courbe représentative d'une fonction, c'est-à-dire qu'il introduit à cette occasion les premières notions de géométrie analytique. Il reproduit dans le texte la figure usuelle qui représente la courbe, sa tangente en un point M et une sécante MM'. Selon lui, la continuité de la fonction justifie qu'elle soit représentée par une courbe, donc que la limite de la sécante soit la tangente en M, quand M' se rapproche de M. Il en déduit que « le rapport des accroissements tend en général vers une limite finie et déterminée »[83]. Cette justification de l'existence d'une limite se situe là aussi dans la lignée du cours de Lacroix. La quatrième édition, de 1864, marque un peu plus cette filiation lorsque Briot écrit : « on peut ramener ce fait analytique à l'existence de la tangente à une courbe »[84], reprenant presque mot pour mot une phrase de Lacroix.

Cet appel à la géométrie dans le cours d'algèbre est à rapprocher de la réserve avec laquelle Bertrand choisit, en 1851, de représenter graphiquement la méthode de Newton pour la recherche d'une valeur approchée de la solution d'une équation. Après avoir présenté de façon purement algébrique cette méthode dans le cas d'un polynôme, il écrit que celle-ci « peut se présenter graphiquement d'une manière très simple, que nous croyons devoir indiquer ici quoiqu'elle exige des notions de géométrie analytique »[85]. Mais nous sommes

---

[83] BRIOT Charles, *Leçons d'algèbre*, tome II, Paris, Carilian-Goeury et V^ve^ Dalmont, 1855, p. 112.
[84] BRIOT Charles, *Leçons d'algèbre*, 4^e^ éd., tome II, Paris, Dunod,1862, p. 112.
[85] BERTRAND Joseph, *Traité élémentaire d'Algèbre*, Paris, Hachette, 1851, p. 509.

alors en plein travaux de la commission Le Verrier. Le respect d'un programme qui ne lie pas l'introduction algébrique de la fonction dérivée à la représentation graphique s'impose sans doute plus fortement que ce ne sera le cas quelques années plus tard.

Catalan, quant à lui, définit d'emblée la dérivée d'une fonction quelconque comme limite du rapport des accroissements, rapport dont on « conçoit […] qu'il tend vers une certaine limite » [86]. Son ouvrage paraissant quelques années après la mise en œuvre des programmes, nous pouvons nous demander si cette introduction est propre à l'auteur ou si elle reflète déjà une pratique en cours dans un certain nombre de classes préparatoires. Cette façon de procéder le conduit à obtenir le développement d'un polynôme comme conséquence de la théorie des dérivées, conséquence qu'il désigne sous le nom de « théorème de Taylor ». Il le démontre dans le cas d'une fonction entière, « le seul dont [il ait] à s'occuper ici »[87]. Ce théorème est cependant annoncé comme permettant de développer une fonction quelconque. Un exercice propose d'ailleurs par la suite, « en admettant la généralité du théorème de Taylor »[88], de développer en série de Taylor quelques fonctions transcendantes.

Variations et extrema

Le théorème de Taylor ne figure pas dans le programme d'algèbre. Nous avons vu qu'en 1853, apparaissait dans ce programme, le lien entre signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction. Ceci impose la méthode d'étude des variations à partir de l'étude du signe de la dérivée comme outil de recherche des extrema. L'analyse de la façon dont ces quatre ouvrages rendent compte de ce point du programme appelle deux remarques.

La première remarque concerne la définition d'une fonction croissante. Ni Briot ni Choquet ne donnent de définition. Elle figure, de façon implicite dans la démonstration du rapport entre signe de la dérivée et sens de variation. En utilisant la relation $k = h[f'(x) + \varepsilon]$, où h et k sont respectivement les accroissements de la variable et de la dérivée, Briot affirme que pour h assez petit, le signe de la dérivée donne celui des parenthèses et conclut :

> en supposant h positive, c'est-à-dire la variable x croissante, on voit que la variation k de la fonction aura le signe de la dérivée ; si la dérivée est positive, k

[86] CATALAN Eugène, *Manuel des candidats à l'École polytechnique*, tome I, Paris, Mallet-Bachelier, 1857, p. 110.
[87] *Ibid.*, p. 127.
[88] *Ibid.*, p. 131.

> sera positive et la fonction ira en croissant ; si la dérivée est négative, k sera négative et la fonction ira en décroissant.[89]

Choquet est le plus expéditif. Il observe que, si la dérivée est positive en une valeur a, pour une valeur de h positive et très petite « on a, $f(a+h) > f(a)$, c'est-à-dire que la fonction croit avec x ».

Tandis que Bertrand et Catalan définissent explicitement une fonction croissante ou décroissante. Pour Bertrand, une fonction est croissante si on a $f(x+h) > f(x)$ pour de « très petites valeurs de h ». La définition de Catalan est identique.

Pour tous, il s'agit de la croissance à partir d'une valeur déterminée de la variable x, notion que nous avons vu figurer pour la première fois dans le *Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal* de Cauchy. Le passage de la variation en une valeur à la variation sur un intervalle ne fait l'objet d'aucun commentaire : il est évident dans ces manuels, comme il l'était chez Cauchy.

La seconde remarque concerne exclusivement le *Traité d'algèbre* de Bertrand. Nous avons vu qu'il déduisait le signe de la dérivée du sens de variation sans jamais évoquer la réciproque. Il s'agit pourtant bien de la réciproque qui figure au programme, réciproque qu'il emploie dans les exemples d'étude des variations de quelques fonctions. Nous n'avons pas d'explication à proposer à cette observation. À partir de l'édition suivante, écrite en collaboration avec Garcet, le *Traité d'algèbre* de Bertrand démontrera la relation entre signe de la dérivée et variation de la fonction dans le sens indiqué par le programme.

Enfin, soulignons que Bertrand utilise la continuité pour la recherche des extrema. Après avoir démontré qu'une fonction est croissante (*i.e.*, décroissante) si la dérivée est positive (*i.e.* négative), il en déduit que l'existence d'un extremum a est indiquée par le changement de signe de la dérivée, d'où il conclut : « il en résulte qu'une fonction dont la dérivée est continue ne devient maxima ou minima que pour les valeurs de la variable qui annulent la dérivée »[90].

Le nouveau programme d'algèbre n'indique pas de définition de la notion de continuité et la cantonne à la propriété des valeurs intermédiaires. Mais, indirectement, en raison du choix

[89] BRIOT Charles, *Leçons d'algèbre*, tome II, Paris, Carilian-Goeury et V^ve^ Dalmont,1855, p. 130.
[90] BERTRAND Joseph, *Traité élémentaire d'Algèbre*, 2^e^ éd., Paris, Hachette, 1855, p.279.

des auteurs de démontrer certaines propriétés, que ce soit à propos de la fonction exponentielle ou dans la théorie des dérivées, leurs manuels donnent une importance accrue à cette notion.

Les exercices

À l'exception du Choquet qui se contente de traiter des exemples en cours de chapitre, tous ces manuels préparant aux concours d'admission des Écoles polytechnique et normale supérieure proposent une série d'exercices à chaque fin de chapitre. Dans l'édition de 1851 du manuel de Bertrand, il n'en figure que trois à la fin du chapitre « Théorie des fonctions dérivées ». Il ne s'agit que de calculs de limites utilisant la définition de la dérivée d'une fonction. Ceci s'explique probablement par le programme de 1851 qui, appliqué scrupuleusement, ne permettait, comme nous l'avons vu, que peu d'applications de cette théorie.

L'édition de 1855 est plus fournie avec quatorze exercices. La plupart sont des calculs de fonctions dérivées, allant de la dérivée de $\log \arcsin x$ à celle de :

$$\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a\sin x}{a+b\cos x}-\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\text{arc tang}\left(\frac{\sin x\,.\sqrt{a^2-b^2}}{b+\ a\cos x}\right)\right]$$

Un seul nécessite une étude de fonction. Il s'agit de déterminer si l'équation $x^m = m^x$ a d'autre solution que m en étudiant la fonction $\frac{\log x}{x}$.

La même année le manuel de Briot propose onze calculs de dérivées. Ils requièrent une technicité moindre, et surtout, ils commencent par des exemples plus simples comme la dérivée de $y = \text{tang}\, x - \cot x$ ou de $y = e^x(x-1)$. Ils sont suivis de six exercices de recherche d'extremum. Le premier est ainsi libellé : « Dans un demi-cercle, inscrire un trapèze de surface maximum », et le dernier : « Sur une droite qui joint deux lumières, trouver le point le plus éclairé par ces deux lumières »[91].

En 1857, les exercices de calcul de dérivées proposés par Catalan sont d'un degré de difficulté semblable à ceux de Briot. Il propose en plus des calculs de dérivées n^ièmes^, le développement en série de Taylor de $e^x, l.(1+x), \sin x, \cos x$, « en admettant la généralité du Théorème de

[91] BRIOT Charles, *Leçons d'algèbre*, tome II, Paris, Carilian-Goeury et V^ve^ Dalmont,1855, p. 168, 169.

Taylor »[92] vu pour des fonctions entières, ainsi qu'un exercice sur les dérivées partielles. Nous y trouvons aussi des études de fonctions comme $y = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

La consultation des sujets des épreuves écrites d'admission à l'École polytechnique nous montre exclusivement des problèmes de géométrie. Ils peuvent être résolus de manière analytique, et donc nécessiter des études de fonctions dérivées. Cependant, la technicité alors demandée n'est pas celle qui est exigée dans les exercices de ces manuels cités plus haut. Même si, comme l'indique l'un des rédacteurs des *NAM* de 1865 à propos de l'épreuve orale du concours d'admission, « la plupart des questions […] sont incidentes et amenées par une question principale empruntée au programme »[93], nous pouvons estimer que les exercices des manuels reflètent un niveau maximal d'exigence pour la préparation de l'épreuve orale. En témoignent les rares exemples de questions proposées par le journal dans le même article :

> 40. Dérivée de $x^{sin\, x}$
> 41. Dérivée de $arc\, sin\, x$. Pourquoi obtient-on deux valeurs.[94]

3 – 3 Des manuels qui s'éloignent des programmes officiels

L'analyse de ces quatre manuels fait apparaître un certain nombre de développements qui ne figurent pas explicitement dans les programmes d'algèbre de 1851 et 1853.

Ainsi, dans l'édition de 1851, Bertrand donne aussi les dérivées des fonctions $F(a+x)$ et $F(a-x)$. Il démontre que, « si la dérivée est nulle, la fonction est constante », puis que « si la dérivée est très petite, la fonction diffère très peu d'une constante »[95] . Cependant, plus que des écarts aux programmes, il s'agit plus pour lui d'énoncer des propriétés qui serviront par la suite dans les développements en série de $\log(1+x)$ et $\log(1-x)$. De même, il démontre, dans le sens vu précédemment, qu'une fonction « est croissante ou décroissante, pour une certaine valeur de la variable, suivant que la dérivée […] est positive ou négative »[96] puis démontre *le théorème de Rolle*:

---

[92] CATALAN Eugène, *Manuel des candidats à l'École polytechnique*, tome I, Paris, Mallet-Bachelier, 1857, p. 131.
[93] « Question d'examen (1864) », *Nouvelles annales de mathématiques, 2e série*, 1865, p. 280-285.
[94] *Ibid.*, p. 284.
[95] BERTRAND Joseph, *Traité élémentaire d'Algèbre*, Paris, Hachette, 1851, p. 426.
[96] *Ibid.*, p. 455.

> Si $\varphi(x)$ représente une fonction continue de x, dont la dérivée $\varphi'(x)$ soit aussi continue, entre deux racines consécutives a et b de l'équation $\varphi(x) = 0$, il se trouve toujours une racine de l'équation $\varphi'(x) = 0$.[97]

Mais il s'agit là encore de démontrer un théorème du programme, le théorème de Descartes sur les racines d'un polynôme. Ce théorème énonce que le nombre de racines strictement positives d'un polynôme ne peut jamais dépasser le nombre de variations du polynôme

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots A_p x^{m-p} + A_q x^{m-q}\ ,$$ [98]

en disant qu'il y a variation chaque fois que deux termes consécutifs sont de signes contraires. Cependant le choix de Bertrand d'employer une méthode qui utilise la théorie des fonctions dérivées pour démontrer ce théorème, et ainsi de « faire connaître quelques propositions auxiliaires curieuses et utiles »[99] comme le théorème de Rolle, peut s'interpréter comme sa volonté de montrer l'intérêt de cette théorie au-delà des limites fixées par le programme.

Dans l'édition de 1855, il démontre qu'une fonction, dont la dérivée est continue, admet un extrémum lorsque sa dérivée s'annule et change signe, propriété qui ne figure pas au programme. Cette même édition, généralise la notion de dérivée d'une fonction de fonction à des cas où la fonction dépend de la variable x au moyen de plusieurs fonctions intermédiaires.

Cependant, parmi les quatre ouvrages que nous examinons, le *Traité d'algèbre* de Bertrand, particulièrement dans son édition de 1851, nous paraît être celui qui se conforme le plus précisément au programme. Pouvait-il en être autrement à la suite des travaux de la Commission qui avait vivement critiqué les développements excessifs donnés aux programmes d'admission, conséquence selon elle d'une entente tacite entre les professeurs de classes préparatoires et les examinateurs du concours dont Bertrand faisait partie?

Les trois autres auteurs développent plus largement la théorie des dérivées. Briot, dès la première édition, définit les dérivées des fonctions de plusieurs variables, c'est-à-dire les dérivées partielles de la fonction par rapport à chacune des variables. Son objectif est de parvenir à la dérivation des fonctions implicites pour obtenir, dans le cas d'une équation $f(x,y) = 0$, la relation $y' = -\frac{f'_x}{f'_y}$. Ce qui est en jeu dans cette dérivation des fonctions

[97] *Ibid.*, p. 456.
[98] Nous reprenons ici les notations de Bertrand.
[99] *Ibid.*, p. 455.

implicites, c'est l'étude des courbes définies par une relation $f(x, y) = 0$. Briot s'inscrit dans le prolongement d'ouvrages qu'il avait déjà publiés. Ainsi, dans la deuxième édition des *Leçons nouvelles de géométrie analytique,* Briot et Bouquet démontraient déjà cette relation en 1851 dans le cas d'une courbe algébrique[100].

Briot s'éloigne aussi d'une lecture restrictive des programmes de 1853 sur un point situé dans un autre cadre que celui des applications. Pour traiter la partie du programme : « Revenir de la dérivée à la fonction primitive dans les cas où cette opération peut se faire immédiatement », il entend « démontrer d'abord l'existence de la fonction primitive, qu'on puisse ou non l'exprimer au moyen des signes de l'algèbre »[101]. La démonstration est celle de l'expression de la dérivée de l'aire située sous la courbe qui représente une fonction continue. Elle est semblable à celle que nous avons rencontrée pour la première fois dans le *Traité élémentaire* de Lacroix, même si elle n'utilise évidemment pas la notion de différentielle. À cette occasion, Briot s'appuie, pour la deuxième fois, sur la courbe représentative d'une fonction pour démontrer une propriété. Dans l'édition de 1856, il utilisera en plus une représentation géométrique pour justifier que deux fonctions qui ont des dérivées égales ne peuvent différer que par une constante.

Comme Briot, Choquet et Catalan abordent les notions de dérivées partielles afin d'obtenir la relation sur la dérivée d'une fonction implicite, Catalan donnant même la formule pour la dérivée seconde d'une telle fonction. La lecture de ce dernier auteur montre bien à quel point l'application des dérivées à la géométrie analytique engage les auteurs à outrepasser le programme. En effet, l'étude de la concavité ou de la convexité de la courbe le conduit à considérer le signe de la dérivée de seconde, et il conclut ainsi la recherche des extrema des fonctions de deux variables : « afin de ne pas trop nous écarter du Programme, nous passerons sous silence la règle qui sert à distinguer le maximum du minimum »[102].

Choquet démontre le théorème des accroissements finis, pour une application à l'analyse numérique. Il l'utilise pour la recherche du « degré d'approximation » dans l'emploi de la méthode de Newton de la résolution d'une équation. Ce théorème, démontré pour une

[100] Voir BRIOT Charles et BOUQUET Jean-Claude, *Leçons nouvelles de géométrie analytique*, 2e éd., Paris, Dezobry et Magdeleine, 1851, p. 133.
[101] BRIOT Charles, *Leçons d'algèbre*, tome II, Paris, Carilian-Goeury et V[ve] Dalmont,1855, p. 144.
[102] CATALAN Eugène, *op. cit*., p. 378.

fonction dont la dérivée est continue, est ensuite étendu pour établir la *formule de Taylor-Lagrange* à l'ordre un.

Nous pouvons donc distinguer deux motifs principaux qui poussent ces différents auteurs à s'éloigner des programmes officiels, ou tout du moins à en adopter une lecture élargie. Tout d'abord la volonté de justifier des principes, comme la justification de la dérivabilité d'une fonction ou de l'existence d'une primitive chez Briot. Enfin, et surtout, la volonté d'aller plus loin dans les applications, en particulier dans les applications géométriques.

4 – La théorie des dérivées dans les manuels de 1857 à 1885 : vers le théorème de Rolle comme fondement de l'analyse

Nous poursuivons dans cette section notre analyse des manuels de Bertrand et Briot et des modifications de leurs contenus. Régulièrement réimprimés, (neuf éditions pour le premier, onze pour le second, voir figure 6 ci-dessous[103]) ils sont de précieux indicateurs de l'enseignement de l'analyse en classe de mathématiques spéciales durant une période qui ne connait pas de changements notables dans les programmes.

L'édition de 1885 de l'ouvrage de Bertrand et Garcet n'intègre pas les modifications de programme de cette année-là (les éditions postérieures à 1871 sont des éditions posthumes pour Garcet). Il en est de même pour l'édition de 1883 de l'ouvrage de Briot, qui meurt en 1882.

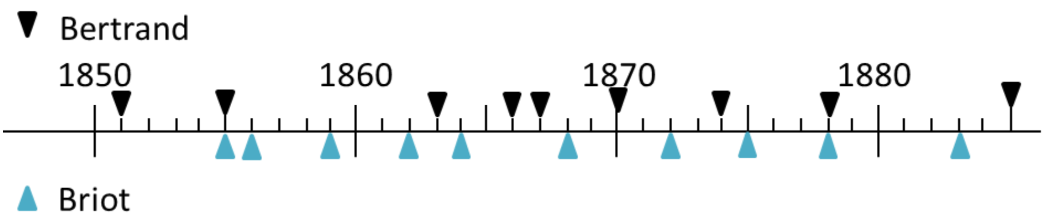


Figure 6: les éditions des ouvrages de Bertrand et Briot jusqu'en 1885

[103] À compter de 1863 le *Traité d'Algèbre* de Bertrand et Garcet est partagé en deux volumes : un volume pour l'algèbre élémentaire et un volume pour les compléments d'algèbre enseignés en mathématiques spéciales. Le premier des deux paraît avoir été réimprimé plus fréquemment que le second. Les éditions des deux tomes ont donc une numérotation différente. Les éditions de 1870, 1873, 1885 du second volume portent la mention « Nouvelle édition ».

Nous avons, en outre, retenu pour cette période, trois autres auteurs en raison de leur position institutionnelle. Le premier est Charles de Comberousse. Ancien élève de l'École centrale des arts et manufactures, il publie en 1861 un *Cours de mathématiques* à destination des candidats à cette école. L'École centrale est devenue une école gouvernementale en 1857. La préparation des élèves qui souhaitaient intégrer cette école était auparavant organisée par des institutions privées[104]. À partir de 1857, l'admission se fait sur concours, comme pour les autres écoles du gouvernement. Le programme diffère de celui du concours d'admission aux Écoles polytechnique et normale supérieure. N'y figurent que les mathématiques élémentaires de la section sciences de l'enseignement secondaire, complétées par quelques notions de géométrie plane. À partir de 1867 la théorie des dérivées sera inscrite à ce programme, élargissant le public auquel s'adresse l'enseignement de l'analyse. Les élèves qui préparent ce concours trouveront place en classe de mathématiques spéciales. Les grands lycées parisiens et les principaux lycées de province créeront par la suite des classes dédiées à la préparation du concours de l'École centrale.

Comberousse enseigne la mécanique à l'Ecole centrale et prépare les élèves du Collège Chaptal[105] au concours d'admission à cette École lorsqu'il publie son *Cours de mathématiques*. Il deviendra examinateur d'admission à l'École centrale et enseignera les travaux agricoles et le génie rural au Conservatoire national des arts et métiers à partir de 1882. Il représente une autre lignée d'enseignants que ceux issus des Écoles polytechnique et normale supérieure. Son *Cours de mathématiques* sera réédité à partir de 1876 comme étant *à l'usage des candidats à l'école polytechnique, à l'École normale supérieure et à l'École centrale des arts et manufactures*. L'*Algèbre supérieure*, destinée aux classes de mathématiques spéciales, sera partagé en deux tomes, le premier ne paraissant qu'en 1887. Les éditions suivantes seront posthumes. Une neuvième édition paraîtra en 1950. Cet ouvrage méritait donc à plus d'un titre notre attention. Signalons aussi que le *Cours de mathématiques* est le premier d'une série de manuels d'enseignement dont certains connaîtront, là encore, de nombreuses

[104] Voir BELHOSTE Bruno, *op. cit.*

[105] Le collège municipal Chaptal est une ancienne institution privée. Endettée, elle est reprise par la mairie de Paris en en 1848. Le collège conserve le projet initial du fondateur de la première institution, Prosper GOUBAUX. Il visait à remplacer les humanités classiques des lycées par l'étude du français, des langues et des sciences, afin de préparer les élèves au commerce et à l'industrie, projet en adéquation avec celui des fondateurs de l'École centrale (on pourra lire, sur le site du lycée Chaptal, « Faits historiques », http://www.lycee-chaptal-paris.fr/article-23.html).

éditions. Comberousse fera notamment paraître, avec Eugène Rouché, en 1866, un *Traité de géométrie élémentaire* et toujours avec Rouché, en 1867, des *Éléments de géométrie.*

Le second est Hermann Laurent. Ancien élève de Bertrand à l'École polytechnique, de la promotion de 1860, Hermann Laurent est répétiteur d'analyse à l'École. Se considérant comme un disciple de Cauchy, il a soutenu une thèse sur les fonctions de la variable imaginaire. Il publie une *Théorie des séries* en 1862, alors qu'il est élève de l'École polytechnique, et un *Traité des résidus* en 1865. Il est répétiteur depuis un an lorsqu'il publie en 1867 son *Traité d'algèbre à l'usage des écoles du gouvernement*[106].

En 1870 Laurent entre comme actuaire à la compagnie l'*Union*. En 1872 il est l'un des membres fondateurs du Cercle des actuaires français qui entend réorganiser la profession en assurant une formation scientifique aux futurs actuaires. De 1874 à 1881 il est chargé du cours de calcul différentiel et intégral à l'École préparatoire à l'enseignement supérieur des sciences et des lettres de Rouen, ville qui est rattachée à l'Université de Caen. En 1883, il est nommé examinateur d'admission à l'École polytechnique. Il a aussi préparé des élèves aux concours des écoles du gouvernement dans plusieurs institutions privées. Son *Traité d'algèbre* sera réédité en 1875 et 1881 pour la période qui nous intéresse ici, puis en 1887 et 1897.

Le troisième auteur est Gaston Gohierre de Longchamps qui publie en 1883 un *Cours de mathématiques spéciales* en trois volumes. Après deux années de mathématiques spéciales dans les lycées Charlemagne et Bonaparte, tout en suivant les cours d'institutions privées, il entre à l'École normale supérieure en 1863[107]. Il suit donc les cours de Serret à la Sorbonne, et de Briot comme maître de conférences. Agrégé de mathématiques en 1871, après avoir enseigné dans les lycées de Mont-de-Marsan, Poitiers et Niort, il est nommé professeur de mathématiques spéciales en 1878 au Collège Rollin puis, l'année suivante, au lycée Charlemagne.

Il publie de nombreux articles dans la *Revue des Sociétés Savantes*, les *NAM*, les *Annales Scientifiques de l'École normale supérieure*, les *Comptes Rendus de l'Académie* et la *Nouvelle*

---

[106] Sur Laurent, voir BRU Marie-France, BRU Bernard et EID Salah, « Une introduction analytique à la théorie analytique. Hermann Laurent (1873) », *Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique*, vol. 8, 2012, www.jehps.net

[107] Sur la biographie de Gohierre de Longchamps, voir la notice « Gohierre de Longchamps Gaston, 1842-1906 » sur le site de BRASSEUR Roland, op. cit.

Correspondance Mathématique de Catalan, la plupart étant de la portée théorique du programme de mathématiques spéciales. En 1882 il prend la direction du *Journal de Mathématiques Élémentaires et Spéciales* fondé par Justin Bourget en 1877.

Outre ses fonctions d'enseignant en mathématiques spéciales dans l'un des grands lycées parisiens, son rôle de directeur d'un des principaux journaux de mathématiques de l'époque à destination des enseignants justifie notre intérêt pour son *Cours de mathématiques spéciales*. L'ouvrage sera réédité en 1887 et 1893.

4 – 1 Les développements de la théorie des fonctions dérivées dans le manuel de Briot, « premier professeur de mathématiques spéciales des lycées de Paris »

De 1855 à 1885, dans le manuel de Bertrand, le nombre de pages des chapitres consacrés à la théorie des fonctions dérivées passe de 37 à 63. Cet accroissement ne concerne cependant pas la théorie. Il s'agit de précisions apportées à chacun des points abordés, et d'une augmentation du nombre d'exercices. La seule véritable nouveauté, qui ne figure pas au programme, est l'introduction, dans l'édition de 1863, de la *règle de l'Hôpital* pour lever l'indétermination dans le cas où la fonction se présente sous la forme $\frac{0}{0}$.

L'édition de 1863, la première en collaboration avec Garcet, comporte aussi deux nouveautés qui méritent d'être relevées. En effet, y figure, pour la première fois, une mise en valeur de la définition de la continuité d'une fonction. Toujours définie en termes de valeurs intermédiaires à propos de la fonction a^x, elle fait l'objet d'un paragraphe particulier dans l'ouvrage, au lieu d'être introduite au détour d'une phrase. Il s'agit aussi de la première édition où l'ouvrage pose la question de l'existence d'une dérivée, et y répond, de la façon suivante :

> On peut demander, si une fonction continue quelconque $f(x)$ a une dérivée. Nous répondrons d'abord, qu'en fait, nous allons trouver, dans les paragraphes suivants, les dérivées des principales fonctions ; ce qui démontrera leur existence à posteriori. Nous ajouterons, d'ailleurs, que la fonction étant continue, l'équation $y = f(x)$ représente une courbe plane continue, rapportée à deux axes rectangulaires ; et l'on démontre, en géométrie analytique, que la dérivée représente la tangente trigonométrique que fait, avec l'axe Ox, la tangente à la courbe au point (x, y). Comme en chaque point, une courbe continue a une tangente bien déterminée, la fonction admet une dérivée.[108]

[108] BERTRAND Joseph et GARCET Henri, *Traité d'Algèbre*, t. 2, 3e éd., Paris, Hachette, 1863, p. 92.

Bertrand reprend l'argumentation de Lacroix dans son *Traité élémentaire* pour justifier de la dérivabilité d'une fonction continue. Il faut noter aussi que, de façon quelque peu surprenante, aucune figure ne vient étayer le raisonnement. Pourtant, dans cette même édition, la représentation graphique de la méthode de Newton s'étoffe, passant de une à cinq figures pour distinguer les différents cas.

Enfin, pour la première fois, cette édition de 1863 considère le lien entre signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction dans le sens où l'étudiaient déjà Briot, Choquet et Catalan.

Les nouveautés apportées dans le manuel de Briot sont plus remarquables. Elles figurent toutes, pour la première fois, dans l'édition de 1862, les éditions suivantes ne connaissant plus de réelles nouveautés du vivant de l'auteur.

Comme avant lui Catalan, Briot définit en 1862 la dérivée d'une fonction quelconque avant d'étudier le cas des polynômes. Briot ajoute aussi un théorème sur la dérivée des fonctions homogènes. Mais surtout, à la fin du chapitre consacré à l'application de la théorie des dérivées au développement en série des fonctions logarithme, exponentielle et arc tangente, Briot donne une démonstration de la formule de *Taylor-Lagrange* et la condition pour que la fonction soit développable en série de Taylor. Une note de bas de page attribue la démonstration au mathématicien anglais Isaac Todhunter et précise qu'elle a été perfectionnée par Rouché. L'édition suivante l'attribue au mathématicien anglais Homersham. Il s'agit en fait du mathématicien Homersham Cox, professeur au Jesus College de Cambridge, qui a publié sa démonstration en 1851[109]. Cette démonstration est plus élémentaire que celles de Lagrange et de Cauchy[110]. Nous n'avons pas retrouvé de publication de la démonstration de Rouché, dont Briot précise qu'il est alors professeur au lycée Charlemagne.

Pour une fonction « $f(x)$ [...] finie et continue ainsi que ses $n+1$ premières dérivées, quand x varie de entre x_0 et x_0+h », Briot écrit $f(x_0+h)$ sous la forme:

---

[109] COX Homersham, « A demonstration of Taylor's Theorem », *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, Vol. 6, 1851, 80-81.

[110] Voir MORITZ Robert Edouard, « A note on Taylor's theorem », *The American Mathematical Monthly,* Vol. 44, 1937, p. 31-33.

$$f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)\frac{h}{1}+f''(x_0)\frac{h^2}{1.2}+\cdots+f^n(x_0)\frac{h^n}{1.2.3.\dots.n}+\frac{h^{n+1}}{1.2.3.\dots.(n+1)}R.$$

En notant $x_1 = x_0 + h$, la fonction suivante:

$$\varphi(x)=f(x_1)-f(x)-\frac{(x_1-x)}{1}f'(x)-\frac{(x_1-x)^2}{1.2}f''(x)-\cdots-\frac{(x_1-x)^n}{1.2.3.\dots.n}f^n(x)-\frac{(x_1-x)^{n+1}}{1.2.3.\dots.(n+1)}R,$$

a pour dérivée :

$$\varphi'(x)=-\frac{(x_1-x)^n}{1.2.3.\dots.n}f^{n+1}(x)+\frac{(x_1-x)^n}{1.2.3.\dots.n}R.$$

La fonction $\varphi(x)$ s'annulant en x_0 et x_1, on en déduit que sa dérivée s'annule pour une valeur comprise entre x_0 et x_1, représentée par $x_0+\theta h$, « θ étant une fraction plus petite que l'unité »[111], ce qui permet d'obtenir le reste R.

Selon Briot, l'apport de Rouché à la démonstration est de donner le reste sous la forme :

$$\frac{h^{n+1}}{1.2.3.\dots.n}(1-\theta)^n f^{n+1}(x_0+\theta h).$$

La démonstration repose sur l'emploi du théorème que nous désignons aujourd'hui sous le nom de *théorème de Rolle*. Cox, l'utilise sans lui donner de nom. Briot ne le nomme pas non plus, mais il ajoute une brève démonstration : une fonction continue qui « part de zéro pour revenir à zéro » passe par un maximum ; la dérivée « elle-même finie et continue […] change de signe en passant par 0 »[112]. La désignation de cette propriété sous le nom de « Théorème de Rolle » apparaît cinq chapitres plus loin, dans la « Théorie des équations ». Un chapitre intitulé « Théorème de Rolle », en propose une nouvelle démonstration pour une fonction polynôme, dans des termes identiques à la première. Briot rappelle à cette occasion qu'il a déjà employé ce théorème pour prouver la *formule de Taylor-Lagrange*.

[111] BRIOT Charles, *Leçons d'algèbre*, tome II, 4e éd., Paris, Dunod,1862 , p. 182.
[112] *Ibid.*, p 181.

Le *théorème de Rolle* ne figure pas dans les programmes de mathématiques spéciales en vigueur en 1862. Il est cependant énoncé, pour la séparation des racines des équations algébriques, dans les différents manuels que nous avons étudiés, à l'exception de l'ouvrage de Catalan et de la deuxième édition du manuel de Bertrand. Choquet et Briot et le désignent sous ce nom. Bertrand fait de même à partir de la troisième édition. Avec cette démonstration de Briot de la *formule de Taylor-Lagrange*, et bien qu'il s'agisse de démontrer un théorème hors programme, le *théorème de Rolle* n'est plus seulement, dans les manuels, un outil pour séparer les racines d'une équation mais il devient une étape dans la démonstration d'un théorème fondamental de l'analyse.

En 1862, cette démonstration de la *formule de Taylor-Lagrange* ne figure pas encore dans les manuels d'analyse de l'enseignement supérieur répertoriés. Les *Éléments de calcul infinitésimal*, que Duhamel publie en 1856, n'utilisent pas cette méthode, pas plus que son cours de 1857-1858 à l'École polytechnique. Il en est de même pour le cours de Bertrand de 1860-1862 dans cette même École. Et ce n'est qu'en 1868 que Joseph Serret l'introduit dans son *Cours de calcul différentiel et intégral*.

Cet ouvrage, sur lequel nous reviendrons un peu plus loin, est habituellement tenu pour le premier ouvrage important à considérer le *théorème de Rolle* comme un des théorèmes fondamentaux de l'analyse[113]. Serret inclut la démonstration de ce théorème dans le *théorème des accroissements finis*, ni l'un ni l'autre théorème n'étant dénommés dans cet ouvrage[114]. En outre, il va plus loin que Briot. En effet, là ou Briot se contentait d'une démonstration intuitive, Serret donne une démonstration analytique qui ne suppose pas la continuité de la fonction dérivée sur l'intervalle considéré[115]. Il est cependant remarquable que cette démonstration se trouve dans un manuel destiné à la classe de mathématiques

[113] BARROW-GREEN June, « From cascades to calculus : Rolle's theorem", dans Eleanor ROBSON and Jacqueline STEDALL (éd.), *The Oxford handbook of the history of mathematics*, New York, Oxford University Press, 2009, p. 737-754.

[114] L'édition allemande de l'ouvrage de Serret attribue le théorème à Rolle. Le théorème de Rolle sera cité explicitement dans l'édition de 1879 de l'ouvrage de Serret (*op. cit.*, p. 750 ; ce texte date par erreur la deuxième édition de 1877).

[115] Cette démonstration est due à Ossian Bonnet, répétiteur de géométrie descriptive puis d'analyse à l'École polytechnique (nous reviendrons sur Ossian Bonnet dans le chapitre suivant). Sa démonstration suppose que la fonction est monotone sur un intervalle. Elle sera améliorée par Darboux et Ulisse Dini dans les années 1870.

spéciales avant même de figurer dans l'ouvrage de référence d'un des mathématiciens majeurs de l'époque comme Serret.

Nous pouvons donc avancer, qu'au début des années 1860, la *formule de Taylor-Lagrange*, qui ne figurait pas au programme de la classe de mathématiques spéciales, enseigné par Rouché au lycée Charlemagne et par Briot au lycée Saint-Louis, faisait partie du bagage de nombre d'élèves qui préparaient les concours des École polytechnique et normale supérieure.

L'édition de 1864 donne une place plus importante à ce théorème. Il n'est plus démontré en conclusion du chapitre sur le développement des fonctions en séries, mais au tout début de ce chapitre. Il nous semble que cela peut être interprété comme une conséquence de la diffusion de l'enseignement de ce théorème aux élèves de mathématiques spéciales.

Il est important de remarquer que Briot, est, à nouveau, à partir de 1859, répétiteur à l'École polytechnique. L'auteur qui inscrit ce théorème dans l'édition de 1862 est à la fois professeur de mathématiques spéciales et enseignant aux Écoles polytechnique et normale supérieure. En 1864, il devient, ainsi que Rouché, examinateur d'admission à l'École polytechnique. Nous retrouvons, avec Briot, Rouché ou Catalan la même interaction entre le concours et la préparation à ce concours que celle que nous avions observée avant 1850. L'extension de l'enseignement de la théorie des dérivées au-delà des limites imposées par le programme résulte de l'action conjointe d'acteurs situés à la fois à l'intérieur de l'école, répétiteurs ou examinateurs d'admission, et d'enseignants de classes préparatoires désireux de préparer au mieux leurs élèves à ce concours.

4 – 2 Le *Cours de mathématiques* de Comberousse pour les candidats à l'École centrale (1861)

La page de garde du *Cours de mathématiques à l'usage des candidats à l'École centrale des arts et manufactures,* que publie Comberousse de 1860 à 1862 présente l'auteur comme ingénieur civil, examinateur d'admission à l'École centrale, répétiteur de mécanique appliquée dans cette même école et professeur de mathématiques et de mécanique au Collège Chaptal.

Il s'agit d'un *Cours* en trois tomes. Le premier contient l'arithmétique et l'algèbre élémentaire. Le deuxième tome contient la géométrie, la trigonométrie et un complément d'algèbre. Enfin, dans le troisième, Comberousse a placé la géométrie analytique et des éléments de géométrie descriptive. Il refuse d'appeler son ouvrage un manuel. Ce terme implique, selon lui, une « concision nuisible ». Ce cours s'adresse, autant qu'aux candidats comme l'annonce le titre, qu'aux élèves de première année de l'École car, écrit-il « une instruction mathématique trop superficielle est souvent une cause d'insuccès dans leur première année d'études »[116].

Dans le deuxième des trois tomes, Comberousse fait figurer un ambitieux « Complément d'algèbre » de 60 pages qui reprend intégralement le programme de la classe de mathématiques spéciales. L'auteur précise en note de bas de page :

> Cette section [le Complément d'Algèbre] n'est pas exigée des Candidats à l'École centrale ; mais ils trouveront, dans le second et le quatrième Livre, une partie des matières qui leur sont enseignées à l'École, dans le cours d'Analyse de première année[117].

Le « Livre deuxième » du « Complément d'algèbre » est intitulé : « Séries et fonctions dérivées ». Le chapitre sur la théorie des dérivées, en plus du programme de mathématiques spéciales, reprend une partie des extensions que nous avons vues à travers les manuels précédents : dérivation des fonctions implicites et *règle de l'Hôpital* ; il ajoute aussi la recherche des points d'inflexion à partir de la dérivée seconde.

Ce *Cours* qui ne présente pas de particularité par rapport à ceux précédemment étudiés nous montre cependant qu'en 1861, alors même que la théorie des dérivées n'est pas au programme, la préparation au concours de l'école centrale par Comberousse inclut déjà cette théorie telle qu'elle est enseignée dans les classes de mathématiques spéciales les plus prestigieuses.

4 – 3 Le *Traité d'algèbre* de Laurent (1867) : réordonner les contenus pour une présentation rigoureuse et faire du théorème de Rolle un théorème fondamental

Dès sa thèse, Laurent revendiquait la plus grande rigueur dans les énoncés et les démonstrations[118]. Sur la page de garde du *Traité d'algèbre* est reproduite cette citation de Pascal tirée de *De l'esprit géométrique* : « Prouver toutes les propositions un peu obscures, et

[116] COMBEROUSSE (de) Charles, *Cours de Mathématiques à l'usage des candidats à l'École centrale des arts et manufactures*, t. 1, Paris, Mallet-Bachelier, 1860, p. V.
[117] COMBEROUSSE (de) Charles, *Cours de Mathématiques à l'usage des candidats à l'École centrale des arts et manufactures*, t. 2, Paris, Mallet-Bachelier, 1861, p. XII.
[118] Voir BRU Marie-France, BRU Bernard et EID Salah, op. cit., p. 4.

n'employer à leur preuve que des axiomes très évidents ou des propositions déjà accordées ou démontrées ». L'ouvrage est dédié à Serret.

Laurent annonce dans la préface qu'il ne s'est pas « astreint » à suivre les programmes et qu'il a donné « un peu d'extension aux théories les plus intéressantes »[119], ce qui donne d'entrée un statut particulier à cet ouvrage qui traite à la fois des programmes de mathématiques élémentaires et de mathématiques spéciales. Ainsi, son introduction de la première partie commence l'algèbre élémentaire par les quantités négatives. Cet ordre s'oppose aux recommandations du programme qui précise : « on se gardera de considérer les quantités négatives dès le début, dans le calcul algébrique »[120]. Mais Laurent croit ainsi « être arrivé à donner une théorie entièrement rigoureuse du calcul algébrique »[121].

Il s'agit indiscutablement du même souci de rigueur qui l'anime lorsqu'il inclut la notion de limite dans ce premier chapitre intitulé « Notions fondamentales ». Il définit la limite d'une quantité variable, et énonce deux « théorèmes » dont le premier est le suivant : « lorsqu'une quantité algébrique croît constamment sans devenir plus grande qu'une quantité fixe, elle a une limite »[122]. Le deuxième théorème affirme l'existence d'une limite pour des quantités décroissantes. Ces théorèmes sont en fait considérés par Laurent comme des évidences, leur démonstration reposant sur les affirmations « on voit que » et « évidemment ».

Ces théorèmes lui permettent de définir un nombre incommensurable comme la limite des valeurs approchées $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}, \dots$ qui mesurent des quantités commensurables inférieures à une quantité *A* incommensurable avec l'unité. Il définit ensuite le produit de deux nombres incommensurables et démontre ce que nous appelons aujourd'hui la commutativité du produit de nombres incommensurables. Nous reviendrons plus en détail, dans le chapitre 6, sur la définition des nombres incommensurables dans les manuels de mathématiques spéciales. Il faut cependant remarquer que ce chapitre n'est pas sans évoquer, aux infiniment petits près, l'introduction du *Cours d'analyse* de Duhamel publié en 1847 ou les deux premiers

---

[119] LAURENT Hermann, *Traité d'Algèbre*, Paris, Gauthier-Villars, 1867, p. XIII.
[120] « Programmes des connaissances exigées pour l'admission à l'École polytechnique », *Moniteur Universel*, N° 12, 1851, p. 110.
[121] LAURENT Hermann, *op. cit.*, p. XIII.
[122] *Ibid.*, p. 8.

chapitres des *Éléments du calcul infinitésimal* que Duhamel a fait paraître en 1856, ouvrage que nous évoquerons un peu plus loin.

De même, dans la seconde partie consacrée au programme de mathématiques spéciales, son premier chapitre intitulé « Notions générales » est bien éloigné des programmes et se rapproche plus de l'*Analyse algébrique* de Cauchy qu'il cite. Il reprend la définition d'une fonction donnée par Euler dans son *Introductio in analysin infinitorum* (la définition est citée en latin en note de bas de page).

En ce qui concerne la notion de continuité, il suit le *Cours d'analyse de l'École polytechnique* de 1841 de Duhamel : il définit la continuité d'une quantité variable en termes de valeurs intermédiaires puis, d'une fonction sur un intervalle. Une fonction est continue « entre les limites a et b de sa variable, lorsque, celle-ci variant d'une manière continue entre a et b, la fonction varie elle-même d'une manière continue »[123]. Cette définition de la continuité d'une fonction dans un intervalle est suivie de celle de la continuité en une valeur qui correspond aussi à la continuité dans un intervalle. Il écrit en effet : «On fit enfin qu'en fonction f de x est continue pour $x = a$ lorsqu'elle est continue entre des limites de sa variable, l'une plus grande, l'autre plus petite que a »[124].

Il démontre ensuite que la continuité en une valeur est équivalente à la définition de la continuité donnée par Cauchy, démontrant le théorème :

> I° Lorsqu'une fonction $f(x)$ est continue pour $x = a$, à un accroissement h infiniment petit de la variable correspond un accroissement k infiniment petit de $f(x)$; 2° réciproquement, si, dans le voisinage de a, à un accroissement infiniment petit de x correspond un accroissement infiniment petit de $f(x)$, la fonction $f(x)$ est continue.[125]

Pour le 1°, il considère $a + h$ dans l'intervalle $a - \beta$, $a + \alpha$. La continuité de la fonction en a lui permet de conclure que $f(a + h)$ sera aussi proche de $f(a)$ que l'on veut pour h assez petit. Sa démonstration indique que sa notion de continuité en une valeur, donnée en termes de valeurs intermédiaires, contient en réalité implicitement la notion de continuité en une

[123] *Ibid.*, p. 211.
[124] *Ibid.*, p. 211.
[125] *Ibid.*, p. 211.

valeur qui est la nôtre. Le 2° est une démonstration du *théorème des valeurs intermédiaires*[126]. Il démontre ensuite deux théorèmes sur la continuité des somme, différence, produit quotient de fonctions continues et sur la continuité d'une fonction composée de fonctions continues.

Pour la théorie des dérivées il adopte là encore une présentation très éloignée des programmes et de toutes celles des manuels étudiés jusqu'à présent. Un premier chapitre traite de la dérivée des fonctions entières. Il le fait suivre de la résolution des équations algébriques et termine par la théorie des fonctions dérivées pour les fonctions quelconques. Il écrit dans la préface à propos de ce chapitre :

> j'ai rejeté à la fin la théorie des dérivées comme ne faisant pas partie de l'Algèbre proprement dite ; j'ai même hésité longtemps avant de savoir si je consacrerais un Chapitre à cette théorie ; mais réfléchissant qu'elle faisait partie du programme officiel, je me suis cru obligé de la dérober au Cours de calcul différentiel.[127]

Nous pouvons interpréter son propos de deux façons. Laurent semble indiquer que cette théorie ne peut s'enseigner sans enseigner simultanément la notion de différentielle. Les éditions suivantes du *Traité d'algèbre*, qui, comme nous le verrons plus tard, proposent une introduction au calcul différentiel, confortent cette interprétation. Mais, dérober la théorie des dérivées au cours de calcul différentiel, c'est aussi dérober à l'enseignement de l'École polytechnique une théorie qui est depuis sa création, « l'âme de l'École ».

Ce chapitre, qui d'un point de vue théorique, ne diffère pas réellement des introductions étudiées précédemment, propose toutes les notions hors programme que nous avons déjà vues : dérivée des fonctions implicites, *règle de l'Hôpital*, *formule de Taylor-Lagrange*. Comme Briot, il utilise la démonstration de Cox-Rouché, ne citant que le premier des deux noms. Ceci le conduit, après avoir démontré une première fois le *théorème de Rolle* pour les fonctions entières, à proposer une nouvelle démonstration pour une fonction quelconque dont la dérivée est continue entre les valeurs de la variable considérée. Signalons que Laurent donne en outre la « formule de Maclaurin ».

La deuxième édition, publiée en 1875 va plus loin. La préface annonce :

---

[126] Sa démonstration présente les mêmes difficultés que celles que nous avions signalées à propos de la démonstration de Blanchet au chapitre précédent Voir *supra*, p. 235, note de bas de page 152.

[127] LAURENT Hermann, op. cit., p. XVI.

> j'ai cru devoir remanier la théorie des dérivées, en faisant du théorème de Rolle et de la formule de Taylor la base de ce calcul ; l'exposition gagne ainsi considérablement en simplicité et en clarté, et l'on parvient à introduire avec une extrême rigueur, et plus naturellement qu'on ne l'avait fait jusqu'ici, quelques théorèmes dont les anciennes démonstrations présentaient le flanc à des objections parfois très sérieuses.[128]

Le deuxième théorème, qui suit la définition d'une fonction dérivée est en effet celui des *accroissements finis* donné par Serret dans son ouvrage de 1868. Il en déduit comme corollaire le « théorème de Rolle étendu à des fonctions quelconques »[129], pour une fonction dont la dérivée n'est pas nécessairement continue. Il démontre donc ensuite la *formule de Taylor-Lagrange* à l'ordre n pour une fonction dont la dérivée F^{n+1} n'est pas non plus nécessairement continue sur l'intervalle considéré. Nous sommes là deux ans avant la publication de la deuxième édition de l'ouvrage de Serret.

Cette formule est ensuite étendue à des fonctions de plusieurs variables avant que Laurent n'aborde une introduction au calcul infinitésimal sur laquelle nous reviendrons dans la prochaine section.

La troisième édition du *Traité d'algèbre* de Laurent, en 1881, connait une modification importante concernant la théorie des fonctions. Elle concerne la définition de la continuité et le lien entre continuité et propriété des valeurs intermédiaires. Parmi les manuels que nous examinons, c'est le premier où nous trouvons la définition de la continuité d'une fonction en termes de ε,η. Après avoir défini, comme dans les éditions précédentes, la continuité d'une variable en termes de valeurs intermédiaires, il définit ainsi la continuité d'une fonction en une valeur :

> On dit qu'une fonction $f(x)$ est continue pour une valeur c de sa variable quand elle possède pour $x = c$ une valeur unique et bien déterminée, et quand il est possible de déterminer une quantité positive H telle que, h étant moindre en valeur absolue que H, on ait que quelque soit d'ailleurs h
>
> $$f(c+h) - f(c) < \varepsilon$$
>
> ε étant aussi petit que l'on voudra du reste.[130]

[128] LAURENT Hermann, *Traité d'Algèbre*, 2e éd.,Paris, Gauthier-Villars, 1875, p. XV.
[129] *Ibid.*, p. 475.
[130] LAURENT Hermann, *Traité d'Algèbre*, tome II, 3e éd., Paris, Gauthier-Villars, 1881, p. 30.

Elle est suivie d'une démonstration du *théorème des valeurs intermédiaires*[131] puis du théorème suivant :

> Si une fonction $f(x)$ ne peut pas passer de la valeur $f(\alpha)$ à la valeur $f(\beta)$ sans passer par toutes les valeurs intermédiaires quand x varie d'une manière continue entre α et β, α et β désignant deux nombres quelconques compris entre a et b, si de plus entre α et β la fonction $f(x)$ ne passe qu'un nombre fini de fois par la même valeur et possède pour chaque valeur de x une valeur finie et déterminée, elle est continue pour toutes les valeurs de x comprises entre a et b.[132]

Une note de bas de page justifie la nécessité de ce théorème en s'appuyant sur le contre-exemple de la fonction $\sin\frac{1}{x}$. Entre les deux éditions, il est probable que le *Mémoire sur les fonctions discontinues* de Gaston Darboux, publié en 1875, a nourri la réflexion de Laurent. Dans ce texte sur lequel nous reviendrons en détail dans le chapitre 6, Darboux obtenait des résultats beaucoup plus généraux, en considérant une classe de fonctions présentant un nombre infini de discontinuités dans un intervalles et possédant la propriété des valeurs intermédiaires.

Soulignons aussi que, dans cette même édition Laurent émet pour la première fois un doute sur la dérivabilité d'une fonction continue. Après la définition de la dérivée, le texte indique que les fonctions de la variable réelle ont « en général une dérivée unique et bien déterminée », que l'ouvrage ne s'occupera que ces fonctions, mais une note de bas de page précise :

> Toute fonction $f(x)$ qui admet une dérivée finie et bien déterminée pour $x = a$ est évidemment continue, parce que l'accroissement de f est nécessairement infiniment petit avec celui de x ; mais il n'est pas prouvé que toute fonction continue ait une dérivée : quelques auteurs ont cité des fonctions continues ne possédant pas de dérivée ; mais il n'est pas bien démontré que ces fonctions soient continues.[133]

Laurent replace aussi dans cette édition les *théorèmes de Rolle* et des *accroissements finis* dans l'ordre que nous connaissons actuellement, faisant cette fois du deuxième un corollaire du premier

[131] Elle ne comporte plus l'erreur signalée dans la 1^{e} édition.
[132] *Ibid.*, p. 31.
[133] *Ibid.*, p. 161.

Les larges parties hors programmes des différentes éditions, ainsi que l'ordre des connaissances adopté, lui aussi très éloigné de ce que proposent les programmes nous amènent à nous interroger sur la portée de ce manuel atypique. Qu'il ait été connu des enseignants de mathématiques spéciales ne fait guère de doute. Qu'il ait été un outil de travail communément employé par les élèves est moins plausible. Ouvrage d'un enseignant de l'École polytechnique, la rigueur dont Laurent a voulu le marquer, caractérisée en particulier par l'ordre de présentation des connaissances, le situe selon nous dans la lignée des cours de Cauchy que Laurent se reconnaissait pour maître.

Enfin, il est important de signaler, qu'à partir de la deuxième édition, le *Traité d'algèbre* de Laurent propose une introduction au calcul infinitésimal. Parmi les différents auteurs dont nous avons examiné des ouvrages dans ce chapitre, il est le seul à proposer une telle introduction. Nous y reviendrons dans le prochain chapitre.

4 – 4 L'*Algèbre* de Gohierre de Longchamps (1883) : un manuel dans la lignée des *Leçons d'algèbre* de Briot

Dans la préface au premier volume du *Cours de mathématiques spéciales*, intitulé *Algèbre,* Gohierre de Longchamps annonce que ce cours, conforme aux programmes de 1882 du concours d'admission à l'École polytechnique, « est, sauf de légères modifications, celui que nous avons professé au Lycée Charlemagne, dans ces dernières années »[134]. Les parties hors-programme sont, selon lui, deux notes consacrées aux démonstrations du théorème de Binet et Cauchy et du théorème de Sylvester, notes rajoutées car ces théorèmes « sont enseignés par quelques professeurs »[135].

L'ouvrage est partagé en leçons et non en chapitres, la théorie des fonctions dérivées occupant les leçons 21 à 25, entre la théorie des logarithmes et une leçon sur les formes quadratiques. Nous retrouvons aussi dans cet ouvrage les différentes extensions au programme déjà signalées à propos des manuels précédents, y compris les « formules de Taylor et Maclaurin » pour des fonctions quelconques.

---

[134] GOHIERRE de LONGCHAMPS, Gaston, *Cours de mathématiques spéciales, Première partie, Algèbre*, Paris, Delagrave, 1883, p. V.

[135] *Ibid.*, p VI. Le théorème de Binet et Cauchy est un théorème sur la décomposition de déterminants en une somme de produits. Pour le second théorème, il s'agit de la loi d'inertie de Sylvester.

Précisons qu'une fonction est continue pour Gohierre de Longchamps dans un « intervalle a, b » si elle est bien déterminée et finie dans cet intervalle et si, pour tous x_1, x_2 pris dans cet intervalle, « la différence $f(x_1) - f(x_2)$ tend vers 0 en même temps que $x_1 - x_2$ »[136]. Il n'y a pas de confusion entre continuité d'une fonction et *théorème des valeurs intermédiaires* qu'il démontre ensuite. Mais nous sommes, là aussi, bien après les travaux de Darboux. Gohierre de Longchamps ne donne pas l'exemple de la fonction $\sin\frac{1}{x}$.

.Soulignons que, dans la 22e leçon intitulée « Théorèmes généraux sur les fonctions dérivées », Gohierre de Longchamps démontre le *théorème de Rolle* pour une fonction dont la dérivée est continue. Sa démonstration, proche de celle que nous avons vue chez Briot, lui permet ensuite de démontrer le *théorème des accroissements finis*, qu'il ne dénomme pas. En 1883, parmi les manuels destinés à l'enseignement supérieur figurant dans notre corpus, si un certain nombre emploient la démonstration de Rouché-Cox de la *formule de Taylor-Lagrange*, il n'y a encore que celui de Serret qui adopte cet enchaînement des *théorèmes de Rolle* et *des accroissements finis*. Après celui de Laurent, cet ouvrage est le second destiné à la classe de mathématiques spéciales dans lequel nous repérons cette succession des deux théorèmes. C'est aussi le premier à être écrit par un enseignant de cette classe.

Remarquons, toujours à propos du *théorème de Rolle*, que Gohierre de Longchamps ne le nomme pas ainsi, réservant ce nom pour une série de propriétés permettant la séparation des racines d'une équation.

Signalons deux autres éléments qui inscrivent cet ouvrage dans la lignée des *Leçons d'algèbre* de Briot. L'introduction de la notion de fonction dérivée est proche de celle donnée par ce dernier à partir de 1862 : définition pour une fonction quelconque, application à des exemples dont les fonctions entières, et enfin interprétation géométrique. Nous proposons ci-dessous un autre exemple d'emploi de figures par Gohierre de Longchamps pour interpréter des propriétés analytiques. Nous avons vu que cette façon de procéder est caractéristique du manuel de Briot. Nous pouvons imaginer que son enseignement faisait plus encore usage de telles interprétations géométriques. Gohierre de Longchamps suit les méthodes de son ancien maître.

[136] *Ibid.*, p. 243.

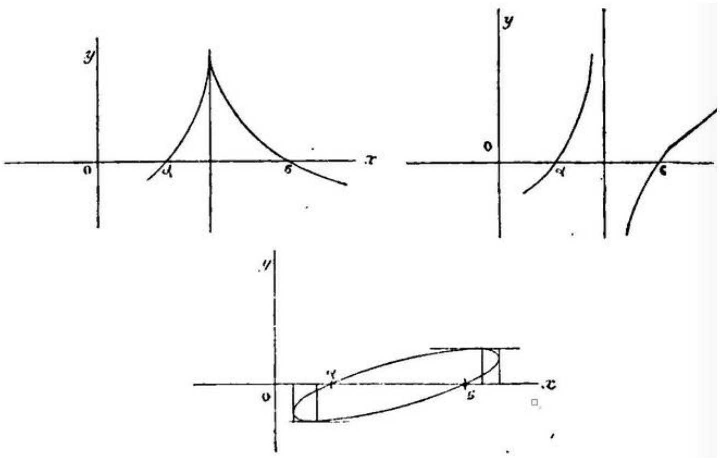


Figure 7: illustration par Gohierre de Longchamps de contre-exemples au théorème de Rolle, p. 310

Nous retrouvons, dans l'analyse de cet ouvrage, le « souci pédagogique […] constant chez Gohierre » qui se retrouve dans ses différents articles : « la plupart de ces écrits sont à la portée d'un élève de spéciales »[137].

Si nous considérons enfin les exercices proposés dans cet ouvrage, situé chronologiquement à la fin de la période étudiée dans ce chapitre, nous ne constatons pas de différence majeure avec le type d'exercices rencontrés près de trente ans plus tôt. La technicité dans le calcul des dérivées est du même ordre. Cette même technicité se retrouve dans un nouveau type d'exercices : la levée des indéterminations par la *règle de l'Hôpital*. Soulignons aussi que la 23e leçon intitulée « La série de Taylor » n'est suivie d'aucun exercice. Il est probable qu'aucun exercice n'était donné sur ce sujet à l'épreuve orale.

5 – Les modifications du programme du concours d'admission à l'École polytechnique de 1853 à 1885, conséquences des enseignements en classes préparatoires

Comme nous l'avons déjà dit, le programmes officiel du concours d'admission à l'École polytechnique concernant la théorie des dérivées ne change guère jusqu'en 1885. Mais il est cependant très intéressant de comparer les quelques modifications apportées durant cette période aux enseignements proposés par les manuels que nous venons d'analyser.

137 BRASSEUR Roland, *op. cit.*

En 1874 nous observons la première modification significative. Notons tout d'abord le retour à une concision que les réformateurs de 1858 avaient accusée d'ouvrir la porte à des excès. Ainsi, le programme de la théorie des dérivées est réduit aux quelques lignes que nous recopions ci-dessous :

> Théorie des dérivées
>
> Définition générale de la dérivée. – Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une fonction de fonction. – Dérivée des fonctions logarithme, exponentielle, trigonométrique. – Condition pour qu'une fonction soit croissante ou décroissante.[138]

Il n'est donc plus demandé d'introduire la dérivée à partir des polynômes. Soulignons aussi que le *théorème de Rolle*, ainsi désigné, apparaît pour la première fois, dans la section « Résolution des équations numériques » qui contient l'article suivant : « Théorème de Rolle. – Comment il donne les conditions de la réalité d'une racine. »[139]. De plus, le programme de géométrie analytique porte tout simplement : « Des lignes courbes en général, rapportées à des coordonnées rectilignes ou à des coordonnées polaires. Construction et discussion. Tangentes et asymptotes »[140].

Quelques années plus tard, en 1882, le programme d'algèbre semble revenir sur le mode d'introduction de la fonction dérivée puisque la théorie des dérivées commence par le « Développement de l'accroissement d'un polynôme entier suivant les puissances des accroissements des variables »[141]. Il n'est cependant pas aussi explicite sur la méthode à employer que celui de 1853. Les nouveautés de ce programme résident dans l'introduction de la dérivée d'une fonction algébrique implicite et dans les précisions suivantes apportées à la notion de sens de variation d'une fonction : « Fonction croissante ou décroissante : 1° dans un intervalle donné ; 2° pour une valeur donnée de la variable »[142].

En géométrie analytique, les « théories générales relatives aux courbes planes » sont situées en début du programme, avant l'étude des coniques et non après comme dans les

---

[138] *Programmes de l'enseignement intérieur de l'École polytechnique pour l'année scolaire 1874-1875 et programmes des connaissances exigées pour l'admission à l'École en 1875,* Paris, Imprimerie nationale, 1874, p.14.
[139] *Ibid.*, p. 15.
[140] *Ibid.,* p. 18.
[141] « Instruction pour l'admission à l'École polytechnique en 1882 », *Journal officiel de la République Française*, 17 janvier 1882, p. 263.
[142] *Ibid.*, p. 263.

programmes précédents. Ces « théories générales » prévoient notamment l'étude de la concavité et de la convexité des courbes, ce qui paraît induire la recherche des points d'inflexion à partir de la dérivée seconde.

En 1885, le Conseil de perfectionnement intègre les « formules de Taylor et de Maclaurin » dans le programme d'admission. Ce dernier indique : « Développement des fonctions d'une seule variable suivant les puissances croissantes de l'accroissement (formules de Taylor et de Maclaurin) ».[143].

Nous reviendrons plus en détail dans le chapitre suivant sur le programme de 1885. Mais il est important de constater ici que ces modifications survenues dans les programmes correspondent toutes à des notions inscrites dans les manuels que nous avons analysés

6 – Conclusion

La crise majeure que connaît l'École polytechnique au milieu du siècle est l'occasion pour la commission Le Verrier d'introduire, avec prudence, la théorie des fonctions dérivées au programme d'admission à l'École polytechnique, et, par suite, dans l'enseignement de mathématiques spéciales. Le risque est limité. En effet, si cette introduction marque une rupture avec les programmes précédents, il ne s'agit cependant, comme l'écrit la commission, que de la « régularisation » d'un enseignement existant. La preuve était déjà faite que les élèves des classes préparatoires étaient aptes à le recevoir. De plus, l'aptitude des enseignants à le mettre en œuvre ne posait probalement plus de difficulté à cette époque en raison de la formation assurée à l'École normale supérieure. L'exclusion du programme du calcul différentiel et intégral atténue plus encore le risque.

L'objectif de cette introduction est double. D'une part, elle facilite l'enseignement préparatoire en fournissant un outil puissant pour la géométrie analytique et la mécanique. D'autre part, elle permet d'alléger l'enseignement de l'analyse à l'École. Les limitations imposées par le programme, et les instructions données aux professeurs de mathématiques spéciales et aux examinateurs d'admission doivent éviter les dérives vers des développements excessifs de cette théorie.

---

[143] « Programme des connaissances exigées pour l'admission à l'École polytechnique », *Journal officiel de la République française*, 21 mai 1885, p. 2629.

Ces directives ne vont cependant pas s'imposer bien longtemps comme le montrent les manuels que nous avons analysés. Leurs auteurs sont tous enseignants en classes préparatoires. Les lieux où ils enseignent, leur renommée, la diffusion de leurs manuels indiquent que, rapidement après les réformes des programmes de 1851-1853, l'enseignement de la théorie des fonctions dérivées déborde du cadre imposé. Pour ces auteurs, il s'agit là encore d'user de la puissance de cet outil dans les applications, en particulier à la géométrie analytique, mais aussi de présenter certaines notions avec une plus grande rigueur, et de tenir compte des recherches. La démonstration de la *formule de Taylor-Lagrange* simplifiée par Cox en fait un outil plus accessible à des élèves de mathématiques spéciales. Elle impose le *théorème de Rolle* comme théorème fondamental de l'analyse. Il faut aussi souligner, après les travaux de Darboux, la fin de la confusion entre continuité d'une fonction et propriété des valeurs intermédiaires et l'apparition de la définition en ε,η de la continuité d'une fonction en une valeur dans l'édition de 1881du *Traité d'algèbre* de Laurent.

Vis-à-vis de ces nouveautés, le Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique fera preuve des mêmes réticences que durant le demi-siècle précédent. Il finira cependant par adopter les différentes notions développées dans ces manuels, parfois deux décennies plus tôt. Les programmes encore une fois, enregistrent la réalité d'enseignements pratiqués en classes préparatoires. Nous retrouvons le même processus que nous avons pu constater avant 1850, à savoir le rôle joué par les enseignants de classes préparatoires dans les changements des programmes d'admission à l'École polytechnique, processus qui, rappelons-le, avait déjà été constaté en géométrie descriptive[144]. Leur action est facilitée par la confusion, assez grande, qui existe entre enseignants en classes préparatoires et à l'École. Briot, d'abord professeur de lycée, devient répétiteur à l'École, puis examinateur d'admission. Rouché, professeur de lycée, devient lui aussi examinateur d'admission en 1864. Catalan, Laurent, répétiteurs à l'École, préparent les élèves au concours dans des institutions privées. Ce qui est vrai avec l'École polytechnique l'est aussi pour l'École centrale : Rouché et Comberousse y enseignent. Le tableau 2 de la page suivante résume les différentes fonctions des auteurs de manuels que nous avons analysés dans ce chapitre.

[144] BARBIN Evelyne, « Top-down: the role of the Preparatory Classes to the Grandes Écoles into the French System of Mathematical Curriculum (1870-1970) », dans *Proceedings of the Third International Conference on the History of Mathematics Education,* Uppsala, Sweden, 25-28 september 2013, p. 49-64.

	Formé à	**Elève de**	**Lieu(x) d'enseignement à la publication de la 1e édition**	**Autres lieux d'enseignement**	**Examinateur d'admission**
Choquet			Institution privée	Prytanée de La Flèche	
Catalan	École polytechnique	Mathieu	Institution privée	École polytechnique	
				Écoles des arts et métiers	
				Lycée (Math. Spéciales)	
Bertrand	École polytechnique	Duhamel	Lycée Saint-Louis	Collège de France	École polytechnique
			École polytechnique		
			École normale supérieure		
Briot	École normale supérieure	Lacroix	Lycée Saint-Louis	École normale supérieure	École polytechnique
			École polytechnique	Faculté des sciences	
Comberousse	École centrale des arts et manufactures	Belanger	Collège Chaptal (Préparation École centrale)		École centrale
			École centrale		
Laurent	École polytechnique	Bertrand	École polytechnique	École préparatoire de Rouen	École polytechnique
			Institution privée		
Gohierre de Longchamps	École normale supérieure	Serret/Briot	Lycée Charlemagne		École Saint-Cyr

Tableau 2: Lieux de formation et d'enseignement des auteurs étudiés dans ce chapitre

Enfin, en ce qui concerne les conceptions qui président à la rédaction de ces ouvrages, nous pouvons les rattacher très majoritairement au courant de ceux qui privilégient l'intuition, géométrique ou algébrique que nous avons identifié dans les chapitres précédents. Les *Leçons d'algèbre* de Briot en sont l'archétype. Ceci n'empêche pas l'exigence de rigueur, puisqu'il est le seul à proposer une démonstration de l'existence d'une primitive pour une fonction continue. Cet ouvrage est celui qui connaît le plus grand succès.

Briot est l'élève de Lacroix. À la génération suivante, Gohierre de Longchamps, élève de Briot, rédige un ouvrage qui est, lui aussi, le parfait représentant de ce courant. Nous pouvons ici parler d'une véritable lignée d'ouvrages, de professeur à élève. Le *Cours de mathématiques spéciales* de Gohierre de Longchamps n'aura cependant pas le succès des *Leçons d'algèbre*. *Le Cours de mathématiques* de Comberousse, que nous situons dans ce même courant, connaîtra, lui, un succès proche de celui de l'ouvrage de Briot.

Le *Traité d'algèbre* de Laurent, en raison surtout de l'organisation des connaissances qu'il adopte est, de tous les textes analysés, celui qui se rattache le plus au courant des ouvrages qui revendiquent la plus grande rigueur analytique. Laurent affirme clairement sa filiation avec Cauchy. Nous y lisons tout autant un héritage de Duhamel qui enseigne encore à l'École polytechnique lorsque l'ouvrage est publié. Le succès du livre de Laurent confirme, comme nous l'avions supposé avec Francœur et Boucharlat, que ces deux types d'ouvrages ont leur place dans l'enseignement.

Chapitre 5 : La méthode infinitésimale de Duhamel : de l'École polytechnique à la classe de mathématiques spéciales (1851-1896)

Dans le chapitre précédent, nous avons vu comment les programmes d'algèbre de 1851 et 1853 délimitaient clairement l'enseignement de la théorie des fonctions dérivées en classe de mathématiques spéciales. L'enseignement de ce qui était désigné sous les noms de « calcul infinitésimal » ou de « calcul différentiel » restait l'apanage de l'École polytechnique

La première expression renvoie aux infiniment petits, notion qui recouvre, au milieu du XIX^e siècle, deux conceptions très différentes : l'infiniment petit leibnizien propagé par le marquis de l'Hôpital ou, comme l'a défini Augustin Louis Cauchy, la quantité variable de limite zéro.

La seconde expression renvoie à la notion de différentielle d'une fonction, outil privilégié des calculs, y compris pour les fonctions d'une seule variable. Notée $dy = f'(x)dx$ pour y fonction de la variable x, sa définition fait ou non appel, suivant les auteurs, à la notion d'infiniment petit. Pour Lacroix, la différentielle d'une fonction est la partie de l'accroissement de la fonction proportionnel à l'accroissement de la variable, dx étant la différentielle de la fonction $y = x$. À l'École polytechnique, André-Marie Ampère, Cauchy, Joseph Liouville et Charles Sturm ont suivi la conception de Lacroix. Pour Claude-Louis Mathieu, Henri Navier et Jean-Marie Constant Duhamel, les différentielles sont des accroissements infiniment petits.

Dans le chapitre précédent nous avons montré que, jusqu'en 1885, les modifications intervenues dans le programme d'admission à l'École polytechnique concernant la théorie des fonctions dérivées ont entériné des enseignements déjà délivrés en classe de mathématiques spéciales. Mais, à l'exception du *Traité d'algèbre* de Hermann Laurent, aucun des ouvrages destinés aux classes de mathématiques spéciales que nous avons consultés n'abordait ces notions d'infiniment petit et de différentielle. Aucun n'abordait non plus le calcul intégral. L'introduction de ces trois notions dans le programme de 1885, qui marque un nouveau moment essentiel pour la diffusion de l'analyse dans l'enseignement secondaire, se situe donc dans une problématique différente. Pour la comprendre il convient, dans un premier temps, de savoir ce que fut l'enseignement de ces notions avant qu'elles ne deviennent des matières du programme de mathématiques spéciales. Et tout d'abord, il nous faut connaître leur enseignement à l'École polytechnique.

Le tableau suivant donne la liste des professeurs d'analyse de l'école durant la période qui nous intéresse dans ce chapitre.

Chaires d'analyse à l'École polytechnique	
Duhamel (1851-1869)	Sturm (1840-1855)
Hermite (1869-1876)	Bertrand (1856-1895)
Jordan (1876- 1912)	

Tableau 4: les professeurs d'analyse à l'École polytechnique de 1851 à 1900

Nous ne reviendrons pas sur l'enseignement de Sturm, abordé au chapitre 2. Des travaux ont déjà mis en évidence le rôle crucial de Duhamel dans l'enseignement de l'analyse en France durant la deuxième moitié du XIX^{e} siècle[1]. Nous reprendrons donc et préciserons les conceptions de Duhamel en matière de calcul infinitésimal en analysant ses *Éléments de calcul infinitésimal* parus en 1856. Nous comparerons cet ouvrage au cours lithographié de Duhamel donné en 1857-1858 à l'École polytechnique. L'analyse des manuels et des cours lithographiés de Joseph Bertrand et des successeurs de Duhamel à l'École nous permettra de préciser l'empreinte de Duhamel dans l'enseignement du calcul infinitésimal.

Cette empreinte ne se limitant pas l'École polytechnique, comme l'ont montré les travaux évoqués plus haut, nous la préciserons aussi, à travers les manuels publiés à cette époque, pour les autres lieux majeurs d'enseignement du calcul différentiel, à commencer par la Sorbonne où se formaient les élèves de l'École normale supérieure, futurs enseignants des classes de mathématiques spéciales. Nous analyserons à cet effet les ouvrages de Joseph-Alfred Serret qui occupe la chaire de calcul différentiel à la Sorbonne de 1863 à 1871, de

[1] Voir de ZERNER Martin, « Sur l'analyse des traités de l'analyse: Les fondements du calcul différentiel dans les traités français, 1870–1914 », *Cahier de didactique des mathématiques*, N° 30, 1986 et « La transformation des traités français d'analyse (1870-1914) », 1994, https://hal-unice.archives-ouvertes.fr/hal-00347740/fr/ . En raison de la traduction de certains traités français, l'héritage de Duhamel dépassera le cadre francophone : voir par exemple, pour la Colombie ARBOLEDA, « French Treatises in the Teaching of Analysis in Colombia », 2002, http://www.academia.edu/4210389/French_Treatises_in_the_Teaching_of_Analysis_in_Colombia, consulté le 01/09/2O17.

Hippolyte Sonnet, professeur à l'École centrale des arts manufactures, de Joseph Valentin Boussinesq à l'Institut industriel du Nord, de Édouard Collignon à l'École préparatoire à l'externat de l'École des ponts et chaussées, et de Jules Houël à la Faculté des sciences de Bordeaux[2].

Nous reviendrons ensuite sur l'introduction au calcul infinitésimal dans les deuxième et troisième éditions du *Traité d'algèbre* de Laurent. C'est le seul auteur que nous ayons trouvé à introduire ce calcul dans un ouvrage destiné à la classe de mathématiques spéciales durant cette période. Cela rend plus remarquable encore cet ouvrage dont nous avons déjà signalé la particularité.

L'analyse des procès-verbaux des Conseils d'instruction et de perfectionnement de l'École polytechnique nous apprendra dans quelles circonstances a été prise, en 1885, la décision d'inscrire les notions d'infiniment petits, de différentielle et d'intégrale définie au programme du concours d'admission. L'édition de 1887 du *Cours de mathématiques* de Charles de Comberousse nous montrera comment cet auteur important, déjà rencontré au chapitre précédent, introduit ces notions.

Deux ans après l'inscription au concours de la méthode infinitésimale, un ouvrage du mathématicien belge Paul Mansion remet en cause l'un des principes qui fondent cette méthode[3]. Nous rappellerons les arguments mathématiques de Mansion et nous nous interrogerons sur la réception de cet ouvrage en France.

Dans le chapitre 4, nous avions souligné l'importance des *Leçons d'algèbre* de Charles Briot. Briot décède en 1882. En 1893, l'ouvrage est repris par Émile Lacour, professeur de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis. Quelques années après la critique de Mansion,

---

[2] Parmi les manuels français de calcul différentiel et intégral parus après les *Éléments de calcul infinitésimal* de Duhamel, et jusqu'en 1885, le seul que nous n'avons pas retenu est celui de Abel Souchon, publié en 1870 : *Éléments de calcul différentiel et intégral*. Le manque d'informations biographiques sur l'auteur ne nous permet pas de savoir s'il a servi de support à un enseignement. Pour plus d'informations sur cet ouvrage, voir ZERNER Martin, « La transformation des traités français d'analyse (1870-1914) », 1994, https://hal-unice.archives-ouvertes.fr/hal-00347740/fr/ , consulté le 31/0/2017.

[3] Voir la section intitulée « The principle of substitution for Infiniment petits » du Chapitre VIII, « Conflicts Between Confinement to Geometry and Alegrization in France » dans SCHUBRING Gert, *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century, France and Germany*, New-York, Springer, 2005, p. 590-598.

l'analyse de ce manuel nous apprendra comment est présentée la méthode infinitésimale dans un ouvrage qui reste un grand succès d'édition.

1 – La méthode infinitésimale de Duhamel

1 – 1 La méthode infinitésimale de Duhamel dans les *Éléments de calcul infinitésimal* (1856)

Duhamel, démissionnaire en 1850 lors des travaux de la commission Le Verrier, réintègre le corps enseignant de l'École dans la chaire d'analyse laissée vacante par Liouville qui, à son tour, démissionne en 1851[4]. Il y restera jusqu'en 1869.

Les éditions de 1841 et 1847 de son *Cours d'analyse de l'École polytechnique* que nous avons analysées au chapitre 2 contenaient déjà les bases de sa méthode infinitésimale. Elles l'inscrivaient dans une perspective historique. Selon lui, la notion de limite n'était pas étrangère aux « anciens géomètres », c'est-à-dire aux géomètres de l'Antiquité. Ils y avaient été conduits « lorsque, dans la mesure des quantités géométriques, ils cherchèrent à aller au-delà des figures terminées par des lignes droites, et des corps terminés par des plans »[5]. Mais son propos sur l'histoire se limitait aux deux premières pages du premier chapitre. Dans les *Eléments de calcul infinitésimal* publié en 1856, Duhamel développe longuement ses conceptions.

Il écrit dans la préface :

> La marche suivie dans la première partie de cet ouvrage est fort différente de celle qu'ont adoptée les divers auteurs qui ont écrit sur le même sujet. Elle ne se rapporte précisément à aucun enseignement existant, mais à l'enseignement tel que je crois qu'il doit être.[6]

On conçoit aisément qu'un tel ouvrage n'ait jamais constitué une suite de leçons couvrant le programme d'analyse de l'École polytechnique. En effet, le calcul des dérivées, première

[4] Selon MERCADIER Ernest, *op. cit.*, la Commission aurait adjoint deux délégués à Duhamel pour « surveiller » le personnel, ce qui aurait provoqué sa démission. Celle de Liouville serait due aux « persécutions » de la Commission. Liouville n'approuvait pas les réformes de l'École polytechnique imposées par la Commission Le Verrier. Sa désignation en janvier 1851 sur la chaire de mathématiques du Collège de France lui a donné la capacité financière de démissionner de l'École polytechnique (Voir le chapitre IV intitulé « The Second Republic (1848-1852) » dans LÜTZEN Jesper, *Joseph Liouville 1809-1882 : Master of Pure and Applied Mathematics*, New-York, Springer-Verlag, 1990, p. 149-174).

[5] DUHAMEL Jean-Marie Constant, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, Paris, Bachelier, 1841, p. 1.

[6] DUHAMEL Jean-Marie Constant, *Éléments de calcul infinitésimal*, Paris, Mallet-Bachelier, 1856, p. XIII.

notion du cours d'analyse de l'École, n'est abordé qu'en page 97. Mais, ce manuel où il développe considérablement les notions de limites et d'infiniment petits, ces « deux idées géniales les plus fécondes des sciences mathématiques, [qui] remontent presque jusqu'à leur berceau, et doivent, par conséquent, se présenter presque au début de leur enseignement »[7], nous permet de comprendre ce qu'était un enseignement idéal du calcul infinitésimal pour Duhamel.

Un principe fondamental inspiré d'Archimède

L'ouvrage est partagé en « Livres ». Le « Livre I », intitulé « Des quantités considérées comme limites », commence par un chapitre sur les nombres, où Duhamel introduit les nombres incommensurables comme nous l'avons vu précédemment. Le chapitre II introduit les définitions de la limite d'une quantité variable et d'un infiniment petit selon Cauchy. Le chapitre III, intitulé « Réflexions au sujet de quelques définitions », est un chapitre où Duhamel développe ses conceptions philosophiques à propos de l'infini, des nombres incommensurables, et de l'équivalence.

La méthode infinitésimale débute réellement au chapitre IV intitulé « Des différentes manières dont les quantités peuvent être considérées comme limites de variables ». Duhamel y décrit deux procédés « imaginés par les géomètres anciens et considérablement développés par les modernes »[8] pour ramener une quantité à d'autres plus faciles à traiter. Ces deux procédés constituent selon lui la « méthode d'exhaustion ». Ils consistent

> à enlever successivement de la quantité proposée des quantités d'une espèce plus simple, en laissant un reste qui représente bien les mêmes difficultés que la quantité en question, mais qui diminue de plus en plus et a pour limite zéro.[9]

Dans le premier, on enlève de la quantité à traiter une quantité déterminée, puis du reste une nouvelle quantité déterminée, et ainsi de suite, jusqu'à ce que les restes deviennent moindres que toute quantité donnée. Dans ce premier procédé, une grandeur est limite de la somme des termes d'une série.

Le second procédé, « dû à Archimède, consiste à considérer dans la grandeur des parties d'espèce plus simple, […] décroissant indéfiniment »[10]. Avec ce procédé, les grandeurs sont

---

[7] *Ibid.,* p. XIV.
[8] *Ibid.,* p. 25.
[9] *Ibid.,* p. 25.
[10] *Ibid.,* p. 26.

considérées comme limites de sommes de quantités infiniment petites dont le nombre augmente indéfiniment. Duhamel ajoute un troisième procédé, imaginé par « les modernes », qui consiste à étudier les rapports d'infiniment petits.

Le chapitre V propose trois exemples pris chez les « anciens géomètres » pour illustrer le premier procédé : le calcul du volume de la pyramide triangulaire dont « Euclide avait démontré [qu'elle] était limite d'une somme de prismes »[11], le calcul de l'aire du segment parabolique par Archimède, et enfin celui de l'aire du cercle. Dans ce dernier, Duhamel reprend la méthode euclidienne d'inscription dans le cercle de polygones dont le nombre de côtés double à chaque étape. Mais, au lieu de considérer à chaque fois l'aire du polygone lui-même, il l'obtient en ajoutant des triangles au polygone précédent.

Le second procédé est abordé au chapitre VI. Duhamel démontre tout d'abord le théorème suivant, qu'il qualifie de « principe fondamental » :

> La limite de la somme de quantités positives infiniment petites n'est pas changée, lorsqu'on remplace ces quantités par d'autres dont les rapports avec elles ont respectivement pour limite l'unité. [12]

Rappelons que pour démontrer ce théorème[13], il considère les infiniment petits $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ dont les rapports respectifs ont pour limite l'unité. La fraction :

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}{\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n}$$

est donc, écrit-il, comprise entre la plus petite et la plus grande des valeurs des rapports :

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \dots, \frac{\alpha_n}{\beta_n}.$$

Par conséquent, elle tendra vers l'unité.

Il remarque alors que, lorsque chacun des rapports précédents a une même limite l quelconque, les limites des deux sommes ont aussi l pour rapport. Il conclut : « on voit donc que la recherche des limites de sommes d'infiniment petits peut conduire à celles des limites des rapports ». Cette limite est, écrit-il, facilitée par le deuxième théorème ainsi énoncé :

[11] *Ibid.,* p. 28.
[12] *Ibid.,* p. 35.
[13] Voir *supra*, p. 160.

> La limite du rapport de deux quantités infiniment petites n'est pas changée quand on remplace ces quantités par d'autres, qui ne leur sont pas égales, mais dont les rapports avec elles ont respectivement pour limite l'unité.[14]

Nous retrouvons les deux théorèmes de son cours de 1838, dans un ordre inversé. Dans le cours de 1838 et dans les deux éditions du *Cours d'analyse*, en 1841 et 1847, ils n'étaient que des façons de simplifier les calculs. En 1856, celui qui était cité en deuxième est devenu un « principe fondamental » car il est, selon lui, historiquement le premier. Il joue un rôle heuristique et amène au théorème sur les limites des rapports. Nous désignerons par la suite ces deux théorèmes comme les *théorèmes de substitution des infiniment petits*. Ils forment à eux deux ce que nous appellerons le *principe de substitution des infiniment petits*[15].

Duhamel définit ensuite les différents ordres d'infiniment petits comme il le faisait dans ses ouvrages précédents. Il n'évoque plus la notion de « classe d'infiniment petits » utilisée dans ses premiers enseignements[16].

Le changement essentiel réside donc dans le rôle fondamental du premier théorème. Il utilise par la suite ces deux théorèmes comme il le faisait dans ses ouvrages précédents. Ils lui permettent d'affirmer qu'il ne « résulte aucune erreur dans les résultats où l'on n'a en vue que les limites des rapports ou des sommes de ces quantités infiniment petites »[17].

Duhamel propose dans les cinq chapitres suivants des exemples d'utilisation de ce principe fondamental. Il montre comment des aires de courbes planes, des volumes, des centres de gravité peuvent être considérés comme des limites de sommes d'infiniment petits. À cette occasion, il cite l'exemple dû à Archimède qui est, selon lui, à l'origine de ce second procédé. Il s'agit de la quadrature de la spirale. Archimède encadre les portions de spirales par des arcs de cercles (voir figure 1 ci-dessous).

---

[14] *Ibid.,* p. 36.
[15] Nous reprenons l'expression à ZERNER Martin, *op. cit*.
[16] Voir *supra*, p. 160.
[17] DUHAMEL Jean-Marie Constant, *op. cit*., p. 38.

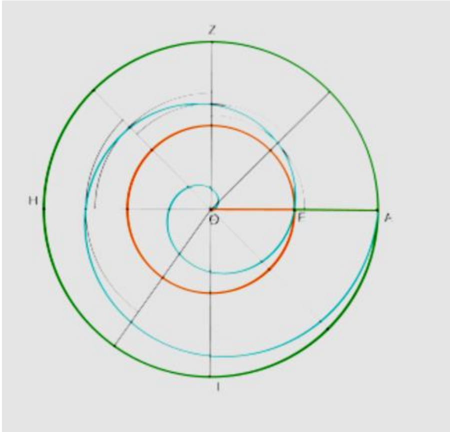


Figure 8: Encadrement de portions de spirale par des arcs de cercle

Archimède procède par une double démonstration par l'absurde, comme il d'était d'usage chez les géomètres grecs. Le langage des limites lui était bien évidemment étranger, tout comme il l'était à Euclide pour le calcul du volume de la pyramide[18]. Duhamel substitue à la somme des portions infiniment petites de spirales celle des arcs de cercle.

Duhamel aborde ensuite le troisième procédé, dû aux « modernes », par la recherche des tangentes comme limites de sécantes. Cette conception, qui permet d'obtenir la tangente à une courbe en cherchant « la limite du rapport des différences infiniment petites des coordonnées de deux points de la courbe »[19], lui donne l'occasion d'établir « qu'en tout point d'une courbe déterminée par une équation, ou par une loi de construction qui pourrait conduire à une équation entre des coordonnées de nature quelconque, il existe une tangente »[20]. Il démontre alors un « théorème général » prouvant, en termes actuels, que toute fonction continue est dérivable, sauf « pour des valeurs exceptionnelles et en nombre limité »[21]. Il convient de faire trois remarques à propos de cette démonstration, en la comparant à celle qui figure dans les éditions de 1841 et 1847 du *Cours d'analyse*.

Tout d'abord, Duhamel ajoute une hypothèse : la fonction doit être non seulement continue[22], mais elle doit de plus vérifier la condition suivante :

[18] Signalons que Duhamel cite aussi le calcul par Archimède du volume d'un cylindre ayant des bases quelconques dans le chapitre IX intitulé : « Comment les volumes des corps peuvent être considérés comme limites de sommes d'infiniment petits ».
[19] DUHAMEL Jean-Marie Constant, *op. cit.*, p. 89.
[20] *Ibid.*, p. 94.
[21] *Ibid.*, p. 96.
[22] Comme dans le *Cours d'analyse*, la continuité est définie en termes de valeurs intermédiaires.

> à partir de toute valeur de x on [peut] en prendre une autre qui en diffère d'une quantité finie déterminée, telle que si x varie dans le même sens dans tout l'intervalle compris entre elles, y varie constamment dans le même sens, c'est-à-dire toujours en augmentant ou toujours en diminuant.

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, la monotonie de la fonction a été utilisée par Paul René Binet en 1808 pour démontrer ce théorème puis, par la suite, par Ampère qui en faisait une condition de la continuité d'une fonction. Pour Duhamel, il s'agit d'une condition supplémentaire à laquelle doit être assujettie la fonction continue. S'il ne fournit aucune autre précision sur l'intérêt de cette hypothèse, nous pouvons cependant penser qu'elle est là pour éviter des fonctions du type $xsin\frac{1}{x}$ dont Cauchy disait que la dérivée était « indéterminée et par conséquent discontinue » en 0[23]. Elle permet aussi d'accorder les fonctions considérées par Duhamel à l'intuition géométrique de la courbe qui reste l'objet de sa démonstration. Ces deux conditions, continuité et monotonie, peuvent être regardées comme définissant en quelque sorte la notion de courbe pour Duhamel.

Ensuite la démonstration de 1856 est beaucoup plus détaillée que celle de son *Cours d'analyse*. Dans ce dernier ouvrage il se contentait d'évoquer un partage de l'intervalle et des rapports de sommes, sans aucun symbolisme mathématique. Dans les *Eléments de calcul infinitésimal* il utilise la notation indicielle pour la partition de l'intervalle $X - x_0$ et les accroissements de la fonction, ce qui rend la démonstration plus lisible.

Enfin, à ce point de l'ouvrage, la notion de fonction n'a pas encore été clairement définie par Duhamel. Le terme apparaît auparavant trois fois au détour de phrases, dans une acception assez vague qui laisse penser que l'auteur s'adresse à des lecteurs qui ont déjà abordé cette notion. La définition n'apparaît qu'au premier chapitre du « Livre II », en page 221, où il reprend la seconde définition eulérienne, déjà donnée dans son *Cours d'analyse*.

L'emploi des différentielles justifié par les théorèmes de substitution des infiniment petits

La fonction dérivée est définie comme limite du rapport des accroissements dans le « Livre I », à la suite du théorème démontrant l'existence d'une tangente en tout point d'une courbe. Dans le deuxième chapitre du « Livre II », après avoir rappelé la définition de la dérivée, Duhamel reprend la définition d'une différentielle donnée dans son ouvrage de 1847.

[23] Voir, *supra*, p. 140.

Considérant la relation qui donne l'accroissement d'une fonction F : $\Delta y = F'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$, α étant un infiniment petit, il écrit :

> Nous savons que les limites des sommes ou des rapports d'infiniment petits ne sont pas altérées lorsqu'on remplace ces infiniment petits par d'autres qui en diffèrent de quantités infiniment petites par rapport à eux. Donc, toutes les fois que Δy entrera dans un calcul comme terme d'un rapport ou d'une somme dont on cherchera la limite, on pourra le remplacer par $F'(x)\Delta x$ […].[24]

Duhamel donne le nom de différentielles à « ces quantités infiniment petites, plus simples » qu'il désigne par la caractéristique d. Le calcul différentiel reste donc pour lui un calcul infinitésimal.

Dans la suite du texte, la notion de différentielle est presque exclusivement employée dans les calculs.

L'identité du problème des limites de sommes et du problème inverse du calcul différentiel démontrée à l'aide du théorème de substitution des infiniment petits dans un rapport

Dans le premier chapitre du « Livre III », Duhamel établit l' « identité du problème des limites de sommes avec le problème inverse du calcul différentiel »[25]. L'intégrale définie d'une fonction $F(x)$ « quelconque » entre les valeurs x_0 et X est la limite de « $\sum F(x)\Delta x$ lorsque l'on prend successivement pour x les valeurs depuis x_0 jusqu'à X, croissant par intervalles égaux ou inégaux, désignés parΔx »[26]. L'existence d'une telle limite est justifiée par l'aire sous la courbe de la fonction. Duhamel n'impose aucune condition à la fonction. Cependant, la justification par les aires laisse supposer, de façon implicite, qu'il considère des fonctions continues.

Puis, dans $\int_{x_0}^{x} F(x)dx$, si x augmente de Δx,

> l'aire augmentera d'une quantité dont le rapport avec le rectangle $F(x)\Delta x$ a pour limite l'unité, quand Δx tend vers zéro ; la limite du rapport de l'accroissement de l'aire ou de l'intégrale à l'accroissement de la variable x ne sera donc pas altérée en substituant $F(x)\Delta x$ à l'accroissement exact de cette intégrale, et par conséquent sa dérivée sera $F(x)$ ».[27]

---

[24] DUHAMEL Jean-Marie Constant, *op. cit.*, p. 228.
[25] DUHAMEL Jean-Marie Constant, *op. cit.*, p. 420.
[26] *Ibid.*, p. 419.
[27] *Ibid.*, p. 420.

Ainsi, le problème de la recherche d'une primitive, pour les fonctions considérées, « a toujours une solution, puisqu'il renferme celle du problème des limites de sommes, dont nous avons démontré l'existence ».

Il est à remarquer que, dans les *Éléments de calcul infinitésimal,* contrairement à ce que nous avons vu dans les deux versions du *Cours d'analyse*, Duhamel ne donne pas de démonstration purement analytique de l'existence d'une fonction primitive à une fonction continue. L'argument géométrique lui suffit à présent. L'inscription par Duhamel de l'enseignement du calcul infinitésimal dans une perspective historique est aussi l'inscription de ce enseignement dans un rapport fondamental à la géométrie. Le calcul des grandeurs géométriques qui est à l'origine de ce calcul détermine les fonctions à considérer. Ainsi, les conceptions géométriques qui sous-tendent cette méthode éloignent l'enseignement de Duhamel des conceptions analytiques de Cauchy auquel il reprend la définition d'un infiniment petit.

Nous désignerons donc comme la *méthode infinitésimale de Duhamel* cette introduction du calcul différentiel et intégral ancrée dans une approche géométrique et historique, qui utilise le *principe de substitution des infiniment petits* pour justifier de l'emploi de la notion de différentielle et déterminer l'intégrale définie.

L'ouvrage sera réédité en 1860, 1874 et 1886. Les deux dernières éditions, posthumes, sont dirigées par Bertrand.

1 – 2 La méthode infinitésimale dans les cours de Duhamel à l'École polytechnique

Pour l'enseignement à l'École, la Commission Le Verrier a adopté un programme qui sépare l'enseignement de l'analyse et celui de la mécanique[28]. L'enseignement de l'analyse couvre 42 leçons dont 28 pour le calcul différentiel. Ce programme, très détaillé à l'instar des programmes d'admission, est divisé en groupes de leçons. L'expression « infiniment petit » apparaît dans le groupe constitué par les cinq premières leçons. Le deuxième article du programme indique : « Du rapport entre l'accroissement d'une fonction et l'accroissement de la variable. Valeur que prend ce rapport quand les accroissements deviennent infiniment petits »[29]. Rien d'autre n'est précisé concernant la notion d'infiniment petit. Mais, en se

[28] Nous avons vu que ces deux enseignements avaient été regroupés en 1815.
[29] *Programmes pour l'admission et l'enseignement à l'Ecole polytechnique,* Paris, Imprimerie nationale, 1850, p. 51.

reportant aux commentaires de la Commission donnés au chapitre précédent, l'analyse est bien, dans l'esprit des rédacteurs du programme, un calcul infinitésimal, l'emploi des infiniment petits devant être privilégié pour les applications à la géométrie et à la mécanique. Il s'agit aussi d'un calcul différentiel puisque la notion de différentielle est partout privilégiée dans l'énoncé du programme.

Le programme de première année d'analyse de l'École polytechnique ne connaîtra pas de modification significative jusqu'en 1885. Il deviendra simplement moins détaillé, comme nous l'avons vu pour le programme d'admission, à partir de 1874.

Une comparaison des *Éléments de calcul infinitésimal* de Duhamel avec le cours qu'il professe en 1857-1858[30] aux élèves de première année de l'École polytechnique révèle que son enseignement tendait à cet enseignement idéal développé dans l'ouvrage. Contraint en effet par le temps, il ne pouvait donner à son introduction autant d'ampleur, mais nous y retrouvons la même structure. Les théorèmes sur les infiniment petits sont introduits à la suite d'exemples pris chez Euclide et Archimède : aire du cercle et du segment parabolique, volume de la pyramide et de la calotte sphérique. Si, écrit-il, « la démonstration de l'égalité de ces limites est, dans Archimède, différente dans chaque exemple, les modernes ont donc simplifié la méthode par l'emploi de ce théorème »[31], le théorème en question étant celui sur la substitution des infiniment petits dans les limites de sommes. Il n'est pas ici qualifié de principe fondamental.

La différentielle d'une fonction est définie de la même façon, comme « la quantité plus simple $hF'(x)$ qui ne diffère de l'accroissement que d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même »[32]. Le cours ne précise pas que les théorèmes de substitution justifient son emploi dans les calculs des limites de sommes ou de rapports.

Lorsque Duhamel justifie l'existence d'une primitive pour toute fonction continue par le calcul de l'aire sous la courbe entre une valeur constante a et une valeur variable x, il écrit : « L'aire est la limite d'une somme de trapèzes infiniment petits dont chacun a pour expression

[30] DUHAMEL Jean-Marie Constant, *Résumé du cours d'analyse*, CRH cours : Duhamel 1857-1859, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.
[31] *Ibid.*, p. 8.
[32] *Ibid.*, p. 17.

$F(x)\Delta x$ »[33]. L'expression est celle d'une aire de rectangle et non de trapèze. Le cours n'est pas ici très explicite, mais il semble clair, qu'aux trapèzes infiniment petits, Duhamel a substitué des rectangles infiniment petits.

Le cours de 1857-1858 ne pouvait pas être, comme nous l'avons déjà dit, semblable aux *Éléments de calcul infinitésimal* en raison de l'ampleur des développements du livre. Il tente cependant de s'en approcher. Ce qui caractérise le mieux cette tentative est malgré tout, plus que les théorèmes de substitution déjà présents dans les cours de 1838-1839, l'importance de l'ancrage géométrique. En 1838-1839 aucun appel à la géométrie, aucune figure ne se trouvait dans le début d'un cours purement analytique, dans la lignée de Cauchy. Duhamel a depuis modifié ses conceptions de l'enseignement du calcul infinitésimal. Les appels à la géométrie, les figures, sont omniprésentes dans le cours de 1857-1858. Les *Eléments de calcul infinitésimal* fournissent, non seulement la méthode infinitésimale selon Duhamel, mais indiquent aussi la façon d'enseigner le calcul différentiel et intégral.

2 – La méthode infinitésimale de Duhamel : un enseignement qui s'impose à l'École polytechnique

2 - 1 Bertrand : le prolongement de l'enseignement de Duhamel

Bertrand succède en 1856 à Sturm décédé en décembre 1855. Il enseignera l'analyse à l'Ecole polytechnique jusqu'en 1895.

Parmi les nombreux cours lithographiés de Bertrand dispensés en première année, nous avons choisi d'analyser le *Résumé du cours d'analyse* professé par Bertrand en 1860-1861, le *Cours d'analyse* donné en 1878-1879, le *Cours d'analyse rédigé par les élèves* de 1882-883 et le *Cours d'analyse* de 1892-1893. Nous avons également considéré le premier tome du *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* de Bertrand. Intitulé *Calcul différentiel*, il paraît en 1864. Le second tome, *Calcul intégral* ne paraîtra qu'en 1870. Cet ouvrage permet à Bertrand, comme à Duhamel dans ses *Éléments de calcul infinitésimal*, de développer largement ses conceptions. Si le public des différents cours est clairement identifié, celui auquel Bertrand destine son *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* l'est moins nettement. La préface évoque les « jeunes géomètres ». La taille de l'ouvrage, plus de 1500 pages pour les deux

[33] *Ibid.*, p. 109.

tomes, et la présence d'une préface de plus de quarante pages qui retrace l'histoire du calcul différentiel le rattache plus aux traités que nous avons considérés en début de première partie. Néanmoins, le début de ce *Traité* reprend presque mot à mot le début du cours donné en 1860-1861.

Remarquons tout d'abord que, dans tous ces textes, Bertrand s'adresse à un public qui possède déjà des connaissances sur la théorie des dérivées. La notion de limite n'y est pas définie. Celle de fonction n'est définie que dans le cours de 1878-1879, après le rappel de la définition de la dérivée donnée en mathématiques spéciales : « dans cette définition le mot fonction a un sens tout à fait général ; il désigne toute quantité qui dépend de la valeur de celle qu'on attribue à une autre quantité, dite variable »[34]. Bertrand adopte donc ici la deuxième définition proposée par Euler, la plus générale, contrairement au *Traité d'algèbre* dans lequel figure la première définition eulérienne d'une fonction. Enfin la continuité d'une fonction n'est pas non plus définie dans ces textes.

Ces quatre textes contiennent dans les premières pages la définition de Cauchy d'un infiniment petit et des ordres d'infiniment petits. La dérivée est ensuite définie en termes d'infiniment petits. Elle est, dans le cours de 1878-1879 « le rapport des accroissements infiniment petits correspondants de la fonction et de la variable »[35]. Dans le *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* cette définition est suivie du théorème :

> Soit $\varphi(x)$ une fonction quelconque d'une variable x ; [36]si l'on donne à x un accroissement infiniment petit h, que nous regardons comme infiniment petit principal, l'accroissement infiniment petit correspondant de la fonction, $\varphi(x+h)-\varphi(x)$ est un infiniment petit de premier ordre, et il ne peut y avoir d'exception que pour des valeurs particulières de la variable x.

La dérivabilité d'une fonction est exprimée en termes d'ordre d'infiniment petits avant de l'être en termes de limite du rapport des accroissements. Aucune restriction n'est apportée à la fonction. L'hypothèse que la fonction est continue est implicite dans la démonstration. Elle est exprimée géométriquement dans les « quelques conséquences géométriques » du théorème ci-dessus. Nous citerons les trois premières. Bertrand démontre successivement que « la distance de deux points infiniment voisins [d'une courbe exprimée

---

[34] BERTRAND Joseph, *Cours d'analyse*, CRH cours : Bertrand 1878-1879, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique, p. 1.
[35] *Ibid.* p. 1.
[36] BERTRAND Joseph, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, Paris, Gauthier-Villars, 1864, p. 2.

en fonction d'une variable α] est un infiniment petit de même ordre que la différence des valeurs de α auxquelles ils correspondent » ; que si l'on fait correspondre point par point deux courbes « la distance de deux points infiniment voisins de l'une des courbes est de même ordre que celle des points correspondants sur l'autre » ; et que « si une ligne droite se déplace dans l'espace suivant une loi continue quelconque […], l'angle de deux positions infiniment voisines de cette droite est de même ordre que les différences correspondantes de α »[37], les positions de la droite s'exprimant en fonction de α.

Si nous ne retrouvons pas dans les cours de Bertrand l'ancrage historique de la méthode infinitésimale de Duhamel, l'inscription géométrique est, elle, tout aussi nette. Ainsi, la notion de fonction est rattachée à la notion de courbe et la « loi continue » évoquée dans le dernier exemple semble plus proche de la loi de continuité de Lacroix que de la notion de fonction continue de Cauchy. Notons tout de même que, dans le cours de 1882-1883, l'hypothèse de continuité de la fonction est cependant citée pour la dérivabilité d'une fonction. La formulation n'est pas très claire mais elle semble être une condition suffisante à la dérivabilité.

Les *théorèmes de substitution des infiniment petits* formulés par Duhamel figurent dans chacun des textes. Ils sont regroupés en un « principe », énoncé par exemple dans le cours de 1860-1862, de la façon suivante : « Dans la recherche de la limite d'un rapport ou de la limite d'une somme, on peut remplacer un infiniment par un autre dont le rapport au premier a pour limite l'unité »[38]. Notons que Bertrand démontre le théorème de substitution dans une somme en utilisant le *lemme de Liouville*[39]. Nous avons exposé ce lemme au chapitre 2. Il permet une autre démonstration du théorème de substitution des infiniment petits dans une somme. Joseph Liouville et Charles Sturm la jugeaient probablement plus satisfaisante.

Le principe énoncé par Bertrand est ensuite appliqué, dans le *Traité de calcul différentiel et intégral* à la recherche de tangentes et de plan tangents pour la limite de rapports d'infiniment petits, au calcul de la longueur d'arcs de courbes pour la limite de sommes d'infiniment petits[40].

---

[37] *Ibid.*, p. 4,5.
[38] BERTRAND Joseph, *Résumé du cours d'analyse*, CRH cours : Bertrand 1860-1862, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique, p. 8.
[39] Voir *supra*, p. 173.
[40] BERTRAND Joseph, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, Paris, Gauthier-Villars, 1864, p. 19-24.

La différentielle, définie de la même manière que Duhamel, « permet de remplacer l'accroissement de la fonction dans un problème où il s'agit de calculer un rapport ou une somme d'infiniment petits »[41]. Comme Duhamel, Bertrand privilégie l'emploi de la notation différentielle et des différentielles dans les calculs.

Bien qu'il ne soit pas explicitement cité, le *principe de substitution* intervient dans la définition de l'intégrale d'une fonction. Dans le cours de 1878-1879, lorsqu'il définit l'intégrale d'une différentielle $\varphi'(x)dx$ comme la fonction dont cette expression est la différentielle, il justifie ainsi l'emploi du mot somme dans la notation $\varphi(x) = \int \varphi'(x)dx$:

> Le mot somme vient de ce qu'on peut considérer la variation d'une fonction dans un intervalle quelconque, et par suite, sa valeur à une constante près, comme la somme de ses accroissements infiniment petits dans cet intervalle. On sait qu'à un infiniment petit d'ordre supérieur près, ces accroissements sont représentés par les différentielles.[42]

À l'occasion de sa définition de l'intégrale définie, Bertrand interprète géométriquement l'intégrale indéfinie. Illustrée par la figure ci-dessous, il écrit qu'elle représente

> la somme d'un nombre infini de rectangles MPQS, infiniment petits, pris à partir d'une ordonnée indéterminée jusqu'à l'ordonnée correspondant à l'abscisse x. C'est donc en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, l'aire de la portion du plan comprise entre la courbe, ces deux ordonnées et l'axe des x.[43]

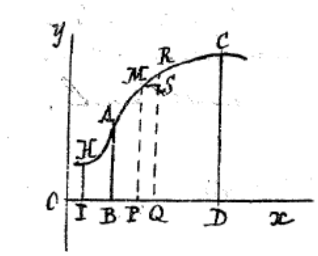


Figure 9: illustration de l'interprétation de l'intégrale indéfinie dans le *Cours d'analyse* de Bertrand

Selon Ernest Mercadier, directeur des études au moment du centenaire de l'École, Duhamel et Bertrand, « l'oncle et le neveu […] firent au fond le même cours »[44]. Le mot est sans doute excessif. Une étude plus fine permettrait de distinguer, durant la longue carrière de Bertrand

[41] BERTRAND Joseph, *Résumé du cours d'analyse*, CRH cours : Bertrand 1860-1862, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique, p. 16.
[42] BERTRAND Joseph, *Cours d'analyse*, CRH cours : Bertrand 1878-1879, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique, p. 231.
[43] *Ibid.*, p. 252.
[44] MERCADIER Ernest, « Histoire de l'Enseignement de l'École Polytechnique », *École Polytechnique, Livre du centenaire, 1794-1894*, Tome I, L'École et la Science, Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1895, p. 72.

à l'École polytechnique différentes périodes. Ainsi, le cours de 1860-1861 qui introduit les infiniment petits en rappelant la recherche des tangentes et des extrema par Leibniz est plus proche de Duhamel que le cours de 1878-1879 où nous ne trouvons pas de référence historique. De même, dans le cours de 1892-1893, Bertrand définit la différentielle d'une fonction avant d'avoir défini un infiniment petit. La différentielle n'est plus alors, comme chez Duhamel, une quantité infiniment petite. Cependant la parenté mathématique entre ces auteurs est indiscutable. La notion d'infiniment petit joue pour chacun un rôle premier dans un calcul fondé sur des bases géométriques.

2 – 2 Hermite : l'emploi de la méthode de Duhamel par un hériter des conceptions de Lagrange[45]

Né en 1822 comme Bertrand, Hemite est admis à l'Ecole polytechnique en 1842. Il a Liouville pour professeur d'analyse. Il doit quitter l'École après un an d'études en raison d'une malformation handicapante au pied. Il reste en relation avec Liouville, rencontre Cauchy, et devient l'ami de Bertrand dont il épousera la sœur.

Sur les conseils de Liouville, Hermite communique ses premiers résultats sur les fonctions abéliennes et les formes quadratiques à Carl Gustav Jacobi. Ils lui valent une première reconnaissance dans la communauté mathématique. Nommé répétiteur à l'École polytechnique en 1848, il poursuit ses travaux sur les fonctions elliptiques et sur la théorie des nombres. Il est élu en 1856 à l'Académie des sciences. Ces thèmes de recherche resteront toute sa vie des thèmes de prédilection. Il convient d'y ajouter notamment les questions d'approximation par les fractions continues qui lui permettront de prouver, en 1872, la transcendance de e, la plus célèbre de ses démonstrations.

Pour Hermite, nous disposons aux archives de l'École polytechnique de trois cours lithographiés d'analyse pour les années 1869-1870, 1871-1872 et 1873-1874. Une comparaison du cours lithographié de 1869-1870 avec le *Cours d'analyse de l'École polytechnique* qu'il publie en 1873 permet de constater que l'ouvrage publié reprend

[45] Sur Charles Hermite, on pourra lire notamment de BREZINSKI Claude, *Charles Hermite : père de l'analyse mathématique moderne*, Paris, Belin, 1990, et de GOLDSTEIN Catherine : « Les mathématiques comme science d'observation : les convictions de Charles Hermite », dans F. FERRARA, L. GIACARDI, M. MOSCA*, Associazione Subalpina Mathesis Conferenze e Seminari 2010-2011*, Torino, Kim Williams, 2011, p. 147-156, et « Charles Hermite between pure and applied mathematics », *Oberwolfach Reports 10-1*, 2013, p. 693-696.

intégralement le texte du cours lithographié. Le texte publié nous servira d'ouvrage de référence.

L'ouvrage est divisé en trois parties : une « Introduction » d'une quarantaine de pages, une partie intitulée « Calcul différentiel » et une autre intitulée « Calcul intégral ». Ces deux dernières parties, d'environ 200 pages chacune, sont elles-mêmes partagées en « Premiers principes », « Applications géométriques » et « Applications analytiques » pour le calcul différentiel, « Premiers principes » et « Applications géométriques » pour le calcul intégral. Si ce n'est l'interversion des applications géométriques et analytiques du calcul différentiel, ce plan respecte celui du programme d'analyse de l'École polytechnique.

L' « Introduction » précise qu'en analyse,

> le rôle de l'infini […] est en entier résumé dans un petit nombre de propositions, du caractère le plus simple, et telles qu'on pourrait les énoncer et les démontrer dès le commencement de la géométrie.[46]

Ceci ne justifie pas aux yeux d'Hermite la dénomination de « calcul infinitésimal », l'analyse étant pour lui « l'étude générale des fonctions ». La filiation lagrangienne, affirmée dès ces premières lignes, est confirmée par la suite. Hermite cite les *Leçons sur le calcul des fonctions* comme ouvrage de référence et affirme suivre la pensée de Lagrange dans cette introduction[47]. Pour Hermite, une quantité y est fonction algébrique de x quand elle satisfait à une équation de la forme $F(x, y) = 0$, F étant un « polynôme rationnel et entier ». Les fonctions transcendantes « sont toutes celles qui ne peuvent vérifier [cette] condition »[48]. Soulignons dans cette « Introduction » la présence d'une section intitulée « De la périodicité dans les fonctions circulaires » qui introduit brièvement les fonctions elliptiques, l'un des sujets chers à Hermite.

Le « Calcul différentiel » rappelle brièvement l'introduction de la théorie des dérivées en mathématiques spéciales avant de démontrer la *formule de Taylor-Lagrange* par la méthode de Cox-Rouché. Bien que cette formule ne soit pas un principe fondamental, sa position au tout début du calcul différentiel marque une nouvelle fois l'héritage lagrangien chez Hermite.

---

[46] HERMITE Charles, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, tome I, Paris, Gauthier-Villars, 1873, p. 2.

[47] Sur Lagrange comme référence pour Hermite, on pourra lire : GOLDSTEIN Catherine, « Les autres de l'un : deux enquêtes prosopographiques sur Charles Hermite » dans Philippe NABONNAND et Laurent ROLLET (dir.), *Les uns et les autres*, Nancy, Presses Universitaires de Nancy, 2012, p. 509-540.

[48] HERMITE Charles, *op. cit.*, p. 1.

Il l’applique ensuite pour obtenir la « formule de Maclaurin » et les développements en série des fonctions logarithme, exponentielle circulaire, puis il l’étend aux fonctions de plusieurs variables.

Il ne définit qu’ensuite la différentielle, sa définition étant celle de Lacroix. L’intérêt de la notation différentielle est exposé à travers un exemple géométrique : il détermine les courbes $Y = f(x)$ ayant, au signe près, même sous-tangente et même sous-normale qu’une courbe donnée quelconque $y = \varphi(x)$. Ayant obtenu les relations $\frac{YdY}{dx} = \pm\frac{ydy}{dx}$ et $\frac{Ydx}{dY} = \pm\frac{ydx}{dy}$, il multiplie la première par $2dx$ et transforme la seconde relation en $\frac{dY}{Y} = \pm\frac{dy}{y}$. Cet exemple qui montre la souplesse du calcul différentiel est destiné à « familiariser avec la notation différentielle » des élèves qui, dans leurs études préparatoires, n’ont manipulé que la notion de fonction dérivée. Par la suite, dans les calculs, Hermite privilégie l’emploi de la notion de différentielle à celle de dérivée.

La notion d’infiniment petit n’est abordée qu’en page 90, au début des « Applications géométriques ». Hermite donne la définition de Cauchy d’un infiniment petit. La définition est suivie des *théorèmes de substitution* de Duhamel, en commençant par celui sur les rapports, puis de la notion d’ordre d’infiniment petits. Le théorème sur la substitution dans une somme est démontré à la manière de Duhamel. Hermite ne le qualifie pas de « principe fondamental ».

Pour rendre « plus clairs » ces « principes de l’application du Calcul infinitésimal à la Géométrie »[49], Hermite les faits suivre, comme premier exemple, du calcul de l’aire sous une courbe. Le théorème sur la substitution dans les sommes lui permet de justifier que l’élément infinitésimal AMNB peut être remplacé par le rectangle AMM’B.

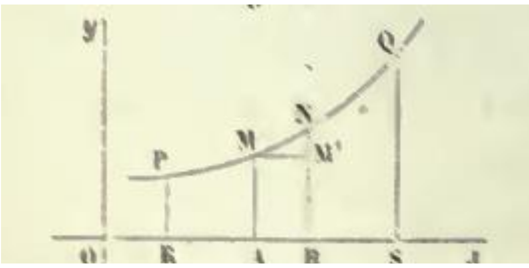


Figure 10: illustration la dérivée de l'aire d'une courbe dans le *Cours d'analyse* de Hermite

[49] *Ibid.*, p. 91.

À la suite de cet exemple, Hermite renvoie aux *Éléments de Calcul infinitésimal* de Duhamel pour l'histoire du calcul infinitésimal. Quant à lui, il affirme se borner, « d'après l'éminent Géomètre, à observer que toutes les mesures de la Géométrie élémentaire sont des conséquences simples et immédiates de ce second principe sur les limites de sommes »[50].

Ce premier exemple est suivi d'une série d'autres exemples géométriques d'infiniment petits. Y figurent notamment les exemples cités plus haut à propos de Bertrand. Hermite précise d'ailleurs qu'ils sont tirés du *Traité de calcul différentiel et intégral* de Bertrand. Cependant, l'exposé de ces exemples se conclut par le commentaire suivant :

> Il n'est pas besoin de faire remarquer l'élégance de ces résultats et la simplicité de la méthode géométrique qui les a donnés ; j'observe toutefois qu'ils s'obtiennent par la voie du calcul d'une manière également facile, et, qu'à y regarder de près, la voie purement géométrique est moins rapide qu'elle ne le semble tout d'abord.[51]

Une note de bas de page précise que cette « manière également facile » se trouve dans le *Traité* même de Bertrand. Cependant, l'obtention d'une méthode analytique « également facile » n'était certes pas le propos de Bertrand en exposant ses calculs.

Par la suite, Hermite emploie à nouveau le *principe de substitution* pour la dérivée de l'aire d'une courbe plane et pour la définition de l'intégrale définie. À cette occasion les différentielles dx changent de statut et deviennent des quantités infiniment petites, les longueurs des parties égales qui partagent l'intervalle sur lequel la fonction est intégrée. Ce changement de statut n'est pas signalé.

En héritier revendiqué de Lagrange, Hermite, pour qui l'analyse est « l'étude générale des fonctions »[52], n'est indiscutablement pas un adepte de la méthode infinitésimale élaborée par Duhamel. Cette méthode, fondée sur des conceptions géométriques, ne guide pas son introduction du calcul différentiel qui n'a pas besoin d'être justifié par les théorèmes substitution de Duhamel. Ce calcul ne devient un calcul infinitésimal que pour les applications géométriques. La citation précédente semble indiquer que le recours aux infiniment petits correspond plus, chez Hermite, à une contrainte du programme d'analyse de l'École polytechnique, qu'à ses conceptions mathématiques. Son *Cours d'analyse* paraît s'imposer le

[50] *Ibid.*, p. 93.
[51] Ibid., p. 96.
[52] *Ibid.*, p. 2.

respect de la règle édictée par Poisson dès 1826, et rappelée dans le rapport de la Commission Le Verrier : on peut établir les principes du calcul différentiel sans faire appel aux d'infiniment petits, à condition de les employer exclusivement dès que l'on aborde les applications à la géométrie et à la mécanique[53].

2 – 3 Le *Cours d'analyse* de Jordan : une introduction fidèle aux conceptions de Duhamel (1882-1883)

Jordan, né en 1838, est admis à l'École polytechnique en 1855[54]. Duhamel est son professeur d'analyse. Il entre dans le Corps des mines avant de se tourner vers l'enseignement. Il obtient un doctorat en 1860, sa thèse principale portant sur les substitutions. Ses recherches vont, par la suite, essentiellement porter sur l'algèbre. Il publie des travaux sur les polyèdres, les groupes de mouvements et, en 1870, un *Traité des substitutions* qui le fait remarquer. Il prolonge dans cet ouvrage les travaux de Galois et d'Abel. Nommé examinateur d'admission à l'École polytechnique en 1873, il succède à Hermite comme professeur d'analyse en 1876.

En 1882 et 1883 il publie les deux premiers tomes de son *Cours d'analyse à l'École polytechnique*, consacrés au calcul différentiel et au calcul intégral. Le troisième tome ne paraîtra qu'en 1887[55].

La préface du premier tome précise que, si des développements ont été ajoutés, le caractère général du cours qu'il avait dispensé à l'École n'a pas été altéré. Il décrit l'ouvrage comme « un Livre d'enseignement, qui ne peut prétendre à la nouveauté »[56]. Les ouvrages de référence qu'il cite sont les manuels de Hermite, Serret, Houël et Bertrand.

Le plan de ce tome respecte celui du programme d'analyse de l'École. Après une courte introduction de huit pages, la partie « Calcul différentiel » fait suivre les définitions et propriétés de base des applications analytiques puis des applications géométriques.

Dans l'introduction, Jordan explique qu'en analyse des « quantités continues », on cherche les lois qui régissent les variations simultanées entre des « éléments […] susceptibles de varier

---

[53] Voir *supra*, p. 280.

[54] Sur Camille Jordan, voir BRECHENMACHER Frédéric, « Un portrait kaléidoscopique du jeune Camille Jordan », *Images des mathématiques*, CNRS 2012, http://images.math.cnrs.fr/Un-portrait-kaleidoscopique-du.html

[55] Sur cette première édition du Cours d'analyse de Jordan, voir GISPERT Hélène, *Camille Jordan et les fondements de l'analyse (Comparaison de la 1ère édition (1882-1887) et de la 2ème (1893) de son Cours d'analyse à l'École polytechnique)*, Publications mathématiques d'Orsay, 1882.

[56] JORDAN Camille, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, tome I, Paris, Gauthiers-Villars, 1882, p. VI.

par degrés insensibles »[57]. Renvoyant à Euclide et Archimède qui avaient donné de « remarquables exemples » de cette méthode ensuite tombée dans l'oubli jusqu'à Descartes, il prend l'exemple de la parabole pour laquelle il résout le problème de la recherche de la tangente en un point et de la quadrature. L'aire sous la parabole est obtenue par encadrement entre des sommes d'aires de rectangles intérieurs et extérieurs.

À la suite de ces deux problèmes ayant en commun « de reposer sur l'introduction d'une quantité h que l'on fait tendre vers zéro »[58], il donne la définition de Cauchy d'un infiniment petit et des ordres d'infiniment petits. Le *principe de substitution* de Duhamel, qualifié simplement de théorème est ainsi énoncé : « dans l'évaluation de la limite d'un rapport ou d'une somme d'infiniment petits, on peut, sans erreur aucune, remplacer ces infiniment petits par leurs valeurs principales »[59]. Cette notion de valeur principale semble être due à Jordan. Si k est un infiniment petit d'ordre α par rapport à un infiniment petit h, on obtient : $k = Ah^{\alpha} + \varepsilon h^{\alpha}$, avec A quantité finie et ε infiniment petit. Le premier terme de cette expression est appelée « valeur principale de k » par Jordan. L'emploi de cette notion ne change fondamentalement rien aux théorèmes énoncés par Duhamel. La démonstration de Jordan du théorème de substitution dans les sommes emploie une variante du *lemme de Liouville*.

Bien que Jordan ne cite pas le nom de Duhamel, l'introduction du *Cours d'analyse* est directement inspirée de sa *méthode infinitésimale*. Nous y retrouvons un fondement géométrique qui puise ses origines dans les travaux des mathématiciens de l'Antiquité, et qui conduit à la notion d'infiniment petit. Les *théorèmes de substitution* justifient que la détermination des valeurs principales des infiniment petits et leur développement en série soit, selon lui, « l'objet » du calcul différentiel. Remarquons cependant que sa quadrature de la parabole ne nécessite pas de substituer des infiniment petits.

Cette notion d'infiniment petit est, comme l'annonce l'introduction, très présente dans l'ouvrage de Jordan. La définition de la dérivée d'une fonction est exprimée en termes

[57] *Ibid.*, p. 1.
[58] *Ibid.*, p. 4.
[59] *Ibid.*, p. 7.

d’infiniment petits. Il définit la différentielle comme « la valeur principale » de l’infiniment petit $\Delta y = y'\Delta x + \varepsilon\Delta x$.

Les infiniment petits sont particulièrement présents dans les applications géométriques du calcul différentiel. Ainsi, sa définition du contact entre deux courbes ayant un point commun *P* est la suivante : elles

> ont, en ce point, un contact d’ordre n si les points de ces deux courbes infiniment voisins de P peuvent être associés deux à deux, de telle sorte que la distance QQ’ de deux points correspondants soit un infiniment petit d’ordre n+1.[60]

De même, lorsqu’il définit la longueur d’un arc de courbe comme « la limite vers laquelle tend le périmètre d’un polygone inscrit dans cet arc lorsqu’on multiplie indéfiniment le nombre de ses côtés »[61], il considère des polygones inscrits dont chaque côté est un infiniment petit pour justifier que la limite est indépendante de la manière dont sont placés les sommets sur l’arc de courbe.

Nous reviendrons plus en détail dans le prochain chapitre sur la notion d’intégrale définie qui se trouve dans le deuxième tome du *Cours d’analyse*, publié en 1883. Introduite de façon purement analytique, la définition de Jordan n’emploie pas la notion d’infiniment petit, ce qui marque une distance avec la *méthode infinitésimale de Duhamel*.

Mais l’ouvrage de Jordan se distingue par bien d’autres points des *Éléments de calcul infinitésimal*. Depuis 1856 les connaissances mathématiques ont progressé et Jordan en tient compte. Ainsi, à propos de la dérivabilité d’une fonction continue, sauf en des valeurs isolées de la variable, il écrit : « cette assertion est trop absolue. On a donné récemment des exemples de fonctions continues dont la dérivée est toujours indéterminée. Mais ces fonctions anormales ne seront pas abordées dans ce Cours »[62]. Ceci le distingue de Bertrand qui, dix ans plus tard, écrira encore dans son cours d’analyse, sans y apporter le moindre correctif : « lorsqu’une fonction est définie il existe pour chaque valeur de la variable une autre fonction appelée dérivée »[63].

---

[60] *Ibid.*, p. 214.
[61] *Ibid.*, p. 240.
[62] *Ibid.*, p. 12.
[63] BERTRAND Joseph, *Cours d’analyse*, CRH cours : Bertrand 1892-1893, Palaiseau, Archives de l’École polytechnique, p. 2.

Cependant les travaux récents sur les fondements de l'analyse ne sont, pour la plupart, au mieux qu'évoqués par Jordan dans les deux premiers tomes de l'édition de 1882. Les raisons en sont multiples. Le programme de l'École polytechnique dont la fonction première est de former des ingénieurs en est une. Le rôle institutionnel majeur de Bertrand en est sans doute une autre. Mais il ne faut pas négliger non plus l'importance que Jordan accordait à la notion d'infiniment petit dans un enseignement élémentaire comme nous le verrons dans le prochain chapitre. Ce « livre d'enseignement » est bien un cours de calcul infinitésimal même si son inscription dans la continuité de l'enseignement de Duhamel est surtout perceptible dans l'introduction.

2 – 4 Conclusion

De 1851 au début des années 1880, l'enseignement du calcul différentiel à l'École polytechnique porte l'empreinte des conceptions de Duhamel. Les cours publiés ou lithographiés de Bertrand, Hermite et Duhamel vont bien au-delà de ce que les programmes exigent sur la notion d'infiniment petit. Nous y retrouvons les caractéristiques de *la méthode infinitésimale de Duhamel* : un ancrage historique qui s'appuie sur des conceptions géométriques et l'énoncé du *principe de substitution des infiniment petits*.

Les différences sont cependant notables entre Bertrand qui contribue à entretenir les conceptions mathématiques de son oncle, qu'il a fait siennes, et Hermite qui, dans la lignée de Lagrange, propose une introduction purement analytique, définissant la différentielle sans recours à la notion d'infiniment petit, et ne revenant à la *méthode infinitésimale de Duhamel* que pour les applications géométriques. La position de Jordan vis-à-vis de la méthode de Duhamel est plus difficile à interpréter. L'introduction du premier tome de son *Cours d'analyse* est, comme nous l'avons vu, assez fidèle à Duhamel, même si elle donne moins d'importance aux théorèmes de substitution. Le tome suivant s'en éloigne un peu plus. L'ouvrage de Jordan marque un éloignement conceptuel par rapport aux idées de Duhamel différent de celui de Hermite. Il est dû aux avancées des mathématiques dans les années 1870, s'inscrivant dans une période de transition sur laquelle nous reviendrons dans le prochain chapitre.

Cependant, jusqu'en 1885, rien ne vient remettre en cause une introduction du calcul différentiel reposant sur la *méthode infinitésimale de Duhamel*. Nous pouvons avancer quelques hypothèses pour mieux comprendre cette persistance de l'empreinte de Duhamel sur l'enseignement du calcul différentiel bien après sa mort, survenue en 1872. Il y a tout d'abord une question d'*habitus*. Bertrand et Jordan sont d'anciens élèves de Duhamel. Hermite, élève de Liouville qui recourait peu aux infiniment petits, utilise cette notion en expliquant qu'on peut s'en passer. Qu'il l'emploie pour les applications géométriques ne surprend pas en regard des exigences du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique. Son recours au *principe de substitution* marque une nouvelle fois le rôle majeur de Duhamel dans l'enseignement de l'analyse à l'École.

L'empreinte de Duhamel à l'École polytechnique est aussi l'empreinte d'un enseignant dont les qualités pédagogiques sont unanimement reconnues. Elles sont renforcées par la publication des cinq volumes de son ouvrage *Des méthodes dans les sciences de raisonnement*, entre 1865 et 1873. Duhamel y développe en particulier ses conceptions pédagogiques sur l'enseignement des mathématiques. Le deuxième tome de son ouvrage, sous-titré *Applications des méthodes générales à la science des nombres et à la science de l'étendue* reprend d'une façon très semblable son propos des *Éléments de calcul infinitésimal*. Il est donc, durant toute la période qui nous intéresse ici, un personnage majeur de l'enseignement des mathématiques en France, et tout particulièrement de l'enseignement de l'analyse.

Enfin, la diffusion de ses idées est renforcée par l'importance grandissante de Bertrand dans la communauté mathématique française. En 1874 Bertrand est élu secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences, ce qui lui donne droit de regard sur toutes les publications. Il s'agit du début d'un « règne »[64] qui a permis d'entretenir les conceptions mathématiques d'un oncle bien après que certaines d'entre elles furent remises en cause.

3 – La diffusion de la méthode infinitésimale de Duhamel à l'extérieur de l'Ecole polytechnique

3 – 1 Le *Cours de calcul différentiel et intégral* de Serret à la Sorbonne (1868)

Serret, polytechnicien, examinateur d'admission à l'École polytechnique à partir de 1848, a remplacé Étienne Lefébure de Fourcy dans la chaire de calcul différentiel et intégral à la

[64] Nous reprenons le mot à ZERNER Martin, « Le règne de Joseph Bertrand (1877-1900) », *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences*, N°34, 1991, p. 298-322.

Faculté des sciences de Paris en 1862. Il l'occupera jusqu'en 1871, date à laquelle Jean-Claude Bouquet le suppléera, de façon permanente jusqu'en 1883.

Ayant intégré l'École polytechnique en 1838, Serret est un ancien élève de Duhamel. Il publie un *Cours de calcul différentiel et intégral* en deux tomes en 1868. Le premier tome traite du calcul différentiel, le second du calcul intégral. Selon Serret, cet ouvrage contient « la substance des leçons [qu'il] professe chaque année à la Sorbonne », auxquelles il a donné certains développements.

Dans le premier chapitre, intitulé « Notions préliminaires », il définit une fonction suivant la seconde manière d'Euler, avant de présenter la méthode des limites, la notion d'infiniment petit et les ordres d'infiniment petits. La dernière section du chapitre, intitulée « De la méthode infinitésimale » présente les deux points de vue qui mènent à l'emploi des infiniment petits. Le premier, « qui a échappé aux anciens géomètres, consiste à regarder la quantité que l'on cherche comme la limite du rapport de deux infiniment petits »[65]. Le second, « particulièrement développé par Archimède […] consiste à concevoir les grandeurs décomposées en parties égales ou inégales et à supposer que le nombre de ces parties augmentant sans limite, chacune d'elles tend vers zéro »[66]. Cette présentation historique l'amène à conclure que « la méthode infinitésimale est contenue dans […] deux principes »[67]. Le premier est le principe de substitution des infiniment petits dans un rapport. Le second est le *lemme de Liouville*. Le principe de substitution dans les sommes est présenté comme un corollaire.

Le calcul de $lim \frac{\sin mx}{\sin nx}$, m et n étant des constantes illustre le premier principe. Le second est illustré par la quadrature des courbes planes, où il indique « l'application que les anciens en ont faite »[68]. Il décrit la méthode suivante, qu'il applique ensuite à la quadrature de la parabole : en décomposant l'aire MPQN (voir figure 11 ci-dessous) en « un nombre infiniment grand de parties infiniment petites, telles que *mpqn* »[69], l'aire à évaluer est la limite de la somme des parallélogrammes intérieurs *mpqa*, ou la limite de la somme des

[65] SERRET Joseph Alfred, Cours de calcul différentiel et intégral, Paris, Gauthier-Villars, 1868, p. 7.
[66] *Ibid.*, p. 8.
[67] *Ibid.*, p. 8.
[68] *Ibid.*, p. 11.
[69] *Ibid.*, p. 12.

parallélogrammes extérieurs *bpqn*, car le rapport de *mpqn* à *mpqa* ou *bpqn* est égale à l'unité. Il peut alors appliquer le second principe.

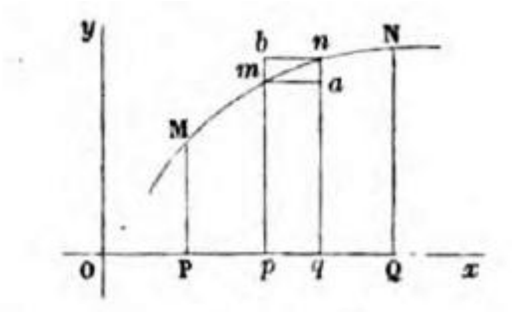


Figure 11:illustration de la quadrature des courbes dans le *Cours de calcul différentiel et intégral* de Serret

Serret exprime la continuité d'une fonction, au sens de Cauchy, et la dérivée en termes d'infiniment petits. Notons que sa méthode pour démontrer le *théorème des accroissements finis* lui permet de conclure à la dérivabilité d'une fonction continue, ainsi exprimée : « l'accroissement d'une fonction est en général un infiniment petit de même ordre que la variable »[70]. L'hypothèse de monotonie de la fonction n'est pas formulée mais elle apparaît lors de la démonstration du *théorème des accroissements finis*.

L'emploi de la différentielle, qui est définie comme chez Lacroix, est justifié par la méthode infinitésimale : à l'accroissement Δy de la fonction on peut substituer la différentielle dy « conformément à la méthode […] exposée, dans les rapports ou dans les sommes dont on peut avoir à chercher les limites »[71].

Enfin, dans le deuxième tome, l'existence d'une primitive pour toute fonction continue est justifiée par l'aire sous la courbe. Serret renvoie au calcul de la différentielle de l'aire d'une courbe qui, dans le premier tome, utilisait le théorème sur la substitution dans une somme.

La méthode infinitésimale proposée par Serret est bien directement inspirée de Duhamel : nous y retrouvons les références historiques, notamment Archimède, les fondements géométriques de la méthode, et les théorèmes de substitution qui justifient l'emploi de la différentielle. Soulignons cependant le rôle essentiel joué par le *lemme de Liouville* dans cette méthode.

[70] *Ibid.*, p. 20.
[71] *Ibid.*, p. 26.

3 – 2 Le calcul infinitésimal de Sonnet pour les futurs ingénieurs (1869)

Sonnet publie, en 1869, des *Premiers éléments de calcul infinitésimal à l'usage des jeunes gens qui se destinent à la carrière d'ingénieur*. Né en 1800, Sonnet a été élève de l'École normale[72]. Il a donc suivi les cours de Lacroix. Il a été professeur d'analyse et de mécanique à l'École centrale des arts et manufactures à partir de 1846 et Inspecteur de l'académie de Paris à plusieurs reprises. Il est l'auteur de nombreux ouvrages de mathématiques et de mécanique, et d'un *Dictionnaire des mathématiques appliquées* paru en 1867.

Dans la préface, Sonnet remarque qu'une très grande partie de l'analyse infinitésimale « n'a qu'un intérêt purement théorique et reste sans application dans les questions usuelles que les ingénieurs ont à résoudre » [73]. Il annonce donc avoir voulu développer

> les principes les plus élémentaire du Calcul différentiel et du Calcul intégral [dans un ouvrage] utile aux jeunes gens qui se proposent d'embrasser la carrière d'ingénieur, en les dispensant de chercher dans de gros livres la solution des questions qui les intéressent plus particulièrement. [74]

Son ouvrage regroupe en effet, en 350 pages, calcul différentiel et calcul intégral, ce qui en fait le manuel le moins volumineux de son époque. Entendant rester dans le cadre des connaissances nécessaires pour aborder la mécanique industrielle ou la stabilité des constructions, il a rédigé, selon lui, un manuel sans « aucune prétention scientifique », et il prévient :

> Les rigoristes nous reprocheront sans doute d'avoir omis certaines discussions ou laissé dans l'ombre certains points délicats. Nous les prions de nous faire grâce et de vouloir bien considérer que, dans un enseignement aussi élémentaire, destiné surtout à préparer promptement les lecteurs aux applications utiles, nous avons dû faire le sacrifice de tout ce qui aurait retardé notre marche.[75]

Les ouvrages « les plus fréquemment consultés » pour rédiger son cours de calcul infinitésimal sont le *Traité élémentaire* de Lacroix, le *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal* de Cournot, le *Cours d'analyse de l'École polytechnique* de Duhamel, et le *Cours de calcul différentiel et intégral* de Serret.

---

[72] Sur Sonnet, voir ZERNER Martin, « La transformation des traités français d'analyse (1870-1914) », 1994, https://hal-unice.archives-ouvertes.fr/hal-00347740/fr/ .
[73] SONNET Hippolyte, *Premiers éléments de calcul infinitésimal*, Paris, Hachette, 1869, p. I.
[74] *Ibid.*, p. I.
[75] *Ibid.*, p. II.

En 1869, le *Traité élémentaire* de Lacroix ne nous semble plus un ouvrage d'actualité en matière d'enseignement. Pour ne citer que deux exemples qui l'éloignent probablement d'un tel usage, il n'emploie pas la notion de dérivée qui s'est imposée dans l'enseignement comme Cournot le signalait dès 1841, et il donne toujours le « théorème de Taylor » dans la version de Lagrange. Il reste cependant un ouvrage de référence, réédité en 1861 et 1867. Nous avons vu qu'il n'utilisait pas la notion d'infiniment petit, contrairement aux trois autres ouvrages de référence de Sonnet. Rappelons aussi que les infiniment petits selon Cournot, liés au mode de génération des grandeurs physiques, et qui, d'une certaine façon, « existent dans la nature »[76], ne sont pas les infiniment petits de Duhamel, repris à Cauchy.

Sonnet suit ces deux derniers auteurs, définissant un infiniment petit comme Cauchy, puis établissant les théorèmes sur l'ordre, les somme, différence, produit et quotient d'infiniment petits. Là s'arrête, chez Sonnet, la *méthode infinitésimale de Duhamel* telle que nous l'avons caractérisée. Il n'énonce pas les *théorèmes de substitution des infiniment petits*.

Il existe cependant une autre parenté avec le *Cours d'analyse* de Duhamel de 1841 : Sonnet définit tout d'abord la différentielle d'une fonction comme son accroissement infiniment petit : $dy = f(x+dx) - f(x)$. Mais, par la suite, la différentielle devient simplement : $dy = f'(x)dx$. Le passage de l'une à l'autre relation s'opère en négligeant ε dans la relation $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$ quand « on remplace les accroissements Δx et Δy par les infiniment petits dx et dy »[77], Δy devenant « en général » infiniment petit quand Δx le devient.

Pour le calcul intégral qui est, chez Sonnet, l'inverse du calcul différentiel, il écrit : « les notions fondamentales du calcul intégral peuvent être présentées de diverses manières ; la plus simple est celle qui s'appuie sur les considérations géométriques »[78]. Il calcule l'aire sous une courbe en divisant l'intervalle sur lequel est calculée cette aire en intervalles de même longueur. L'aire, encadrée par les sommes de rectangles intérieurs ou extérieurs à la courbe, est la limite commune des sommes des aires des rectangles intérieurs et extérieurs lorsque le nombre d'intervalles devient infiniment grand, démonstration qui ne nécessite pas de

[76] Voir *supra*, p. 251.
[77] SONNET Hippolyte, *op. cit.*, p. 6.
[78] *Ibid.*, p. 189.

substitution d'infiniment petits. Il ne démontre pas que la limite est indépendante de la partition de l'intervalle.

Même si Sonnet ne cite jamais le nom de Cauchy, son calcul infinitésimal doit plus à ce dernier qu'à Duhamel auquel il n'emprunte guère pour ce qui concerne la méthode infinitésimale. La théorie des infiniment petits est celle de Cauchy. De Duhamel, nous ne trouvons ni l'inscription de la méthode dans une perspective historique, ni les théorèmes de substitution. Que ce soit pour justifier l'emploi de la différentielle réduite à $f'(x)dx$ en négligeant ε ou pour calculer l'intégrale d'une fonction, Sonnet se passe de ces théorèmes. Le principe fondamental de la *méthode infinitésimale de Duhamel* est chez lui inutile. Résolvant pour Duhamel la question de la compensation des erreurs, ils font probablement partie pour Sonnet d'une approche rigoriste qui retarderait sa marche. Il faut sans doute aussi comprendre de cette façon l'absence d'une démonstration de la dérivabilité d'une fonction continue ou celle de l'indépendance de l'aire sous la courbe du choix de la partition de l'intervalle. Sonnet peut ainsi proposer aux élèves ingénieurs un manuel aux dimensions réduites.

Cet ouvrage connaîtra un succès de longue durée. Réédité sans modification en 1879, l'année du décès de Sonnet, il aura six éditions posthumes en 1884, 1889, 1897, 1902 et 1919.

3 – 3 L'analyse infinitésimale de Boussinesq à l'Institut industriel du Nord (1872)

Boussinesq, né en 1842, a suivi des études à la Faculté des sciences de Montpellier où enseigne le mathématicien et astronome Édouard Roche[79]. Il obtient un doctorat à Paris en 1867 sous la direction du mathématicien, physicien et ingénieur Adhémar Barré de Saint-Venant. Sa thèse principale porte sur la propagation de la chaleur dans les milieux homogènes. Il consacre par la suite de nombreux travaux à l'hydrodynamique et à l'hydraulique, développant une méthode statistique. Soutenu par Barré de Saint-Venant qu'il a rencontré alors qu'il était professeur à Gap, Boussinesq est nommé en 1873 professeur à la Faculté des sciences de Lille et à l'Institut industriel du Nord.

Cet Institut, fondé en 1872, succède à l'École des arts industriels et des mines. Créée en 1852, en même temps que la Faculté des sciences, cette École a elle-même succédé à des cours

---

[79] Sur Boussinesq, on pourra lire MANGIN Louis, « Nécrologie : Joseph Boussinesq », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, t. 188, 1929, p. 589-591 et BOIS Pierre-Antoine et VERDIER Norbert, *Joseph Boussinesq (1842-1929) : de Gap à Lille ou de l'élève au savant technicien*, http://cnriut09.univ-lille1.fr/articles/Articles/Fulltext/260a.pdf , consulté le 29/08/17.

municipaux de sciences appliquées à l'industrie. Des relations s'établissent dès le départ entre l'École et la Faculté dont Louis Pasteur est le doyen. Boussinesq est le premier titulaire de la chaire de calcul différentiel et intégral créée en 1874.

Il publie en 1883 un *Cours d'analyse infinitésimale de l'Institut industriel du Nord*. Cet ouvrage lithographié de près de six cents pages, découpé en 35 leçons suivies d'un « Appendice » est, selon une indication de l'auteur fournie en note de bas de page, rédigé d'après les notes prises en 1879 par ses élèves. La première phrase du livre montre qu'il s'adresse à des élèves qui ont suivi le cours de mathématiques spéciales, Boussinesq faisant appel aux connaissances acquises dans ce cours à propos des fonctions dérivables. En 1887, Boussinesq, alors professeur de mécanique physique à la Faculté des sciences de Paris, fera paraître une nouvelle version chez Gauthier-Villars intitulée simplement *Cours d'analyse infinitésimale*. Il reviendra dans l' « Avant-propos » sur les objectifs de la version de 1883. Bien que rétrospective, cette présentation mérite d'être signalée. Il annonce que le but de cet ouvrage était « essentiellement pratique, c'est-à-dire relatif aux objets et aux phénomènes de l'ordre réel qu'il s'agissait seulement d'apprendre à se représenter d'une manière précise », qu'il avait « fait la plus grande place aux démonstrations intuitives », préservant ainsi des « fausses abstractions, des hypothèses trop étroites »[80].

Après avoir rappelé les résultats essentiels sur la notion de dérivée, Boussinesq définit dans la première leçon un infiniment petit comme Cauchy, définition qu'il complète par les considérations suivantes : « on […] désigne ainsi [des quantités très petites que l'on fait tendre vers zéro] non en raison de leur valeur présente (puisqu'elles sont actuellement finies), mais en raison de ce qu'on veut qu'elles deviennent »[81]. Il énonce ensuite le « principe général du calcul des infiniment petits » : « dans tout calcul, un infiniment petit peut être remplacé par tout autre qui a avec lui un rapport tendant vers l'unité »[82]. Ce qui ressemble à une généralisation du *principe substitution* de Duhamel n'est démontré que pour des calculs de rapports et de sommes d'infiniment petit. Il n'existe en effet, selon Boussinesq, que ces deux

[80] BOUSSINESQ Joseph, *Cours d'analyse infinitésimale*, Paris, Gauthier-Villars, 1887, p. V. On verra aussi sur les conceptions de Boussinesq ROMERO Ricardo, *La philosophie naturelle mécaniste de Joseph Boussines (1842-1929*), Thèse de doctorat, Université de Lille, 1999.
[81] BOUSSINESQ Joseph, *Cours d'analyse infinitésimale de l'Institut industriel du Nord*, Lille, Danet, 1883, p. 5. Les mots soulignés le sont dans le cours lithographié.
[82] *Ibid.*, p. 6.

sortes de calculs « susceptibles de conduire à des résultats finis, utilisables, même à la limite »[83].

La différentielle d'une fonction est ainsi définie : dans l'accroissement de la fonction, $\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon\Delta x$, « en faisant tendre Δx vers zéro avec l'intention de ne considérer que les limites des résultats », Δy et Δx prennent le nom de différentielle, se représentent par la lettre d, et

> comme $f'(x)$ se trouve en général être fini et que ε tend vers zéro, le terme $\varepsilon\Delta x$ est d'un ordre de petitesse supérieur à celui de $f'(x)\Delta x$; il disparaîtra à la limite, où l'on aura les mêmes résultats en supprimant ce terme qu'en ne le supprimant pas. Donc $dy = f'(x)dx$.[84]

Cette justification de l'emploi de $dy = f'(x)dx$ comme différentielle de la fonction est parachevée par l'explication suivante :

> En d'autres termes, dès que l'on remplace la lettre Δ par la lettre $\underline{d}$, ou les mots différence finie par le mot différentielle, on entend exprimer qu'on a l'intention de ne calculer que des résultats limites, c'est-à-dire de ne faire savoir l'expression cherchée de dy à divers calculs que pour annuler finalement toutes les différentielles telles que dx et dy dans les résultats. Donc on a le droit de supprimer devant le terme $f'(x)dx$ le terme infiniment plus petit εdx ; vu que l'erreur relative ainsi commise, décroissant jusqu'à zéro en même temps que dx, devient nulle au moment important qui est celui où l'on atteint le but. […] En réalité une différentielle ne se distingue pas actuellement d'une différence finie très petite, elle n'en diffère que par l'intention où l'on est de la faire tendre vers zéro et de ne considérer que les limites vers lesquelles tendront alors les résultats des calculs : c'est cette intention qui permet de supprimer sans erreur le terme εdx. [85]

Si l'héritage de Duhamel est manifeste dans l'énoncé du *principe de substitution des infiniment petits*, il l'est beaucoup moins dans cette définition de la différentielle. Sans doute pouvons-nous rattacher, avec cette justification, Boussinesq à Euler pour qui les infiniment petits étaient des zéros absolus. Mais les travaux de physique de Boussinesq, son « sens merveilleux des approximations »[86] qui lui a permis d'obtenir d'importants résultats en hydrodynamique

[83] *Ibid.*, p. 6. Les mots « même à la limite » ont été soulignés par Boussinesq. Il en est de même pour les mots soulignés dans les citations suivantes.
[84] *Ibid.*, p. 12.
[85] *Ibid.*, p. 13.
[86] MANGIN Louis, *op. cit.*, p. 590.

et hydraulique, expliquent tout aussi certainement la présence de la notion d'erreur relative dans cette justification.

Nous retrouvons cependant la *méthode infinitésimale de Duhamel* lorsqu'il établit plus loin que la limite du rapport d'un arc de courbe à sa corde est l'unité. La démonstration utilise la méthode qui permet à Duhamel de démontrer son principe fondamental.

Dans la suite du cours, Boussinesq emploie systématiquement la notation différentielle. Mais, pour les fonctions d'une variable, il s'agit autant d'un calcul sur les fonctions dérivées employant cette notation que d'un calcul de différentielles.

Nous terminerons en montrant son emploi de la méthode infinitésimale pour « construire par la pensée » une primitive continue pour toute « fonction finie et continue (ou ne présentant du moins que des discontinuités accidentelles) »[87] (figure 5). Il part d'une valeur α de la variable, appelée valeur initiale, qui lui donne en abscisse le point A tel que $\alpha = OA$. Il considère le point d'abscisse α et d'ordonnée y quelconque, et construit une courbe dont l'ordonnée, grandit ou diminue, « à chaque instant ou à partir de chaque valeur de x de son abscisse, de quantités dy égales au produit de la valeur actuelle de la fonction $f(x)$ par le transport infiniment petit dx de l'ordonnée survenu aussitôt après »[88]. Il conclut que « la manière même dont [la courbe] a été décrite […] montre qu'on aura, tout le long de la courbe, $dy = f(x)dx$, ou $y' = f(x)$ »[89]. Cette conclusion sera identique pour n'importe quelle valeur initiale de y.

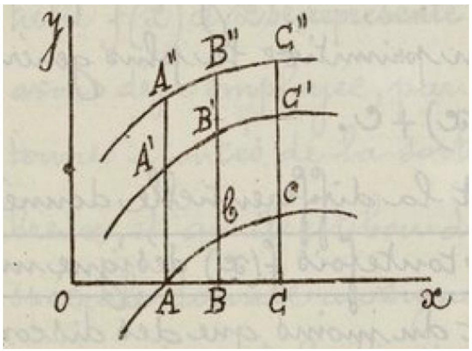


Figure 12: illustration de la démonstration de l'existence d'une primitive dans le *Cours d'analyse infinitésimale* de Boussinesq

[87] BOUSSINESQ Joseph, *op. cit.*, p. 274.
[88] *Ibid.*, p. 273.
[89] *Ibid.*, p. 274.

Cet emploi de la méthode infinitésimale est caractéristique des démonstrations géométriques, et sans doute aussi de la conception de la rigueur de Boussinesq pour qui les mathématiques étaient une « science du réel »[90]. Nous pouvons aussi nous demander si la conception des infiniment petits qui s'exprime parce « transport infiniment petit dx » n'est pas plus proche des conceptions leibniziennes que de celle de Cauchy.

3 – 4 Le *Cours d'analyse* de Collignon pour l'Externat des ponts et chaussées (1877)

En 1851, un décret ouvre à un public plus large l'École des ponts et chaussées qui n'était jusqu'alors qu'une école d'application de l'École polytechnique. Des élèves, qualifiés d'externes, français ou étrangers, sont admis. Leur niveau se révélant insuffisant, il est créé en 1875 une École préparatoire à l'externat des ponts et chaussées. Collignon est chargé des cours d'analyse et de mécanique[91]. Il occupera ce poste jusqu'en 1879, date à laquelle il devient Inspecteur des ponts et chaussées.

Polytechnicien de la promotion de 1849, Sturm a été son professeur d'analyse. Ingénieur des ponts et chaussées, il travaille en France sur la dérivation des eaux de la Somme vers Paris et participe à la construction de voies ferrées en Russie. Il devient répétiteur de mécanique à l'École polytechnique en 1863, puis professeur en 1873, enseignant également à l'École des ponts et chaussées où il est nommé professeur adjoint en 1866. Il est l'auteur de plusieurs ouvrages d'enseignement de la mécanique, dont un *Cours élémentaire de mécanique* destiné à l'enseignement spécial en 1868. Nous reviendrons plus loin sur cet enseignement secondaire sans grec ni latin destiné à former des techniciens, fondé en 1865 par Victor Cousin, alors ministre de l'Instruction publique. Collignon publie également en 1873 un *Traité de mécanique* adressé à un très large public, puisqu'il vise « les élèves des classes supérieures de mathématiques dans les lycées, […] des facultés des sciences, de l'École polytechnique et des autres écoles spéciales »[92]. Membre fondateur en 1872 de l'Association française pour l'avancement des sciences, Collignon est aussi membre de la Société philomatique de Paris.

---

[90] Nous reprenons l'expression à ZERNER Martin, *op. cit.*, p. 49.

[91] Sur Collignon, voir la notice Collignon, *Romain Charles Edouard (X 1849 : 1831-1913)*, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique, https://bibli-aleph.polytechnique.fr/F/QPAYHLI1RN7XAU9GIB8QQG3Y95KFS41TLKKVTD1RPQJ8IYQNLS-27387?func=full-set-set&set_number=000016&set_entry=000011&format=999 , consulté le 01/09/2017.

[92] COLLIGNON Édouard, *Traité de mécanique*, t. 1, Paris, Hachette, 1873, p. I.

En 1877 il publie un *Cours d'analyse de l'École préparatoire à l'externat de l'École des Ponts et Chaussées*. Cet ouvrage d'un peu plus de 500 pages reprend à peu près le programme de première année d'analyse de l'École polytechnique. Avant de nous intéresser à la méthode infinitésimale dans cet ouvrage, nous allons nous arrêter sur la notion de fonction proposée par Collignon. Dans son « Introduction », elle est définie à l'aide d'une citation de Lagrange tirée des *Leçons sur le calcul des fonctions* qui reprend la seconde définition d'Euler. Pour illustrer cette définition Collignon propose des exemples d'expressions analytiques, algébriques ou transcendantes. Mais, par la suite, il présente non seulement la fonction de Dirichlet mais aussi la courbe obtenue comme « contour-limite d'une série de dents de scie, infiniment petites »[93]. Cette courbe est construite à partir d'un triangle ABC. On considère d'abord le contour BDFEC en prenant les milieux des segments BA et AC, puis le contour BHIKFGMLC avec les milieux de BD, DF, FE, EC. En poursuivant indéfiniment, on obtiendra « un contour en dents de scie imperceptible, qui se confondra avec la droite BC, tout en ayant un

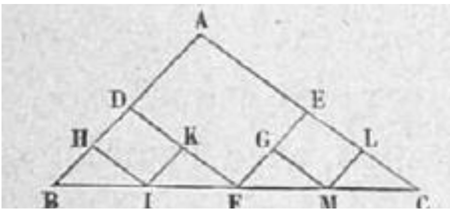


Figure 13: le "contour en dents de scie" dans le *Cours d'analyse* de Collignon

développement égal à AB + AC »[94].

Même si Collignon conclut : « nous ne nous occuperons pas de ces sortes de fonctions exceptionnelles, qui sont pour ainsi dire douées d'une discontinuité continue, et qui ne sont d'ailleurs l'expression d'aucune loi naturelle connue »[95], il convient de souligner l'attention portée par Collignon à ces fonctions discontinues dans un cours d'analyse qui correspond à celui de première année de l'École polytechnique. Nous ne l'avons pas observé dans les cours de l'École polytechnique de cette même époque.

Collignon aborde la méthode infinitésimale par la définition de Cauchy d'un infiniment petit et des ordres d'infiniment petits. La géométrie élémentaire lui fournit des exemples

[93] COLLIGNON Édouard, *Cours d'analyse de l'École préparatoire à l'externat de l'École des Ponts et Chaussées*, Paris, Dunod, 1877, p. 8.
[94] *Ibid.*, p. 8.
[95] *Ibid.*, p. 8.

d'infiniment petits du premier et du deuxième ordre, et l'occasion d'une substitution d'infiniment petits dans un rapport, substitution dont il affirme qu'elle est « légitime, pourvu qu'elle porte sur des infiniment petits du même ordre , et que la limite de leur rapport soit égale à l'unité »[96]. Il ne précise cependant pas si cette légitimité s'arrête au rapport ou si elle concerne les sommes. Collignon n'énonce pas le *principe de substitution* de Duhamel. Il fournit ce qu'il nomme une « règle générale » : si dans un problème, ou h désigne un infiniment petit principal, on est conduit à l'équation :

$$A + Bh + Ch^2 + \cdots = A' + B'h + C'h^2 + \cdots$$

alors, on a :

$$A = A', B = B', C = C', \dots$$

Cette règle générale que Collignon applique ensuite à la recherche de la tangente à un cercle ne joue cependant pas le rôle d'un principe fondamental. Elle n'est pas invoquée pour justifier l'emploi de la différentielle, qu'il définit comme Lacroix. Elle ne l'est pas non plus pour le calcul de la différentielle de l'aire d'une courbe ou pour la définition de l'intégrale, qui « représente généralement l'aire d'une courbe »[97]. La première est obtenue en encadrant l'accroissement de l'aire entre deux rectangles, ce qui ne nécessite pas de substitution d'infiniment petits, même si elle entrait ici dans le cas qu'il a désigné comme légitime.

Il calcule l'intégrale par encadrement de l'aire sous la courbe entre des sommes d'aires de rectangles intérieurs ou extérieurs. La démonstration n'est fournie que dans le cas où l'intervalle d'intégration est partagé en parties égales, l'indépendance du choix de la partition étant signalée de la façon suivante : « on arriverait à la même conclusion si dx, au lieu d'être constant, recevait des valeurs variables infiniment petites, c'est-à-dire tendant toutes à la fois vers zéro »[98]. La formulation de cette généralisation fait bien sûr penser au *principe de substitution* de Duhamel, mais ce n'est pas la méthode de substitution des infiniment petits que Collignon adopte dans sa démonstration.

Enfin précisons que le *Cours d'analyse* de Collignon est aussi un cours où la notion de différentielle est essentielle : les théorèmes usuels sur les fonctions dérivées sont déduits des

---

[96] *Ibid.*, p. 12.
[97] *Ibid.*, p. 313.
[98] *Ibid.*, p. 313.

théorèmes sur la différentiation de ces fonctions et la différentielle est privilégiée dans les calculs.

3 – 5 Le *Cours de calcul infinitésimal* de Houël à la Faculté des sciences de Bordeaux (1872-1878)

Jules Houël a été l'élève de Duhamel à l'École normale supérieure de 1843 à 1846[99]. Après avoir enseigné en lycée, il obtient un doctorat en 1855 et est nommé à la chaire de mathématiques pures à la Faculté des sciences de Bordeaux en 1859. En 1870 il devient avec Gaston Darboux, alors jeune mathématicien prometteur, rédacteur du *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques* (*BSM*)*.* Ce journal, fondé sous la direction de la Commission des Hautes Études présidée par Michel Chasles, avait pour but de diffuser les nouvelles idées mathématiques auprès des mathématiciens français[100].

Houël publie en 1872 un *Cours de calcul infinitésimal*, d'après ses leçons à la Faculté des sciences de Bordeaux. Nous n'avons pas pu consulter la première version de ce cours lithographié, éditée probablement à un nombre restreint d'exemplaires, mais la recension que publient, en 1873, les *NAM*[101], en fournit le plan. Le « Calcul infinitésimal » débute par les sections suivantes : « Généralité. Principe des limites. Infiniment petits, infiniment grands. Principes fondamentaux de la substitution des infiniment petits ». L'article, non signé, précise en outre que Houël adopte le choix de Duhamel dans son *Cours d'analyse* de 1841 pour la différentielle : la différentielle est l'accroissement infiniment petit de la fonction correspondant à un accroissement infiniment petit de la variable.

La préface du *Cours de calcul infinitésimal* publié en 1878 affirme clairement l'héritage de Duhamel. Houël indique que Duhamel est le premier à avoir « formulé nettement le principe qui identifie ces méthodes [limites et infiniment petits], si diverses qu'elles soient en apparence »[102]. Il appelle « *la méthode des infiniment petits* ou *méthode des limites* », la

---

[99] Sur Houël, voir PLANTADE François, « Comment Jules Houël a rédigé la partie « Les fonctions elliptiques » de son cours de Calcul infinitésimal avec l'aide de Gösta Mittag-Leffler », dans Évelyne BARBIN et Marc MOYON (dir.), *Les ouvrages de mathématiques dans l'Histoire. Entre recherche, enseignement et culture*, Limoges, Presses Universitaires de Limoges, 2013, p. 173-185.

[100] Voir à propos de ce journal, le chapitre 5, « Darboux rédacteur : la volonté du « père » Chasles » dans CROIZAT Barnabé, *Gaston Darboux : naissance d'un mathématicien, genèse d'un professeur, chronique d'un rédacteur*, thèse de doctorat, Université de Sciences et Technologie de Lille, 2016.

[101] « Cours de calcul infinitésimal professé à la Faculté des Sciences de Bordeaux par Jules Houël, 1871-1872 », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, *2e série*, t. 12, 1873, p. 49-53.

[102] Houël Jules, *Cours de calcul infinitésimal*, t. I, Paris, Gauthier-Villars, 1878, p VIII.

méthode de Cauchy et Duhamel. Il réaffirme le choix adopté dans le cours de 1872, de définir la différentielle d'une fonction comme l'accroissement infiniment petit de la fonction correspondant à un accroissement infiniment petit dx de la variable, et le justifie comme un refus « d'artifices, qui pouvaient avoir leur raison d'être à une époque où l'on mettait encore en doute la légitimité de la méthode infinitésimale, […] aujourd'hui devenus superflus »[103]. Mais, poursuit-il, « si cet accroissement doit figurer dans la recherche d'une limite de rapport ou de somme, on peut, sans changer le résultat cherché, altérer la quantité dy d'une fraction elle-même infiniment petite »[104].

Cet héritage revendiqué est en effet très présent dans le manuel. Le premier chapitre qui traite du calcul différentiel, est intitulé : « Des fonctions et de la continuité – Infiniment petits et infiniment grands – Limites – Substitution des infiniment petits ». Le texte définit un infiniment petit comme Cauchy et les *théorèmes de substitution* sont présentés comme des principes fondamentaux. Houël démontre d'abord celui sur les rapports, la démonstration du théorème sur la substitution dans les sommes s'inspirant du *lemme de Liouville*. Les différentielles sont « les différences infiniment petites entre deux états successifs d'une variable »[105]. Le premier théorème permet de justifier que pour « le calcul de la dérivée y' d'une fonction y, on peut se contenter de connaître, au lieu de la différentielle dy, sa partie principale $y'dx$ »[106]. Le second principe lui permet d'affirmer que, dans le calcul de l'intégrale indéfinie, « on peut substituer, sans changer la limite de la somme, les accroissements correspondants $f'(x)dx$ [107]».

Il importe cependant de préciser que l'ouvrage de Houël ne se caractérise pas par sa seule fidélité à la *méthode infinitésimale de Duhamel*. La préface revendique aussi « toute la rigueur que l'on rencontre dans les récents travaux sur ce sujet », faisant référence « au Traité de M. J.-A. Serret » et « aux précieux conseils de MM. Darboux[108] et H.-A. Schwartz »[109]. Nous reviendrons dans le prochain chapitre sur cette question des nouveaux fondements de

---

103 *Ibid.*, p. IX.
104 *Ibid.*, p. IX.
105 *Ibid.*, p. 154.
106 *Ibid.*, p. 157.
107 *Ibid.*, p. 165.
108 Sur le rôle de Darboux dans l'élaboration de cette deuxième édition, on pourra lire GISPERT Hélène, « Principes de l'analyse chez Darboux et Houël (1870-1880) : textes et contextes », *Revue d'Histoire des Sciences*, N° 43, 1990, p. 181-220.
109 *Ibid.*, p. VIII.

l'analyse qui s'élaborent à cette époque pour ne citer ici que quelques-uns des apports de Houël qui, dans cet ouvrage, montrent à la fois sa proximité avec l'enseignement de Duhamel et son souhait d'être au plus proche des théories les plus récentes.

Le « Livre premier, Principes fondamentaux du calcul infinitésimal » est précédé d'une « Introduction en trois chapitres ». Le chapitre premier est intitulé « Considérations générales – Notions sur le calcul des opérations ». Houël y affirme que

> les mathématiques ne se bornent pas à la combinaison des lois fournies par l'observation du monde réel [mais] devancent souvent l'observation et, entraînées par l'analogie et le besoin de généraliser, elles prennent pour objet d'étude des hypothèses dont la réalité n'a pas encore offert d'application.[110]

Il développe ensuite une théorie des opérations inspirée des travaux des mathématiciens allemands Hermann Hankel et Hermann Grassmann. Ceci l'amène, dans le chapitre suivant, à énoncer les propriétés des opérations élémentaires de l'arithmétique, puis à généraliser la notion de nombre, un nombre entier étant la « loi de formation » des quantités discrètes au moyen de leurs éléments. Mais, si « la seule hypothèse que la théorie des quantités discrètes puisse emprunter à l'expérience, et qui comporte un certain arbitraire, est celle de l'égalité des diverses unité »[111], l'introduction des nombres incommensurables nécessite la notion de « grandeur continue, d'une distance rectiligne par exemple »[112]. Cette introduction des nombres incommensurables se rapproche de celle de Duhamel telle que nous l'avons déjà vue au chapitre 2, et sur laquelle nous reviendrons dans le prochain chapitre.

Notons aussi la précision apportée à définition d'un infiniment petit, après qu'il eut donné la définition de Cauchy : « une variable ε est dite infiniment petite lorsque, prise en valeur absolue, elle peut satisfaire à toute inégalité de la forme $\varepsilon < k$ »[113]. De même, une variable Ω est infiniment grande si elle peut satisfaire, en valeur absolue, à toute inégalité de la forme $\Omega > k$. La définition d'une fonction continue est, elle aussi, d'abord exprimée en termes d'infiniment petits avant de l'être en ε,η.

Enfin, là où Duhamel démontrait la dérivabilité d'une fonction continue monotone, Houël affirme : « la continuité de la fonction n'est pas […] une condition suffisante de l'existence

---

[110] *Ibid.*, p. 3.
[111] *Ibid.*, p. 18.
[112] *Ibid.*, p. 22.
[113] *Ibid.*, p. 105.

d'une dérivée, et l'on peut exprimer par les signes de l'Analyse une infinité de fonctions continues n'ayant pas de dérivée »[114]. Notons cependant que Houël s'appuie toujours sur une image géométrique ou cinématique pour exprimer la continuité d'une fonction : toute fonction continue d'une variable « peut être représentée par l'ordonnée d'une courbe plane »[115], ou comme « exprimant l'espace parcouru pendant […] par un point mobile sur une droite donnée »[116].

Le calcul infinitésimal de Houël, s'il doit beaucoup à l'enseignement de Duhamel, n'est pas simplement une nouvelle version d'un cours qu'il se serait approprié. L'insertion de Houël dans un réseau de mathématiciens européens[117], en particulier allemands, son rôle au *BSM* et la proximité qui en découle avec Darboux en font un ouvrage actualisé, où le respect de l'enseignement d'un maître est consolidé par les conceptions des fondements de l'analyse établies à la fin des années 1870. Soulignons aussi chez Houël l'absence d'une inscription historique de la méthode infinitésimale. Sans doute s'accommodait-elle moins bien des conceptions de l'auteur pour qui les mathématiques prennent moins leur source dans l'observation du monde réel que dans l'étude d'hypothèses fournies par l'analogie et le besoin de généraliser.

3 – 6 Conclusion

Si, comme nous l'avons vu pour l'École polytechnique, l'enseignement du calcul différentiel à l'extérieur de cette école porte l'empreinte des conceptions de Duhamel, le tableau que nous dessinent les cinq manuels analysés est beaucoup plus contrasté.

Nous y retrouvons la même importance de l'*habitus*. Serret et Houël qui donnent une place première à la notion d'infiniment petit et aux théorèmes de substitution sont d'anciens élèves de Duhamel. Boussinesq fait lui aussi dans sa présentation une part essentielle aux théorèmes de substitution, mais les développements de l'ouvrage semblent plus reliés à ses recherches en physique mathématique qu'à la *méthode infinitésimale de Duhamel*. L'utilisation des

[114] *Ibid.*, p. 143.
[115] *Ibid.*, p. 140.
[116] *Ibid.*, p. 141.
[117] On pourra lire à ce sujet PLANTADE François, « Comment Jules Houël a rédigé la partie « Les fonctions elliptiques » de son cours de Calcul infinitésimal avec l'aide de Gösta Mittag-Leffler », dans Évelyne BARBIN et Marc MOYON (dir.), *Les ouvrages de mathématiques dans l'Histoire. Entre recherche, enseignement et culture*, Limoges, Presses Universitaires de Limoges, 2013, p. 173-185.

infiniment petits par Collignon s'apparente à l'emploi modéré qu'en faisait Sturm dont il avait suivi les cours à l'École polytechnique. Quant à Sonnet, on peut retrouver les conceptions pédagogiques de Lacroix dans son refus d'un « rigorisme » et la présentation qu'il fait des notions. Si, parmi ces cinq auteurs, il est le plus éloigné de la *méthode infinitésimale de Duhamel*, l'idée de substitution des infiniment petits n'apparaissant jamais dans son ouvrage, il cite cependant ce dernier comme l'une de ses références principales. Cela nous semble une nouvelle marque de la diffusion des conceptions de Duhamel, l'essentiel de cette diffusion se faisant malgré tout par les positions qu'occupent ses anciens élèves à des postes clefs de l'enseignement supérieur, et par les manuels qu'ils publient.

4 – La méthode infinitésimale dans le *Traité d'algèbre* de Laurent

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, le calcul infinitésimal et le calcul différentiel étaient indiscutablement enseignés dans certaines classes préparatoires avant la réforme des programmes de 1851. L'introduction de la théorie des dérivées en classe de mathématiques spéciales semble avoir mis fin à cet enseignement des notions d'infiniment et de différentielle.

Dans les *NAM* nous ne trouvons plus, dans des articles de Terquem, que quelques allusions qui engagent à aller plus loin dans les programmes en introduisant un enseignement du calcul différentiel dans le secondaire. Ces articles n'ont cependant pas la même intensité que dans la décennie qui précédait les programmes de 1851.

Nous avons aussi relevé dans les *NAM*, en 1857, la recension du *Cours d'analyse de l'École polytechnique* de Charles Sturm revu par Eugène Prouhet. Émile Brassine, professeur à l'École d'artillerie de Toulouse y écrit :

> En le parcourant, nous nous sommes souvent demandé si le moment n'était pas venu d'introduire dans les éléments la méthode et la notation différentielle dans ce qu'elles ont de plus simple. Par ce moyen on supprimerait une foule de procédés indirects, particuliers et souvent difficiles, dont on fait usage pour la question des maxima, des tangentes, des quadratures […].[118]

La dernière phrase indique clairement que Brassine souhaite une introduction du calcul différentiel en mathématiques élémentaires puisque la théorie des dérivées est, à cette époque, déjà employée en classe de mathématiques spéciales pour les recherches d'extrema

[118] BRASSINE Émile, « Cours d'Analyse de l'École polytechnique par M. *Sturm* », *Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques* dans *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 16, 1857, p. 61.

et de tangentes. Brassine va même plus loin puisqu'il espère une introduction du calcul intégral.

Nous n'avons pas retrouvé d'autres articles allant dans ce sens après le décès de Terquem, en 1862. Ceci correspond, au moins pour les années qui suivent immédiatement ce décès, à ce qui paraît être un changement de politique éditoriale. Prouhet, répétiteur d'analyse à l'École polytechnique, remplace Terquem à la rédaction. La revue débute l'année 1862 par un « Avertissement des Rédacteurs » qui précise :

> Les Nouvelles Annales de Mathématiques s'adressent, comme l'indique leur titre, aux jeunes gens qui veulent entrer à l'École Polytechnique ou à l'École Normale ; elles s'adressent aussi aux Professeurs, puisque tous les travaux qui tendent à perfectionner l'enseignement des Mathématiques spéciales, simplification des théories, développements et applications des diverses méthodes, divulgation des découvertes récentes, sont de leur ressort. En général, on n'admettra point d'articles relatifs au calcul infinitésimal, à moins qu'ils ne soient fort courts et d'une nature suffisamment élémentaire.[119]

À l'exception du *Traité d'algèbre* de Laurent, les manuels destinés à la classe de mathématiques spéciales des différents auteurs analysés précédemment ne portent pas trace d'emploi des infiniment petits ni de la notation différentielle. Nous n'avons trouvé qu'une remarque qui évoque le calcul différentiel, chez Catalan. Une note de bas de page explique, à propos de la dérivation des fonctions implicites, que la généralisation de la théorie « ne peut être exposée commodément qu'au moyen du calcul différentiel »[120]. Cette absence dans tous ces manuels de référence ne rend que plus que remarquable l'ouvrage de Laurent qui, rappelons-le, était répétiteur d'analyse à l'École polytechnique et préparait des élèves au concours d'admission dans des institutions privées.

4 – 1 Une approche du calcul infinitésimal dans la première édition (1867)

Dans la première édition du *Traité d'algèbre*, Laurent donne la définition de Cauchy d'une quantité infiniment petite. Elle est placée dans le chapitre V de la première partie intitulé « Équations du premier degré », à propos des solutions d'équations qui sont de la forme $\frac{m}{0}$. Ce symbole, explique-t-il, « représente l'infini », mais « cette locution ne présente aucun sens si on la prend à la lettre, et la solution $\frac{m}{0}$ ne sera censée représenter l'infini que si au zéro on

---

119 GERONO Camille et PROUHET Eugène, « Avertissement des Rédacteurs », *Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série*, t. 1, 1862, p. 1.

120 CATALAN Eugène, *Manuel des candidats à l'École polytechnique*, tome I, Paris, Mallet-Bachelier, 1857, p. 126.

substitue une quantité variable et infiniment petite »[121]. Il illustre son propos en prenant l'exemple de deux « courriers » A et B, séparés initialement par une distance l, marchant dans le même sens et à la même vitesse, dont on cherche à déterminer « l'époque » de la rencontre. En notant a et b leurs vitesses respectives, il propose, non de « faire brusquement $a = b$ » dans la relation $t = \frac{l}{a-b}$, mais de fixer a et de faire tendre b vers a.

Au tout début de la seconde partie il indique que, dans l'analyse algébrique, « les théorèmes sur les limites, la notion de l'infini et de l'infiniment petit reviennent à chaque instant et constituent le véritable fondement de la science que nous allons étudier »[122]. Il redonne la définition d'un infiniment petit et, par la suite, il emploie régulièrement cette notion dans l'expression « accroissement infiniment petit ». Elle ne fait l'objet d'aucune notation.

Au début du chapitre sur la théorie des dérivées, il signale que les notations lagrangiennes « sont souvent incommodes ». Il indique les notations Dy, D^2y, …, « utilisées par Kramp, Arbogast et Cauchy » et poursuit : « Leibnitz et Newton ont employé d'autres notations dont nous n'avons pas à parler ici »[123]. Mais il ne s'agit pas pour lui de regretter l'emploi des notations différentielles en classe de mathématiques spéciales car, poursuit-il, « les notations de Lagrange […] sont plus simples dans l'exposition du calcul des dérivées »[124].

Laurent n'aborde pas non plus la notion d'ordre d'infiniment petit ni la notion de différentielle. Nous pouvons sans doute lire dans cette première édition la volonté pédagogique de proposer une première approche en algèbre d'une notion déjà employée en géométrie élémentaire. En 1865, le programme de géométrie de la classe de rhétorique[125] indique en effet : « Mesure du volume de la sphère considérée comme somme d'une infinité de pyramides ayant pour bases des polygones infiniment petits, et le rayon pour hauteur »[126].

---

[121] LAURENT Hermann, *Traité d'Algèbre*, Paris, Gauthier-Villars, 1867, p. 127.
[122] *Ibid.*, p. 209.
[123] *Ibid.*, p. 473.
[124] *Ibid.*, p. 473.
[125] La classe de rhétorique correspond à la classe de 1^e^ actuelle dans l'enseignement secondaire. Dans le plan d'études de 1865 qui a succédé à la réforme dite de la bifurcation, à l'issue de la classe de rhétorique, après avoir passé la première partie du baccalauréat, les élèves pouvaient choisir entre la classe de philosophie qui préparait au baccalauréat ès lettres et la classe de mathématiques élémentaires qui préparait au baccalauréat ès sciences. Voir *infra*, p. 470.
[126] BELHOSTE Bruno, *Les Sciences dans l'Enseignement secondaire français, Textes officiels. Tome I: 1789–1914*, Paris, Institut national de recherche pédagogique, 1995, p. 399.

4 – 2 Des deuxième et troisième éditions qui abordent franchement le calcul infinitésimal (1875-1881)

Laurent va beaucoup plus loin dans la deuxième édition de son *Traité d'algèbre*, en 1875. Il propose, dans le chapitre « Théorie des fonctions dérivées », une introduction d'une trentaine de pages au calcul différentiel ainsi justifiée dans la préface: « J'ai cru qu'il serait agréable à un certain nombre d'élèves de connaître la notation différentielle de Leibniz, et j'ai été naturellement conduit à compléter la théorie des dérivées par les éléments du Calcul différentiel »[127]. Cette introduction se situe entre le théorème de Taylor et l'étude des formes indéterminées $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty$, etc. Les pages sont numérotées de 500^7 à 500^{40}. La pagination reprend ensuite normalement. La décision d'insérer ce supplément semble donc avoir été prise *in extremis*[128].

Après avoir abordé la notion d'infiniment comme dans la première édition, Laurent définit dans ces pages supplémentaires les ordres d'infiniment petits. Il démontre ensuite le « premier principe » suivant :

> Quand deux infiniment petits α et β ont pour différence un infiniment petit d'un ordre supérieur à l'un d'eux, la limite de leur rapport est 1, et vice versa, si la limite de $\frac{\beta}{\alpha}$ est 1, la différence entre α et β est d'un ordre supérieur à α et à β.[129]

Les *théorèmes de substitution* de Duhamel sont alors énoncés en substituant, à un infiniment petit, un infiniment petit dont la différence au premier est d'un ordre supérieur. Le théorème de substitution dans une somme est démontré comme chez Duhamel. Le calcul de la dérivée de la fonction sinus illustre l'intérêt du premier principe. Aucun exemple n'illustre l'intérêt du second.

Après une brève introduction aux différences finies, Laurent introduit l'emploi de la différentielle dans des termes semblables à ceux de Duhamel : dans l'accroissement de la fonction, $\Delta f(x) = \Delta x f'(x) + \varepsilon\Delta x$, « le produit $\Delta x f'(x)$ peut remplacer $\Delta f(x)$ en vertu de nos principes dans la recherche de limites de rapports ou de sommes »[130]. Et, si le passage de la notation $df(x) = f'(x)\Delta x$ à la notation $df(x) = f'(x)dx$ se fait comme chez Lacroix, la

---

[127] LAURENT Hermann, *Traité d'Algèbre*, 2e éd., Paris, Gauthier-Villars, 1875, p. XV.

[128] Il faut noter, dans cette même édition, l'insertion de pages supplémentaires numérotées de 432^4 à 432^{17}, puis de 436^1 à 436^4 dans le chapitre intitulé « Théorie de l'élimination ».

[129] LAURENT Hermann, *op. cit.,* p. 500^8.

[130] *Ibid.*, p. 500^{13}.

différentielle d'une fonction est pour Laurent comme pour Duhamel, « une quantité infiniment petite avec l'accroissement de la variable »[131].

Les fonctions de plusieurs variables permettent à Laurent de montrer l'avantage de la notation différentielle sur la notation « assez incommode » de Lagrange. En effet, introduire une nouvelle notion qui peut sembler aux élèves faire double emploi avec la notion de fonction dérivée nécessite d'en justifier l'intérêt. Considérant trois quantités qui varient simultanément, u, x et y, la relation $u'_x = u'_y . y'_x$ établie précédemment lui permet d'écrire : $d_x u = u'_y . y'_x d_x x$, soit $d_x u = u'_y d_x y$. Puisque $d_x x$ et $d_y y$ « sont arbitraires », on pourra toujours, poursuit Laurent, choisir $d_x x$ pour que $d_x y$ ait la valeur que l'on voudra. En conclusion, si on n'a pas, en général, $u'_x = u'_y$, on pourra toujours supposer $d_x u = d_y u$.

Laurent reprend ensuite les théorèmes usuels sur les dérivées dans le cadre des différentielles avant d'étudier le cas du changement de variable, la notion de différentielle totale et l'emploi des différentielles dans la recherche des extrema.

La dernière section concernant les différentielles, est intitulée « Quelle est l'utilité du calcul différentiel ? ». Il s'agit en fait d'une première approche du calcul intégral. Selon Laurent, le but du calcul différentiel est l'étude des phénomènes. Il permet

> d'étudier l'amplitude du phénomène dans une portion infiniment petite de son étendue, ce qui lui permet de négliger les infiniment petits d'ordre supérieur, quantités en générales très difficiles à évaluer ; en passant aux limites il fait, en général, trouver non pas les fonctions mêmes, dont la connaissance équivaut à la loi du phénomène, mais les dérivées de ces fonctions ou des relations entre ces fonctions et leurs dérivées. Alors, le rôle du Calcul différentiel est rempli, et celui du Calcul intégral commence […][132]

Laurent ne précise pas de quels phénomènes il s'agit. Nous pouvons bien sûr penser aux applications du calcul différentiel à la mécanique et à la physique, mais pas seulement. L'exemple qu'il porte témoigne de son intérêt pour les opérations financières qui s'exprimera plus tard dans l'actuariat[133] : « on donne a^{fr} pour ôter un mètre de profondeur d'eau hors d'un

[131] *Ibid.*, p. 500[13].
[132] *Ibid.*, p. 500[39].
[133] Voir *supra*, p. 302.

puits cylindre dans lequel le niveau affleure le sol. Combien devra-t-on payer pour enlever x mètres de profondeur ? »[134].

Il s'agit donc, dans cette édition de 1875, d'une introduction d'ampleur au calcul infinitésimal. Dans l'édition de 1881, elle fait l'objet d'un chapitre normalement paginé à la suite du chapitre sur la théorie des dérivées. Nous y retrouvons sensiblement les mêmes points. Il faut cependant noter une modification importante à propos des théorèmes de substitution des infiniment petits. Ne figure plus dans cette édition que le théorème sur la substitution dans un rapport, théorème qui justifie la définition de la notion de différentielle. Celui sur les sommes a disparu. Il est difficile d'interpréter cette disparition que Laurent ne commente pas. Peut-être n'a-t-il pas énoncé ce théorème car il n'aborde pas le calcul intégral. C'est en effet pour la notion d'intégrale définie que ce théorème trouve son utilité. Cependant, dans le premier tome de son *Traité d'analyse* publié en 1885, il ne fait là aussi figurer que le théorème sur la substitution dans les rapports, qu'il qualifie de « principe fondamental »[135]. Aurait-il eu des doutes sur la validité de ce théorème, ou estimait-t-il qu'il pouvait s'en passer ? Il faudra attendre 1887 pour le mathématicien belge Paul Mansion publie dans le *Résumé du cours d'analyse infinitésimale de l'Université de Gand* des exemples qui réfutent ce principe fondamental de Duhamel. Nous y reviendrons plus loin.

Notons aussi que Laurent développe la section concernant les « Avantages de la notation leibnizienne », même s'il admet un peu plus loin : « lorsque l'on considère des dérivées d'ordre supérieur, la notation différentielle perd une partie de ses avantages »[136]. La première qualité de la notation leibnizienne est, selon Laurent, d'être « expressive ». Il reprend ensuite l'argument de la deuxième édition sur l'intérêt de la notation différentielle pour les fonctions de plusieurs variables.

Et surtout, ajoute-t-il, « la notation différentielle présente […] un autre avantage sur celle des dérivées, et celui-là est immense »[137]. Il considère une équation de la forme :

$$Adx + Bdy + Cdz + Ddt = 0, \quad A, B, C, D \text{ étant finis,}$$

[134] LAURENT Hermann, *op. cit.,* p. 500[40].
[135] LAURENT Hermann, Traité d'Analyse, Tome I, *Calcul différentiel, applications analytiques et géométriques*, Paris, Gauthier-Villars, 1885, p. 121.
[136] *LAURENT Hermann, Traité d'Algèbre, tome II, 3e éd., Paris, Gauthier-Villars, 1881,* p. 236.
[137] *Ibid.*, p. 231.

obtenue en « négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur à ceux que l'on a conservés ». Cette équation est, affirme-t-il, « en vertu de la notation dont on fait usage, [...] *rigoureusement* exacte : les erreurs se sont compensées d'elles-mêmes »[138]. Il ne faut pas qu'un débutant puisse penser que le calcul différentiel est approximatif. Pour l'exonérer de ce reproche qui court depuis Berkeley, Laurent revient sur l'argument de compensation des erreurs.

4 – 3 Conclusion

Laurent n'était pas professeur de mathématiques spéciales. Qu'il ait travaillé dans des institutions privées préparatoires aux concours ne signifie pas qu'il y enseignait. Le travail de certains intervenants consistait à entraîner les élèves aux interrogations orales du concours d'admission. Au chapitre précédent, nous avons déjà signalé la singularité de son *Traité d'algèbre* à propos du programme sur les fonctions dérivées. L'introduction au calcul infinitésimal qui y figure à partir de la deuxième édition renforce cette singularité. Rien ne nous permet d'affirmer qu'elle ait servi de support à un enseignement.

Contrairement à la dérivation des fonctions implicites ou au théorème de Taylor, l'analyse des manuels permet d'affirmer que l'enseignement des notions d'infiniment petits, de différentielle et de calcul intégral ne s'est pas généralisé en mathématiques spéciales entre 1851 et 1885. Cependant, la position institutionnelle de Laurent à l'École polytechnique, son travail dans des institutions privées, et surtout le succès de ce *Traité d'algèbre* qui connait trois éditions en une quinzaine d'années sont autant d'indices qui laissent penser que cet ouvrage a été le support d'une diffusion du calcul infinitésimal auprès des élèves des classes préparatoires. Nous verrons dans la section suivante, qu'au début des années 1880, les Conseils de l'École avaient approuvé une première fois l'introduction du calcul infinitésimal au concours d'admission, sans que cela ne se traduise dans les programmes. Cela rend plus plausible l'hypothèse d'un enseignement des éléments du calcul infinitésimal dans les classes préparatoires à partir de 1880.

[138] *Ibid.*, p. 231.

5 – L'introduction de la méthode infinitésimale de Duhamel dans les programmes de 1885 du concours d'admission à l'École polytechnique

Une première tentative d'introduction du calcul infinitésimal au concours d'admission a en effet lieu en 1880. Une révision des programmes de ce concours est demandée par le Ministre de la Guerre, à l'initiative du Ministre de l'Instruction publique, Jules Ferry qui souhaite « relever le niveau des études en France »[139]. Depuis 1879 les républicains détiennent tous les leviers du pouvoir. La IIIe République est consolidée et l'enseignement scientifique est devenu une priorité pour la nouvelle majorité qui considère que la défaite militaire face à la Prusse est une victoire de la science et du système éducatif allemands. Arrivé en février au Ministère de l'Instruction publique, Ferry engage une réforme des programmes de l'enseignement secondaire sur laquelle nous reviendrons au chapitre 7.

Une commission est désignée par le Conseil d'Instruction pour répondre à la demande du Ministre de la Guerre. Y participent notamment Bertrand et Jordan. La commission propose l'introduction de la notation différentielle et des infiniment petits. En juin, les modifications sont adoptées par les Conseil de l'École sans que les procès-verbaux fassent état de discussion. Elles sont ensuite transmises au Ministère. C'est du Ministère que vient l'opposition. Le procès-verbal de la séance du 21 octobre 1880 précise en effet :

> Plusieurs membres pensent que le Ministre s'est exagéré le danger de l'introduction ou plutôt de la simple admission des démonstrations par les infiniment petits et même de la notation différentielle. Les empiètements des professeurs de mathématiques sur le cours d'analyse de l'École, signalés par M. Jordan, se font tout aussi bien avec les dérivées qu'ils pourraient se faire avec les différentielles ; ce qu'il faut obtenir c'est que les examinateurs s'en tiennent aux matières du programme.[140]

Le Ministre de la guerre est alors le général Jean-Joseph Farre, polytechnicien de la promotion de 1835[141]. Outre l'introduction de ces deux notions, le ministère craint indiscutablement une dérive dans l'enseignement en mathématiques spéciales. Ce que ne semblent pas redouter

[139] « Séance du 27 mai 1880 », *Registre du Conseil d'instruction de l'École polytechnique*, X2C 30, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.
[140] « Séance du 21 octobre 1880 », *Registre du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique*, X2C 29, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.
[141] Voir la notice « *Farre, Jean Joseph Frédéric Albert (X-1835 ; 1816-1887)* », Palaiseau, Archives de l'École polytechnique, https://bibli-aleph.polytechnique.fr/F/1TJJ46PECTC116LF54F9VARAVKHUXCB9DT14MTSUBX1GM6UFAJ-39420?func=find-b&request=farre&find_code=WPE&adjacent=N&x=0&y=0&local_base=bcxc2 , consulté le 01/09/2017.

certains membres du Conseil, à condition que les examinateurs s'en tiennent strictement au programme. Notons au passage que cette citation semble corroborer l'absence d'un enseignement généralisé du calcul infinitésimal en classe de mathématiques spéciales.

Un membre du conseil propose : « si les dérivées servent de prétexte à des développements excessifs, il faut supprimer les dérivées ou tout au moins en limiter nettement l'emploi au strict nécessaire »[142]. La discussion qui suit conclut « qu'on ne pourrait se passer des dérivées » et le Conseil, suivant le Ministère, adopte : « il sera interdit formellement aux examinateurs d'interroger sur le calcul infinitésimal »[143]. Cette nouvelle citation est plus ambigüe à propos de l'enseignement du calcul infinitésimal en classes préparatoires. Elle laisse supposer que des examinateurs d'admission ont pu le faire.

La question des infiniment petits et des différentielles revient en 1885, à l'occasion d'une question du Ministre de la guerre sur le report de 20 à 21 ans de l'âge limite des candidats à l'École polytechnique. La dépêche ministérielle demande si ce vœu émis par le Conseil de perfectionnement est lié à la difficulté des études préparatoires et si une simplification des programmes conduirait le Conseil au même avis. Il faut remarquer que cette question d'une simplification des programmes d'admission se produit au moment où le problème de la surcharge des programmes de sciences de l'enseignement secondaire classique est posé. Les programmes de 1880 ont été jugés trop lourds par les enseignants et les familles. Une réforme, sur laquelle nous reviendrons plus loin, est mise en chantier par Armand Fallières, Ministre de l'Instruction publique, avec pour objectif d'abréger ces programmes[144].

Les membres du Conseil de perfectionnement estiment que la modification des programmes d'admission doit être la conséquence d'une révision des programmes intérieurs à l'École. Cette révision est à l'ordre du jour depuis trois ans selon Mercadier, alors directeur des études. Polytechnicien de la promotion de 1851, Mercadier a été professeur de physique à l'École supérieure de télégraphie et répétiteur de physique à l'École polytechnique avant de devenir, en 1881, directeur des études de cette même École.

---

142 « Séance du 21 octobre 1880 », *Registre du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique*, X2C 29, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.
143 *Ibid.*
144 On pourra lire à ce sujet BELHOSTE Bruno, *Les Sciences dans l'Enseignement secondaire français, Textes officiels. Tome I: 1789–1914*, Paris, Institut national de recherche pédagogique, 1995, p. …

Le Conseil d’instruction, saisi du problème, nomme des commissions de révision des programmes. Pour l’analyse, les membres sont Bertrand, Jordan, Théodore Florentin Moutard, Inspecteur général des mines et examinateur de sortie, Amédée Mannheim, professeur de géométrie descriptive et Édouard Phillips, professeur de mécanique.

Cependant, durant la séance du 20 janvier 1885, le débat qui s’engage au Conseil d’instruction à l’issue du travail des commissions commence par le programme d’admission. Le rapport de Coriolis, ainsi que les propositions des Conseils de 1880, en faveur de l’introduction des éléments du calcul différentiel sont rappelés. Mercadier indique que, « dans les écoles d’arts et métiers même on est en train de remanier les programmes pour y introduire ces notions »[145]. En effet, à partir de 1880, s’est créé un réseau des écoles nationales professionnelles qui vise à relever le niveau du recrutement et des études. C’est le cas des École nationales des arts et métiers[146]. Mercadier pointe ici la volonté d’enseigner des notions de calcul infinitésimal à des élèves recrutés entre quinze et dix-sept ans. Mais comme il l’indique, ce n’est encore qu’un projet, « l’enseignement théorique » dans ces Écoles ne comportant encore que « des notions élémentaires sur les dérivées »[147]. La commission propose en conséquence

> d’introduire dans le programme d’admission ce qui, en réalité, représente les trois ou quatre premières leçons de calcul différentiel faites à l’École, en limitant bien nettement ce qu’on veut demander et en disant […] qu’il ne s’agit que des fonctions d’une seule variable.[148]

Les propositions de la commission sont adoptées par le Conseil d’instruction.

Lors de la discussion de ces propositions au Conseil de perfectionnement, quelques jours plus tard, Mercadier argumente en indiquant que cette addition au programme d’admission est « destinée à simplifier beaucoup la géométrie analytique, et à donner aux candidats des

[145] « Séance du 20 janvier 1885 », *Registre du Conseil d’instruction de l’École polytechnique*, X2C 30, Palaiseau, Archives de l’École polytechnique.

[146] Voir DAY Charles R., *Les Écoles d'arts et métiers : l'enseignement technique en France XIX^{e}-XX^{e} siècles,* trad. Jean-Pierre BARDOS, *Paris, Belin 1991.*

[147] Voir le « Décret », *Journal officiel de la République française*, 7 avril 1885, p. 1836.

[148] « Séance du 20 janvier 1885 », *Registre du Conseil d’instruction de l’École polytechnique*, X2C 30, Palaiseau, Archives de l’École polytechnique.

notions fondamentales, à la fois dans leur intérêt et dans celui de l'enseignement donné à l'école »[149]. Le Conseil de perfectionnement adopte la proposition.

Il importe en outre de signaler que ces modifications du programme d'algèbre interviennent dans le cadre de changements profonds de la totalité des programmes d'admission qui vont dans le sens de leur réduction. Ainsi l'arithmétique et la géométrie élémentaire disparaissent des notions sur lesquelles les examinateurs doivent explicitement interroger les candidats.

Le programme d'algèbre publié au journal officiel le 21 mai 1885 indique :

> Notions sur les infiniment petits. – Valeur principale d'un infiniment petit. – Condition sous laquelle deux infiniment petits peuvent être substitués l'un à l'autre dans les limites de sommes et de rapports.
> Dérivée et différentielle des fonctions d'une seule variable. – Notion de l'intégrale définie. Différentiation d'une fonction de fonction, d'une fonction composée, d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une puissance quelconque : des fonctions logarithmique, exponentielle, circulaires, d'une fonction implicite algébrique.[150]

Il s'agit donc bien de l'introduction en classe de mathématiques spéciales de la *méthode infinitésimale de Duhamel*, à l'exception cependant des références historiques. La notion d'infiniment petits, les *théorèmes de substitution des infiniment petits* sont, dans cette méthode, les outils préalables qui permettent de justifier l'emploi de la différentielle et de définir la notion d'intégrale définie. De plus, avec ce nouveau programme, la différentiation prend le pas sur la dérivation pour les fonctions d'une seule variable. Notons la mise en valeur typographique de l'expression « d'une seule variable »[151], destinée à éviter une dérive des enseignements.

Enfin, il faut remarquer une certaine timidité dans l'introduction de l'intégrale définie. Le choix de l'expression « notion de l'intégrale définie » a été mûrement pesé. Un membre de Conseil d'instruction avait proposé d'inscrire « Définition de l'intégrale définie », mais un autre avait « craint que les professeurs aillent trop loin sur ces mots »[152]. De plus, aucune propriété de

[149] « Séance du 30 janvier 1885 », *Registre du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique*, X2C 29, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.
[150] « Programme des connaissances exigées pour l'admission à l'École polytechnique », *Journal officiel de la République française*, 21 mai 1885, p. 2629.
[151] L'expression est en italiques dans le texte du *Journal officiel*.
[152] « Séance du 20 janvier 1885 », *Registre du Conseil d'instruction de l'École polytechnique*, X2C 30, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique

l'intégrale définie ni aucune application ne figure dans le programme de 1885. Le programme de géométrie analytique ne signale nulle part l'emploi de l'intégrale définie.

6 – La méthode infinitésimale de Duhamel dans les manuels de mathématiques spéciales avant et après sa remise en cause (1887-1893)

De nouvelles éditions des manuels d'algèbre de Bertrand, Charles Briot, Charles de Comberousse, Laurent et Gaston Gohierre de Longchamps sont publiées à la suite de la parution des nouveaux programmes du concours de l'École polytechnique.

En 1885, paraît la 12e édition des *Leçons d'algèbre* de Briot que nous n'avons pas pu consulter. En 1886, Gohierre de Longchamps publie un *Supplément au cours de mathématiques spéciales*. Si nous n'avons pas non plus consulté cet ouvrage, nous savons cependant qu'il définit l'intégrale définie d'une fonction continue comme l'aire sous la courbe. Ceci ressort de l'introduction de l'article intitulé « La première leçon de calcul intégral » que Gohierre de Longchamps fait paraître en 1886 dans le *Journal de mathématiques spéciales*[153].

En 1887, Laurent publie la quatrième édition de son *Traité d'algèbre*. La page de garde annonce qu'elle a été revue par J.-H. Marchand, ancien élève de l'École polytechnique. Cette édition reprend les notions de calcul différentiel de l'édition précédente. De façon surprenante, elle n'aborde pas la notion d'intégrale définie. Nous reviendrons plus en détail sur cette édition dans notre prochain chapitre.

Nous analyserons dans cette section le traitement de la méthode infinitésimale dans deux ouvrages. Le premier est le volume d'algèbre de la troisième édition du *Cours de mathématiques* de Comberousse. Le deuxième est le tome à l'usage de la classe de mathématiques spéciales de la 16e édition des *Leçons d'algèbre* de Briot, revu par Émile Lacour. Ces deux ouvrages encadrent la remise en cause par le mathématicien belge Paul Mansion du « principe fondamental » de Duhamel dans son *Résumé du cours d'analyse infinitésimale de l'Université de Gand* publié en 1887. Nous rappellerons les contre-exemples de Mansion entre les analyses des deux ouvrages.

[153] LONGCHAMPS (Gohierre de) Gaston, « La première leçon de calcul intégral», *Journal de Mathématiques spéciales,* 2e série, t. V, Paris, Delagrave, 1886, p. 3-6.

6 – 1 La méthode infinitésimale de Duhamel dans le *Cours de mathématiques* de Comberousse (1887)

Rappelons tout d'abord que ce cours n'est plus, depuis la deuxième édition destiné aux seuls candidats à l'École centrale des arts et manufactures, mais, en premier lieu, à ceux des Écoles polytechnique et normale supérieure. La publication de la troisième édition de ce cours s'étale de 1884 à 1890. Le volume d'algèbre qui paraît en 1887 est un volumineux ouvrage de près de 800 pages. Partagé en cinq « Livres », il traite uniquement de la partie du programme qui va jusqu'à la théorie des équations. Le cinquième « Livre », qui occupe près de 300 pages, est intitulé « Étude des dérivées et des différentielles ». Il commence par le chapitre : « Notions sur les infiniment petits ».

Dans son « Avertissement », Comberousse regrette que le programme d'algèbre ait, depuis 1851, établi une séparation entre les notions de dérivée et de différentielle et se réjouit que les nouveaux programmes « rompent nettement » avec les précédents. Concernant les infiniment petits, il indique que la science doit beaucoup à Duhamel qui, « remontant aux premiers principes et aux premières applications, […] a su dissiper tous les nuages »[154]. Le nom de Cauchy n'est pas mentionné.

Comberousse définit un infiniment petit dans le « Livre III » qui traite des séries. Il s'agit de la définition de Cauchy. Le premier chapitre du « Livre V » rappelle cette notion, définit la notion d'ordre d'infiniment petits, traite des opérations sur les infiniment petits et propose des exemples d'infiniment petits tirés de la géométrie et de la trigonométrie avant d'aborder les *théorèmes de substitution* de Duhamel. Démontrant successivement le théorème sur la substitution dans un rapport, puis dans une somme, il les regroupe en un « principe fondamental »énoncé de la façon suivante :

> Les limites de rapports ou de sommes d'infiniment petits, dont le nombre augmente indéfiniment, ne sont pas modifiées, lorsqu'on leur substitue d'autres quantités qui en diffèrent respectivement de quantités infiniment petites relativement à elles-mêmes. [155]

[154] COMBEROUSSE (de) Charles, *Cours de Mathématiques, Tome troisième, Algèbre supérieure, Première Partie*, 2e éd., Paris Gauthier-Villars, 1887, p. VII.
[155] *Ibid.*, p. 434.

Nous retrouvons, presque à l'identique, la formulation de Duhamel. Cependant, la démonstration du théorème sur la substitution dans une somme utilise le *lemme de Liouville*.

Comberousse conclut ce chapitre en affirmant que ces deux principes « ne sont autre chose que la Méthode Infinitésimale elle-même » et que le point de vue qui consiste à regarder une grandeur comme composée d'un nombre infiniment grand de parties infiniment petites « a été celui des anciens, et notamment d'Archimède »[156].

Dans le chapitre suivant, l'emploi de la différentielle est justifié par le principe fondamental de Duhamel. En notant α une quantité qui dépend de x et de Δx, il remarque que dans l'accroissement de la fonction : $\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha\Delta x$, en prenant Δx comme infiniment petit principal, la première partie est un infiniment petit du premier ordre, et la seconde partie un infiniment petit d'ordre supérieur. Il conclut :

> Or, d'après le principe fondamental de la méthode infinitésimale, […] toutes les fois que Δy entrera dans un calcul comme terme d'un rapport ou d'une somme d'infiniment petits dont on cherche la limite, on aura le droit de le remplacer par $f'(x)\Delta x$.[157]

Comberousse donne l'exemple suivant pour montrer « l'avantage que peut présenter l'emploi des différentielles sur celui des dérivées » : dans la formule $dy = f'(x)dx$, « dy et dx figurent absolument de la même manière »[158] car, écrit-il, l'une des différentielles dy et dx est arbitraire. Or dans les fonctions inverses,

> rien n'oblige de prendre pour variable indépendante l'une des deux variables plutôt que l'autre, quand il s'agit des différentielles, tandis que l'emploi des dérivées exige nécessairement qu'on ait fait un choix.[159]

Donc, si on regarde x en fonction de y on peut écrire : $dx = \frac{1}{f'(x)}dy$.

Enfin, dans le dernier chapitre du « Livre V » intitulé « Premières notions sur les intégrales », pour le calcul de l'aire sous une courbe, Comberousse écrit que « *le second principe*

[156] *Ibid.*, p. 435.
[157] *Ibid.*, p. 446.
[158] *Ibid.*, p. 449.
[159] *Ibid.*, p. 449

fondamental de la Méthode infinitésimale » permet de remplacer l'aire des trapèzes curvilignes « par celle de l'un des deux rectangles qui les comprennent respectivement »[160].

Il s'agit donc bien dans cet ouvrage de Comberousse d'une introduction de la méthode infinitésimale tout à fait conforme aux conceptions de Duhamel.

Ce *Cours* est une nouvelle fois l'occasion de constater que les limites imposées par le Conseil de perfectionnement sont vaines. Toute introduction d'une nouvelle notion dans les programmes se traduit, dans les manuels, par une extension de cette notion. Le chapitre sur la différentiation des fonctions implicites permet à Comberousse d'aborder les équations différentielles de la forme $\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$. Il traite en exemple les équations différentielles :

$$y\frac{dy}{dx} = p, p \text{ constante, et } \; y = 2x\frac{dy}{dx}.$$

Il termine en évoquant les systèmes d'équations différentielles simultanées :

$$\begin{cases} \varphi_1\left(x, y, z, u, \dots, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}, \dfrac{du}{dx}, \dots\right) = 0, \\ \varphi_2\left(x, y, z, u, \dots, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}, \dfrac{du}{dx}, \dots\right) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \varphi_m\left(x, y, z, u, \dots, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{dz}{dx}, \dfrac{du}{dx}, \dots\right) = 0. \end{cases}$$

6 – 2 La remise en cause du principe de Duhamel par Mansion (1887)

Né en 1844 dans la province de Liège, Mansion fait ses études à l'École normale des sciences annexée à l'Université de Gand[161]. Professeur agrégé en 1865, il est répétiteur à l'École préparatoire du Génie civil annexé à cette même université avant d'obtenir un doctorat en sciences mathématiques et physiques en 1867. Il devient titulaire de la chaire de calcul différentiel et intégral et d'analyse supérieure à Gand la même année.

Dans les années qui suivent, il publie des travaux sur les fonctions elliptiques et sur les équations aux dérivées partielles. En 1874, il fonde avec Catalan la revue *Nouvelle correspondance mathématique*. En 1875, il publie un mémoire sur la *Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* Ce mémoire, couronné par l'Académie royale des

[160] Ibid., p. 667.

[161] Sur Mansion, voir DEMOULIN Alphonse, « La vie et l'œuvre de Paul Mansion », *Annuaire de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*, 1929, p. 77-147. Nous rappelons

Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique, lui assure une réputation dans la communauté mathématique. À partir de 1879 il collabore au *BSM*. En 1881, il fonde la revue *Mathesis* avec le mathématicien luxembourgeois Joseph Neuberg.

En 1876 il publie un *Résumé du cours d'analyse infinitésimale de l'Université de Gand,* sous-titré : *Calcul différentiel et principes du calcul intégral*. Ce manuel est, selon lui, un résumé des leçons professées à Gand durant les vingt années précédentes. Après trois chapitres consacrés aux fonctions et à la méthode des limites, il expose dans le chapitre 4 la méthode infinitésimale et énonce ainsi le *principe de substitution* de Duhamel :

> Dans une limite de somme (arithmétique) ou de rapport d'infiniment petits, on peut remplacer chaque infiniment petit par un autre dont le rapport au premier a pour limite l'unité ; ou par un autre qui en diffère d'un infiniment petit d'ordre supérieur ; ou, plus brièvement, qui en diffère infiniment peu.[162]

Un long « Appendice » d'une centaine de pages et une quarantaine de pages de « Notes complémentaires » complètent ce résumé de cours. Le chapitre VI de l'appendice propose des « exemples d'une fausse application du principe de Duhamel »[163]. Il considère les sommes :

$$A_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n,\ \ \alpha_p = \frac{1}{n},$$
$$B_n = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n,\ \ \beta_p = \frac{1}{n}(1+x), x = \frac{p}{n},$$
$$C_n = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n,\ \ \gamma_p = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{n^2x}{e^{n^2x^2}}\right), x = \frac{p}{n}.$$

qui ont pour limites respectives : 1 , $1\frac{1}{2}$ et $\frac{e}{e-1}$.

Ces sommes correspondent, entre $x = 0$ et $x = 1$, aux aires sous les courbes des fonctions :

$$y = 1,\ \ y = 1 + x\ \ \text{et}\ \ y = 1 + n^2xe^{-n^2x^2}.$$

Or les rapports des infiniment petits β_p et α_p d'une part, γ_p et α_p ont pour limite l'unité. Selon le « principe de Duhamel », les limites des trois sommes devraient être égales.

[162] MANSION Paul, *Résumé du cours d'analyse infinitésimale de l'Université de Gand. Calcul différentiel et principes du calcul intégral*, Paris, Gauthier-Villars, 1887, p. 11.

[163] *Ibid.*, p. 241. Nous rappelons ici le travail de Gert SCHUBRING indiqué en introduction de ce chapitre : il s'agit de la section intitulée « The principle of substitution for Infiniment petits » du Chapitre VIII, « Conflicts Between Confinement to Geometry and Alegrization in France » dans *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century, France and Germany*, New-York, Springer, 2005, p. 590-598.

Mansion donne ensuite ce qu'il appelle le « vrai sens de la condition d'existence du principe »[164]. Selon lui, dans la démonstration du principe de Duhamel, on suppose « implicitement que tous les rapports $1 + \varepsilon$ des infiniment petits substitués les uns aux autres tendent simultanément vers l'unité »[165], ce qui, en termes actuels, suppose la convergence uniforme des rapports $1 + \varepsilon_n$.

En 1887, Gohierre de Longchamps donne une recension de l'ouvrage de Mansion dans le *Journal de mathématique spéciales*. En 1888, Jules Tannery fait de même dans le *BSM*[166]. Ni l'un ni l'autre n'évoquent explicitement les critiques de Mansion sur la validité du principe de Duhamel, mais il ne fait aucun doute, à la lecture de ces deux articles, que ce passage du livre ne leur a pas échappé. Leurs comptes rendus sont suffisamment détaillés. Il semble probable que la phrase suivante de Gohierre de Longchamps s'adresse notamment à la critique de la méthode de Duhamel : « j'ai signalé, comme une caractéristique de l'ouvrage de M. P. Mansion la très grande rigueur que l'auteur apporte dans l'établissement des principes de l'Analyse infinitésimale »[167].

Leur silence sur la remise en cause du principe de Duhamel est surprenant, particulièrement celui de Tannery dont nous verrons au prochain chapitre son attachement à la plus grande rigueur mathématique. Ce dernier exprimera d'ailleurs, plus de quinze ans plus tard, sa critique du principe de substitution des infiniment petits dans les sommes. Il le fera à l'occasion de la publication de son ouvrage *Notions de mathématiques suivi de notions historiques par Tannery Paul.* Écrit en 1905, ce manuel est destiné à la classe de philosophie. Il écrira, à propos de la décomposition d'une surface plane ou d'un volume :

> dans cette décomposition d'une surface plane en bandes étroites auxquelles on substitue des rectangles inscrits ou exinscrits, d'un volume en rondelles plates auxquelles on substitue des cylindres droits, on n'a pas affaire à des infiniment petits […]. Pour une décomposition en n bandes, ou en n rondelles, tout est fixe, bandes et rectangles ou rondelles et cylindres. Il n'y a pas d'infiniment petits. Quand n augmente, on ne peut pas dire d'une bande ou d'une rondelle qu'elle devient infiniment petite parce qu'elle ne subsiste pas : les bandes ou les rondelles, quand on passe d'une décomposition à une autre, sont remplacées par

[164] *Ibid.*, p. 243.
[165] *Ibid.*, p. 243.
[166] TANNERY Jules, « Mansion – Résumé du cours d'analyse infinitésimale de l'Université de Gand », *Bulletin des Sciences Mathématiques,* 2e série, tome XII, 1888, p. 95-97.
[167] LONGCHAMPS (Gohierre de) Gaston, « Résumé du Cours d'Analyse infinitésimale de l'Université de Gand par P. Mansion », *Journal de Mathématiques spéciales*, 2e série, tome I, 1887, p. 280.

> d'autres bandes ou d'autres rondelles, en plus grand nombre : elles ne conservent aucune individualité ; on n'a donc pas affaire […] à des fonctions d'une variable, qui, dans certaines conditions, tendent vers 0.[168]

La communauté mathématique, alors dominée par Bertrand, n'était sans doute pas prête à cette remise en cause. D'autant plus qu'on peut considérer qu'elle n'affecte pas vraiment le programme dont nous rappelons l'article : « Condition sous laquelle deux infiniment petits peuvent être substitués l'un à l'autre dans les limites de sommes et de rapports ». La supposition implicite évoquée par Mansion peut parfaitement rentrer dans cette « condition ».

6 – 3 La méthode infinitésimale par Lacour dans les *Leçons d'algèbre* (1893)

Lacour a été admis à l'École normale supérieure en 1874[169]. Il suit l'enseignement de calcul différentiel et intégral de Bouquet à la Sorbonne et a Darboux comme maître de conférences à l'École normale supérieure. Après avoir enseigné à Angoulême, Clermont, Nancy, il est nommé à Paris au lycée Saint-Louis en 1881, puis au lycée Janson de Sailly, nouvellement fondé, en 1884, avant de revenir au lycée Saint-Louis en 1892. Il participe à la révision de la 16e édition des *Leçons d'algèbre* de Briot dont le deuxième tome, destiné aux élèves de mathématiques spéciales, est publié en 1893.

Les notions d'infiniment petit et de différentielle sont abordées à la suite de la théorie des dérivées. La définition de Cauchy d'un infiniment petit est illustrée par l'exemple d'une fonction continue :

> on dira qu'une fonction $f(x)$ est continue pour une valeur a de x, si à un accroissement infiniment petit donné à la variable à partir de a correspond un accroissement infiniment petit de la fonction.[170]

Il définit ensuite les notions d'infiniment petit principal, d'ordre d'un infiniment petit et de partie principale d'un infiniment petit avant d'aborder la substitution des infiniment petits. Le théorème sur les rapports est donné avant celui sur les sommes, ainsi rédigé : « on peut, sans

[168] TANNERY Jules, *Notions de mathématiques suivi de Notions historiques par TANNERY Paul*, Paris, Delagrave, 1903, p. 318.

[169] Sur Lacour, voir BRASSEUR Roland, https://sites.google.com/site/rolandbrasseur/5---dictionnaire-des-professeurs-de-mathematiques-speciales.

[170] BRIOT Charles, *Leçons d'algèbre*, tome II, 16e édition revue et mise au courant des nouveaux programmes par E. Lacour, Paris, Delagrave, 1893.

changer la limite d'une somme d'infiniment petits tous positifs, augmenter ou diminuer chacun d'eux d'une quantité infiniment petite par rapport à lui-même »[171].

La démonstration qu'il propose est semblable à celle du *lemme de Liouville*. La précision sur le signe des infiniment petits lui permet d'encadrer la somme :

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + \cdots + l\lambda$$

où $a, b, c, \dots, l$ désignent les infiniment petits à substituer, et $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$ des infiniment petits par $\rho(a + b + c + .. + l)$ et $\rho'(a + b + c + .. + l)$ où ρ, ρ' désignent respectivement la plus grande et la plus petite des valeurs de $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda$. Ce qui ne tient pas compte des critiques de Mansion.

La définition que Lacour donne de la différentielle d'une fonction est celle de Lacroix et n'utilise pas la notion d'infiniment petit. Il justifie l'emploi de la notion de différentielle comme Laurent le faisait : la notation différentielle ne dépend pas de la variable indépendante.

Par la suite, la définition qu'il donne de l'intégrale définie n'utilise pas non plus la notion d'infiniment petit. Pour une fonction continue, il la définit tout d'abord comme l'aire sous la courbe avant d'affirmer :

> on peut parvenir à la notion d'intégrale définie sans s'appuyer sur la considération de l'aire d'une courbe.
> Bien qu'on puisse s'en tenir à ce qui précède, nous allons reprendre analytiquement la théorie précédente pour la compléter […]. [172]

La théorie que Lacour reprend analytiquement est celle de l'intégrale de Cauchy. La notion d'infiniment petit ne lui sert donc pas dans la suite de l'ouvrage. La section qu'il consacre à cette notion semble donc être là uniquement pour répondre aux exigences du programme d'admission. Il nous paraît cependant difficile de conclure qu'il y a un rapport avec la parution de l'ouvrage de Mansion. En 1893, comme nous le verrons dans le prochain chapitre, nous sommes entrés dans une période où l'enseignement de la théorie des dérivées en mathématiques spéciales subit l'impact de l'arithmétisation de l'analyse.

[171] *Ibid.*, p.312.
[172] *Ibid.*, p. 323.

Soulignons aussi que la notion de différentielle ne lui sert pas plus que la notion d'infiniment petit. En effet, pour la dérivation de fonctions de plusieurs variables et pour celle des fonctions implicites, il n'utilise pas la notation différentielle.

7 – Conclusion

Le programme d'algèbre de 1885 du concours d'admission à l'École polytechnique, qui s'impose comme programme aux classes de mathématiques spéciales, porte l'empreinte des conceptions mathématiques de Duhamel. Ces conceptions s'étaient imposées sans partage à l'École polytechnique avec les enseignements de Duhamel lui-même et de Bertrand. Cependant les successeurs de Duhamel s'en éloignent progressivement. Ce qui vaut pour l'École polytechnique vaut aussi pour l'enseignement du calcul différentiel et intégral à l'extérieur de l'École. Il nous paraît donc que, dans la rédaction du programme de 1885, le rôle de Bertrand est essentiel. Il est, et restera jusqu'à la fin de son enseignement à l'École, fidèle aux idées de Duhamel pour qui la substitution des infiniment petits est le principe fondamental du calcul infinitésimal. Sa position institutionnelle de tout premier plan dans la communauté mathématique française lui permettait sans doute d'imposer une méthode qui n'était pas unanimement partagée. Malgré tout, si le programme semble induire l'emploi de ces théorèmes pour justifier des notions de différentielle et d'intégrale définie, il ne présage pas de ce qui sera réellement enseigné : il est possible d'introduire ces deux notions sans faire appel aux infiniment petits.

Car ce sont bien ces deux notions de différentielle et d'intégrale définie qui sont l'enjeu majeur de la modification de programme de 1885. L'emploi de la différentielle est alors perçu, ainsi que l'indique Laurent, comme bien plus commode que celui de la dérivée. Cependant, l'introduction simultanée des notions de dérivée et de différentielle, la deuxième dépendant de la première, impose de justifier l'emploi de cette deuxième notion. Tous les auteurs de manuels s'y livrent. La multiplication des justifications que donne Laurent peut indiquer qu'il y avait sur ce point une réelle difficulté.

Soulignons aussi que l'introduction de l'intégrale définie dans le programme de 1885 se fait avec une grande prudence. Les Conseils de l'École craignent un enseignement en mathématiques spéciales qui outrepasse les programmes. Leur crainte est fondée comme l'a montré l'enseignement de la théorie des dérivées depuis 1851. Cette prudence est la marque des Conseils de l'École, et plus particulièrement du Conseil de perfectionnement. Nous la retrouvons à l'occasion de toute introduction d'une notion nouvelle. Les notions précédentes avaient, en quelque sorte, été validées par des enseignements avant d'être inscrites au programme. Ce n'est pas le cas cette fois-ci. Mais, outre leur intérêt, l'introduction de ces notions permet de décharger le programme d'analyse de l'École de trois ou quatre leçons. Ce n'est pas un argument à négliger.

Il faut aussi souligner dans les discussions des Conseils de l'École ce qui nous paraît comme un renversement d'ordre politique. Les programmes de 1851 étaient élaborés à la suite d'une volonté de réformer l'École polytechnique. Les programmes d'admission s'imposaient ensuite aux classes de mathématiques spéciales, indépendamment de la réforme de l'enseignement secondaire mise en place à la même période. En 1880, la révision des programmes d'admission est la conséquence d'une réforme de l'enseignement secondaire voulue par Ferry. En 1885, la question de l'allégement des programmes est mise à l'ordre du jour du concours d'entrée à l'École car elle l'est aussi dans l'enseignement secondaire. Si les programmes d'admission à l'École s'imposent toujours aux classes de mathématiques spéciales, il apparaît que la place du Ministère de l'Instruction publique se renforce dans le processus décisionnel.

Le manuel de Comberousse retranscrit fidèlement la méthode infinitésimale de Duhamel. La remise en cause par Mansion, en 1887, du principe fondamental de Duhamel ne semble d'aucun effet sur Lacour : en 1893, il énonce toujours le théorème de substitution des infiniment petits dans une somme. Mais il ne s'agit, semble-t-il, que d'appliquer le programme officiel. Il ne l'emploie pas par la suite car il n'en a pas l'utilité.

Enfin, entre les dates de parution de ces deux ouvrages, l'enseignement de l'analyse en mathématiques spéciales a subi de profonds changements. Nous les aborderons au prochain chapitre et nous verrons que ce sont eux, plus que les critiques de Mansion, qui provoquent la suppression de la méthode infinitésimale de Duhamel dans le programme de 1896.

Chapitre 6 : L'arithmétisation de l'analyse dans l'enseignement en mathématiques spéciales (1870-1902)

Les années 1870 marquent un tournant dans l'enseignement des principes de l'analyse. Des travaux mathématiques, issus pour la plupart de l'école allemande où dominent les noms de Bernhard Riemann, Karl Weierstrass, Georg Cantor et Richard Dedekind, remettent en cause dans l'enseignement les conceptions de l'analyse fondée sur l'intuition géométrique. Ils ont pour origine des recherches théoriques ou sont la conséquence de la nécessité de clarifier certaines notions dans le cadre d'un enseignement. En France le mathématicien Gaston Darboux reprend et développe ces travaux dans une certaine indifférence.

Nous rappellerons tout d'abord les contributions de ces différents mathématiciens à la constitution d'une analyse fondée sur des conceptions arithmétiques, dans laquelle émerge le concept d'ensemble qui occupera bientôt une place centrale. Nous porterons une attention particulière au rôle de Darboux dont nous avons déjà signalé l'importance à l'occasion de l'étude du manuel de Jules Houël. Nous reviendrons sur les constructions des nombres irrationnels dont nous avons vu, au chapitre 2, que Duhamel les introduisait au tout début de son cours d'analyse à l'École polytechnique. Enfin nous rappellerons les premiers éléments de la théorie des ensembles, les réticences mais aussi l'intérêt que cette théorie suscite en France.

Jusqu'au milieu des années 1880, ces nouveaux fondements de l'analyse trouvent peu d'écho dans l'enseignement à l'École polytechnique, alors dominé par les conceptions de Jean-Marie Duhamel, prolongées par les enseignements de Joseph Bertrand. Nous avons vu au chapitre précédent que ce sont ces conceptions qui s'imposent, en 1885, dans l'enseignement de mathématiques spéciales.

La situation change avec la publication en 1886 de *l'Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, de Jules Tannery, suivi, en 1887, du troisième tome de la première édition du *Cours d'analyse de l'École polytechnique* de Camille Jordan. L'historiographie a déjà mentionné l'importance de l'ouvrage de Tannery parmi les manuels d'analyse français au XIX^{e}

siècle[1]. Concernant les fondements, son contenu n'a cependant pas été analysé en détail, ce à quoi nous nous attacherons. Le *Cours d'analyse* de Jordan a, quant à lui, fait l'objet d'une étude détaillée[2]. Nous nous intéressons plus particulièrement au troisième tome de la première édition. Publié en 1887, ce tome a surtout été considéré dans la perspective de la seconde édition du *Cours d'analyse*, en 1893. Nous tenterons de comprendre le retentissement qu'ont eu ces deux ouvrages sur l'enseignement en mathématiques spéciales avant la publication de cette seconde édition du *Cours d'analyse* de Jordan. Pour ceci, nous analyserons les manuels de nouveaux auteurs qui apparaissent sur le marché de l'édition en cette fin de XIXe siècle : le *Cours d'algèbre* de Bosleslas Niewenglowski, et les *Leçons d'algèbre* de Émile Pruvost et Dominique Pieron. Ce sont les premiers manuels que nous ayons identifié qui prennent en compte les nouveaux fondements de l'analyse. Nous verrons aussi comment deux ouvrages qui avaient déjà rencontré un important succès d'édition, les *Leçons d'algèbre* de Charles Briot et le *Traité d'algèbre* de Hermann Laurent, s'adaptent à cette révision des principes de l'analyse.

La comparaison de la seconde édition du *Cours d'analyse* de Jordan à son cours lithographié de 1893-1894 nous permettra de savoir ce qu'était l'enseignement des nouveaux principes à l'École polytechnique au moment de l'adoption d'une première réforme du programme d'analyse pour l'admission à l'École. L'analyse de cette réforme, et surtout de celle qui suit, en 1896, nous permettra de constater que ces deux réformes apparaissent comme des réactions du Conseil de perfectionnement contre un développement de l'enseignement des nouveaux principes de l'analyse en classe de mathématiques spéciales.

Le programme d'admission adopté en 1896 suscite des débats dans les journaux mathématiques. Au tournant du siècle et au moment où s'enclenche le processus qui aboutira à la réforme de 1902 de l'enseignement secondaire, ces débats nous apprendront l'opinion de Henri Poincaré sur ce que doit être l'enseignement des principes de l'analyse en mathématiques spéciales et à l'École polytechnique. Personnalité de tout premier plan, même s'il ne participe pas directement à cette réforme, son engagement à cette occasion a déjà fait

[1] Martin ZERNER fait commencer avec cet ouvrage la « troisième génération » de manuels français d'analyse au XIXe siècle dans ZERNER Martin, « La transformation des traités français d'analyse (1870-1914) », 1994, https://hal-unice.archives-ouvertes.fr/hal-00347740/fr/

[2] Voir GISPERT Hélène, *Jordan et les fondements de l'analyse (étude comparée des deux premières éditions de son cours d'analyse)*, Paris, Publications mathématiques d'Orsay, 1982.

l'objet de travaux historiques[3]. Nous pensons que les différentes analyses menées dans ce chapitre l'éclairent sous un jour nouveau.

La question de l'enseignement des nouveaux fondements de l'analyse se situe dans un contexte éducatif dont nous rappellerons ici les grandes lignes. La nouvelle dynamique de l'enseignement supérieur, insufflée dès le Second Empire par le ministre de l'Instruction publique, Victor Duruy, s'amplifie sous la III^e^ République[4]. L'une des premières mesures prises par Duruy a été la création de l'École pratique des hautes études[5]. À la suite de la guerre de 1870, le retard de l'enseignement supérieur français sur les universités allemandes apparaît clairement. Les républicains, qui arrivent au pouvoir à la fin des années 1870, entreprennent de développer les facultés. Sous l'impulsion notamment de Jules Ferry, Ministre de l'Instruction publique, ils organisent en particulier un système de bourses destiné à augmenter le nombre d'étudiants. Limitées au départ, ces mesures ne produiront vraiment leurs fruits que dans les années 1890.

À partir des années 1860, l'École normale supérieure concurrence progressivement l'École polytechnique pour la formation de mathématiciens de haut niveau[6]. Louis Pasteur est nommé responsable de la direction des études à l'École normale supérieure en 1857. Sous son impulsion, l'enseignement scientifique s'y développe[7]. Il réclame et obtient, en 1858, le retour à une séparation des agrégations de mathématiques et de sciences physiques qui avaient été fusionnées en une agrégation des sciences lors de la réforme de 1852, sous le ministère Hippolyte Fortoul. Il obtient également la fin du régime de « noviciat », datant de la même réforme, qui imposait aux élèves trois ans d'enseignement avant d'être admis aux épreuves

---

[3] ROLLET Laurent, *Henri Poincaré des mathématiques à la philosophie,* thèse de Doctorat, Université de Nancy 2, 1999.

[4] Concernant l'enseignement supérieur, voir en particulier MINOT Jacques, *Histoire des universités françaises*, Paris, Presses Universitaires de France, 1991, et MAYEUR Françoise, *Histoire de l'enseignement et de l'éducation*, tome III, 2e éd., Paris, Perrin 2004.

[5] Voir CROIZAT Barnabé, *Gaston Darboux : naissance d'un mathématicien, genèse d'un professeur, chronique d'un rédacteur, thèse de doctorat*, Université de Sciences et Technologie de Lille, 2016, p. 380-389.

[6] Voir ZWERLING Craig, « The emergence of the École Normale Supérieure », dans Robert FOX et George WEISZ, *The Organization of Science and Technology in France, 1808-1914*, Cambridge, Cambridge University Press, 1980, et SMITH Robert J., *The École Normale Supérieure and the Third Republic*, Albany, Sate University of New York Pres, 1982.

[7] Voir HULIN Nicole, « La rivalité École normale - École polytechnique. Un antécédent : l'action de Pasteur sous le Second Empire », *Histoire de l'Éducation*, 1986, vol. 30, p. 71-81.

de l'agrégation. En 1858, à sa demande, est créé le statut d'agrégé-préparateur qui favorise l'accès des normaliens à l'enseignement supérieur.

Pasteur convainc Darboux, reçu premier en 1861 aux concours d'admission de l'École polytechnique et de l'École normale supérieure, d'opter pour cette dernière[8]. L'École attirera, à la suite de Darboux, nombre d'étudiants parmi les plus brillants. Au début des années 1890, à la Sorbonne, Darboux, titulaire de la chaire de géométrie supérieure, Paul Appell, titulaire de la chaire de mécanique rationnelle et Émile Picard, titulaire de la chaire de calcul différentiel et intégral, sont tous anciens élèves de l'École normale supérieure. Darboux et Appell ont respectivement succédé à Michel Chasles et à Joseph Liouville, deux polytechniciens.

Rappelons que les élèves de l'École normale supérieure suivent les cours de licence à la Sorbonne. La licence de mathématiques comporte obligatoirement un certificat de calcul différentiel et de calcul intégral. À l'École même, des maîtres de conférences complètent leur formation. La troisième année est consacrée à la préparation de l'agrégation. En mathématiques, moins de dix places sont mises au concours chaque année. À partir de 1886, les épreuves d'admissibilité de ce concours comportent quatre compositions écrites : une de mathématiques élémentaires, une de mathématiques spéciales, une sur l'analyse et ses applications géométriques, et une de mécanique rationnelle. Ces deux dernières épreuves portent sur le programme de la licence de mathématiques. Les épreuves orales d'admission consistent en la préparation d'une leçon de mathématiques élémentaires et d'une leçon de mathématiques spéciales[9].

Les républicains accroissent aussi considérablement les crédits de l'enseignement secondaire et renforcent la place des sciences dans le cursus des lycées[10]. Jules Ferry fait adopter, en 1880, un plan d'études qui place pour la première fois l'enseignement scientifique au même

---

[8] Sur Darboux, voir le chapitre 1, « Gaston Darboux à l'École normale supérieure : une surprise, un symbole, une réussite » dans CROIZAT Barnabé, *op. cit.*, p. 36-61.

[9] Voir le *Recueil de règlements relatifs à l'enseignement secondaire*, Paris, Imprimerie Nationale, 1900, p. 287. Voir aussi, TANNERY Jules, « Les licences et les agrégations d'ordre scientifique », *Revue Internationale de l'Enseignement,* t. XXII, 1891, p. 473-498.

[10] Sur l'enseignement secondaire, voir PROST Antoine, *Histoire de l'enseignement en France*, 1800-1967, Paris, Armand Colin, 1968 et SAVOIE Philippe, *La construction de l'enseignement secondaire*, Lyon, ENS Éditions, 2013. Pour l'enseignement des sciences dans le secondaire, voir l' « Introduction » dans BELHOSTE Bruno, *Les Sciences dans l'Enseignement secondaire français, Textes officiels. Tome I: 1789–1914,* Paris, Institut national de recherche pédagogique, 1995, p. 15-62.

niveau que l'enseignement littéraire. Accusé notamment de provoquer le « surmenage » des élèves, il sera modifié en 1885 et la part des sciences sera réduite. Une nouvelle réforme, en 1890, sous le ministère de Léon Bourgeois, supprime les baccalauréats ès lettres et ès sciences, les remplaçant par un unique baccalauréat de l'enseignement classique. Les élèves passent une première partie commune à la fin de la classe de rhétorique. La deuxième partie comprend deux séries : la série « Lettres-Philosophie » est préparée en classe de philosophie ; la série « Lettres-sciences » est préparée en classe de mathématiques élémentaires. Durant toute la période couverte dans ce chapitre, aucune de ces réformes n'affecte directement la classe de mathématiques spéciales.

1 –La diffusion en France des nouveaux fondements de l'analyse dans les années 1870[11]

Après la parenthèse des enseignements de Claude Navier et Claude-Louis Mathieu, avons vu au chapitre 2 que les notions de continuité et d'infiniment petits développées par Cauchy, ainsi que sa conception de la rigueur, avaient été repris à l'École polytechnique dans les enseignements de Duhamel, Charles Sturm et Joseph Liouville. L'ouvrage de Pierre Henry Blanchet, *Compléments de mathématiques spéciales*, nous a aussi montré que, dès la fin des années 1830, ces notions se retrouvaient dans des manuels destinés aux classes de mathématiques spéciales.

Les apports de Johann Peter Gustav Lejeune-Dirichlet à l'analyse trouvaient eux aussi un écho dans les cours de Liouville, même si son concept de fonction était cité sans trouver d'emploi. L'objectif de l'École polytechnique de former des ingénieurs, l'attachement à un enseignement tourné vers la pratique, interdisaient probablement à Liouville d'aller plus loin. Ces principes seront rappelés avec force par la commission Le Verrier en 1850.

[11] Les travaux sur la question des fondements de l'analyse dans les années 1870 sont très nombreux. Nous avons particulièrement utilisé, pour cette section, ceux de DUGAC Pierre, *Histoire de l'analyse,* Paris, Vuibert, 2003, LÜTZEN Jesper, « The Foundation of Analysis in the 19th Century», p.155-195, HOCHKIRCHEN Thomas, « Theory of Measure and Integration from Riemann to Lebesgue », p. 262-290, et EPPLE Moritz, « The End of the Science of Quantity: Foundations of Analysis, 1860-1910 », p. 291-323, tous trois dans Hans Niels JAHNKE (dir.), *A History of Analysis*, Providence, American Mathematical Society, 2003. Concernant la problématique française durant cette décennie, nous avons utilisés les articles suivants de GISPERT Hélène : « Sur les fondements de l'analyse en France », *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 28, 1983, p. 37-106, « Principes de l'analyse chez Darboux et Houël (1870-1880) : textes et contextes », *Revue d'Histoire des Sciences*, N° 43, 1990, p. 181-220, « La Société Mathématique de France », *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences*, N°34, 1991, p. 11-180,

À partir des années 1860, un écart grandissant s'observe entre les sujets de recherche des mathématiciens français et étrangers. Ces particularismes nationaux tiennent notamment à l'organisation de l'enseignement supérieur. Le rôle des facultés des sciences est secondaire en France où le système éducatif est essentiellement tourné vers la préparation à l'École polytechnique. En analyse, les travaux des mathématiciens français portent essentiellement sur des intégrales de fonctions particulières, elliptiques et abéliennes, sur des questions d'approximations de fonctions et d'intégrales, et surtout sur le problème des équations aux dérivées partielles. Les travaux sur les fondements de l'analyse de Weierstrass et de ses élèves de « l'école de Berlin », Hermann Schwarz, Heinrich Heine et Karl Johannes Thomae n'ont que peu de répercussions en France.

Weierstrass a été conduit à une refonte des principes de l'analyse par l'étude des fonctions elliptiques. Il développe et améliore cette théorie durant ses années d'enseignement à l'Institut industriel de Berlin, de 1854 à 1864, puis, par la suite, à l'Université de Berlin. Il ne publie pas ses recherches. Le concept de continuité uniforme développé dès les années 1840, la définition d'une limite ou de la continuité en termes de ε,η utilisée dans son cours de 1861 pour démontrer que toute fonction continue sur un intervalle atteint ses bornes, semblent ignorés par les mathématiciens français au début des années 1870. Il en est de même des travaux de Bolzano, connus à Berlin dans les années 1830[12], et qui seront utilisés par Hermann Hankel.

Ce décalage de la recherche française par rapport à ce qui se produit dans d'autres pays européens apparaît dans les « Rapports sur les progrès accomplis en France dans les sciences et dans les lettres depuis vingt ans ». Ces rapports ont été commandés par le ministre de l'Instruction publique, Victor Duruy, à l'occasion de l'Exposition universelle de 1867[13]. Pour remédier aux insuffisances de la recherche, Duruy fonde en 1868 l'École Pratique des Hautes Études. Cette école crée en 1870 le *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques* (*BSM*) sous la direction de Gaston Darboux et Jules Houël. L'objectif de la revue est « de mettre

[12] Voir SCHUBRING Gert, « Bernard Bolzano—Not as Unknown to His Contemporaries as is Commonly Believed? », *Historia Mathematica*, vol. 20, 1993, p. 45–53.
[13] Voir BARBIN Evelyne, « Le Rapport sur les progrès de l'analyse de Joseph Bertrand », dans Evelyne BARBIN, Jean-Luc GODET et Gerhardt STENGER (dir.), *1867, L'année de tous les rapports*, Pornic, éd. du Temps, 2009.

[…] les français au courant de la science à l'étranger »[14]. Elle va, en particulier, participer à la diffusion en France des nouveaux fondements de l'analyse. En 1876, Jules Tannery, ancien élève de l'École normale supérieure, rejoint la direction du *BSM*.

1 – 1 L'introduction de fonctions « bizarres »

Le *BSM* va rapidement faire connaître les travaux de Riemann. Ce dernier, qui a succédé à Dirichlet à l'Université de Göttingen, publie en 1853 un mémoire intitulé « Sur la représentation des fonctions en séries trigonométriques.»[15]. Riemann, repartant des travaux de Dirichlet, développe une théorie de l'intégration plus générale que celle de Cauchy pour pouvoir représenter par des séries de Fourier des fonctions ayant une infinité de discontinuités. Il y donne l'exemple d'une fonction bornée, ayant une infinité de discontinuités, et cependant intégrable grâce à sa définition de l'intégrale définie[16].

Ce mémoire n'est publié en Allemagne qu'en 1867. Il est d'abord connu en France à travers des travaux de Hankel dont Houël donne un compte rendu dans le *BSM* de 1870[17]. Hankel utilise le mémoire de Riemann pour construire des fonctions continues sans dérivées. Rappelant les débats autour de l'existence de telles fonctions, Houël, suivant prudemment Hankel, se prononce pour l'existence de fonctions continues sans dérivées. Avec la même prudence, Darboux se prononce lui aussi pour leur existence[18]. Cet article provoquera une polémique avec le mathématicien belge Philippe Gilbert, polémique qui n'est peut-être pas

[14] DARBOUX Gaston cité par GISPERT Hélène dans « La correspondance de G. Darboux et J. Houël », *Cahier du séminaire d'histoire des mathématiques,* t. 8, 1987, p. 67.

[15] RIEMANN Bernhard, « Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe », traduit par Jules HOUËL, *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, t. 5, 1873, p. 20-48 et p. 79-96. Sur ce mémoire, voir HOCHKIRCHEN Thomas, « Theory of Measure and Integration from Riemann to Lebesgue » dans Hans Niels JAHNKE (dir.), *A History of Analysis*, Providence, American Mathematical Society, 2003, p. 266-269.

[16] Riemann considère la fonction $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{x^2}$ où (nx) désigne l'excès de nx sur l'entier le plus voisin, ou zéro si nx est à égale distance de deux entiers. Cette fonction est discontinue pour toutes les valeurs rationnelles de x de la forme $= \frac{p}{2m}$.

[17] HOUËL Jules, « Hankel (Dr Hermann), Recherches sur les fonctions oscillantes et discontinues un nombre infini de fois. Étude pour contribuer à fixer la notion de fonction », *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, t. 1, 1870, p. 117-124.

[18] DARBOUX Gaston, « Lindelöf (L.). – Remarques sur les différentes façons d'obtenir la formule $\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d^2z}{dydx}$ », *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, t. 1, 1870, p. 275.

étrangère à la présentation par Weierstrass, en 1872, de son célèbre exemple de fonction continue sans dérivée à l'Académie de Berlin[19].

Le mémoire de Darboux sur les fonctions discontinues (1875)

En 1870, Gaston Darboux est professeur de mathématiques spéciales[20]. Durant ses années d'études à l'École normale supérieure, il a présenté des travaux sur les surfaces orthogonales à l'Académie des sciences. En 1870 il publie des *Notes sur les équations aux dérivées partielles*. En 1872 il est nommé maître de conférences à l'École normale supérieure puis, à partir de 1873 il supplée Liouville dans la chaire de mécanique rationnelle à la Sorbonne.

Darboux considère le mémoire de Riemann comme un « chef-d'œuvre ». Houël et Darboux le traduisent et le publient dans le *BSM* en 1873. La même année les *NAM* indiquent que Darboux a communiqué à la Société mathématique de France une Note sur « Les intégrales des fonctions discontinues et sur les fonctions continues qui n'ont pas de dérivée »[21]. Bien qu'annonçant qu'elle y reviendrait, la revue n'évoquera plus le sujet.

En 1875 Darboux publie son « Mémoire sur les fonctions discontinues » dans les *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*. Il commence en citant le mémoire de Riemann et ses conséquences sur l'existence de fonctions continues sans dérivées. Il revient tout d'abord sur la définition d'une fonction. Une fonction est dite « bien déterminée » quand, à chaque valeur de x correspond une valeur unique de $f(x)$. Il souligne que « cette définition peut se faire d'une manière arbitraire »[22]. Prenant notamment l'exemple de la fonction $\frac{x^2-a^2}{x-a}$, il indique que les opérations nécessaires pour trouver sa valeur quand $x = a$ n'ont plus aucun sens, cette fonction n'ayant alors aucune valeur. Darboux va ainsi à l'encontre de ce qui s'écrivait dans tous les manuels que nous avons étudiés : $2a$ était considérée comme la « vraie valeur » d'une telle fonction pour $x = a$.

---

[19] Voir MAWHIN Jean, « Une brève histoire de l'Université catholique de Louvain », *Revue des questions scientifiques*, n° 163, 1992, p. 369-386. La fonction de Weierstrass est $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos \pi a^n x$, a étant un entier naturel impair et b un nombre positif inférieur à 1 vérifiant : $ab > 1 + \frac{\pi}{2}$.

[20] Pour les indications biographiques concernant Gaston Darboux, voir LEBON Ernest, *Gaston Darboux*, Paris, Gauthier-Villars, 1910 et CROIZAT Barnabé, *op. cit*.

[21] « Correspondance », *Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série*, t. 12, 1873, p. 231.

[22] DARBOUX Gaston, « Mémoire sur les fonctions discontinues », *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, 2e série, tome 4, 1875, p. 59.

Darboux adopte ensuite la définition de la continuité d'une fonction en un point formulée par Ossian Bonnet en 1871[23]. Bonnet avait donné cette définition en termes de ε,η, indépendamment de Weierstrass. Darboux l'avait utilisé une première fois dans un article de 1872 sur la continuité des fonctions de deux variables[24]. Puis, il démontre que toute fonction continue sur un intervalle (a, b) atteint ses bornes. Dans son article de 1872, il avait démontré cette propriété pour une fonction de deux variables, évoquant une démonstration de Weierstrass qu'il ne connaissait pas, et signalant l'indépendance de ses propres travaux et de ceux de Bonnet[25].

Après la démonstration de ces théorèmes qui introduisent les propriétés des fonctions continues par quelqu'un qui a « tenu avant tout […]à être rigoureux »[26], Darboux[27] reprend à Riemann sa définition de l'intégrale définie et la complète par l'étude des propriétés de cette intégrale. Il démontre que, pour une fonction f « susceptible d'intégration », la fonction $F(x) = \int_a^x f(x)$ est une fonction continue de x, dérivable et de dérivée $f(x)$ pour toutes les valeurs de x où $f(x)$ est continue. Cela lui permet de mettre en évidence une « classe » de fonctions continues n'ayant pas de dérivée[28]. Il obtient aussi des fonctions discontinues qui possèdent la propriété des valeurs intermédiaires et des fonctions continues qui ne sont ni croissantes ni décroissantes dans aucun intervalle, exemples de ces fonctions qu'il qualifiait de « bizarres » et à propos desquelles il reprochait à Houël de ne pas vouloir s'en occuper[29]. Tous ces points « qu'on [regardait] à bon droit comme évidents ou que l'on [accordait] dans les applications de la science aux fonctions usuelles »[30] sont ainsi, comme il l'annonçait en introduction, soumis à une « critique rigoureuse ».

---

[23] BONNET Ossian, « Démonstration de la continuité des racines d'une équation algébrique », *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, t. 2, 1871, p. 215-221.

[24] DARBOUX Gaston, « Sur un théorème relatif à la continuité des fonctions », *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, t. 3, 1872, p. 307-313.

[25] La démonstration donnée par Darboux de cette propriété pour des fonctions de deux variables est lacunaire, comme l'était celle que Weierstrass enseignait. Voir GISPERT Hélène : « Sur les fondements de l'analyse en France », *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 28, 1983, p. 45.

[26] DARBOUX Gaston, *op. cit.*, p. 58.

[27] Pour la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires, Darboux renvoie à la Note III de l'*Analyse algébrique* de Cauchy, où « ce théorème a été établi d'une manière rigoureuse » (*Ibid.*, p. 62).

[28] Parmi les exemples, Darboux reprend celui de Riemann cité en note 6. Il propose aussi un certain nombre d'exemples définis géométriquement.

[29] Voir la lettre à Houël du 24 septembre 1872 citée dans GISPERT Hélène, *Jordan et les fondements de l'analyse (étude comparée des deux premières éditions de son cours d'analyse)*, Paris, Publications mathématiques d'Orsay, 1982, Annexe, p. 3.

[30] *Ibid.*, p. 58.

L'objectif recherché par Darboux avec la publication de ce mémoire n'est pas l'étude des fonctions dont les propriétés défient les conceptions usuelles d'espace et de continuité, basées sur l'intuition géométrique. Il est, en mettant en évidence les failles de certains raisonnements, de montrer la nécessité de la plus grande rigueur dans les démonstrations. Il écrit, à la fin de l'introduction de son mémoire : « on conçoit qu'en présence de propositions aussi singulières on éprouve le besoin d'apporter la plus grande rigueur dans les déductions et de n'admettre que les propositions les mieux démontrées »[31].

Cette démarche concerne bien évidemment l'enseignement des principes de l'analyse comme le prouve sa correspondance avec Houël à propos de la deuxième édition du *Cours de calcul infinitésimal* que ce dernier a en préparation. Darboux l'engage à « produire quelque chose de véritablement neuf, la rigueur au lieu de l'à-peu-près de Duhamel et de ses prédécesseurs »[32]. Remarquons, à propos de Duhamel, que Darboux n'emploie jamais le vocabulaire des infiniment petits dans son mémoire.

Les conférences de Darboux à l'École normale supérieure dont nous disposons ne portent malheureusement pas sur l'analyse. Mais la rigueur dont il faisait preuve dans ses travaux scientifiques imprégnait aussi son enseignement. Il suffit pour s'en convaincre de lire l'introduction de la géométrie analytique dans ses *Conférences de mathématiques* de 1874-1875. Il commence l'étude des « Points imaginaires et points à l'infini » par la phrase suivante : « Quand on cherche à se rendre compte du caractère des méthodes analytiques, on voit que ces méthodes ont été créées [en vue[33]] dans le but d'être générales, et en même temps à l'abri de toute objection »[34]. Le feuillet suivant indique à nouveau : « on tient avant tout aujourd'hui à avoir des théories qui ne sont sujettes à aucune objection »[35].

Soulignons aussi que, dans son mémoire, Darboux évoque des travaux de Thomae, Heine, Schwarz et Cantor. Conséquence probable de l'efficacité du *BSM*, les mathématiciens français sont à présent bien informés, au milieu des années 1870, de ce qui est produit à l'étranger.

---

[31] *Ibid.*, p. 59.

[32] DARBOUX Gaston cité par GISPERT Hélène dans : « Sur les fondements de l'analyse en France », *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 28, 1983, p. 62.

[33] Ces deux mots ont été biffés.

[34] DARBOUX Gaston, *Conférences faites à l'École normale supérieure (3e année, Mathématiques),* t. I, MS 1704, Manuscrits de la bibliothèque de la Sorbonne, Paris, feuillet 76.

[35] *Ibid.*, feuillet 77.

Le mémoire de Darboux connaîtra en France un accueil assez froid[36]. Il ne correspondait pas aux préoccupations des mathématiciens français dont les recherches s'orientaient dans d'autres directions. L'étude des fonctions sans dérivées leur paraissait en général stérile. De plus, ce mémoire remettait en cause les conceptions qui guidaient l'enseignement du calcul différentiel et intégral. À commencer par celles de Joseph Bertrand dont la position institutionnelle dominait la communauté mathématique française. Nous avons vu que, dans son *Traité d'algèbre*, Bertrand considérait comme équivalentes la définition de la continuité selon Cauchy et la propriété des valeurs intermédiaires. Dans son *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral,* il démontrait que toute fonction continue est dérivable, sauf pour des valeurs particulières de la variable. La démonstration était inspirée de celle de Duhamel et l'hypothèse de la continuité, qui ne recevait pas même de définition, n'y était pas clairement formulée. La propriété pour une fonction continue d'être en général dérivable, même si elle n'était pas démontrée, se retrouvait dans tous les manuels. Il ne paraît donc pas surprenant qu'une revue comme les *NAM* n'évoquent à aucun moment ces travaux de Darboux dont elle avait annoncé un compte rendu dès 1873.

Darboux publiera en 1879 dans les *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* une « Addition au mémoire sur les fonctions discontinues ». Il y revient sur le raisonnement qu'il avait employé dans son premier mémoire à propos de l'exemple d'une fonction continue sans dérivée pour toute valeur de la variable. Ce deuxième mémoire prouve que cette question des fondements de l'analyse n'avait jamais complètement quitté ses préoccupations, alors même qu'il avait consacré ses recherches à des problèmes de géométrie différentielle. Dans ce deuxième mémoire, il propose en outre plusieurs autres exemples de fonctions continues sans dérivée et utilise la représentation d'un nombre incommensurable positif sous la forme :

$$\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{1.2} + \frac{\alpha_3}{1.2.3} + \cdots + \frac{\alpha_p}{1.2 \ldots p} + \cdots,$$

où α_1 est un entier positif quelconque et α_p un entier positif inférieur à p si $p > 1$. Cette représentation d'un irrationnel, due au mathématicien grec Cyparissos Stephanos, était, selon Darboux, en germe dans le mémoire de Riemann[37]. Elle lui permettait ici de construire des

[36] Voir GISPERT Hélène, *op. cit.*, et la section 3.1 intitulée « Les fondements de l'analyse : entre rejet des pairs et influence ultérieure des élèves » dans CROIZAT Barnabé, op. cit., p. 700-706.

[37] DARBOUX Gaston, « Addition au mémoire sur les fonctions discontinues », *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, *2e série*, t. 8, 1879, p. 195-202.

fonctions continues sans dérivées. Mais si Darboux ne pose pas la question de l'existence de la limite d'une telle suite de nombre rationnels, cette question est au cœur d'une autre problématique sur les fondements de l'analyse au cours des années 1870 : la construction des nombres irrationnels, ou incommensurables, les deux termes étant, à l'époque, employés de façon quasiment équivalente suivant les auteurs.

1 – 2 Les nombres irrationnels comme fondements de l'analyse (1869-1872)[38]

La question de la définition des nombres irrationnels comme préalable au calcul différentiel n'est pas neuve au début des années 1870. Nous avons vu au chapitre 2 que Duhamel plaçait cette définition dans les premiers chapitres de son cours de 1838 à l'École polytechnique. Il s'agissait pour lui de définir l'égalité de rapports incommensurables. Cette extension de la notion de nombre s'obtenait en considérant une grandeur continue. La ligne droite était le modèle le plus simple de grandeur continue. Duhamel construisait donc les nombres incommensurables à partir d'une représentation géométrique. De tous les auteurs dont nous avons analysé les textes jusqu'à cette époque, rappelons qu'il est le seul à situer ainsi ces nombres au début d'un cours d'analyse.

La notion de nombre incommensurable est, à l'époque, abordée dans les manuels d'arithmétique, à propos des racines carrées. L'idée de nombre incommensurable comme limite de nombres commensurables se retrouve chez Eugène Catalan dans son *Manuel des candidats à l'École polytechnique* publié en 1857.

Catalan ne pose pas la question de l'existence d'une limite. Elle est la conséquence, chez lui comme chez Duhamel, d'une extension de la notion de nombre justifiée par des considérations sur les grandeurs. Il précise :

> toutes les expressions numériques non réductibles à des nombres entiers ou fractionnaires, peuvent toujours être regardées comme représentant des grandeurs incommensurables avec la grandeur prise pour unité. […] Par une extension de l'idée attachée au mot nombre, on dit que ces expressions sont des nombres incommensurables ou irrationnels.[39]

Il considère alors la suite de fractions toutes égales à 2:

---

[38] Nous utilisons plus particulièrement dans cette section l'ouvrage de BONIFACE Jacqueline, *Les constructions des nombres réels dans le mouvement d'arithmétisation de l'analyse,* Paris, Ellipses, 2002. Voir aussi CAVAILLÈS Jean, *Philosophie mathématique*, Paris, Hermann, 1962.
[39] *Ibid.*, p. 19.

$$\frac{2.1}{1}, \frac{2.100}{100}, \frac{2.100^2}{100^2}, \frac{2.100^3}{100^3}, \frac{2.100^4}{100^4}, \dots$$

En prenant les valeurs approchées entières par excès et par défaut du numérateur, divisées par la racine carrée du dénominateur, il obtient les suites adjacentes :

$$\begin{array}{llllll} 1, & 1{,}4, & 1{,}41, & 1{,}414, & 1{,}4142, & \dots \\ 2, & 1{,}5, & 1{,}42, & 1{,}415, & 1{,}4143, & \dots \end{array}$$

Catalan avance deux arguments pour justifier que ces suites ont une limite : d'une part leur différence a pour limite zéro, d'autre part les suites formées par les carrés de ces suites ont pour limite 2. Il conclut en affirmant que $\sqrt{2}$ est « la limite des nombres dont les carrés ont pour limite 2 »[40].

Il définit ensuite le produit d'un nombre commensurable par un nombre incommensurable. Il conclut que la « considération des limites prouve encore simplement que les théorèmes démontrés pour des nombres commensurables quelconques, subsistent pour les nombres incommensurables limites des premiers »[41], démontrant en exemple ce que nous appelons aujourd'hui la commutativité du produit de deux nombres incommensurables.

La définition de Catalan est reprise par un certain nombre d'auteurs de manuels d'arithmétique et d'algèbre. Ainsi, le *Traité d'arithmétique* de Eugène Cassanac, en 1858, affirme : « Cela posé, nous dirons avec M. Catalan : la racine carrée de 7 *est la limite des nombres dont les carrés ont 7 pour limite* »[42]. Nous avons vu aussi que Laurent introduisait les nombres incommensurables comme limites de nombres commensurables au premier chapitre de son *Traité d'algèbre* de 1867[43]. La définition d'un nombre incommensurable

[40] CATALAN Eugène, *Manuel des candidats à l'École polytechnique*, tome I, Paris, Mallet-Bachelier, 1857, p. 20. Une note de bas de page insiste sur la revendication de cette définition des nombres incommensurables: « Nous avons proposé, il y a déjà bien des années, cette définition ; repoussée d'abord, elle a été adoptée depuis » : voir *supra*, p. 159, la note de bas de page 138.
[41] *Ibid.*, p. 21.
[42] CASSANAC Eugène, *Traité d'arithmétique*, Paris, édité par l'auteur, 1858, p. 137.
[43] Laurent reviendra en 1902 sur la définition des nombres incommensurables dans un ouvrage intitulé *Sur les principes généraux de la théorie des nombres et de la géométrie* (Paris, Scientia, 1902). Il n'y évoque plus la notion de grandeur mais uniquement de quantité et développe des conceptions très personnelles de la construction des nombres (voir RENAUD Hervé, « Quand les matthématiques modernes questionnent les méthodes pédagogiques dans l'enseignement secondaire (1904-1010) », dans Evelyne BARBIN, Uffe Thomas JANKVIST et Tinne Hoff KJELDSEN (éditeurs), *History ans Epistemology in Mathematics Education, Proceedings of the Seventh European Summer University*, Copenhague, 2015, p. 781-798). L'ouvrage date du début du XXe siècle, après l'achèvement de l'arithmétisation de l'analyse. Rien ne nous permet de supposer que Laurent avait développé ces conceptions en 1867

comme limite d'une suite de nombres commensurables est donc une définition usitée à la fin des années 1860 dans des manuels français.

Signalons aussi la conception des incommensurables proposée par Bertrand dans son *Traité d'arithmétique* publié en 1849. Il définit ainsi la racine carrée d'un nombre N qui n'est le carré d'aucun nombre entier ou fractionnaire :

> Pour définir les grandeurs dont $\sqrt{N}$ est la mesure, supposons par exemple, qu'après avoir adopté une certaine unité de longueur on regarde tous les nombres comme exprimant des longueurs portées sur une même ligne droite à partir d'une extrémité donnée. Une portion de cette ligne recevra les extrémités des longueurs dont la mesure est moindre que $\sqrt{N}$, et une autre portion celle des lignes dont la mesure est plus grande que $\sqrt{N}$; entre ces deux régions, il ne pourra évidemment exister aucun intervalle, mais, seulement, un point de démarcation.[44]

Cette définition, qui présuppose toujours l'existence d'un continu géométrique, n'utilise pas les limites de suites. Elle est construite sur ce que nous appellerions de nos jours la partition d'une droite en deux demi-droites ouvertes séparées par un point.

L'objectif des quatre constructions des nombres irrationnels qui vont paraître en 1869 et 1872 est tout autre. Pour leurs auteurs, le français Charles Méray, les allemands Cantor, Heine et Dedekind, l'élaboration d'une théorie des nombres irrationnels sur des bases purement arithmétiques est un préalable à la démonstration rigoureuse des théorèmes fondamentaux de l'analyse. Pour Méray, Heine et Dedekind, des préoccupations d'enseignants sont, de façon plus moins directe, à la base de ces constructions. C'est le cas aussi de Weierstrass. Son cours, s'il n'est pas publié à cette époque, est essentiel puisqu'il inspire toute une génération de mathématiciens et trouve des résonances en France.

Les quantités fictives de Méray pour introduire l'analyse infinitésimale (1869)

Né en 1835, Méray est un ancien élève de l'École normale supérieure[45]. Entré en 1854, il y a suivi les cours de calcul différentiel et intégral de Lefébure de Fourcy. Il est professeur au lycée de Saint-Quentin puis, après un congé de sept ans, à la Faculté des sciences de Lyon. Il est nommé en 1867 sur la chaire de calcul différentiel et intégral de la Faculté des sciences de Dijon. Il publie en 1869 un article intitulé « Remarques sur la nature des quantités définies par

[44] BERTRAND Joseph, *Traité d'Arithmétique*, Paris, Hachette, 1849, p. 175.
[45] Sur Méray et sa construction des nombres irrationnels, voir DUGAC Pierre, « Charles Méray (1835-1911) et la notion de limite », *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 1970, vol. 23, p. 333-350.

la condition de servir de limites à des quantités données » dans la *Revue des Sociétés Savantes.* Le rôle fondamental de la notion de limite en analyse l'amène à élaborer une théorie des nombres irrationnels. Le caractère artificiel de nombreuses démonstrations qui utilisent des arguments géométriques le conduisent à construire sa théorie sur des bases purement arithmétiques. Cette construction introduira le manuel d'analyse qu'il publie en 1872, intitulé *Nouveau précis d'analyse infinitésimale.*

Pour Méray, les nombres entiers sont les seuls nombres véritables L'impossibilité d'effectuer les opérations de l'arithmétique élémentaire avec ces seuls nombres pousse, selon lui, les mathématiciens à créer des nombres « fictifs ». Les premiers nombres fictifs créés sont les nombres fractionnaires. Pour créer ce qu'il nomme les quantités incommensurables, Méray utilise les suites convergentes, suites qu'il nomme « variantes » ou « variables progressives ».

Les théories mathématiques qui utilisent la notion de limite reposent, selon lui, sur les deux « principes » suivants : 1 – toute suite croissante (i.e décroissante) majorée (i.e minorée) a une limite ; 2 – toute suite vérifiant le critère dit aujourd'hui de Cauchy a une limite[46]. Il démontre le deuxième principe sous l'hypothèse du premier. Ce deuxième principe était, écrit-il, jusqu'alors considéré comme un axiome,

Il aborde ensuite la question de l'existence de la limite. Dans le cas où une variable progressive qui vérifie le second principe n'a pas de limite rationnelle il propose de dire qu'elle admet une limite fictive, incommensurable. Il démontre que deux de ces « quantités fictives » sont égales si les variables progressives sont équivalentes, c'est-à-dire si leur différence a pour limite 0. La définition des fonctions rationnelles de quantités incommensurables lui permet de définir la notion de fonction transcendante et de conclure qu'à toute « quantité incommensurable correspond une infinité de variables progressives (commensurables) convergentes »[47].

---

[46] Ce critère figure dans l'ouvrage de Cauchy, *Cours d'analyse à l'École royale polytechnique,* en 1821. Il avait été énoncé dès 1817 par Bolzano(voir SINACEUR Hourya, « Cauchy et Bolzano, *Revue d'Histoire des Sciences*, vol. 26, 1973, p. 97-112). Méray, qui ne lui attribue pas de nom, l'écrit de la façon suivante : [*une quantité variable v_i qui prend successivement les valeurs en nombre indéfini : $v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$ .tend vers une certaine limite], si la différence v_{n+p}-v_n tend vers zéro quand n augmente indéfiniment, quelque relation qu'on puisse établir entre n et p.*

[47] MERAY Charles, « Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limite à des variables données », *Revue des Sociétés savantes*, *2e série*, t. IV, 1869, p. 287.

La différence entre l'approche de Méray et celles de Duhamel ou de Catalan est essentielle. Sa notion de nombre est étendue à partir des nombres eux-mêmes, sans recours à la notion de grandeur continue. Cependant, cet article de Méray semble ne pas avoir eu d'écho dans la communauté mathématique. Son *Nouveau précis d'analyse infinitésimale* propose de ne considérer que les fonctions qui possèdent la propriété d'être développables en série de Taylor. Cette restriction constituera le reproche majeur adressé à cet ouvrage dans la recension écrite par Laurent dans le *BSM* de 1873. Ce compte rendu ne cite pas explicitement la théorie des incommensurables. 0n peut cependant imaginer que Laurent y pense lorsqu'il écrit : « les méthodes employées dans cet Ouvrage sont tellement subtiles, tellement délicates, qu'elles ne sauraient être bien comprises que par des personnes familiarisées avec les spéculations de la haute Analyse »[48].

Il semble donc que les critiques contre la teneur générale de l'ouvrage aient occulté le caractère novateur de la théorie des incommensurables de Méray. Enfin, signalons que, dans le *BSM* de l'année précédente, figure un article de Jean-Claude Bouquet qui revendique la priorité de la démonstration d'un théorème portant sur les solutions d'un système d'équations différentielles publié dans le même ouvrage de Méray[49]. L'existence de malentendus entre Méray et des universitaires parisiens n'a probablement pas facilité la prise en considération de ses travaux.

Les domaines de Cantor pour l'étude des séries trigonométriques (1872)

Né en 1845, Cantor a étudié à l'École polytechnique de Zürich avant de suivre les cours de Ernst Kummer, Leopold Kronecker et Weierstrass à l'Université de Berlin. Il s'installe ensuite à Halle comme Privatdozent. Son intérêt se porte sur l'analyse, et en particulier les séries trigonométriques. C'est dans le cadre de ces recherches, pour des considérations purement mathématiques qu'il s'intéresse à la construction des nombres irrationnels. Il publie en 1872 dans les *Mathematische Annalen,* un article qui sera traduit en français en 1883, dans les *Acta*

[48]LAURENT Hermann, « Méray (Ch.), Nouveau précis d'Analyse infinitésimale *», Bulletin des Sciences Mathématiques et astronomiques*, t. IV, 1873, p.27.
[49] BOUQUET Jean-Claude, « Sur l'intégration d'un système d'équations différentielles totales simultanées du premier ordre », *Bulletin des Sciences mathématique et astronomiques*, t. 3, 1872, p. 265-274.

Mathematica, sous le titre « Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques »[50].

Dans un article précédent, Cantor avait démontré l'égalité des coefficients des séries :

$$\frac{b_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{et} \quad \frac{b'_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a'_n \cos nx + b'_n \sin nx)$$

quand, pour toutes les valeurs de x, elles convergent et ont des sommes égales. Il avait ensuite démontré que le théorème reste vrai si, pour un nombre fini de valeurs de x, on abandonne soit la convergence, soit la concordance des sommes. Il se propose d'étendre le théorème en renonçant à la convergence ou à l'égalité des sommes pour un nombre infini de valeurs dans l'intervalle $[0\,;2\pi]$. Sa construction des irrationnels fait partie des préliminaires à ce théorème.

Partant des nombres rationnels supposés connus, qu'il désigne sous le nom de domaine A, sa construction utilise, comme chez Méray, des suites qui vérifient le *critère de Cauchy*. Une suite qui vérifie cette propriété est une suite « qui a une limite déterminée b », « ces mots [n'ayant] d'abord d'autre sens que celui d'exprimer cette propriété de la suite » et de la relier à « un signe particulier b »[51]. Il définit ensuite les relations : =, < et > sur ces symboles qu'il qualifie de « grandeurs numériques ». Il désigne par B l'ensemble des grandeurs numériques b puis, sur les domaines A et B réunis, il définit les opérations arithmétiques élémentaires : addition, soustraction, multiplication et division.

Il peut alors réitérer son procédé à partir de A et B : en considérant les suites convergentes d'éléments de A et B, il construit un nouveau domaine C. Il remarque que si B et C coïncident[52], ce n'est pas le cas de A et B. Il insiste cependant pour ne pas considérer B et C comme identiques et pour maintenir la différence conceptuelle entre ces deux domaines. La construction peut se poursuivre avec de nouveaux domaines D, E, etc.

---

[50] CANTOR Georg, « Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen ». Le court résumé de cette théorie que nous donnons utilise la traduction de Jacqueline BONIFACE, dans BONIFACE Jacqueline, *op. cit*. Sur Cantor, voir aussi BELNA Jean-Pierre, *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege. Théories, conceptions et philosophie*, Paris, Vrin, 1996, et le chapitre 3 intitulé « Cantor : Mathematics as Mengenlehre », qui évoque aussi les constructions de Dedekind et dans GRATTAN-GUINNESS Ivor, *The Search for Mathematical Roots 1870-1940: Logics, Sets Théories and the foundations of Mathematics from Cantor through Russel to Gödel*, Princeton, Princeton University Press, 2000, p. 75-124.

[51] CANTOR Georg, « Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen ». traduction de J. BONIFACE, dans BONIFACE Jacqueline, *op. cit.,* p. 74.

[52] En termes actuels, B est complet.

Cantor revient ensuite à une droite orientée pour montrer qu'à tout point de la droite on peut associer un nombre du système A ou une grandeur numérique du système B. La réciproque, c'est-à-dire qu'à chaque grandeur numérique on puisse associer un point de la droite, est appelée un axiome. Cet axiome présente, pour Cantor, l'intérêt de donner une certaine objectivité aux grandeurs numériques.

La construction des irrationnels de Cantor semble ignorée en France alors que le *BSM* de 1872 signale son article précédent sur les séries[53], qui en est à l'origine.

Les signes numériques de Heine : lever les doutes sur les théorèmes fondamentaux de Weierstrass (1872)

Heine est né en 1821. Il étudie dans les Universités de Göttingen, Berlin et Königsberg. A Berlin il reçoit notamment l'enseignement de Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet. Il est nommé professeur à l'Université de Halle en 1848. Il reconnaît avoir emprunté à Cantor l'idée d'introduire ce qu'il appelle « nombres généralisés » par les suites. Cette construction des nombres irrationnels constitue la première partie du mémoire intitulé *Die Elemente der Funktionenlehre* qu'il publie en 1872[54]. Ce texte constitue « le premier travail d'ensemble sur les fondements de l'analyse »[55]. S'il ne s'agit pas d'un manuel, ces *Éléments de la théorie des fonctions* constituent cependant bien les bases d'un enseignement de l'analyse.

En introduction au mémoire, Heine estime que l'absence d'une définition rigoureuse des nombres irrationnels est la cause essentielle des doutes qui subsistent sur les démonstrations des théorèmes fondamentaux de Weierstrass. Il construit lui aussi les nombres irrationnels à partir des suites dites de Cauchy, qu'il nomme « suites numériques ». Les nombres ne sont pour lui que des signes créés au fur et à mesure des besoins. Partant des nombres entiers, il introduit les nombres négatifs, les nombres fractionnaires puis les irrationnels à partir des suites numériques, qu'il désigne par un signe appelé « nombre plus général » ou « signe numérique ». Ces nombres plus généraux sont appelés « irrationnels de premier ordre ». Il

---

[53] Il ne s'agit ni d'une recension ni d'un résumé. L'existence de la note de Cantor dans le *Journal für die reine und angewandte Mathematik* est seulement signalée en p. 144.
[54] HEINE Heinrich, « Die Elemente der Funktionenlehre », *Journal für die reine un andgewandte Mathematik*, traduction de J. Boniface,1872, dans BONIFACE Jacqueline, *op. cit.*, p. 86-93.
[55] DUGAC Pierre, *op. cit*., p. 150.

démontre que les nombres irrationnels d'ordre supérieur que l'on peut former à partir des irrationnels de premier ordre correspondent à ceux du premier ordre.

Pour souligner l'importance de ce mémoire de Heine, rappelons que la deuxième partie donne la définition d'une fonction « uniformément continue », la première démonstration complètement rigoureuse du *théorème des valeurs intermédiaires* et la démonstration qu'une fonction continue sur un intervalle fermé borné atteint ses bornes. Il y démontre également que toute fonction continue sur un tel intervalle est uniformément continue.

Le *BSM* de 1872 donne une brève recension non signée du mémoire de Heine. L'auteur attire l'attention sur l'intérêt du mémoire pour l'enseignement de la théorie des fonctions, y trouvant une « sobre exactitude » qui n'est pas celle des « traités élémentaires ». Renvoyant au cours de Weierstrass dont certains « géomètres, qui ne connaissent pas sa méthode, ne veulent pas toujours accepter cette base inédite de son système »[56], l'auteur indique que Heine, « ami de M. Weierstrass, prend la peine de publier quelques-uns des théorèmes élémentaires ». Et il termine en attirant l'attention sur la « définition des nombres par des séries infinies [qui] sert à éluder les difficultés qui font toujours les nombres irrationnels ».

En 1880, le *BSM* signale la parution du premier tome de l'ouvrage du mathématicien allemand Rudolf Lipschitz, *Grundlagen der Analysis* publié en 1877. Reprenant le plan de l'ouvrage il indique simplement : « nombres rationnels et irrationnels ». Lipschitz propose dans cet ouvrage la définition de Heine des nombres irrationnels.

Les coupures de Dedekind : définir les nombres irrationnels pour enseigner le calcul différentiel (1872)

Né en 1831, Dedekind étudie à l'Université de Göttingen où il rencontre Riemann. Sous la direction de Gauss, sa thèse de doctorat porte sur les intégrales eulériennes. En 1854, nommé Privatdozent à Götingen, il suit les conférences de Dirichlet avec lequel il se lie d'amitié. En 1858, il est nommé à l'École polytechnique de Zürich. Cette année-là, ce sont, dit-il, les nécessités de l'enseignement du calcul différentiel qui le poussent à rédiger le texte *Continuité*

[56] « Heine (H.). – Les éléments de la théorie des fonctions (17 p.) », *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, t. 3, 1872, p. 264.

et nombres irrationnels. L'arithmétique manque selon lui d'un fondement scientifique sérieux[57]. Le texte sera publié en 1872.

Dedekind constate que, si « le calcul différentiel s'occupe des grandeurs continues, [..] nulle part n'est donné une explication de cette continuité »[58]. Son travail vise donc à découvrir, dans l'arithmétique, « une définition véritable de l'essence de la continuité »[59]. Associant un nombre rationnel à chacun des points d'une droite, et observant que « la droite L est infiniment plus riche en individus-points que le domaine R des nombres rationnels n'est riche en individus-nombres »[60], il se propose de créer de nouveaux nombres qui assureront au domaine des nombres la même complétude que la droite.

La droite lui fournit ce qu'il appelle « l'essence de la continuité », qui est d'ordre axiomatique :

> Si l'on répartit tous les points de la droite en deux classes telles que chaque point de la première classe soit situé à gauche de chaque point de la deuxième classe, alors il existe un point et un seul qui engendre cette partition de tous les points de la droite, cette découpe de la droite en deux parties.[61]

Il parvient à la continuité du domaine des nombres sans recourir à la géométrie. Il observe que tout nombre rationnel a partage les nombres rationnels en deux classes A_1 et A_2 telles que chaque nombre a_1 de la classe A_1 est plus petit que tout nombre $a_2$de la classe A_2. Le nombre a est soit le plus petit de la classe A_2, soit le plus grand de la classe A_1. Une telle partition du domaine des rationnels, il l'appelle « une coupure » et la désigne par (A_1 , A_2). Puis il observe qu'il existe une infinité de coupures qui ne sont pas engendrées par les nombres rationnels : il le démontre dans le cas d'un entier positif qui n'est pas le carré d'un entier. Chaque fois que le cas se présente, il crée un nouveau nombre, un irrationnel parfaitement défini par cette coupure. Il obtient ainsi un système R de nombres qu'il qualifie de réels, sur lesquels il peut définir les relations de comparaison.

Il démontre alors que ce système de nombres possède la « propriété de continuité » :

---

[57] Voir de DUGAC Pierre, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Paris, Vrin, 1976, et le chapitre intitulé « Richard Dedekind ou l'abstraction souveraine » dans *Histoire de l'analyse*, Paris, Vuibert, 2003, p. 153-184, et SINACEUR Hourya, *Richard Dedekind et la création des nombres,* Paris, Vrin, 2008.

[58] DEDEKIND Richard, « Stetigkeit und irrationale Zahlen », cité par BONIFACE Jacqueline, *op. cit.*, p. 101, traduction de Jacqueline BONIFACE.

[59] *Ibid.*, p. 102.

[60] *Ibid*., p. 105.

[61] *Ibid*, p.106.

> Si on décompose le système R de tous les nombres réels en deux classes A_1et A_2 telles que chaque nombre $\alpha_1$de la classe A_1soit plus petit que tout nombre α_2 de la classe A_2, alors il existe un et un seul nombre qui engendre cette composition.[62]

Pour terminer, il définit les opérations arithmétiques élémentaires sur R, explique qu'on obtient de cette manière la preuve de propositions comme : $\sqrt{3}\sqrt{2}=\sqrt{6}$ « qui n'avaient jamais encore, à [sa] connaissance, été démontrées »[63].

Précisons qu'en 1878, dans une lettre à son ami le mathématicien allemand Heinrich Weber, Dedekind proposera d'enseigner au lycée l'introduction des irrationnels par la méthode des coupures[64].

Les agrégats de Weierstrass pour enseigner la notion de limite (1878)

Enfin, il nous paraît important de rappeler ici les conceptions de Weierstrass dont le cours a été une source d'inspiration majeure pour toute une génération de jeunes mathématiciens en Europe. Le bref compte rendu que nous en donnons est basé sur un cours de 1878, rédigé par son élève Adolf Hurwitz[65]. Il s'agit là encore, dans le cadre d'un enseignement, de fonder la théorie des fonctions sur des principes rigoureux. On ne peut, pour Weierstrass, parler de la limite d'une suite de nombres rationnels si les nombres irrationnels n'ont pas été définis. Il propose de les définir sur des bases arithmétiques.

Un nombre entier positif est pour lui un agrégat d'unités. Les définitions de l'addition et de la multiplication lui permettent de définir les parties exactes de l'unité : $\frac{1}{a}$ est l'élément qui multiplié par a donne l'unité. Il définit ensuite les nombres complexes composés d'agrégats de l'unité et de parties exactes de l'unité. Les premiers nombres complexes sont les nombres rationnels, qui ont une infinité d'écritures possibles, par exemple :

$$\frac{11}{3}=3+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=3+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}.$$

Il étend à ces grandeurs numériques les lois de l'addition et de la multiplication.

---

[62] *Ibid*, p.111.

[63] *Ibid*, p.112.

[64] Voir la « Lettre de Dedekind à Heinrich Weber, *19 novembre 1878* », traduite par Hourya Sinaceur dans SINACEUR Hourya, *op. cit.*, p. 288-290. Le terme lycée traduit le mot allemand « Gymnasium ».

[65] WEIERSTRASS KARL, « Introduction à la Théorie des fonctions analytiques (semestre d'été 1878), Rédigé par Adolf Hurwitz », trad. de J. Boniface, dans BONIFACE Jacqueline, *op. cit.*, p. 35-46. Sur Weierstrass, voir aussi DUGAC Pierre, « Éléments d'analyse de Karl Weierstras », *Archive for History of Exact Science*, n° 10, 1973, p. 41-176.

Il obtient de nouvelles grandeurs numériques en utilisant des agrégats composés de l'unité et d'une infinité de parties exactes de l'unité. On y trouve des nombres « finiment » grands et des nombres infiniment grands. Il écrit qu'on ne peut pas calculer avec ces derniers. Il définit donc l'addition et la multiplication pour les nombres finis.

Ces grandeurs numériques qui ne sont pas elles-mêmes des rationnels sont donc des irrationnels. Pourtant Weierstrass n'écrit pas qu'il les assimile aux irrationnels, ni que se pose la question de leur existence. Il s'intéressera à l'existence des irrationnels dans son cours de 1886.

Des conceptions de l'enseignement qui s'opposent

L'enseignement de la construction weierstrassienne des irrationnels est l'objet d'échanges entre Hermite et le mathématicien suédois Gösta Mittag-Leffler[66]. En 1881, ce dernier annonce dans une lettre à Hermite qu'il compte enseigner la théorie des nombres irrationnels de Weierstrass au début de ses leçons à l'Université de Stockholm. En réponse, Hermite le met en garde contre cette idée. Il pense

> que l'appareil si complexe de la rigueur moderne, et le caractère abstrait qu'elle revêt, peut n'être pas absolument profitable pour les commençants, ou du moins qu'il est utile de reléguer à la fin, en la réservant pour le couronnement de l'édifice, cette rigueur qui n'est point toujours suffisamment instructive.[67]

Rappelons qu'en 1881, Hermite est alors professeur d'algèbre supérieure à la Sorbonne et remarquons que sa réponse montre sans conteste qu'il a une connaissance précise de la théorie de Weierstrass.

Mittag-Leffler lui répond en affirmant qu'il n'est plus possible d'enseigner ce que l'on sait être faux : « Comment voulez-vous démontrer par exemple que chaque fonction continue a une dérivée, quand vous savez que c'est fautif ? »[68]. Il dénonce les démonstrations fautives de la nouvelle édition du calcul intégral de Serret et considère le « système de Monsieur Weierstrass […] simple et naturel, en même temps que rigoureux »[69]. Hermite, en retour, développe sa conception de l'enseignement, considérant que « la démarche historique [est]

---

[66] Voir le chapitre intitulé « Lettres d'Hermite à Mittage-Leffler » dans DUGAC Pierre, *op. cit.*, p. 196-219.
[67] HERMITE Charles, cité dans DUGAC Pierre, *op. cit.*, p. 199.
[68] MITTAG-LEFFLER Gösta, cité dans DUGAC Pierre, *op. cit.*, p. 199.
[69] *Ibid.*, p. 199.

incontestablement conforme à la nature de notre esprit »[70]. Prenant l'exemple de la question de la dérivabilité d'une fonction continue, il annonce qu'il expliquerait « que la question s'est posée d'établir l'existence de la dérivée comme conséquence de la continuité », et qu'à la suite d'Ampère, « la plupart des auteurs jusqu'à M. Serret ont cru avoir démontré l'existence de la dérivée de toutes les fonctions continues »[71], se réservant de revenir plus tard sur les découvertes de Schwarz et de Weierstrass.

L'opposition entre ces deux conceptions pédagogiques est frontale. À l'introduction rigoureuse de Mittag-Leffler, Hermite oppose une démarche historique qui justifiera en retour, après que les bases seront établies, la nécessité d'une construction rigoureuse. Rappelons que cette démarche historique pour l'enseignement des mathématiques s'inscrit dans la durée. Jean-Baptiste Dumas, dans son rapport de 1847 sur l'état de l'enseignement scientifique en France[72], incitait à utiliser l'histoire des sciences. Il tenait des propos proches de ceux d'Alexis Clairaut près d'un siècle plus tôt[73]. En 1869, le Ministre de l'Instruction publique, Victor Duruy, avait instauré, dans les épreuves d'admissibilité des agrégations scientifiques, une épreuve de sept heures portant sur « une question de méthode et d'histoire des sciences », épreuve qui, en mathématiques était restée en place jusqu'en 1878.

Si les constructions de Cantor et Dedekind semblent inconnues en France au début des années 1880, ce n'est pas le cas de celles de Heine et de Weierstrass. Il apparaît que, plus que la méconnaissance de ces théories, ce sont les conceptions dominantes de l'enseignement qui s'opposent, en France, à l'introduction de ces théories dans l'enseignement de l'analyse.

1 – 3 Les premiers éléments de la théorie des ensembles[74]

Les travaux de Cantor qui met au point les premiers éléments de ce qui sera la théorie des ensembles dans les années 1870 semblent tout autant ignorés des mathématiciens français

---

[70] *Ibid.*, p. 200.

[71] *Ibid.*, p. 200.

[72] Voir le « Rapport sur l'état actuel de l'enseignement scientifique par la faculté des sciences de Paris » cité dans le « Rapport sur l'enseignement de l'École polytechnique », *Supplément au N°12 du Moniteur Universel,*1851, p. IV.

[73] Voir HULIN Nicole, « L'histoire des sciences et l'enseignement scientifique. Une composition en histoire des sciences à l'agrégation », *Revue de Synthèse, 4e série*, n° 2-3-4, 2001, p. 393-410.

[74] Sur l'histoire de cette théorie, voir BELNA Jean-Pierre, *Histoire de la théorie des ensembles*, Paris, Ellipses, 2009.

que sa construction des nombres irrationnels. Ils seront publiés dans *Journal für die reine und angewandte Mathematik* jusqu'en 1877, puis dans les *Mathematische Annalen* de Leipzig[75].

Dans son mémoire de 1872, à la suite de la définition des irrationnels, par analogie avec les grandeurs numériques de $n^{\text{ème}}$ espèce, il introduisait les systèmes de points dérivés d'un système de points P de la droite : le système P', dérivé de P est le système des points limites[76] de P, c'est-à-dire en langage actuel, l'ensemble formé des points d'accumulation de P. Il définissait de même P'', P''', ….., $P^{(\upsilon)}$. P était dit de υ^{e} espèce si $P^{(\upsilon)}$ne donnait naissance à aucun autre système, c'est-à-dire s'il ne possédait aucun point d'accumulation. L'utilisation de ces systèmes de points lui permettait de démontrer son théorème sur les séries.

Par la suite, Cantor développe sa théorie, soumettant régulièrement ses idées à Dedekind[77]. Ce dernier aura ainsi l'occasion de compléter la démonstration de Cantor sur l'existence d'une bijection entre les entiers positifs et l'ensemble des nombres algébriques.

Cantor nomme ensembles de « même puissance » deux ensembles infinis de points entre lesquels on peut établir, en langage actuel, une bijection. En 1873 il démontre que l'ensemble des entiers positifs et l'intervalle $]0;1[$ ne sont pas de même puissance. Ces travaux sont reçus avec réserve à Berlin et Weierstrass lui conseille de supprimer de son article les différences de nature entre les ensembles.

En 1877, il démontre : « On peut faire correspondre d'une façon complète et à sens unique un ensemble continu à n dimensions à un ensemble continu d'une seule dimension »[78].

De 1879 à 1883 il publie une série de travaux dans lesquels il étudie les sous-ensembles infinis de **R**, il introduit la notion d'ensemble partout dense, et d'ensemble parfait (tel que $P' = P$). Il définit la réunion et l'intersection[79] d'un nombre quelconque d'ensembles, introduit la notion d'ensemble vide. Puis il définit $P^{(\omega)}$ l'ensemble dérivé de P d'ordre ω par :

$$\mathrm{P}^{(\omega)} = \bigcap_{n \in \mathrm{N}^*} \mathrm{P}^{(\mathrm{n})}$$

---

[75] Voir le chapitre intitulé, « Cantor, le combattant de l'infini », dans DUGAC Pierrre, *op. cit.*, p. 185-185.
[76] Cette notion de point limite avait été introduite par Weierstrass.
[77] Cette correspondance entre Cantor et Dedekind est traduite dans CAVAILLÈS Jean, *op. cit.*
[78] CANTOR Georg, « Une contribution à la théorie des ensembles *», Acta Mathématica ,* vol. 2, 1883, p. 315.
[79] Il utilise pour ces notions le vocabulaire de l'arithmétique : l'intersection d'ensembles est leur plus grand diviseur commun, la réunion leur plus petit multiple commun.

En poursuivant, il définit : $P^{(\omega+1)}, P^{(\omega+2)}, \ldots, P^{(\omega'')}, \ldots, P^{(\omega^\omega)}$, appelant « symboles de l'infini » les symboles : $\omega, \omega+1, \omega+2, \ldots$.

Les travaux de Cantor sur la classification des ensembles infinis se diffusent en France par l'intermédiaire de Mittag-Leffler qui les utilise dans sa note *Sur la théorie des fonctions uniformes d'une variable* présentée en 1882 à l'Académie des Sciences de Paris[80]. Repartant de ce travail, Henri Poincaré les emploie peu après dans sa note à l'Académie *Sur les fonctions fuchsiennes*[81]. Mittag-Leffler a aussi évoqué les travaux de Cantor sur les ensembles infinis dans une lettre à Hermite. Ce dernier insiste pour en avoir connaissance. Mittag-Leffler propose de les faire traduire. Leur traduction française est publiée en 1883 dans les *Acta Mathematica*, journal qu'il a fondé l'année précédente.

Il s'agit d'une traduction dans laquelle Cantor a accepté de supprimer les commentaires philosophiques et historiques, Poincaré ayant jugé, selon Hermite, « que les lecteurs français [seraient] à peu près tous absolument *réfractaires* aux recherches à la fois philosophiques et mathématiques de M. Cantor, où l'arbitraire a trop de part »[82]. Mais, plus que les considérations philosophiques, « qu'on serait toujours libre de passer », ce sont, selon Poincaré, les nombres et la 2e et de la 3e classe qui « ont un peu l'air d'une forme sans matière, ce qui répugne à l'esprit français »[83]. Poincaré juge cependant importants, bien que prématurés, ces travaux de Cantor tandis que Paul Appell et Émile Picard y sont récalcitrants. Poincaré, Appell et Picard sont à cette époque, selon le mot de Hermite les « trois étoiles » des mathématiques françaises, Poincaré lui semblant la plus brillante. Hermite précise son opinion dans une lettre suivante : « l'impression que nous produisent les mémoires de M. Cantor est désolante ; leur lecture nous semble à tous un véritable supplice, et […] en reconnaissant qu'il a ouvert comme un nouveau champ de recherches, personne de nous n'est tenté de le suivre ». Il précise : « la correspondance entre les points d'une ligne et d'une surface nous laissent absolument indifférents »[84].

---

[80] Voir la section intitulée « Georg Cantor et les mathématiciens français », dans DUGAC Pierre, *op. cit.*, p. 198-214.

[81] Voir GISPERT Hélène, « La théorie des ensembles en France avant la crise de 1905 », *Revue d'Histoire des Mathématiques*, N° 1, 1995, p. 39-81.

[82] HERMITE Charles, cité dans DUGAC Pierre, *op. cit.*, p. 204.

[83] POINCARÉ Henri, cité dans DUGAC Pierre, *op. cit.*, p. 205.

[84] HERMITE Charles, cité dans DUGAC Pierre, *op. cit.*, p. 207.

Les réactions des mathématiciens français sont finalement plus partagées que ne le laissent penser ces lettres de Hermite. Si les symboles de l'infini sont rejetés, le reste de la théorie est reçu de façon plus positive. Nous avons vu que Poincaré l'utilisait dès 1882. En 1884, le *BSM* publie une recension de la traduction des articles de Cantor signée de Tannery. Il admet que les symboles de l'infini « choquent sans doute les habitudes », voire provoquent une certaine « répugnance ». Il ne voit non plus guère d'intérêt, autre que philosophique, à l'existence d'une bijection entre un continu à une dimension et un continu à n dimensions. Mais, il écrit : « il n'en est pas de même de la notion des ensembles dérivés dont l'importance, au point de vue mathématique, ne saurait échapper au lecteur »[85].

Cependant, plus encore que les travaux sur les fonctions discontinues ou les nombres irrationnels, la théorie des ensembles paraît, au début des années 1880, bien loin de trouver une place dans l'enseignement secondaire[86].

2 – Deux manuels qui diffusent les nouveaux fondements de l'analyse (1886-1887)

Malgré les réticences marquées contre l'enseignement des nouveaux fondements de l'analyse, les premiers manuels français à proposer les nouvelles théories sont publiés en 1886 et 1887. Ils sont l'œuvre de deux personnalités qui jouent un rôle de premier plan dans le système éducatif. L'un et l'autre enseignent en effet dans les deux écoles les plus prestigieuses : Tannery à l'École normale supérieure, et Jordan à l'École polytechnique.

2 – 1 L'*Introduction à la Théorie des fonctions d'une variable* de Tannery : une révision des principes de l'analyse à l'École normale supérieure (1886)

Né en 1848, Tannery est reçu premier à l'École normale supérieure en 1866[87]. Il suit les cours de calcul différentiel et intégral de Serret à la Sorbonne. Après l'agrégation il enseigne deux années en mathématiques spéciales aux lycées de Rennes et Caen. Il revient comme agrégé préparateur en 1872 à l'École normale supérieure. Il prépare une thèse sous la direction de

[85] TANNERY Jules, « Cantor (G), …, Bendixson (J) », *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, 2e série*, t. 8, 1884, p. 167.
[86] Voir GISPERT Hélène, « La théorie des ensembles en France avant la crise de 1905 », *Revue d'Histoire des Mathématiques*, N° 1, 1995, p. 39-81.
[87] Pour la biographie de Tannery, voir BOREL Émile, « Jules Tannery », *La Revue du mois*, Paris, janvier 1911, et PICARD Émile, « La vie et l'œuvre de Jules Tannery », *Académie des Sciences*, lecture faite dans la séance publique annuelle du 14/12/1925 et TANNERY Jules, *Notice sur les travaux scientifiques de Jules Tannery*, Paris, Gauthier-Villars, 1901

Hermite sur les équations différentielles linéaires à coefficients variables. Il côtoie Darboux et le rejoint à la rédaction du *BSM* en 1876. Dans le cadre de sa collaboration à cette revue, Tannery traduira le texte de la communication de Weierstrass à l'Académie des Sciences de Berlin, *Zur Functionenlehre*[88], et il proposera au mathématicien allemand une série plus simple que celle de Weierstass valant -1 dans une région du plan et +1 dans une autre. Weierstrass en fera une lecture à l'Académie de sciences de Berlin[89]. En 1881, il succède à Darboux comme maître de conférences à l'École normale supérieure, ce dernier succédant à Chasles dans la chaire de géométrie supérieure à la Sorbonne. En 1884, il est nommé sous-directeur des études scientifiques de l'École. À propos de ce poste, précisons qu'il n'existait pas de directeur des études scientifiques à l'École normale supérieure. Dans l'organigramme de cette école, Tannery est donc celui qui dirige les études scientifiques.

Il publie en 1886 L'*Introduction à la théorie des fonctions d'une variable.* Dans cet ouvrage de près de 400 pages, il annonce avoir « développé quelques leçons faites à l'École normale en 1883 »[90]. Adressé non pas à des commençants mais, à des « élèves maîtres d'un nombre de faits mathématiques considérables »[91], ce livre est pour lui un ouvrage de « transition entre les matières que l'on traite dans les cours de Mathématiques spéciales et celles qu'on étudie, soit dans les Facultés soit dans les Écoles d'enseignement supérieur »[92].
Il s'agit donc d'un ouvrage pour des élèves qui maîtrisent les notions sur les fonctions dérivées du programme d'admission à l'École polytechnique détaillées au chapitre précédent. En effet, ce programme dicte celui de la classe de mathématiques spéciales dont l'objectif essentiel est la préparation à ce concours. Remarquons aussi que cette phrase semble indiquer que les élèves qui s'inscrivaient en Faculté des sciences avaient, dans leur grande majorité tout du moins, suivi auparavant la classe de mathématiques spéciales.
La révision des principes de l'analyse à laquelle il entend se livrer est selon lui justifiée car,

> après les exemples de rigueur donnés par Gauss, après les travaux de Cauchy, d'Abel, de Lejeune-Dirichlet, de Riemann, de M. O. Bonnet, de M. Heine, après

[88] Dans cet article, Weierstrass propose d'étudier des séries dont les termes sont des fonctions rationnelles d'une variable. Il montre qu'elles peuvent être convergentes dans différentes régions du plan sans représenter, en termes actuels, une même fonction holomorphe.
[89] Voir RENAUD Hervé, *Jules Tannery : les nombres, objet d'étude et sujet d'un renouvellement de l'enseignement des mathématiques (1886-1903),* Mémoire de Master 2 d'histoire des sciences et des techniques, Nantes, Université de Nantes, 2011.
[90] TANNERY Jules, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, Paris, Hermann, 1886, p. VII.
[91] *Ibid.*, p. VII.
[92] *Ibid.*, p. VII.

> l'enseignement de M. Weierstrass divulgué et développé par ses disciples, après le mémoire de M. Darboux sur les fonctions discontinues, les livres de M. Dini et M. Lipschitz[93], il ne semble pas qu'il reste quelque chose d'essentiel à élucider dans les sujets auxquels je me suis borné .[94]

Soulignons tout d'abord l'absence, parmi ces références, du nom de Duhamel dont les principes du calcul infinitésimal ont été, l'année précédente, introduits dans le programme d'admission de l'École polytechnique. Tannery ne cite pas non plus Bolzano. Le nom du mathématicien praguois se retrouve cependant dans deux notes de bas de page. La première, en page 23, à propos des notions de limite supérieure et de limite inférieure qui « ont été […] retrouvées dans les œuvres de Bolzano, géomètre qui vivait au commencement de ce siècle, mais dont les écrits, plus riches en idées ingénieuses qu'en fait mathématiques, n'ont pas attiré tout d'abord l'attention qu'ils méritent »[95]. La deuxième en pages 26, à propos de la définition d'une suite convergente. Pour montrer comment on peut définir les nombres irrationnels au moyen des suites de nombres rationnels, il définit une suite convergente comme une suite qui vérifie le *critère de Cauchy* et précise que cette notion, « due à Cauchy […] se trouve encore dans les écrits de Bolzano »[96]. Ces notes font allusion à un article du mathématicien autrichien Otto Stolz, paru en 1881 dans les *Mathematische Annalen* sous le titre « B. Bolzano's Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalsrechnung » et commenté dans le *BSM* de 1883, sous le titre « Stolz. – Rôle de Bolzano dans l'histoire du calcul infinitésimal ». L'auteur de ce dernier article écrit, à propos de Bolzano : « il exposa les principes de l'analyse des fonctions réelles d'une façon nouvelle et y introduisit des notions dont l'importance ne peut plus être méconnue »[97]. Cet article du *BSM* et les notes de Tannery semblent acter la reconnaissance en France du rôle essentiel de Bolzano.

Construire l'analyse sur le seul nombre entier

La nouveauté radicale de l'ouvrage de Tannery dans l'enseignement de l'analyse en France est de construire l'analyse sur des bases purement arithmétiques, comme il l'annonce dans la « Préface » : « On peut constituer entièrement l'analyse avec la notion de nombre entier et

---

[93] Sur l'enseignement des principes de l'analyse en Italie et en Allemagne, on pourra voir la section « 2.2 L'Italie et l'Allemagne » dans GISPERT Hélène, *Jordan et les fondements de l'analyse (étude comparée des deux premières éditions de son cours d'analyse)*, Paris, Publications mathématiques d'Orsay, 1982.

[94] *Ibid*, p. VII.

[95] *Ibid*, p. 23.

[96] *Ibid*, p. 26.

[97] « Stolz. – Rôle de Bolzano dans l'histoire du calcul infinitésimal (255-279) », *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 2e série, t. 7, 1883, p. 245.

les notions relatives à l'addition de nombres entiers ; il est inutile de faire appel à aucun autre postulat, à aucune autre donnée de l'expérience »[98]. Toute référence à la notion de grandeur, toute utilisation de l'intuition géométrique est bannie de l'ouvrage qui ne comporte aucune figure.

Dans le premier chapitre intitulé « Des nombres irrationnels et des limites », Tannery construit les nombres irrationnels par la méthode des coupures. Ce mot, dû à Dedekind, n'est cependant pas employé par Tannery qui revendique la paternité de la construction qu'il expose. Il ne fait référence aux travaux du mathématicien allemand que pour indiquer qu'il ne les connaissait pas. C'est, selon lui, l'idée de Bertrand que nous avons vu plus haut qu'il a développée[99].

Considérant l'exemple de la résolution de l'équation $x^2 - 3 = 0$, il montre qu'elle permet de partager les nombres rationnels positifs en deux classes : la première contenant ceux dont le carré est plus petit que 3, la seconde contenant ceux dont le carré est plus grand que 3, tout nombre de la première étant bien sûr plus petit qu'un nombre quelconque de la seconde. Il démontre ensuite qu'il n'existe, dans la première classe, aucun nombre plus grand que tous les autres, ni dans la seconde classe de nombre plus petit que tous les autres. Il conclut :

> Toutes les fois qu'on aura un moyen défini de séparer la totalité des nombres rationnels positifs et négatifs en deux classes telles que tout nombre de la première classe soit plus petit que tout nombre de la seconde classe, telles en outre qu'il n'y ait pas dans la première classe un nombre plus grand que tous les autres nombres de la même classe et, dans la seconde classe, un nombre plus petit que les autres nombres de la même classe, je dirai qu'on a défini un nombre irrationnel ; la première classe sera dite classe inférieure relative au nombre irrationnel ; la seconde classe, classe supérieure.
> Un nombre irrationnel pourra être représenté par une lettre, cette lettre ne signifiant rien autre chose qu'un mode défini de classification des nombres rationnels, tel que celui qui vient d'être décrit.[100]

C'est ainsi qu'il peut définir le nombre $\sqrt{3}$.

Il définit ensuite l'égalité de deux nombres irrationnels au sens de l'identité de la décomposition, c'est-à-dire de l'identité des classes. Ceci lui permet d'étendre les relations

[98] TANNERY Jules, *op. cit.*, p. VIII.
[99] Voir RENAUD Hervé, *Jules Tannery : les nombres, objet d'étude et sujet d'un renouvellement de l'enseignement des mathématiques (1886-1903),* Mémoire de Master 2 d'histoire des sciences et des techniques, Nantes, Université de Nantes, 2011.Il abandonnera par la suite cette revendication.
[100] TANNERY Jules, *op. cit.*, p. 3.

« plus petit que » et « plus grand que » aux irrationnels A et B : A sera plus petit que B si la classe inférieure relative à A figure dans celle relative à B. Puis il définit l'addition et la multiplication de nombres irrationnels, et démontre, en langage actuel, que l'ensemble des réels est un corps. Il démontre ensuite l'existence d'une racine *n*ème pour tout nombre positif.

Après quelques paragraphes sur la théorie des ensembles, sur lesquels nous reviendrons plus loin, Tannery propose une autre méthode de construction des irrationnels, à partir des suites de rationnels. Il démontre que toute « suite convergente » (qui vérifie le *critère de Cauchy*) de nombres rationnels a pour limite un nombre rationnel ou définit une décomposition en deux classes des nombres rationnels, c'est-à-dire un nombre irrationnel. Dans un paragraphe précédent il avait déjà démontré, en prenant la suite des valeurs approchées par défaut ou par excès d'un nombre irrationnel, que ce nombre était limite d'une suite convergente. Reprenant les travaux de Heine, Tannery montre ainsi l'équivalence des deux modes de construction des nombres irrationnels.

La théorie des ensembles dans l'Introduction à la théorie des fonctions d'une variable

Tannery aborde la notion d'ensemble à la suite de l'extension des opérations arithmétiques aux nombres irrationnels. Il écrit :

> On a souvent à considérer l'ensemble de tous les nombres qui satisfont à une certaine condition ; les éléments de cet ensemble, les nombres qui satisfont à cette condition peuvent être en nombre fini ou infini ; ils peuvent être rationnels ou irrationnels ; mais, pour simplifier, je supposerai qu'ils soient tous inégaux. [101]

Il définit la limite supérieure relative à « un ensemble (E) bien défini[102] de nombres rationnels ou non, dont aucun ne dépasse une certaine limite L »[103] : c'est le nombre, rationnel ou non, qui détermine un mode de décomposition en deux classes de tous les nombres rationnels, les nombres appartenant à (E), ou plus petits qu'un nombre de (E) étant rangés dans la première classe. Si la première classe ne contient pas de nombre plus grand que tous les autres, c'est un irrationnel. De la même façon, il peut définir la limite inférieure d'un ensemble.

Il explique comment sa définition de la somme de deux nombres irrationnels peut s'exprimer en termes d'ensembles :

---

[101] *Ibid.*, p. 21
[102] Un ensemble est bien défini si on peut reconnaître qu'un nombre lui appartient ou non.
[103] *ibid*, p. 21.

> Pour arriver à la notion de la somme de deux nombres A, B, on a considéré les ensembles (A), (B) des nombres rationnels inférieurs respectivement à A, B, les ensembles (A'), (B') des nombres rationnels supérieurs respectivement à A, B ; l'ensemble (S) des nombres différents obtenus en ajoutant un nombre de (A) et un nombre de (B), l'ensemble (S') des nombres différents obtenus en ajoutant un nombre de (A') et un nombre de (B').[104]

La limite supérieure de (S), qui est aussi la limite inférieure de (S') est, par définition, la somme de A et B.

À la fin du premier chapitre Tannery définit la notion de valeur limite d'un ensemble (E), c'est-à-dire, de point d'accumulation d'un ensemble et démontre le théorème dû à Weierstrass : tout ensemble infini de nombres majorés en valeur absolue, admet au moins une valeur limite[105]. La dernière section du chapitre définit les ensembles dérivés.

Dans le chapitre II intitulé « Des séries et des produits infinis », à l'occasion du changement de l'ordre des termes dans une série absolument convergente, il envisage la notion de loi de « correspondance univoque », c'est-à-dire de ce que nous nommons aujourd'hui une bijection. Il propose sa propre démonstration du résultat de Cantor sur l'existence d'une correspondance univoque entre l'ensemble des nombres entiers positifs et des rationnels positifs.

Puis, nous rencontrons pour la première fois dans un manuel français d'analyse, la définition d'une fonction qui utilise la notion d'ensemble. Le chapitre III, « Premiers principes de la théorie des fonctions d'une variable » débute ainsi :

> Considérons un ensemble (E) de nombres tous distincts et regardons ces nombres comme des valeurs attribuées à une variable x ; si à chacun des nombres x on, fait correspondre un nombre y, on dira que y est une fonction définie de x pour chacun des nombres appartenant à l'ensemble (E). [106]

Après avoir défini un intervalle (a, b) comme l'ensemble des nombres a, b et de tous les nombres rationnels ou non compris entre a et b, Tannery poursuit : « une fonction y de x est

[104] *ibid*, p. 23.
[105] Rappelons que la démonstration que Tannery propose de ce théorème est lacunaire. Il construit en effet deux suites adjacentes dont il affirme sans démonstration qu'elles sont convergentes et ont même limiteVoir GISPERT Hélène, *op. cit*., p. 109.
[106] *Ibid*, p.99.

définie dans l'intervalle (a, b) si à chaque valeur de x appartenant à cet intervalle correspond une valeur déterminée de y »[107].

Il ne définit pas une fonction comme une correspondance entre deux ensembles. Cependant, sa définition autorise l'introduction de fonctions tout à fait arbitraires comme celle qui, sur un intervalle consiste à prendre « $y = x$ pour toutes les valeurs rationnelles de x qui appartiennent à cet intervalle et $y = \frac{1}{x}$ pour toutes les valeurs irrationnelles »[108]. Et, par la suite, s'il met en garde contre le risque « d'introduire des fonctions qui n'offriraient aucun intérêt aux géomètres »[109], l'*Introduction à la théorie des fonctions d'une variable* non seulement arithmétise l'analyse, mais elle fait du concept d'ensemble un concept de base de l'analyse.

Fonction et continuité

La continuité d'une fonction est définie en termes de ε,η. Reprenant l'article de Heine de 1872, *Die Elemente der Fonctionenlehre*, Tannery définit la continuité uniforme d'une fonction dans un intervalle, qu'il nomme simplement la continuité d'une fonction sur un intervalle, puis la continuité d'une fonction en une valeur. Il démontre que si une fonction est continue en toute valeur de (a, b) elle est continue sur l'intervalle. Une note de bas de page précise : « on pourrait peut-être éviter dans l'enseignement élémentaire, ces distinctions un peu subtiles, en se bornant à considérer la continuité dans un intervalle »[110]. Elle prouve que « l'enseignement élémentaire » est aussi, au-delà du public auquel il destine cet ouvrage, une préoccupation de Tannery[111].

L'ouvrage de Tannery distingue la définition de la continuité d'une fonction de la propriété des valeurs intermédiaires. À la suite de la démonstration du *théorème des valeurs intermédiaires*, il précise : « on exprime cette propriété des fonctions continues en disant qu'elles ne peuvent passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires. Il importe de remarquer que cette propriété ne caractérise pas les fonctions

---

[107] *Ibid*, p.99.
[108] *Ibid*, p.100.
[109] *Ibid*, p.100.
[110] *Ibid*, p.107.
[111] La même année il publie un article proposant une réorganisation du baccalauréat : voir TANNERY Jules, « Le baccalauréat ès-sciences mathématiques », *Revue Internationale de l'Enseignement*, t. XI, 1886, p. 519-527.

continues »[112]. Une note de bas de page renvoie aux travaux de Darboux et donne l'exemple de la fonction, définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = sin\frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.

Le *théorème des valeurs intermédiaires* est désigné par Tannery comme étant la première « propriété fondamentale des fonctions continues ». La seconde est la propriété pour une telle fonction d'atteindre ses bornes sur un intervalle (a, b). Une note de bas de page précise que « M. Weierstrass donne depuis longtemps la démonstration de cette proposition dans son enseignement »[113]. L'incitation à suivre cet exemple en France est claire.

La continuité est aussi pour Tannery l'occasion de revenir sur les fonctions arbitraires autorisées par sa définition d'une fonction. Reprenant un exemple cité par Darboux dans son *Mémoire sur les fonctions discontinues*, Tannery précise que, « si l'on veut que l'expression $\frac{x^2-1}{x-1}$ représente [...] une fonction continue de x, quel que soit x, il faut lui attribuer la valeur 2 pour $x = 1$ »[114].

Les fonctions dérivées

Le chapitre IV est consacré aux séries. Le chapitre V traite des dérivées des fonctions quelconques. La dérivée en une valeur, définie comme la limite du rapport des accroissements, est exprimée en termes de ε,η. Le texte précise : « c'est à cette définition précise qu'il faut toujours se reporter quand on parle d'une fonction admettant une dérivée pour une valeur donnée de x ». Rappelons qu'en 1875, Houël et Darboux étaient en désaccord sur la dérivation en 0 de la fonction $y = x^2 sin\frac{1}{x}$. Le premier, qui considérait la limite de la fonction dérivée en 0, affirmait que la fonction n'était pas dérivable en 0. Le second revenait à la définition rappelée plus haut pour conclure que sa dérivée en 0 était nulle[115].

Et, après avoir défini les dérivées à droite et à gauche, Tannery conclut : « Rien, dans ce qui précède, n'autorise à supposer que la continuité d'une fonction entraîne l'existence d'une

---

[112] *Ibid*, p.125.
[113] *Ibid*, p.126.
[114] *Ibid*, p.114.
[115] Voir GISPERT Hélène, « Principes de l'analyse chez Darboux et Houël (1870-1880) : textes et contextes », *Revue d'Histoire des Sciences*, N° 43, 1990, p. 181-220.

dérivée ; et en effet il n'en est pas ainsi »[116]. Une note de bas de page renvoie aux travaux de Darboux, Ulisse Dini, de Paul du Bois-Reymond et de Weierstrass.

À la suite de théorèmes usuels sur la dérivation des fonctions Tannery donne successivement les *théorèmes de Rolle et des accroissements finis*. Ils sont désignés sous ces noms, énoncés et démontrés sous leur forme actuelle. En 1884, dans les *NAM*, Giuseppe Peano avait critiqué la démonstration de Jordan du *théorème des accroissements finis* dans son *Cours d'analyse de l'École polytechnique*. Il montrait que sa démonstration supposait la continuité de la fonction dérivée sur l'intervalle fermé. Jordan avait accepté cette critique et avait demandé à Peano de lui communiquer sa démonstration[117]. L'ouvrage de Tannery propose une version complètement rigoureuse de ces théorèmes. Remarquons cependant que les démonstrations restent attribuées à Bonnet, sans signaler l'apport de Dini[118].

Le *théorème des accroissements finis* lui permet de déduire le sens de variation d'une fonction à partir du signe de sa dérivée. Ces propriétés, écrit-il, étaient autrefois regardées comme évidentes. Mais, poursuit-il,

> Cela serait légitime s'il était vrai qu'un intervalle (a, b) pût toujours être décomposé en un nombre fini d'intervalles partiels tels que dans chacun d'eux la fonction $f(x)$ fût ou constante, ou croissante ou décroissante ; c'est la fausseté, aujourd'hui mise hors de doute de cette supposition qui rend nécessaire la démonstration [de ces théorèmes].[119]

Remarquons que, pour la notation des dérivées successives, Tannery indique la notation leibnizienne. Mais il ne définit pas la notion de différentielle. Elle ne lui est pas utile pour les fonctions d'une variable.

L'intégrale définie dans le domaine de la pure analyse

Le chapitre VI, intitulé « Des intégrales définies » s'ouvre sur la question de l'existence de primitives à une fonction. Cette existence dépend, écrit-il, de « certaines sommes » dont « la considération […] s'introduit tout naturellement, en géométrie, lorsqu'on cherche à évaluer

---

[116] TANNERY Jules, *op. cit.*, p. 219.

[117] Voir PEANO Giuseppe, « Extrait d'une lettre de M. le Dr J. Peano » et JORDAN Camille, « Extrait d'une lettre de M. C. Jordan », *Nouvelles annales de mathématiques, 3e série*, t. 3, 1884, p. 45-47.

[118] On pourra lire à ce sujet la section intitulée « Les fondements de la théorie des fonctions de la variable réelle de Dini » dans DUGAC Pierre, *op. cit.*, p. 237-240.

[119] TANNERY Jules, *op. cit.*, p. 239.

l'aire d'une courbe ou la longueur d'un arc », et conclut : « je les définirai […] en restant au point de vue de la pure analyse »[120].

Une fonction finie sur un intervalle est intégrable sur cet intervalle s'il existe un nombre J possédant la propriété suivante :

> à chaque nombre positif ε, correspond un nombre positif η tel que, si on partage l'intervalle (a_0, a) en intervalles partiels d'une étendue moindre que η,
> $$(a_0, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_{n-1}, a),$$
> la différence entre le nombre J et la somme :
> $$(a_1 - a_0)f_1 + (a_2 - a_1)f_2 + \cdots + (a - a_{n-1})f_n,$$
> où $f_1, f_2, \dots, f_n$ désignent des nombres respectivement compris entre les limites supérieures et inférieures de la fonction $f(x)$ dans les intervalles
> $$(a_0, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_{n-1}, a)$$
> et pouvant atteindre ces limites, soit moindre en valeur absolue que ε.[121]

Tannery écrit sous quatre formes une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un tel nombre. L'une d'elles correspond à la condition établie par Riemann dans son mémoire sur les séries trigonométriques.

Il montre ensuite « comment, au moins pour une valeur particulière de la variable, la continuité n'implique en aucune façon l'existence de la dérivée »[122]. Il considère l'exemple suivant : prenant deux fonctions $f_0(x), f_1(x)$ continues sur $(a_0, a_1), (a_1, a_2)$, telles que $f_0(a_1) \neq f_1(a_1)$, il considère la fonction égale à $f_0(x)$ sur (a_0, a_1) et à $f_1(x)$ sur (a_1, a_2), et vérifiant $f(a_1) = f_0(a_1)$. La fonction $\int_a^x f(x)dx$ est continue et non dérivable en a_1. Nous pouvons nous interroger sur le choix d'un exemple aussi élémentaire dans un ouvrage qui présente les progrès les plus récents en matière de fondements de l'analyse.

Un ouvrage novateur pour les futurs enseignants de mathématiques spéciales

L'ouvrage de Tannery est probablement, depuis les cours de Cauchy à l'École polytechnique, le manuel d'introduction à l'analyse le plus novateur publié en France. Un an après l'introduction de la *méthode infinitésimale de Duhamel* en classe de mathématiques spéciales, cet ouvrage sur la théorie des fonctions de la variable réelle n'est plus un ouvrage de calcul infinitésimal, ni un ouvrage de calcul différentiel. Il ne recourt à aucun moment à la notion

[120] TANNERY Jules, *op. cit.*, p. 269.
[121] *Ibid.*, p. 270.
[122] *Ibid.*, p. 288.

géométrique de grandeur continue. L'analyse est arithmétisée et la notion d'ensemble y prend une place centrale. Cet ouvrage réalise, bien plus que le manuel de Houël, le vœu de Darboux que « quelques chose de neuf » soit produit pour l'enseignement du calcul différentiel.

Enfin, il est essentiel de noter que, ce texte a été établi, selon son auteur, en développant des leçons faites à l'École normale en 1883. Les leçons ne correspondaient donc pas exactement à l'ouvrage. Cependant, au début des années 1880, il est incontestable que les élèves qui sortaient de cette École, et qui pour la plupart enseignaient par la suite en classe de mathématiques spéciales, avaient été formés aux théories les plus récentes de l'analyse. Le chapitre suivant le confirmera. Rappelons aussi que ces théories ne figurent pas, en tant que telles, au programme de l'agrégation de mathématiques[123]. De plus, l'analyse occupe une place très restreinte dans les sujets des leçons orales sur lesquelles peut être interrogé le candidat. Parmi les 36 leçons de mathématiques spéciales, deux seulement portent sur la théorie des dérivées :

> 9. Application de la théorie des dérivées à l'étude des variations des fonctions d'une seule variable. – Exemples.
>
> 10. Séries de Taylor et de Mac-Laurin pour les fonctions d'une seule variable réelle. – Application au développement de $\operatorname{arctang} x$. – Calcul de π.[124]

Dans son enseignement à l'École normale supérieure, Jules Tannery disposait indiscutablement d'une plus grande liberté que les professeurs de l'École polytechnique.

2 – 2 Le troisième tome du *Cours d'analyse de l'École polytechnique* de Jordan (1887)

Nous avons vu, dans le chapitre précédent, comment le premier tome de cet ouvrage s'inscrivait en 1882 dans la continuité de l'enseignement du calcul infinitésimal à l'École polytechnique. Avant d'analyser le troisième tome, nous nous intéresserons au deuxième tome consacré aux intégrales indéfinies et définies, publié en 1883. En effet, de nouveaux questionnements quant aux fondements de l'analyse apparaissent dans ce tome.

Dans le premier chapitre intitulé « Intégrales indéfinies », Jordan annonce, à propos du théorème sur l'existence d'une primitive pour une fonction continue sur un intervalle : « cette

[123] Voir « Agrégation des sciences mathématiques », *Bulletin administratif du Ministère de l'Instruction publique*, t. 46, 1889, p. 480
[124] *Ibid.*, p. 483.

question, envisagée dans toute sa généralité, est assez délicate. Nous nous bornerons à énoncer le théorème […] que nous nous réservons de démontrer ultérieurement »[125]. L'aire sous la courbe ne suffit plus, comme chez Serret ou Hermite, à justifier l'existence de primitives.

Le deuxième chapitre intitulé « Intégrales définies » débute par la définition d'une fonction uniformément continue. Jordan admet que toute fonction continue sur un intervalle que nous dirions aujourd'hui fermé-borné, est uniformément continue. Une note de bas de page renvoie au troisième tome pour la démonstration de cette propriété. Elle est utilisée pour démontrer l'existence d'une limite aux sommes de Cauchy qui définissent l'intégrale définie d'une fonction continue. Cette intégrale est ensuite interprétée géométriquement comme l'aire sous la courbe.

Cependant, si nous excluons la notion de continuité uniforme, le cours de Jordan sur l'intégrale définie reprend le cours de Cauchy de 1823. Le troisième tome du *Cours d'analyse* auquel il renvoie ne sera publié qu'en 1887. Consacré aux équations différentielles et au calcul des variations, il marquera une inflexion dans la présentation des fondements de l'analyse qui va bien au-delà de la continuité uniforme.

Dans la « Préface » à ce troisième tome, Jordan explique que l'ouvrage a pris, au cours de sa rédaction, une extension due au développement de la théorie des équations différentielles dans les dernières années. Cela l'a conduit à abandonner des exercices et des « Notes complémentaires » initialement prévues, « à l'exception de l'une d'elles, ayant pour objet les principes du Calcul infinitésimal, et qu'il nous a paru indispensable de conserver »[126]. Intitulée « Note sur quelques points de la théorie des fonctions », elle occupe une soixantaine de pages à la fin de l'ouvrage.

La première section est intitulée « Nombres irrationnels ». Il y considère deux suites adjacentes de nombres rationnels, (a_n) et (b_n). Ces suites répartissent les nombres rationnels en trois classes :

1° Les nombres A qui sont $<a_n$ lorsque n est assez grand ;
2° Les nombres B qui sont $>b_n$ lorsque n est assez grand ;

[125] JORDAN Camille, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, t. 2, Paris, Gauthiers-Villars, 1883, p. 2.
[126] JORDAN Camille, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, tome 3, Paris, Gauthiers-Villars, 1887, p. 6.

3° Les nombres qui sont $>a_n$, mais $<b_n$ quel que soit n.[127]

Si cette dernière classe ne contient aucun nombre rationnel, par définition « il existe dans ce cas un nombre irrationnel C, plus grand que tous les nombres A et moindre que tous les nombres B »[128].

Il s'agit donc d'une introduction des irrationnels par les coupures que Jordan s'approprie en utilisant des suites adjacentes. L'absence de l'emploi du mot coupure peut laisser penser qu'elle doit plus à Tannery qu'à Dedekind.

Pour définir une fonction, Jordan considère une variable indépendante x,

> à laquelle on pourra assigner, soit toute la suite des valeurs possibles, soit un certain système de valeurs (par exemple toutes celles qui sont contenues dans l'intervalle de x_0 à X ou toutes les valeurs rationnelles, etc).
> Soit u une seconde variable, liée à x de telle sorte qu'à chaque valeur du système parcouru par x corresponde une valeur unique, finie et déterminée de u. On dira que u est une fonction de x (pour tout le système de valeurs que l'on considère).[129]

Cette définition n'emploie pas le mot « ensemble » mais le mot « système » qui était, dans les *Acta Mathematica*, la traduction du terme employé par Cantor. Très semblable à celle formulée par Tannery, il faut cependant souligner qu'elle insiste d'une part sur la notion d'ensemble, et d'autre part sur l'unicité de la valeur de la variable y correspondant à une valeur de x.

Cette nouvelle définition, différente de celle donnée dans le premier tome de son *Cours d'analyse* est suivie d'un certain nombre de commentaires. Jordan affirme tout d'abord que « cette nouvelle définition des fonctions est plus nette et, à certains égards, plus générale que celle [du tome I] »[130] avant de préciser les points suivants : tout d'abord elle contredit la définition des fonctions implicites mais, écrit-il, l'utilisation de cette notion décomposait la fonction « en diverses branches, dont chacune, prise séparément, rentre dans notre nouvelle définition »[131]. De plus, dans les cas où la fonction devient infinie ou est indéterminée pour une valeur, il faut exclure cette valeur « du système de valeurs attribuée à x ». Le cours de

[127] *Ibid.*, p. 549.
[128] *Ibid.*, p. 550.
[129] *bid.*, p. 556
[130] *Ibid.*, p. 556.
[131] *Ibid.*, p. 556.

Jordan est ainsi le premier que nous rencontrons à préciser aussi clairement la notion que nous appelons aujourd'hui l'ensemble de définition d'une fonction.

Enfin, si comme Tannery, il souligne « l'excessive généralité » de cette définition et précise que des « hypothèses restrictives seront […] nécessaires pour servir de base à un raisonnement quelconque »[132], il n'en donne pas moins par la suite un exemple de ces fonctions définies arbitrairement. Il considère la fonction définie par : $y = 0$ si x est irrationnel et $y = (-1)^p q$ si $x = \frac{p}{q}$. Elle lui fournit un exemple de fonction illimitée sur tout intervalle ab. Précisons que cette notation désigne, comme chez Tannery, ce que nous nommons de nos jours un intervalle fermé.

La section sur les fonctions limitées supérieurement et inférieurement sur un intervalle lui permet de définir l'intégrale à la façon de Darboux dans son *Mémoire sur les fonctions discontinues*, sans que le nom de Riemann soit cité. Il ne définit qu'ensuite la notion de fonction continue en une valeur. Puis il établit la proposition : « si la fonction y est intégrable dans l'intervalle x_0X, il existe dans tout intervalle ab contenu dans celui-là des valeurs de x pour lesquelles y est continue »[133] avant de donner un exemple de fonction intégrable qui présente dans tout intervalle une infinité de points de discontinuité. Plus loin, il étudiera la fonction de Weierstrass comme exemple de fonction continue non dérivable. Cet ordre de présentation des notions de fonction intégrable, de fonction continue, et la proposition qui suit bouleversent l'ordre habituel des manuels d'analyse, même s'il ne s'agit ici que d'une note complémentaire.

Dans la section sur les propriétés des fonctions continues, il démontre le *théorème des valeurs intermédiaires,* puis que toute fonction continue dans un intervalle ab atteint son maximum et son minimum. Il en déduit que toute fonction continue sur un intervalle est uniformément continue. Il démontre ensuite le théorème de Rolle suivi du *théorème des accroissements finis*, revenant sur l'erreur commise dans le premier tome, qui lui avait été signalée Peano.

Cette note d'une soixantaine de pages ne constitue pas les premiers chapitres d'un manuel d'analyse. La deuxième édition du cours de Jordan ne commencera à paraître qu'en 1893.

[132] *Ibid.*, p. 557.
[133] *Ibid.*, p. 563.

Cependant, cet ouvrage paru à la suite de celui de Tannery, confirme une rupture dans l'enseignement de l'analyse en France.

3 – Deux manuels qui adoptent les nouveaux fondements de l'analyse pour la classe de mathématiques spéciales (1889-1894)

Dans les années qui suivent la publication des manuels de Tannery et Jordan, paraissent deux ouvrages à destination de la classe de mathématiques spéciales qui reprennent une grande partie des nouveaux principes de l'analyse. Rappelons qu'en 1889, à la date de parution du premier de ces manuels, le programme d'analyse de la classe de mathématiques spéciales est celui du concours d'admission à l'École polytechnique de 1885. La *méthode infinitésimale de Duhamel* est utilisée pour définir les notions de différentielle et d'intégrale définie. Le sens de variation d'une fonction est déduit du signe de la dérivée à partir de la notion de fonction croissante en une valeur. La construction des nombres irrationnels, la notion d'ensemble, ni aucun des théorèmes qui établissent l'analyse sur des bases arithmétiques ne figurent dans ce programme ou n'apparaît pas la notion de continuité.

3 – 1 Le *Cours d'algèbre* de Niewenglowski (1889)

Boleslas Niewenglowski, né en 1846, est admis en 1865 à l'École normale supérieure après des études au lycée Bonaparte[134]. Il est de la promotion qui précède celle de Jules Tannery. Il obtient l'agrégation en 1869, la même année que Tannery. Il enseigne successivement à Mont-de-Marsan, Clermont, Reims, puis au collège Rollin à Paris avant d'obtenir une division de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand en 1880. Cette même année il soutient une thèse de doctorat intitulée : *Exposition de la méthode de Riemann pour la détermination des surfaces minima de contour fermé*. Le jury est composé de Hermite, Bonnet et Tannery. En 1887, il est chargé des conférences préparatoires à l'agrégation de mathématiques, à la Sorbonne. Le *Cours d'algèbre à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales et des candidats à l'École normale supérieure et à l'École polytechnique* est le premier manuel d'enseignement qu'il publie. Il fait partie des ouvrages qui connaîtront de nombreuses éditions dans la durée. Réédité, pour la période qui nous intéresse en 1891, 1892, 1897 et 1902, il connaîtra une 12^{e} édition en 1940.

[134] Sur Niewenglowski, voir BRASSEUR Roland, https://sites.google.com/site/rolandbrasseur/5---dictionnaire-des-professeurs-de-mathematiques-speciales .

Publié trois ans après l'ouvrage de Tannery et deux après celui de Jordan, ce manuel de plus de 900 pages comporte deux tomes. La « Préface » indique :

> La théorie générale des fonctions a fait, dans ces derniers temps, des progrès considérables ; on ne peut se dispenser d'en tenir compte dans l'enseignement, d'où la nécessité de modifier un certain nombre de démonstrations.
>
> Je me suis préoccupé avant tout de la rigueur des raisonnements ; mais dans l'enseignement, ce que l'on gagne en rigueur, on risque souvent de le perdre en simplicité.[135]

L'ouvrage est partagé en « Livres ». Le « Livre premier » est intitulé « Compléments d'algèbre élémentaire ». Le premier chapitre est consacré aux limites et aux incommensurables. La toute première définition est celle d'une fonction, au sens de la seconde définition eulérienne. Niewenglowski définit ensuite une variable infiniment petite comme une variable de limite nulle. Cette notion est illustrée par une variable infiniment petite qui est une fonction « d'un nombre variable entier n », c'est-à-dire une suite : x_n est un infiniment petit si,

> α étant un nombre positif arbitraire, (que l'on peut choisir aussi petit que l'on veut) on peut toujours trouver un entier n' tel que l'inégalité
> $$|x_n| < \alpha$$
> soit vérifiée, pour toutes les valeurs de n supérieures à n'.[136]

La définition est suivie de la remarque : « dans tout ce qui précède il n'est question que d'*entiers* ou de *fractions*. Jusqu'à nouvel ordre le mot *nombre* servira uniquement à désigner des entiers ou des fractions »[137]. Il faut noter le choix de Niewenglowski de ne donner ces précisions qu'après avoir introduit les notions de fonction, de limite et d'infiniment petit pour des nombres, sans indication supplémentaire quant à la nature de ces nombres. Il induit nécessairement chez le lecteur un retour sur ces notions et un questionnement sur les nombres.

Cette remarque est suivie d'une construction des nombres irrationnels à partir des suites adjacentes, c'est-à-dire à la façon de Jordan. Un nombre irrationnel (ou incommensurable, cette dernière dénomination étant celle qu'il emploie par la suite) défini par des suites adjacentes sans limite rationnelle est cependant appelé « nombre fictif », ce qui laisse penser que Niewenglowski a aussi lu Méray. Enfin, la façon d'aborder la comparaison des nombres

---

[135] NIEWENGLOWSKI Boleslas, *Cours d'algèbre*, t. 1, Armand Colin, 1889, p. I.
[136] *Ibid.*, p. 3.
[137] *Ibid.*, p. 3.

irrationnels avant de définir les opérations sur ces nombres nous évoque Tannery. De même, la section intitulée « Nouvelle définition d'un nombre incommensurable », où le nombre irrationnel est défini comme limite commune des suites adjacentes, fait inévitablement penser à ce second auteur.

À l'occasion de la généralisation du calcul algébrique aux nombres incommensurables, il démontre que tout nombre x_n qui « croît avec n, mais reste toujours inférieur à un nombre déterminé A, [...] a une limite inférieure ou égale à A »[138]. Il démontre aussi que toute suite admet une limite si et seulement si elle vérifie le *critère de Cauchy*.

Le second « Livre » de ce tome traite des séries, des fractions continues, puis consacre un chapitre à la continuité avant d'aborder les fonctions logarithme et exponentielle. Reprenant la définition d'une fonction donnée au début de l'ouvrage, il propose deux exemples de fonctions « arbitraires » : il considère tout d'abord la fonction qui vaut 1 pour x entier et $\frac{1}{x}$ pour les autres valeurs de x, puis l'exemple de la fonction définie pour x positif par la somme $\sum \frac{1}{p^2q^2}$ étendue à toutes les valeurs de p et q vérifiant $\frac{p}{q} < x$. Niewenglowski ne fait aucune remarque sur le caractère arbitraire de telles fonctions. Elles ont, dans cet ouvrage, toute légitimité pour illustrer la notion de fonction, même si elles ne sont pas étudiées par la suite.

La définition de la continuité d'une fonction en une valeur est donnée en termes de ε,η. Elle est suivie de la démonstration du *théorème des valeurs intermédiaires*, puis de la notion de fonction limitée inférieurement et supérieurement. Il définit à cette occasion la notion d'ensemble, utilisant la notation de Tannery. Il démontre, en utilisant le langage en vigueur de nos jours, qu'un ensemble borné admet une borne supérieure et une borne inférieure puis qu'une fonction continue sur un intervalle (a, b), atteint ses bornes. Ce théorème est suivi de la définition de continuité uniforme qu'il désigne, comme Tannery, sous le nom de « continuité dans l'intervalle (a, b) ».

Le second tome commence par le « Livre III » intitulé « Notions de calcul différentiel et de calcul intégral ». Le premier chapitre est consacré aux infiniment petits. Sur ce sujet, l'ouvrage de Niewenglowski respecte scrupuleusement le programme d'admission à l'École polytechnique. Le deuxième chapitre propose une section intitulée « Théorème des

[138] *Ibid.*, p. 16.

accroissements finis ». Ce théorème est précédé du *théorème de Rolle*, dans la version donnée par Tannery. Le théorème sur le sens de variation d'une fonction suivant le signe de la dérivée est une conséquence du *théorème des accroissements finis*.

Enfin au chapitre VI intitulé « Intégrales définies. – Applications. », l'intégrale définie d'une fonction est celle de Riemann, Niewenglowski se référant au *Cours d'analyse* de Jordan. Après l'étude des propriétés de l'intégrale, la notion d'intégrale définie est appliquée au calcul des aires planes. La « Note I » à la fin de l'ouvrage propose un « Exemple de fonction continue n'ayant pas de dérivée ». Il s'agit de la fonction de Weierstrass. Niewenglowski cite aussi un exemple dû à Darboux dans son *Mémoire sur les fonctions discontinues.*

La plupart des nouveautés concernant les fondements de l'analyse présente dans les ouvrages de Tannery et Jordan se retrouvent donc dans ce manuel de Niewenglowski à destination de la classe de mathématiques spéciales. Le programme d'admission à l'École polytechnique de 1885 est largement dépassé. Niewenglowski tente d'imposer dans la classe de mathématiques spéciales la révision des principes de l'analyse que, trois ans plutôt, Tannery envisageait à l'issue de cette même classe. Les élèves n'ont plus besoin d'être « maîtres d'un nombre de faits mathématiques considérables » pour aborder l'analyse en toute rigueur. La démarche prônée par Hermite, qui consiste à prendre appui sur l'histoire des mathématiques, est battue en brèche dès l'enseignement secondaire.

3 – 2 Les *Leçons d'algèbre* de Pruvost et Piéron (1893)

Lorsque Pruvost et Piéron publient en 1893 le premier tome de leurs *Leçons d'algèbre* à destination de la classe de mathématiques spéciales, le premier est Inspecteur général de l'Instruction publique et le second Inspecteur de l'Académie de Paris. Tous deux sont d'anciens élèves de l'École normale supérieure[139].

Pruvost, né en 1833, y a été admis en 1853. Il a donc suivi les cours de calcul différentiel et intégral de Lefébure de Fourcy. Agrégé en 1859, il enseigne successivement dans les lycées de Clermont, Strasbourg, Nancy et Lyon avant d'être nommé à Paris au lycée Charlemagne en

[139] Sur Pruvost et Pieron voir BRASSEUR Roland, https://sites.google.com/site/rolandbrasseur/5---dictionnaire-des-professeurs-de-mathematiques-speciales , consulté le 30/08/2017.

1873, puis au Lycée Louis-le-Grand en 1875. Il siège au jury de l'agrégation à partir de 1875. Nommé Inspecteur de l'Académie de Paris en 1881, il devient Inspecteur général en 1885.

Piéron est né en 1847. Il est admis à l'École normale supérieure en 1866, dans la même promotion que Tannery. Agrégé en 1871, il enseigne à Caen, Besançon avant de succéder à Pruvost au lycée Charlemagne en 1875. Il est nommé en 1877 au lycée Saint-Louis et devient Inspecteur de l'Académie de Paris en 1892.

L'ouvrage de Pruvost et Pieron ne connaîtra pas le succès du *Cours d'algèbre* de Niewenglowski puisqu'il ne sera pas réédité. Cependant les rôles institutionnels de premier plan des deux auteurs lui confèrent un intérêt particulier. Leur position concernant le programme d'admission à l'École polytechnique n'en est que plus remarquable. Ils indiquent dans la « Préface » au texte : « nous n'avons pas cru devoir nous astreindre à développer uniquement les questions indiquées dans ce programme, malheureusement trop souvent modifié »[140].

La raison de ces développements hors programme apparaît clairement dans le paragraphe suivant, où ils écrivent :

> La théorie générale des fonctions a été considérablement perfectionnée dans ces derniers temps ; nous avons essayé de l'exposer d'une manière élémentaire, en nous aidant des travaux de M. Darboux (Mémoires sur les fonctions discontinues) et de ceux de M. Tannery (Introduction à la théorie des fonctions d'une variable).[141]

Jordan n'est pas cité. Ils attribuent clairement à Darboux et Tannery, comme eux anciens élèves de l'École normale supérieure, la paternité de la révision des principes de l'analyse en France. Précisons qu'à la date de parution de l'ouvrage, Darboux, Tannery et Pruvost sont membres du Conseil supérieur de l'instruction publique. Nous reviendrons sur cet organisme consultatif placé auprès du ministère de l'Instruction publique dans le prochain chapitre.

Les sept premiers chapitres de cet ouvrage de plus de 600 pages traitent de questions d'algèbre élémentaire, de la théorie des déterminants et de ses applications. Le chapitre VIII introduit les nombres irrationnels, ou incommensurables. Ils sont construits à partir des suites

---

[140] PRUVOST Émile, PIERON Dominique, *Leçons d'Algèbre*, t. 1, Paris, Imprimerie et librairie administratives et classiques, 1893, Préface.
[141] *Ibid.*, Préface.

convergentes de nombres rationnels, c'est-à-dire des suites qui vérifient le *critère de Cauchy*. Ils n'ont donc pas suivi le choix de Tannery d'introduire la notion de nombre irrationnel par la méthode des coupures.

Lors de cette construction purement arithmétique, le terme « irrationnel » est employé exclusivement. Pruvost et Piéron précisent ensuite que ces nombres « se sont présentés pour la première fois en arithmétique dans la théorie de l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier ou fractionnaire »[142]. Ils se sont « ensuite présentés en géométrie dans la comparaison de deux grandeurs de même espèce »[143]. Il faut situer cette approche historique dans le contexte du développement de l'histoire des sciences à la fin du XIXe siècle, et de sa diffusion à un public relativement large. Paul Tannery, le frère de Jules Tannery, en est l'un des acteurs majeurs[144]. Cela se traduira par la tentative d'introduction d'un programme d'Histoire des Sciences dans l'enseignement secondaire. Lors de la réforme de 1891 de l'enseignement moderne, sur laquelle nous reviendrons au prochain chapitre, le directeur de l'enseignement secondaire au ministère de l'Instruction publique avait commandé un tel programme à Paul Tannery[145]. Ce programme, qui n'avait finalement pas été adopté, avait été distribué aux membres du Conseil supérieur de l'instruction publique dont, rappelons-le, Pruvost était membre.

La définition de deux grandeurs incommensurables est donnée à partir des suites de nombres rationnels. Une « Remarque » est consacrée à l'égalité du rapport de grandeurs incommensurables : si A, B d'une part, A', B' d'autre part, sont des grandeurs de même espèce, les rapports respectifs de ces grandeurs seront égaux si les suites qui définissent ces rapports sont équivalentes, c'est-à-dire si leur différence a pour limite 0. Le passage d'une construction des incommensurables à partir des grandeurs à une construction purement arithmétique, justifié par l'antériorité de la conception arithmétique, transforme en simple conséquence le problème de l'égalité des rapports considéré comme fondamental par Duhamel.

---

[142] *Ibid.*, p. 151.
[143] *Ibid.*, p. 152.
[144] Voir PINEAU François, *Historiographie de Paul Tannery et réceptions de son œuvre : sur l'invention du métier d'historien des sciences*, thèse de Doctorat, Université de Nantes, 2010.
[145] Sur cet épisode, voir COUMET Ernest, « Paul Tannery : L'organisation de l'enseignement de l'histoire des sciences », *Revue de synthèse*, n° 102, 1981, p. 87-123.

Le chapitre XIV, intitulé « Propriétés générales des fonctions » commence par définir les ensembles de nombres : « quand des nombres sont assujettis à satisfaire à une même condition, on dit qu'ils forment un ensemble »[146]. Nous retrouvons les termes de la définition de Tannery. Les auteurs démontrent ensuite, en utilisant le vocabulaire actuel, que tout ensemble borné de nombres réels admet une borne supérieure et une borne inférieure. La définition d'une fonction est donnée à la suite de ce théorème. Elle est, comme chez Tannery, liée à la notion d'ensemble : il s'agit de faire correspondre un nombre déterminé à chacune des valeurs d'un ensemble de nombres tous distincts. Pruvost et Piéron vont moins loin que Niewenglowski dans la définition de fonctions arbitraires mais donnent cependant l'exemple de la fonction définie dans l'intervalle $(1\,;10)$ par $y = x - 5$ pour toute valeur entière de x, et $y = \frac{1}{x-5}$ pour les valeurs non entières de x.

Ils définissent ensuite la continuité d'une fonction en termes de ε,η. Sans employer l'expression de « continuité uniforme », ils démontrent que toute fonction continue sur un intervalle (a, b) est uniformément continue sur cet intervalle et qu'elle atteint ses bornes. Ils démontrent ensuite le *théorème des valeurs intermédiaires* en précisant que « cette propriété a été prise quelquefois comme définition de la continuité ; elle ne caractérise pas la continuité telle que nous l'avons définie car on a démontré qu'elle appartient à des fonctions qui ne sont pas continues dans le sens que nous avons adopté »[147]. Aucun exemple n'est donné.

Le chapitre XVII traite des dérivées et des différentielles. Signalons qu'il est précédé d'un chapitre consacré aux infiniment petits qui reprend le programme d'admission de l'École polytechnique, donnant les *théorèmes de substitution* dans un rapport et dans une somme. La notion de dérivée est généralisée à partir de la définition d'un polynôme dérivé. Une remarque renvoie au mémoire de Darboux pour l'existence de fonctions continues non dérivables. La différentielle est, par définition, « le produit de la dérivée $f'(x)$ par un accroissement arbitraire h attribué à la variable »[148]. Ils démontrent ensuite que « la différentielle d'une fonction dont la dérivée $f'(x)$ n'est pas nulle est égale à la partir principale de l'accroissement infiniment petit de la fonction »[149].

[146] PRUVOST Émile, PIERON Dominique, op. cit., p. 345.
[147] *Ibid.*, p. 358.
[148] *Ibid.*, p. 419.
[149] *Ibid.*, p. 420

Le chapitre XVIII intitulé « Application de la théorie des dérivées » propose successivement, comme chez Niewenglowski, le *théorème de Rolle*, appelé ici simplement « lemme », puis la « formule des accroissements finis » et son application à l'étude du sens de variation d'une fonction.

Le chapitre XX, « Intégrale définie. – Intégrale indéfinie. » commence en posant le problème de l'existence d'une primitive pour une fonction. Les auteurs y répondent de la façon suivante : « on a d'abord résolu ce problème à l'aide de considérations géométriques qui n'ont, par elles-mêmes, aucune valeur »[150]. Pour Pruvost et Pieron le temps n'est plus où, après une justification géométrique de l'existence d'une primitive, on pouvait passer à une démonstration analytique. Les travaux Riemann et Darboux ont définitivement dépossédé toute méthode géométrique de la moindre valeur démonstrative en analyse. De manière explicite, leur expression rejoint la démarche de Tannery qui, dans son *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, n'employait jamais le moindre argument géométrique.

Ils décrivent ensuite brièvement le calcul de la dérivée de l'aire sous une courbe et concluent :

> Il est clair qu'à moins d'admettre que la notion d'aire est une notion première, la solution que nous venons de résumer manque de rigueur.
> Nous allons donner une solution rigoureuse du problème proposé ; elle repose sur la définition de l'Intégrale définie.[151]

Leur définition de l'intégrale est celle de Riemann, adaptée par Tannery, mais Pruvost et Pieron ne citent que le nom de Darboux. Ils ne fournissent pas non plus, ni dans le texte, ni en note comme Niewenglowski, d'exemple de fonction continue non dérivable.

Après avoir étudié les propriétés de l'intégrale et les méthodes d'intégration, ils reviennent à la fin du chapitre sur la notion d'aire. Pour une fonction continue et positive dans un intervalle (α, β), si on a : $\alpha < x < \beta$, l'aire sous la courbe entre les abscisse α et x, est, « par définition », dans un repère dont les axes font entre eux un angle θ, $sin\theta \int_a^x f(x)dx$. La quadrature d'une courbe n'est plus la simple application de l'intégrale définie. Nous rencontrons pour la première fois, dans un manuel de mathématiques spéciales, la notion d'aire curviligne définie par le calcul intégral.

[150] *Ibid.*, p. 520.
[151] *Ibid.*, p. 520.

Pruvost et Piéron sont des acteurs essentiels de l'enseignement secondaire. Leurs conceptions sont nécessairement suivies de près par les professeurs de mathématiques spéciales. Ce manuel ne peut qu'encourager ces derniers à aller vers l'enseignement rigoureux des fondements de l'analyse souhaité par Darboux et propagé par Tannery puis Jordan. D'autant plus que, depuis une dizaine d'années, tous ceux qui sont issus de l'École normale supérieure ont été formés à cette nouvelle rigueur. Quelques années après le *Cours d'algèbre* de Niewenglowski, ce deuxième ouvrage confirme, selon nous, la diffusion d'un tel enseignement en classe de mathématiques spéciales.

Enfin, pour confirmer l'importance de Tannery dans le développement de l'enseignement des fondements arithmétiques de l'analyse en classe de mathématiques spéciales et la réalité de ces enseignements, nous ajoutons les phrases suivantes prononcées par Émile Picard. Elles l'ont été en 1925, dans la lecture à l'Académie des Sciences d'un texte sur la vie et l'œuvre de Jules Tannery, texte qui est par nature un éloge.

> On a parfois reproché à Tannery d'avoir exercé une mauvaise influence sur l'enseignement des mathématiques spéciales. Certes, il a pu arriver qu'un normalien, à sa sortie de l'École, ait voulu montrer les abîmes que cachait la notion de nombre incommensurable à de jeunes lycéens.[152]

Cette affirmation de Picard, quinze ans après le décès de Tannery indique les tensions qui avaient pu résulter de ces enseignements.

4 – Les nouveaux fondements de l'analyse dans les nouvelles éditions des manuels de Briot et Laurent

4 – 1 L'adaptation par Lacour des *Leçons d'algèbre* de Briot (1893)

Au chapitre précédent, nous avons déjà évoqué le traitement de la méthode infinitésimale dans cet ouvrage où Émile Lacour, professeur de mathématiques spéciales, reprend et met en conformité avec les nouveaux programmes un manuel qui fut l'un des plus grands succès

[152] PICARD Émile, « La vie et l'œuvre de Jules Tannery. Lecture faite dans la séance publique annuelle du 14/12/1925 », p. XVIII, http://www.academie-sciences.fr/pdf/dossiers/Picard/Picard_pdf/Picard_Tannery.pdf, consulté le 03/09/2018. Tannery sera d'ailleurs l'une des personnalités visées dans une polémique qui éclatera en 1907 à propos de l'enseignement de « mathématiques modernes » (voir RENAUD Hervé, « Quand les mathématiques modernes questionnent les methodes pédagogiques dans l'enseignement secondaire (1904-1910) », dans Evelyne BARBIN, Uffe Thomas JANKVIST et Tinne Hoff KJELDSEN (éditeurs), *History and Epistemology in Mathematics Education, Proceedings of the Seventh European Summer University*, Copenhague, 2015, p. 781-798.

d'édition de cette époque. Dans ce texte découpé en « Livres », et dont la composition suit celle du programme d'algèbre de l'École polytechnique, la théorie des fonctions est partagée en deux. Le « Livre III » intitulé « Des limites et des fonctions », aboutit à l'étude des fonctions exponentielle et logarithme. Après le « Livre IV » consacré aux séries, le « Livre V » aborde les dérivées et les intégrales.

Le « Livre III » commence par la seconde définition eulérienne d'une fonction. Rappelons que les éditions datant d'avant le décès de Briot, donnaient la première définition eulérienne. Aucune allusion n'est faite à des fonctions qui pourraient être définies de manière arbitraire. La limite d'une quantité variable et la continuité d'une fonction sont définies en termes de α, ε[153]. Lacour donne ensuite la définition d'une fonction uniformément continue, reprenant l'expression de Tannery d'une fonction continue dans un intervalle. Cette définition est illustrée par la figure ci-dessous. L'explication fournie est la suivante : « Si pp' est plus petit que le segment mesuré par ε, qq' est plus petit que le segment mesuré par α, et cela, quelle que soit la place occupée par pp' sur la portion de l'axe des x comprise entre les points p_0 et P »[154]. Parmi les manuels que nous avons analysés, c'est le premier à proposer une représentation géométrique de la notion de continuité uniforme.

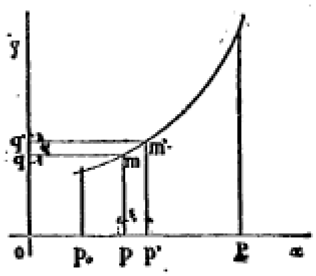


Figure 14: illustration de la continuité uniforme dans la 16e édition des *Leçons d'algèbre* de Briot

La définition des nombres incommensurables suit la définition de la continuité. Ils sont d'abord définis à partir des grandeurs. La mesure d'une grandeur A, incommensurable avec l'unité, est la limite vers laquelle tend un nombre qui mesure un segment commensurable avec l'unité tendant vers A. Lacour en propose ensuite une « définition générale » des nombres incommensurables à partir de suites adjacentes : « on dit que les termes de ces deux

153 Par rapport aux notations utilisées actuellement, ε joue le rôle du η et α celui du ε.

154 BRIOT Charles, *Leçons d'algèbre*, tome II, 16e *édition revue et mise au courant des nouveaux programmes par E. Lacour*, Paris, Delagrave, 1893, p. 99.

suites tendent vers une limite commune et qu'ils définissent un nombre »[155]. Ce nombre est dit incommensurable s'il n'existe pas de nombre entier ou fractionnaire qui soit limite de ces suites. Remarquons que la question de la convergence des suites n'est pas abordée.

Lacour détaille la définition des quatre opérations sur les nombres incommensurables puis explique brièvement qu'on peut généraliser aux nombres incommensurables les théorèmes établis pour opérer sur les nombres entiers ou fractionnaires.

Puis il considère une fonction « $f(x)$ définie pour toute valeur commensurable de x et continue dans un intervalle (a, b) »[156]. Il démontre que sa valeur, en x_1 incommensurable, est la limite vers laquelle tend $f(x)$, x étant un nombre commensurable qui tend vers x_1 suivant « une loi quelconque ». Il s'appuie sur ce théorème pour démontrer, toujours dans le chapitre sur les nombres incommensurables, le *théorème des valeurs intermédiaires*, et pour prouver que toute fonction uniformément continue dans un intervalle (a, b) atteint ses bornes.

Dans le « Livre V », la définition de la notion de dérivée est suivie de l'observation :

> il importe de remarquer que même pour une fonction continue il peut arriver que le rapport précédemment défini ne tende pas vers une limite ou tende vers une limite qui dépend de la loi suivant laquelle on fait tendre h vers 0. Si cela a lieu, on dit que la fonction n'admet pas de dérivée.[157]

Aucune allusion n'est faite, ni ici ni par la suite, aux fonctions continues sans dérivées.

Le *théorème de Rolle* est simplement désigné sous le terme de lemme. Justifié de façon purement intuitive dans les éditions étudiées précédemment, il l'est ici avec toute la rigueur mathématique exigée de nos jours. Il en est de même pour le *théorème des accroissements finis* et le lien entre signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction. Remarquons, pour

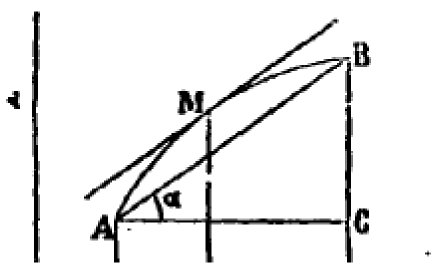


Figure 15: illustration du théorème des accroissements finis dans la 16e édition des *Leçons d'algèbre* de Briot

[155] *Ibid.*, p. 110.
[156] *Ibid.*, p. 115.
[157] *Ibid.*, p. 231.

la première fois dans un manuel que nous analysons, la « traduction en langage géométrique » du *théorème des accroissements finis* par la figure aujourd'hui couramment employée (figure 15 ci-dessus) :

Dans une note de bas de page, Lacour indique : « cette remarque m'a été communiquée par M. Perrin »[158]. Il semblerait qu'il s'agisse de Gabriel Perrin qui, en 1890-1891, était l'élève de Lacour au lycée Janson de Sailly. Il intégrera l'école normale supérieure puis deviendra professeur de mathématiques spéciales[159].

Nous avons vu, au chapitre précédent, qu'en ce qui concerne l'intégrale définie, la théorie que Lacour présente est celle de l'intégrale de Cauchy.

Ainsi, dans la révision de l'ouvrage de Briot à laquelle il procède, Lacour intègre certains des fondements de l'analyse mis au point dans les années 1870. Même si sa construction des nombres incommensurables vient après la définition de la continuité, les démonstrations qu'il propose par la suite des théorèmes fondamentaux répondent aux critères de rigueur des manuels les plus exigeants de l'époque. Cependant, Lacour n'utilise jamais la notion d'ensemble et ne définit pas l'intégrale de Riemann. La classe de fonctions qu'elle permet d'intégrer n'est pas dans son champ d'études qui reste celui des fonctions continues et dérivables. Une présentation rigoureuse des fondements le conduit à exposer des théorèmes hors programme, signalés comme tels par un astérisque. S'il ne craint pas cependant d'aller au-delà des programmes sur de nombreux autres points, l'intégrale de Riemann reste hors de son propos.

Soulignons pour conclure, à propos de cette édition, le respect par Lacour de l'esprit des conceptions pédagogiques de Briot dont il a été l'élève à l'École normale supérieure. Dans la partie que nous venons d'analyser, l'ouvrage va la plupart du temps de la représentation géométrique vers la démonstration analytique. Ainsi, les incommensurables sont définis par les grandeurs avant de l'être par les suites, l'intégrale définie l'est d'abord une aire avant d'être définie analytiquement, et ses propriétés sont figurées avant d'être démontrées. Le *théorème des accroissements* finis est d'abord démontré, mais c'est la première fois que nous

---

[158] *Ibid.*, p. 264.

[159] Voir BRASSEUR Roland, https://sites.google.com/site/rolandbrasseur/5---dictionnaire-des-professeurs-de-mathematiques-speciales , consulté le 31/08/2017.

le voyons traduit géométriquement. De même que Lacour prolonge dans sa révision l'attachement de Briot au « langage géométrique », il aborde aussi la théorie par l'étude d'exemples préalables qu'il généralise ensuite. Ainsi, la définition de $\sqrt{3}$ précède la définition générale des nombres incommensurables ou la dérivée d'une fonction est d'abord établie pour $y = x^m$. La recension dans les *NAM,* de l'édition de 1897 est explicite sur l'esprit qui continuait à présider à la rédaction de cet ouvrage:

> Les personnes dont l'éducation mathématique s'est faite à l'époque où paraissaient les livres d'enseignement de Briot savent quelle en était la lumineuse simplicité ; les points essentiels de chaque théorie y apparaissent, dégagés des propositions secondaires ; l'abstraction inévitable de certaines définitions ou démonstrations devenait intuitive, des images appropriées en faisant saisir le sens et dirigeant l'enchaînement logique des idées.
> La simplicité aussi réelle qu'apparente des programmes du temps facilitait alors le développement de ces qualités. Depuis, les cadres de l'enseignement se sont peu à peu élargis; à tort ou à raison, diverses théories s'y sont glissées et sont généralement développées dans les cours. Les Leçons d'Algèbre de Briot, sous leur forme primitive, devenaient incomplètes; les élever au niveau de l'enseignement actuel, et, cependant, conserver leurs qualités fondamentales, semblaient deux tâches incompatibles; M. Lacour a réussi à les concilier.[160]

Cette recension est signée d'Arthur Tresse, alors professeur de la classe préparatoire au concours de l'École centrale des arts et manufactures au collège Stanislas à Paris.

Revues et adaptées par Lacour, les *Leçons d'algèbre* de Briot conservent les qualités pédagogiques d'un ouvrage qui lui a valu un succès de longue durée, et continuent à lui garantir une réussite éditoriale.

4 – 2 Les oppositions de Laurent dans son *Traité d'algèbre* (1894)

À partir de la quatrième édition, en 1887, le *Traité d'algèbre* de Laurent est indiqué comme ayant été revu par Joseph-Hyacinthe Marchand, ancien élève de l'École polytechnique. Marchand fait partie de la promotion de 1861, celle qui suit la promotion de Laurent. Il a été l'élève de Duhamel. Admis dans les travaux publics, il semble s'être tourné vers l'enseignement mais nous n'avons pas trouvé sa trace parmi les professeurs de mathématiques spéciales des lycées.

---

[160] TRESSE Arthur, « Leçons d'algèbre par Ch. Briot, revues et mises au courant des nouveaux programmes, par M. E. Lacour », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. 17, 1898, p. 143-145.

L' « Avertissement » de la cinquième édition est signé de Marchand. Ce dernier décrit ainsi sa participation à la nouvelle édition : « revoir le texte avec soin, le rendre aussi correct que possible, et ne toucher qu'avec discrétion au fond même de l'ouvrage » [161]. Il indique clairement qu'une « refonte plus complète du théorème de Rolle » est de sa main, avant de préciser :

> Il était difficile, d'ailleurs, de faire plus, alors que MM. Gauthier-Villars, propriétaires du livre, et moi-même, nous étions convaincus que son ensemble laissait peu à désirer comme perfection didactique.[162]

Ce dernier paragraphe de Marchand suggère des désaccords entre les éditeurs et Laurent à propos des modifications apportées à la cinquième édition. La « refonte du théorème de Rolle » semble faire partie de ces désaccords.

Pour ce qui concerne l'analyse, la nouveauté essentielle de la cinquième édition est l'introduction de la notion d'intégrale définie. De façon surprenante, elle ne figurait pas dans l'édition précédente, pourtant parue deux ans après l'apparition de cette notion dans le programme d'admission à l'École polytechnique, et annoncée « en harmonie avec les nouveaux programmes ».

Nous avons vu que, dans l'édition de 1881, Laurent émettait pour la première fois un doute sur la dérivabilité d'une fonction continue, même s'il ne tenait pas pour acquis les travaux de Riemann, Weierstrass et Darboux. Le même doute est exprimé dans la quatrième édition publiée en 1887. Il est levé dans la cinquième édition, en 1894. Laurent a supprimé la toute dernière partie de la note de bas de page, que nous rappelons ici (nous indiquons entre crochets la partie supprimée en 1894) :

> Toute fonction $f(x)$ qui admet une dérivée finie et bien déterminée pour $x = a$ est évidemment continue, parce que l'accroissement de f est nécessairement infiniment petit avec celui de x ; mais il n'est pas prouvé que toute fonction continue ait une dérivée : quelques auteurs ont cité des fonctions continues ne possédant pas de dérivée ; [mais il n'est pas bien démontré que ces fonctions soient continues].[163]

[161] LAURENT Hermann, *Traité d'Algèbre*, tome II, 5^{e} édition *revue par J.-H. Marchand*, Paris, Gauthier-Villars, 1894, p. VI.
[162] *Ibid.*, p. VI.
[163] LAURENT Hermann, *Traité d'Algèbre, Quatrième édition en harmonie avec les nouveaux programmes, revue par J.-H. Marchand, Ancien élève de l'École polytechnique, Deuxième partie,* Paris, Gauthier-Villars, 1887, p. 160

L'édition de 1894 ajoute, à la suite de la continuité, le théorème énonçant, en langage actuel, que toute fonction continue sur un intervalle fermé borné atteint ses bornes. Cet énoncé est légèrement modifié. Il est établi pour une fonction qui s'annule aux bornes de l'intervalle, afin d'être utilisé par la suite dans la démonstration du *théorème de Rolle*. L' « Avertissement » nous permet donc de situer ici l'intervention de Marchand. En effet, dans les éditions de 1881 et 1887, le *théorème de Rolle* et *le théorème des accroissements finis* sont déjà démontrés comme on le fait aujourd'hui. Il s'agit donc de l'ajout de ce théorème qui permet la « refonte plus complète du théorème de Rolle ». Et, s'il semble bien que Laurent ait dû céder face aux exigences des propriétaires du livre, il exprime clairement ses réticences devant la démonstration de ce théorème. Nous reproduisons ici le début de cette démonstration :

> Il paraît que cette proposition n'est pas évidente ; voici comment on peut convaincre les esprits difficiles : $f(x)$, étant continu, ne peut devenir infini entre les limites de sa variable : il y aura donc une valeur M suffisamment grande ne valeur absolue qu'il ne pourra dépasser ; mais (dit-on), il ne pourra peut-être pas l'atteindre […][164]

Rappelons que le premier tome porte toujours cette citation de Pascal : « Prouver toutes les propositions un peu obscures, et n'employer à leurs preuves que des axiomes très évidents ou des propositions déjà accordées ou démontrées ». La rigueur qu'il revendiquait n'est pas celle de Darboux. Mais surtout, l'existence d'un conflit entre les éditeurs et Laurent à propos de la démonstration de ce théorème qui a pour objet de rendre l'ouvrage « aussi correct que possible », nous paraît une nouvelle indication de la diffusion des nouveaux fondements de l'analyse en classe de mathématiques spéciales. Pour prolonger « la faveur méritée que le *Traité d'Algèbre* de M. Laurent a rencontrée auprès des étudiants »[165] il fallait probablement adapter l'ouvrage aux exigences de rigueur du temps, malgré les réticences de l'auteur.

Si Laurent consent malgré tout à la démonstration du théorème précédent, il n'en est pas de même des théorèmes sur le sens de variation et le signe de la dérivée. En effet, le sens de variation n'est pas déduit du *théorème des accroissements finis*. Quand $f'(x)$ garde une signe constant dans l'intervalle (a,b), la relation : $f(x+h)-f(x)=h[f'(x)+\varepsilon]$ lui permet de conclure.

[164] LAURENT Hermann, *Traité d'Algèbre*, *Deuxième partie, 5^{e} édition revue par J.-H. Marchand*, Paris, Gauthier-Villars, 1894, p. 36.

[165] LAURENT Hermann, *op. cit.*, p. VI.

L'enseignement de l'intégrale de Riemann semble clairement dépasser pour lui le niveau de la classe de mathématiques spéciales. Il écrit :

> Dans les traités de calcul intégral un peu étendus, on donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction admette une intégrale, et l'on donne de l'intégrale une définition un peu plus générale.[166]

Considérant une fonction qui admet une primitive, il définit $\int_a^b f'(x)dx$ comme $f(b) - f(a)$ puis démontre qu'elle est égale à la limite de la somme :

$$[f'(a) + f'(a+h) + f'(a+2h) + \cdots f'(a+\overline{n-1}h]h, \text{où } h = \frac{b-a}{n}.$$

Sa démonstration utilise les relations :

$$f'(a+h) - f(a) = f'(a) + h\varepsilon_0,$$
$$f'(a+2h) - f(a+h) = f'(a+h) + h\varepsilon_1, \dots,$$
$$f'(b) - f(a+\overline{n-1}h) = f'(a+\overline{n-1}) + h\varepsilon_{n-1}$$

Il admet que, « quand h tend vers 0, tous les ε tendent vers 0 » et conclut : « cette démonstration n'est pas très rigoureuse mais elle suffit pour le moment, la question qui nous occupe devant être reprise plus tard, avec beaucoup de soin »[167]. Il n'aborde en effet ni la question de l'existence d'une limite, ni celle d'une limite indépendante de la partition de l'intervalle. Il faut se rappeler que Laurent se revendique dans la filiation de Cauchy qui, le premier, abordait les questions sur la limite évacuées ici. Son refus d'une démonstration plus rigoureuse indique sa conception de l'enseignement en classe de mathématiques spéciales. En effet, dans le tome III de son *Traité d'analyse*, paru en 1888, Laurent adopte, pour définition de l'intégrale définie, celle de Riemann[168]. Rappelons que cet ouvrage en sept tomes, dont la publication s'étale de 1885 à 1891, ne s'adresse pas aux élèves de mathématiques spéciales, mais a pour objectif de donner un état des connaissances en analyse.

Le « plus tard » se situe sans doute pour lui à l'École polytechnique où en faculté. Il nous faut en effet nous souvenir que Laurent n'introduisait qu'avec réticence la théorie des dérivées dans son *Traité d'algèbre* de 1867, et que la notion d'intégrale ne figurait pas dans l'édition de 1887. Il convient aussi de souligner que l'existence de l'intégrale n'est pas justifiée par des considérations d'aires. Laurent ne donne, dans la suite de l'ouvrage, aucune interprétation en termes d'aires. La position de Laurent nous semble à nouveau très particulière. Sans doute

---

[166] *Ibid.*, p. 254.
[167] *Ibid.*, p. 256.
[168] LAURENT Hermann, *Traité d'Analyse, Tome III, Calcul intégral, intégrales définies et indéfinies*, Paris, Gauthier-Villars, 1888, p. 12.

faut-il voir, dans cette introduction de l'intégrale définie le résultat d'un compromis entre Laurent et Marchand.

La défiance de Laurent vis-à-vis de l'enseignement des nouveaux fondements de l'analyse en classe de mathématiques spéciales est patente. Elle nous paraît de deux ordres. D'une part, démontrer qu'une fonction continue dans un intervalle fermé borné atteint ses bornes s'oppose probablement à la règle édictée par la citation de Pascal : il ne s'agit pas pour lui d'une de ces « propositions un peu obscures ». D'autre part, l'introduction rigoureuse de la notion d'intégrale définie relève quant à elle d'exigences qui ne sont pas du niveau de la classe de mathématiques spéciales. Il convient de rappeler pour terminer que, si Laurent n'enseigne pas lui-même dans cette classe, il est, depuis 1883, examinateur d'admission à l'École polytechnique.

5 – Les nouveaux fondements de l'analyse à l'École polytechnique

5 – 1 L'enseignement de Jordan (1893-1894)

La seconde édition du Cours d'analyse *(1893)*

En 1893 Jordan publie le premier tome de la seconde édition de son *Cours d'analyse de l'Ecole polytechnique*. Ce tome, consacré au calcul différentiel, est salué par Tannery dans le *BSM* comme exposant les principes « de la façon la plus solide et sous une forme qui bien souvent semble devoir être définitive »[169]. Cet ouvrage est l'aboutissement d'un long processus qui « traduit l'évolution des idées de […] Jordan sur les fondements de l'analyse »[170]. Annoncé par la « Note sur quelques points de la théorie des fonctions » du troisième tome de l'édition précédente, il reprend et généralise les idées développées dans cette « Note », allant beaucoup plus loin que Tannery dans son *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*.

Après avoir défini les nombres irrationnels et les limites comme dans la « Note » de 1887, Jordan donne la définition de Cauchy d'un d'infiniment petit. Il définit aussi les notions d'ordre d'infiniment petit et la valeur principale d'un infiniment petit. Il emploie par la suite cette

[169] TANNERY Jules, « Jordan (C.). – Cours d'analyse de l'École polytechnique. Deuxième édition, entièrement refondue », *Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série,* t. 17, p. 249.

[170] GISPERT Hélène, « Sur les fondements de l'analyse en France », *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 28, 1983, p. 67. Pour une analyse plus complète de l'évolution des idées de Jordan et de la deuxième édition de cet ouvrage, voir cet article et GISPERT Hélène, *Jordan et les fondements de l'analyse (étude comparée des deux premières éditions de son cours d'analyse)*, Paris, Publications mathématiques d'Orsay, 1982.

notion dans les applications géométriques, mais il ne donne plus les *théorèmes de substitution* de Duhamel.

Puis, écrit Tannery dans sa recension, « Jordan prend comme point de départ la notion d'ensemble dans toute sa généralité »[171]. Il considère en effet des ensembles de points dans un espace à n dimensions, définit les notions d'ensemble dérivé, d'ensemble parfait (qui contient son ensemble dérivé), de complémentaire, de points frontière, de domaine (de nos jours, un ensemble dont l'intérieur est non vide), d'ensemble d'un seul tenant (de nos jours, connexe par arcs), puis d'ensemble mesurable (de nos jours, Jordan mesurable). Les notions de longueur, d'aire et de volume sont donc ainsi, à l'aide de la théorie des ensembles, construites sur une base arithmétique.

La théorie de l'intégration, établie d'emblée pour des fonctions de plusieurs variables, généralise l'intégrale de Riemann. La notion de continuité n'est abordée qu'ensuite, pour des fonctions de plusieurs variables. Jordan démontre que, « si un ensemble E est borné et parfait, la continuité y sera uniforme »[172], puis qu' « une fonction $f(x, y, z, \dots)$ continue dans un domaine E borné et parfait est intégrable »[173]. Considérant ensuite le cas particulier des fonctions d'une seule variable, il démontre qu'une fonction à variation bornée dans un intervalle ab (qui peut s'écrire comme la différence de deux fonctions positives, bornées et non décroissantes sur l'intervalle) est intégrable sur cet intervalle.

La dérivation et l'intégration des fonctions d'une seule variable sont étudiées après. Nous y retrouvons les *théorèmes de Rolle*, *des accroissements finis*, l'étude des variations d'une fonction et les propriétés de l'intégrale définie. Jordan ne fournit pas dans cet ouvrage d'exemple de fonction continue qui ne soit pas dérivable, contrairement au troisième tome de la première édition.

Cet ouvrage reprend et généralise tous les apports théoriques des décennies précédentes. Ouvrage d'une des toutes premières personnalités de la communauté mathématique

---

[171] TANNERY Jules, *op. cit.*, p. 249.

[172] JORDAN Camille, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique, Deuxième édition entièrement refondue,* t. 1, Paris, Gauthiers-Villars, 1893, p. 61.

[173] *Ibid.*, p. 54.

française[174], il marque une rupture dans les conceptions de l'analyse en France. Il convient cependant de s'interroger sur ce que Jordan conservait de ce cours dans son enseignement à l'École polytechnique.

Le **Cours d'analyse** *lithographié (1893-1894)*

Nous disposons du cours d'analyse lithographié de Jordan distribués aux élèves de première année de l'École polytechnique durant l'année 1893-1894. Le document indique qu'il s'agit de la « Rédaction des élèves ».

Le cours de 1893-1894 commence par la notion de limite dans lequel Jordan établit le théorème suivant :

> Pour que les quantités $x_1, \ldots, x_n$ tendent vers une limite, il faut et il suffit qu'on puisse trouver une suite de quantités positives δ_i tendant vers 0 pour $i = \infty$ et telles que l'on ait toujours (pour $i < k$) : $|x_i - x_k| < \delta_i$.[175]

La démonstration publiée renvoyait à la construction des nombres irrationnels, ce qui n'est pas le cas ici, cette construction n'ayant pas été abordée. L'existence d'une limite à la suite qui vérifie le critère dit de Cauchy résulte de la propriété de convergence des suites adjacentes. Cette propriété, qui n'est pas nommée dans le cours, y apparaît comme une évidence.

Après une étude des infiniment petits semblable à celle de son *Cours d'analyse* publié, Jordan définit de même, pour n dimensions, les notions d'ensemble, d'ensemble parfait, de points frontière, et d'ensembles mesurables.

Il définit ensuite les notions de continuité et de continuité uniforme pour des fonctions de plusieurs variables, puis démontre qu'une fonction continue sur un ensemble borné parfait est uniformément continue et atteint ses bornes. Le théorème suivant établit que toute fonction continue de plusieurs variables est intégrable. Il est démontré pour une fonction de deux variables. Il définit l'intégrale de la fonction $f(x, y)$ sur un ensemble E ayant « une aire véritable »[176] σ, c'est-à-dire Jordan-mesurable. Notée $\int_E Zd\sigma$, elle est la limite de la somme

[174] Martin ZERNER situe Jordan au deuxième plan, juste derrière Bertrand, dans ce qu'il désigne sous le nom de « royaume de Mathésie » (voir ZERNER Martin, « Le règne de Joseph Bertrand (1877-1900) », *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences*, N°34, 1991, p. 298-322).
[175] JORDAN Camille, *Cours d'analyse, 1ère année, 2ème division, année 1893-1894,* CRH cours : Jordan 1893-1894, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique, p. 2.
[176] *Ibid.*, p. 17.

$\sum Z_k d\sigma_k$ où $Z_k = f(x_k y_k), (x_k, y_k)$ étant un point quelconque pris dans l'élément $d\sigma_k$, les $d\sigma_1, \ldots, d\sigma_n$ formant une décomposition de l'aire σ. Le cours dispensé à l'École polytechnique restreint donc la définition de l'intégrale à des fonctions continues.

Et, revenant aux fonctions d'une seule variable, après avoir étudié les propriétés des intégrales simples, la section intitulée « Dérivées et différentielles » commence ainsi : « en général, $f(x+h) - f(x)$ est un infiniment petit du même ordre que h »[177]. Le texte ne le précise pas, mais le contexte permet de comprendre qu'il considère une fonction continue. Donc, une telle fonction est « en général » dérivable. Les *théorèmes de Rolle* et des *accroissements finis* sont démontrés comme dans le tome de 1887.

En dehors de la construction des nombres irrationnels, le cours de Jordan de 1893-1894 reprend donc l'essentiel des principes établis dans la version publiée. La différence essentielle est qu'il se concentre sur les « bonnes fonctions », continues et dérivables, celles qu'un ingénieur aura l'occasion d'utiliser dans les applications.

5 – 2 L'opposition du Conseil de perfectionnement à l'enseignement des nouveaux fondements de l'analyse en mathématiques spéciales (1893-1896)

Les programmes de 1893 : mettre fin « aux développements parasites »

En 1892, à la demande du Ministère de la Guerre, les programmes d'admission à l'École polytechnique sont revus[178]. L'essentiel des révisions concernant les mathématiques porte sur le programme de mécanique. Cinq leçons sur la cinématique et la dynamique sont retirées du programme de physique pour former un chapitre intitulé « Mécanique ».

Dans le programme d'algèbre, la section consacrée au calcul des dérivées et des différentielles est modifiée de la façon suivante : au premier article, « Dérivée et différentielle *d'une seule variable* » est ajouté le mot « *indépendante* », et un renvoi à une note de bas de page qui précise : « on s'abstiendra de toute question relative aux singularités que peuvent présenter les fonctions »[179]. Au deuxième article, « Notion de l'intégrale définie » est rajouté « fondée sur la considération de l'aire d'une courbe ».

---

[177] *Ibid.*, p. 20.

[178] Voir la « Séance du 7 février 1896 », *Registre du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique*, X2C 29, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

[179] *Programme des connaissances exigées pour l'admission à l'École polytechnique,* Paris, Paris, Delalain Frères, 1893, p. 17.

Il s'agit clairement d'un refus de toutes les nouveautés apparues, à des degrés divers, dans les divers manuels de mathématiques spéciales étudiés précédemment. Ce refus est implicite lorsque le programme omet les notions et théorèmes qui, de la construction arithmétique des nombres irrationnels à l'étude du sens de variation d'une fonction, fondent l'analyse en cette fin de XIXe siècle. Il est explicite en ramenant la notion de l'intégrale définie à celle de l'aire d'une courbe. Lorsqu'il reprendra un historique des programmes d'admission depuis 1885, Le général André, commandant l'École, dira en 1896 que les Conseils de l'École espéraient, avec ces nouveaux programmes, mettre fin « aux "<u>développements parasites</u>" auxquels avaient donné lieu certaines parties de l'ancien programme »[180]. André est un polytechnicien de la promotion de 1857. Il fait carrière dans l'Artillerie et est nommé en 1894 commandant de l'École polytechnique[181].

Ces modifications sont adoptées par les Conseils de l'École sans débats notables. Elles semblent faire l'unanimité et sont adoptées par 15 voix sur 17 lors de la séance du Conseil de perfectionnement du 19 février 1892. En 1896, ce ne sera pas le cas pour les modifications suivantes, lors de « la révision décennale des Programmes d'admission de l'École »[182].

Le programme de 1896 : un retour en arrière

Le problème essentiel qui se pose en 1895 aux Conseils de l'École est celui des « élémentaires ». En effet, depuis 1885, le programme de mathématiques élémentaires ne figurait plus explicitement au programme d'admission, l'interrogation sur ces matières relevant du choix des examinateurs, à l'occasion des questions posées aux épreuves orales. Lors de la séance du 20 décembre 1895 du Conseil de perfectionnement, Ernest Mercadier, directeur des études, rappelle que cette suppression avait été approuvée par les « quatre cinquièmes des professeurs de mathématiques spéciales »[183].

---

[180] « Séance du 7 février 1896 », *Registre du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique*, X2C 29, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique. Les mots que nous soulignons le sont dans le registre.

[181] Sur le général André, voir LÉVY-LAMBERT Hubert, « Quelques polytechniciens dans l'affaire Dreyfus », http://www.annales.org/archives/x/dreyfusards.html.

[182] « Séance du 20 décembre 1895 », *op. cit*. Nous n'avons pas retrouvé dans les registres la décision initiale du Conseil de perfectionnement de procéder à une révision décennale des programmes d'admission. Les procès-verbaux de 1895-1896 situent la révision de 1885 dans ce cadre, ce que ne précisent pas les procès-verbaux de 1885.

[183] *Ibid.* Nous n'avons pas retrouvé trace de cette consultation des professeurs de mathématiques spéciales.

La loi militaire de 1889 a établi un service militaire personnel, obligatoire et universel d'une durée de trois ans. Depuis, selon Mercadier, « les candidats […] n'ont plus qu'une idée, partagée par leurs parents, c'est d'abréger le plus possible leurs études pour tenter d'entrer dans une école conférant le privilège de ne faire qu'une année de service en qualité d'officier de réserve »[184]. Un nombre croissant d'entre eux entrent donc en classe de mathématiques spéciales après la classe de philosophie, sans être passés par la classe de mathématiques élémentaires. Mercadier conclut : « la plupart des candidats et de nos élèves n'ont jamais bien su les éléments des mathématiques, et […] tout raisonnement synthétique, tout calcul numérique les embarrasse »[185]. Il faut donc, selon lui, remédier à cet état de fait en rétablissant les matières élémentaires au concours. Le Conseil de perfectionnement propose aussi de modifier le concours. Les épreuves écrites ne porteraient que sur une partie du programme d'admission et ne seraient plus éliminatoires. À l'issue des épreuves écrites et orales, les candidats admissibles et non admis conserveraient le bénéfice de leur admissibilité pour les concours suivants. L'élaboration d'un projet de programme est demandée au Conseil d'Instruction qui se réunit quelques semaines plus tard.

La question est d'abord étudiée par une commission constituée des anciens examinateurs d'admission devenus membres des Conseils de l'école et des examinateurs de l'époque. Elle présente au Conseil d'instruction un projet qui n'apporte au programme en vigueur que des aménagements mineurs et lui ajoute l'essentiel des notions de mathématiques élémentaires supprimées en 1885. Une minorité de membres de la commission (9 sur 23), en désaccord avec le projet, présente un contre-projet qui prévoit notamment la suppression de la méthode infinitésimale, et des notions de différentielle et d'intégrale définie. Il revient également sur des notions de mécanique et de physique introduites en 1892. Les noms de ces neuf membres ne figurent pas dans les registres.

Marie Alfred Cornu, professeur de physique, intervient. Il juge ce contre-projet inacceptable, remarque que les notes de mathématiques des élèves de l'École « n'ont jamais été aussi élevées » et, considérant les progrès de la mécanique et de la physique, en particulier de l'électricité il conclut : « il est donc indispensable que les candidats soient de bonne heure

[184] *Ibid.*
[185] *Ibid.*

initiés aux principes de la Physique, de la Mécanique, et des méthodes du calcul infinitésimal qui les mettent en œuvre »[186]. Le procès-verbal précise que les discussions qui s'ensuivent sont « vives ».

Jordan estime quant à lui qu'il est indispensable de conserver dans le programme les notions sur les infiniment petits et

> croit même qu'elles pourraient servir à simplifier l'exposé des Élémentaires. Toutes les questions relatives à la mesure des grandeurs (angles, longueurs, aires, volumes) dépendent essentiellement des infiniment petits : leur emploi ne peut être évité.[187]

Plusieurs membres, dont les noms ne figurent pas au procès-verbal « appuient énergiquement cette observation ». Le projet élaboré par la commission est adopté par 21 voix sur 24 votants. Cependant, une semaine plus tard, à la délibération suivante, lorsque le Conseil d'instruction termine l'examen du projet de programme, il n'est plus approuvé que par 14 voix sur 24.

Le 7 février 1896 le Conseil de perfectionnement examine le projet adopté par le Conseil d'instruction ainsi que le contre-projet. Le Général André déclare qu'il

> a été à même de constater que l'introduction dans les programmes de 1893 des mots : "<u>infiniment petits, différentielles, intégrale définie</u>" ont donné lieu de la part de professeurs de Mathématiques spéciales à des développements que le Ministre qualifiait de "<u>parasites</u>" : il en cite des exemples pris dans les livres ou les cahiers d'enseignement.[188]

L'année 1893 de la citation est évidemment une erreur puisque le général André fait alors allusion à la dépêche ministérielle de 1892. Il faut y lire 1885, année où ces notions apparaissent au programme d'admission.

Le procès-verbal ajoute : « il a donc paru à la minorité du Conseil que le seul moyen d'y couper court et de fermer la porte à ces développements était de supprimer du programme les mots à la faveur desquels ils prenaient naissance »[189]. Cornu intervient à nouveau en faveur du projet de programme défendu par le Conseil d'instruction, le comparant à un outillage

---

[186] [186] « Séance du 21 janvier 1896 », *Registre du Conseil d'instruction de l'École polytechnique*, X2C 30, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.
[187] *Ibid.*
[188] « Séance du 7 février 1896 », *Registre du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique*, X2C 29, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.
[189] *Ibid.*

perfectionné à fournir aux futurs élèves. Le commandant de l'École lui réplique qu'elle « n'a pas été créée pour faire des Candidats à l'Institut et qu'il n'y a pas un dixième des officiers qui aient à se servir de l'outillage perfectionné dont parle M. Cornu »[190]. Eugène Rouché rappelle que le calcul infinitésimal permet de simplifier les démonstrations de mécanique et indique qu'il a constaté lui-même, en interrogeant les élèves de l'École Sainte-Barbe, l'excellence de cette méthode d'enseignement. Il est soutenu par les professeurs de mécanique et par Édouard Collignon, examinateur de sortie. À la demande du Général Charles Peaucellier[191], président du Conseil de perfectionnement, la question ainsi formulée est renvoyée au Conseil d'instruction : « y a-t-il lieu de réduire les matières du Programme proposé au Conseil de perfectionnement, en raison de la réintégration explicite des élémentaires dans les matières d'examen » [192]?

Le Conseil d'instruction se réunit quatre jours plus tard. Après des tentatives pour renvoyer le problème au Conseil de perfectionnement sans modifier le projet adopté, des suppressions sont acceptées dans le programme en vigueur, et notamment les « Notions de l'intégrale définie ». Notons que les membres du Conseil d'instruction acceptent de sacrifier la notion d'intégrale définie aux exigences du Conseil de perfectionnement, mais souhaitent conserver les notions d'infiniment petits et de différentielle.

Le 7 mars, lors de la séance du Conseil de perfectionnement, le Général commandant de l'École constate que « la réduction faite est inférieure à l'augmentation »[193] due à la réintroduction des élémentaires. Après de nouveaux débats sur les inconvénients de supprimer le calcul infinitésimal, le Général André indique qu'il a consulté « des sommités dans la science, Mr. Darboux, …, les professeurs de l'École normale, …, etc ». Ceci provoque des protestations « contre la consultation de personnes étrangères à l'École ». Le procès-verbal précise : « Le Général reprend en disant qu'il laisse de côté le témoignage de ces personnes ; il ne retient que le témoignage de Mr Appell, qu'il a consulté comme répétiteur à

[190] *Ibid.*
[191] Il s'agit bien sûr de l'inventeur du système articulé qui transforme un mouvement circulaire en mouvement rectiligne.
[192] « Séance du 7 février 1896 », *op. cit.*
[193] Séance du 7 mars 1896 », *Registre du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique*, X2C 29, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

l'École et celui de Mr Hermite » [194]. Il lit des lettres d'Appell, professeur de mécanique rationnelle à la Sorbonne, et de Hermite, en faveur du contre-projet.

Le Général Peaucellier poursuit en affirmant « qu'il résulte de la difficulté d'approcher les matières du Programme actuel que le nombre des élèves de 1e année à l'École a beaucoup diminué »[195].

Le contre-projet est mis aux voix et adopté. Il entérine un retour au programme d'avant 1885, supprimant les notions d'infiniment petits, de différentielle et d'intégrale définie. Les modifications du concours envisagées sont elles aussi abandonnées. Cornu fait joindre une « Note » au procès-verbal pour protester contre l'adoption de ce programme « malgré l'avis du Conseil d'instruction, malgré l'opinion de la plupart de ceux qui représentent […] la véritable compétence en science et en pédagogie »[196].

Il apparaît, à travers l'analyse du véritable « bras de fer » que se sont livrés les Conseils d'instruction et de perfectionnement à l'occasion de cette révision du programme d'admission que, tout autant que la question des élémentaires, ce sont bien les notions d'infiniment petits, de différentielle, d'intégrale définie et leurs développements qui sont au cœur de la discussion. Les « développements parasites » dénoncés à nouveau par le Conseil de perfectionnement ne concernent probablement pas que les nouveaux principes de l'analyse développés dans les manuels. Nous avons par exemple cité au chapitre précédent, en 1887, la résolution d'équations différentielles dans *Cours de mathématiques* de Comberousse. Mais les procès-verbaux relatent clairement, en 1892 et 1896, des modifications de programmes qui expriment le refus par certains d'un enseignement préparatoire qui intègre ces nouveaux principes, et en particulier l'intégrale de Riemann.

Remarquons aussi qu'aucune allusion n'est faite à ce qui s'enseigne de ces principes à l'École elle-même. Le cours de Jordan ne connaîtra que peu de différences dans les années qui suivent, comment nous le montre le cours lithographié de 1899-1900. Signalons en particulier que, lors de la définition de la fonction dérivée, Jordan précise que, pour les fonctions continues, l'existence d'une limite au rapport des accroissements de la fonction à celui de la

[194] *Ibid.*
[195] *Ibid.*
[196] « Note [C] de M. Cornu », annexée à la « Séance du 7 mars 1896 », *Registre du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique*, X2C 29, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

variable « est un cas très habituel, et [qu'il ne considérera] que des fonctions admettant une dérivée, sauf en certains points singuliers »[197].

6 – L'enseignement en mathématiques spéciales en débat dans les journaux mathématiques (1896-1902)

Dans les journaux mathématiques ayant une importante diffusion nationale, nous n'avons pas trouvé de débat à propos de la suppression de l'intégrale définie au concours d'admission à l'École polytechnique.

Il est cependant intéressant de noter l'article que fait paraître Maurice Fouché, professeur au collège Sainte-Barbe, dans les *NAM* de 1896. Joseph Maurice Fouché est un polytechnicien de la promotion de 1873, celle de de Henri Poincaré. Aide astronome à l'Observatoire de Paris, il est renvoyé pour faute grave en 1881 et commence une carrière d'enseignant dans divers lycées parisiens[198]. Il obtient l'agrégation de mathématiques en 1886. Son article est intitulé : « Sur la définition de l'intégrale définie ».

Constatant les longueurs qu'entraîne la définition de l'intégrale définie par la considération de la limite d'une somme de termes, il écrit :

> la définition de l'intégrale définie, envisagée d'une manière abstraite et indépendante de toute considération géométrique, a paru assez pénible pour qu'on ait cru devoir la supprimer du programme d'admission à l'École polytechnique.[199]

Rappelons que le dernier programme d'admission en vigueur avant la suppression de cette notion indiquait : « Notion de l'intégrale définie fondée sur la considération de l'aire d'une courbe ». Cet article montre une nouvelle fois que des enseignements « abstraits » de cette notion s'étaient développés en classe de mathématiques spéciales.

[197] JORDAN Camille, *Cours d'analyse, 2ème division, année 1899-1900*, CRH cours : Jordan 1899-1900, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique, p. 26.

[198] Sur Maurice Fouché, voir WALTER Scott A., NABONNAND Philippe, KRÖMER Ralf et SCHIVON Martina, *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens (Publications des Archives Henri Poincaré)*, Birkhaüser, 2016, p. 144, https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-7643-8293-3_20.pdf.

[199] FOUCHÉ Maurice, « Sur la définition de l'intégrale définie », *Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série*, tome 15, Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1896, p. 208.

Fouché propose ensuite dans son article de définir l'intégrale définie d'une fonction croissante sur un intervalle en utilisant la méthode de construction des nombres irrationnels, qu'il attribue à Tannery.

Plus que la notion d'intégrale définie, première notion que les membres du Conseil d'instruction étaient prêts à sacrifier aux exigences du Conseil de perfectionnement, c'est la suppression des notions d'infiniment petits et, surtout, la « notation différentielle » que les *NAM* dénoncent en 1897. Charles-Ange Laisant, professeur à Sainte-Barbe et répétiteur à l'École polytechnique, et Xavier Antomari, professeur de mathématiques spéciales au Lycée Carnot sont alors les rédacteurs de cette revue. Polytechnicien de la promotion de 1859, mathématicien engagé en politique à partir des années 1880, Laisant est une personnalité importante de la presse mathématique en cette fin de XIX^{e} siècle[200]. Il a fondé en 1894, avec Émile Lemoine, la revue *L'Intermédiaire des Mathématiciens*. Antomari est normalien, de la promotion de 1876. Dans un article signé « La Rédaction », Laisant et Antomari approuvent le retour des élémentaires, mais écrivent, à propos du nouveau programme d'algèbre :

> nous laissons de côté toute critique de détail pour en arriver au point le plus grave : nous voulons parler de la suppression de toutes notions sur les infiniment petits et sur l'emploi de la notation différentielle. Après bien des efforts persévérants, les mathématiciens avaient obtenu, depuis plusieurs années, l'introduction de ces notions, indispensables aux applications. C'est un recul de plus de vingt ans qu'on fait subir d'un coup à l'enseignement des Mathématiques spéciales.[201]

Il n'y a pas un mot sur l'intégrale définie. On remarquera l'expression « plus de vingt ans ». Ces notions n'étaient au programme que depuis 1885. Laisant évoque-t-il des enseignements qui ont précédé le programme, et dont nous n'avons pas trouvé trace dans les manuels en dehors de celui de Laurent ? À moins qu'il ne s'agisse que d'un procédé rhétorique.

L'article se termine sur cette phrase :

> nous les supplions surtout [les rédacteurs du programme d'admission] de rétablir la notation différentielle, dont on ne peut se passer, et qui n'offre réellement pas

---

[200] Sur Laisant, voir AUVINET Jérôme, *Charles-Anges Laisant : itinéraires et engagements d'un mathématicien, d'un siècle à l'autre (1841-1920),* Thèse de doctorat, Université de Nantes, Nantes, 2011, et l'ouvrage tiré de cette thèse : *Charles-Anges Laisant : itinéraires et engagements d'un mathématicien de la Troisième République,* Paris, Hermann, 2013.

[201] « Le nouveau programme d'admission à l'École Polytechnique », *Nouvelles Annales de Mathématiques, 3^{e} série*, t. 16, 1897, p. 42.

> plus de difficultés dans l'enseignement que la théorie des dérivées, qu'elle éclaire et complète.[202]

Laurent, qui avait introduit la notion de différentielle dès 1875 dans son *Traité d'algèbre* défendra lui aussi la « notation différentielle » dans un article publié en 1899 dans la toute nouvelle revue *L'enseignement mathématique*. L'objectif de cette revue, fondée par Charles-Ange Laisant et Henri Fehr, est de mettre en relation les enseignants de mathématiques de « tous les pays où se cultive la science mathématique » afin de perfectionner les « moyens pédagogiques », en appelant notamment à des réformes des programmes et en réfléchissant à la « préparation du corps enseignant »[203].

L'article de Laurent promeut un enseignement utilitaire à l'École polytechnique, et regrette, qu'en mathématiques spéciales, les élèves soient « instruits et élevés comme si tous devenaient des professeurs »[204]. Il regrette que les enseignants de cette classe aient eu une « éducation trop théorique » et pense « qu'ils auraient besoin de passer un an dans une école d'application ou dans un atelier de construction », car selon lui, « il est entendu que la classe de spéciales est une classe préparatoire à l'École polytechnique »[205].

Laurent affirme que le programme d'admission à cette École est muet sur la notation à employer pour représenter les dérivées. Rejetant la « notation barbare » de Lagrange, il préconise la notation différentielle « plus commode », et écrit : « je pense que personne ne contestera la haute portée philosophique de la doctrine différentielle »[206].

En réponse à cet article de Laurent, Henri Poincaré signera, dans la même revue, sa première intervention publique dans les débats sur l'enseignement secondaire[207]. Poincaré est déjà, à cette époque, le plus célèbre mathématicien français. Il enseigne à la Sorbonne depuis 1885, il est titulaire de la chaire d'Astronomie mathématique et de Mécanique céleste depuis 1896.

---

[202] *Ibid.*, p. 45.

[203] LAISANT Charles-Ange et FEHR Henri, « L'Enseignement mathématique », *L'Enseignement mathématique*, t. 1, 1899, p. 1.

[204] LAURENT Hermann, « Considérations sur l'enseignement des mathématiques dans les classes de spéciales en France », *L'enseignement mathématique, 1e Année*, 1899, p. 38.

[205] *Ibid.*, p. 39.

[206] *Ibid.*, p. 41.

[207] Sur Poincaré, nous avons utilisé les éléments biographiques et bibliographiques dans ROLLET Laurent, *Henri Poincaré des mathématiques à la philosophie,* thèse de Doctorat, Université de Nancy 2, 1999. Sur les interventions de Poincaré dans les débats sur l'enseignement secondaire, voir en particulier, dans cette thèse, la section intitulée « De la réforme Leygues à la Ligue pour la Culture Française », p. 284-291.

Il a été répétiteur d'analyse à l'École polytechnique de 1882 à 1897. Il a publié ses premiers textes de philosophie des sciences en 1893.

Poincaré a côtoyé Laurent pendant plus d'une dizaine d'années à l'École polytechnique. Il lui répondra : « je conteste absolument les avantages de la notation différentielle et je crois qu'on ne doit l'enseigner aux débutants que quand ils sont déjà familiarisés avec la notation des dérivées »[208]. Après avoir montré les risques d'un mauvais usage de la notation différentielle, il concède cependant l'avantage de cette notation pour les différentielles du premier ordre des fonctions d'une variable indépendante et conclut, péremptoire :

> En résumé, en mathématiques spéciales, on doit employer presque exclusivement la notation de Lagrange : on fera connaître les différentielles premières, en insistant sur les cas où il n'y a qu'une variable indépendante. Si on aborde le cas où il y en a plusieurs, on se servira exclusivement de la notation de Lagrange pour les différentielles partielles. […]
> On s'abstiendra absolument de parler des différentielles secondes.[209]

Poincaré publie, en 1899, un deuxième article dans *L'enseignement mathématique* où il est question de l'enseignement de l'analyse en mathématiques spéciales et à l'École polytechnique. Le propos de cet article est bien plus large car il est intitulé : « La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement ». Il compare les connaissances mathématiques de cette époque à celles d'un livre écrit cinquante ans plus tôt, écrivant :

> on admettait qu'une fonction continue ne peut pas changer de signe sans s'annuler ; on le démontre aujourd'hui ; on admettait que les règles ordinaires du calcul sont applicables aux nombres incommensurables ; on le démontre aujourd'hui.[210]

Cette « marche vers la rigueur » s'est faite selon lui en restreignant de plus en plus la part de l'intuition dans la science, et en faisant plus grande celle de la logique formelle. En ne gardant plus que le nombre entier comme notion primitive, il poursuit : « nous ne démontrons plus

[208] POINCARÉ Henri, « La notation différentielle et l'enseignement », *L'enseignement mathématique, 1e Année*, 1899, p. 106.
[209] *Ibid.*, p. 109.
[210] POINCARÉ Henri, « La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement », *L'enseignement mathématique, 1e Année*, 1899, p. 157.

que la surface est égale à l'intégrale, mais nous considérons l'intégrale comme la définition de la surface »[211].

Il refuse d'avoir la logique pour « seul guide dans les questions d'enseignement »[212]. Selon lui, « le but principal de l'enseignement mathématique est de développer certaines facultés de l'esprit, et parmi elles l'intuition n'est pas la moins précieuse »[213]. Pour défendre l'intuition dont les futurs ingénieurs ont, selon lui, autant besoin que les futurs maîtres, il conclut :

> Je vais énoncer quelques conclusions précises.
> En spéciales et dans la première année de l'École polytechnique, on ne parlera pas des fonctions sans dérivées, on n'en parlera que pour dire : il peut y en avoir mais nous ne nous en occuperons pas.
> La première fois qu'on parlera aux élèves des intégrales, il faudra les définir par les surfaces, et ce n'est que quand ils auront pris beaucoup d'intégrales qu'on leur donnera la définition rigoureuse.[214]

Ces propos de Poincaré sont catégoriques. Ils s'opposent radicalement aux conceptions défendues par des auteurs de manuels comme Tannery, Niewenglowski, Pruvost et Pieron, mais aussi d'autres que nous rencontrerons au prochain chapitre. Ils sont tenus par la personnalité scientifique sans doute la plus en vue de cette fin de siècle, qui s'engage en réaction contre un enseignement délivré par certains professeurs de mathématiques spéciales et par Jordan à l'École polytechnique.

Il convient de rappeler aussi les liens d'amitié qui liaient Poincaré et Tannery[215]. Un cercle d'amis s'était formé autour de Tannery et du philosophe Émile Boutroux qui s'étaient rencontrés à l'École normale supérieure, agrégeant progressivement Paul Tannery, l'astronome Benjamin Baillaud, puis Poincaré. À ces relations d'amitié amitié se joignirent des relations familiales : Boutroux épousa la sœur de Poincaré et Jules Tannery la sœur de Baillaud. Les différences de conceptions sur ce que devait être l'enseignement des mathématiques n'empêchaient pas cette proximité entre les deux hommes.

Les commentaires du nouveau programme d'admission à l'École centrale des arts et manufactures, en 1901, font écho à ces propos de Poincaré. La publication, dans le

[211] *Ibid.*, p. 158
[212] *Ibid.*, p. 159.
[213] *Ibid.*, p. 160.
[214] *Ibid.*, p. 162.
[215] Voir NYE Mary Jo, « The Boutroux Circle and Poincaré's conventionalism », *Journal of the History of Ideas*, t. XL, 1979, p. 107-120.

supplément d'octobre 1901 des *NAM*, du texte intégral du *Journal officiel* concernant ces commentaires est tout aussi remarquable. Une telle publication n'est pas la règle commune.

Rappelons tout d'abord que l'École centrale a intégré dans son propre programme d'admission, en 1865, la théorie des dérivées qui était au programme d'admission de l'École polytechnique. En revanche, les notions d'infiniment petits, de différentielle et d'intégrale définie n'ont pas, par la suite, été inscrites à ce programme. Les commentaires, publiés au *Journal officiel* du 21 août 1901, sont partagés en trois parties intitulées : « Simplifications », « Précision » et « Développement ».

Les « Simplifications » commencent par :

> on a supprimé toutes les questions pouvant donner lieu à des discussions sur les principes : ces questions, qui touchent à la philosophie des Mathématiques, seraient intéressantes et utiles pour des élèves se destinant à l'enseignement ; elles ne peuvent même pas être comprises d'un élève de lycée.[216]

En géométrie sont citées les notions de ligne, de plan et le postulat des parallèles d'Euclide. En algèbre et arithmétique, ont été supprimées

> les questions pouvant donner lieu à des développements ou à des interrogations sur les nombres incommensurables en général, sur l'idée générale de limite, sur la continuité en un point ou dans un intervalle, sur l'existence des dérivées et des fonctions implicites… : ce genre de notion se trouvera précisée par les exemples particuliers qui s'en présentent dans le cours : l'idée d'incommensurable par le rapport de la diagonale du carré au côté ; l'idée de limite par les progressions géométriques décroissantes, les séries, les dérivées, etc ; pour éviter toute difficulté pour la continuité, on a indiqué au programme que l'idée d'un trait continu pour la représentation graphique de la fonction suffirait à définir la continuité ; on a, d'une façon générale, introduit dans toutes les questions d'Analyse et d'Algèbre la représentation graphique.[217]

Avec ces commentaires, nous sommes bien loin d'une analyse arithmétisée, et de la conviction d'un certain nombre d'auteurs de manuels ou d'articles qu'un bon élève de mathématiques élémentaires pouvait comprendre toutes ces notions. Les auteurs de ce nouveau programme entendent marquer pour les classes préparatoires à l'École centrale, le même coup d'arrêt à l'introduction des nouveaux fondements dans l'enseignement de l'analyse que celui décidé

[216] « Supplément », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4e série, t. 1, 1901, p. XXXIII.
[217] *Ibid.*, p. XXXIII.

quelques années auparavant par le Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique pour la classe de mathématiques spéciales. Ils sont plus explicites.

7 – Conclusion

Darboux est, en France, l'acteur principal du mouvement initié par les mathématiciens allemands, qui aboutit dans, les dernières décennies du siècle, à une arithmétisation des fondements de l'analyse. Cependant, il ne participe qu'indirectement à la traduction de ces fondements dans les manuels pour l'enseignement supérieur. Il oriente celui de Houël, mais cet ouvrage demeure marqué par l'enseignement de Duhamel comme nous l'avons vu au chapitre précédent. Celui de Tannery réalise son souhait de renouveler l'enseignement de l'analyse. Le rôle de Darboux dans la rédaction de l'ouvrage de Tannery n'est pas documenté mais la proximité des conceptions mathématiques de ces deux hommes issus de l'École normale supérieure nous paraît indiscutable. Le prochain chapitre permettra d'y revenir.

L'historiographie a surtout retenu les manuels de Jordan. Sa position au sein des mathématiques françaises était sans conteste plus importante que celle de Tannery[218] et la deuxième édition de son *Cours d'analyse*, et par certains aspects, le troisième tome de la première édition, ont plus d'ampleur novatrice que l'*Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*.

Cependant, l'ouvrage de Tannery nous paraît jouer un rôle au moins aussi important que ceux de Jordan dans la diffusion des nouveaux principes de l'analyse en mathématiques spéciales. En effet, Pruvost et Pieron le citent prioritairement, et, si le *Cours d'algèbre* de Niewenglowski emprunte plus à Jordan, il doit aussi beaucoup à Tannery. Il est d'ailleurs remarquable que les auteurs de ces deux manuels soient d'anciens élèves de l'École normale supérieure, de la génération de Tannery pour Pieron et Niewenglowski.

Ces nouvelles conceptions des fondements de l'analyse atteignent presque simultanément les élèves de mathématiques spéciales et ceux de l'École polytechnique. Dans la diffusion de ces nouveaux principes, l'École normale supérieure joue un rôle moteur à travers ses enseignants et les professeurs de lycée qu'elle forme. Les freins au développement de cet enseignement émanent de l'École polytechnique. À la liberté de Tannery pour ses conférences à l'École

[218] Voir à ce sujet ZERNER Martin, « Le règne de Joseph Bertrand (1877-1900) », *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences*, N°34, 1991, p. 298-322.

normale supérieure, s'oppose, à l'École polytechnique, l'impératif de la formation d'ingénieurs qui oriente les programmes vers l'utilitaire.

Laurent symbolise d'une certaine façon l'opposition à l'enseignement de ces nouveaux fondements en classe de mathématiques spéciales. Malgré tout, très probablement contraint par les éditeurs, il doit adapter son texte aux nouvelles exigences de rigueur de l'époque. Ce ne sont pas celles des programmes. Laurent exprime de façon suffisamment explicite que ce sont celles des professeurs formés à l'École normale supérieure. La reprise par Lacour des *Leçons d'algèbre* de Briot s'inscrit dans cette même exigence d'adaptation de manuels anciens qui avaient été des succès d'édition. Mais que ce soit Laurent/Marchand ou Lacour, ils ne reprennent qu'une partie des théorèmes et notions fondamentales de l'analyse qui se trouvaient chez Tannery et Jordan, puis chez Niewenglowski et Pruvost, Pieron. Le tableau 2 récapitule les notions et théorèmes fondamentaux présents dans les ouvrages examinés. Par commodité, nous avons employé dans ce tableau le vocabulaire utilisé de nos jours ; il permet de gommer les différences qui existent entre les auteurs à une époque où le vocabulaire n'était pas encore fixé ; il s'agit bien sûr dans tous les cas d'énoncés dans *l'ensemble des nombres réels*.

À partir du manuel du Niewenglowski, la différence s'accentue entre les deux courants d'ouvrages que nous suivons depuis le début de cette thèse. L'écart grandit entre les manuels qui se rangent plus du côté de l'intuition et ceux attachés à la plus grande rigueur analytique, au point que nous voyons basculer l'ouvrage de Laurent des seconds vers les premiers. Ce sont les seconds que condamnent fermement les Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique, de l'École centrale, et l'autorité de Poincaré, figure dominante des mathématiques françaises du tournant du siècle.

Enfin soulignons que le retour en arrière du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique, en 1896, traduit une nouvelle fois l'extrême prudence avec laquelle ce Conseil accepte l'introduction de nouvelles notions dans le programme d'admission. Nous avons vu, à propos de la théorie des dérivées, que n'étaient inscrites au programme que des notions qui, d'une manière ou d'une autre, avaient déjà été pratiquées en classe de mathématiques spéciales. Cela n'était pas le cas des notions introduites en 1885, en particulier de la notion d’intégrale définie. Les « développements parasites » qu’elle provoque entraînent sa suppression.

Notions/Théorèmes	**Tannery (1886)**	**Jordan (1887)**	**Niewenglowski (1889)**	**Pruvost, Pieron (1893)**	**Briot (Lacour) (1893)**	**Laurent (Marchand) (1894)**
Construction arithmétique des irrationnels	✓	✓	✓	✓	✓	
Ensembles	✓	✓	✓	✓		
Toute suite de Cauchy est convergente	✓	✓	✓	✓		
Tout ensemble borné admet des bornes supérieure et inférieure	✓	✓	✓	✓		
Toute suite croissante majorée (i.e. décroissante minorée) est convergente	✓	✓	✓	✓		
Tout ensemble infini borné admet un point d'accumulation	✓					
Exemples de fonctions définies arbitrairement		✓	✓	✓		
Continuité : * en un point	✓	✓	✓	✓	✓	✓
*** uniforme**	✓	✓	✓	✓	✓	
Toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est uniformément continue et atteint ses bornes	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Théorème des valeurs intermédiaires	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Étude du sens de variation d'une fonction à la suite des théorèmes de Rolle et des accroissements finis	✓	✓	✓	✓	✓	
Intégrale de Riemann	✓	✓	✓	✓		
Exemple de fonction continue sans dérivée		✓				

Tableau 5: Présence des principales notions et des principaux théorèmes dans les ouvrages analysés dans ce chapitre

TROISIÈME PARTIE : De l'introduction de la théorie des fonctions dérivées en classe de 1e Sciences de l'enseignement moderne à sa généralisation dans l'enseignement secondaire (1890-1902)

En 1890, l'enseignement secondaire français pour garçons est partagé entre enseignement classique et enseignement spécial. Le premier, le plus prestigieux, destiné à former l'élite dirigeante du pays, est fondé sur l'étude du latin et du grec[1]. L'enseignement scientifique y occupe une place restreinte : environ 15% du temps est consacré aux sciences avant la classe terminale. En revanche, en classe de mathématiques élémentaires, cet enseignement, et en tout premier lieu les mathématiques, occupent la plus grande part de l'emploi du temps. Cette classe prépare au baccalauréat ès sciences. Surtout, elle permet d'accéder à la préparation des concours d'entrée dans les École du gouvernement (École Navale, Saint-Cyr, École forestière, École centrale des arts et manufactures, École de mineurs de Saint-Étienne) et à la classe de mathématiques spéciales qui prépare aux prestigieuses Écoles polytechnique et normale supérieure.

L'enseignement spécial s'est surtout développé à partir de 1865. Sans latin, il est considéré comme un enseignement de second ordre. Marqué par un aspect utilitaire, les élèves, souvent issus des classes moyennes (enfants de fonctionnaires, agriculteurs, artisans et commerçants) y étudient le français, les langues vivantes et les sciences. Depuis 1881, un baccalauréat de l'enseignement spécial sanctionne ces études. Il permet, depuis 1886, de se présenter aux concours des Écoles Saint-Cyr et Polytechnique. Mais, dans la pratique, cette dernière se montre réticente à admettre des candidats issus de l'enseignement spécial en attribuant des points supplémentaires aux élèves issus de l'enseignement classique[2].

Dispensé dans un peu plus de 300 établissements publics et environ 700 institutions privées, la plupart aux mains de l'Église catholique, l'enseignement secondaire scolarise un peu plus de 150 000 élèves dont environ la moitié dans le public. Ceci ne représente qu'à peine 8% de la population masculine scolarisable dans les classes d'âge concernées. Encore ce résultat

[1] Parmi les très nombreuses sources sur l'organisation de l'enseignement durant cette période, voir notamment PIOBETTA Jean-Baptiste, *Le baccalauréat de l'enseignement secondaire*, Paris, Baillière, 1932, FALCUCCI Clément, *L'humanisme dans l'enseignement secondaire en France au XIXe siècle*, Toulouse, Privat, 1939, PROST Antoine, *Histoire de l'enseignement en France, 1800-1967*, Paris, Armand Colin, 1968 et SAVOIE Philippe, *La construction de l'enseignement secondaire*, Lyon, ENS Éditions, 2013. Concernant plus particulièrement l'enseignement des sciences dans le secondaire, voir BELHOSTE Bruno, « L'enseignement secondaire français et les sciences au début du XXe siècle. La réforme de 1902 des plans d'études et des programmes », *Revue d'histoire des sciences*, t. 43, 1990, p. 371-400, et *Les Sciences dans l'Enseignement secondaire français, Textes officiels. Tome I: 1789–1914*, Paris, Institut national de recherche pédagogique, 1995, et HULIN Nicole, *Culture scientifique et humanisme. Un siècle et demi d'engagement sur le rôle et la place des sciences*, Paris, L'Harmattan, 2011.

[2] Voir SHINN Terry, *Savoir scientifique et pouvoir social. L'École polytechnique (1794-1914),* Paris, Presses de la Fondation Nationale des Sciences Politiques, 1980, p. 108-109.

inclut-t-il les élèves des classes élémentaires des lycées, qui précèdent la classe de 6e. Si nous ne considérons que les élèves à partir de la 6e, l'enseignement secondaire ne concerne plus qu'environ 6% des garçons de ces classes d'âge. Quant aux bacheliers ils représentent moins de 1% des garçons d'une classe d'âge. Environ un tiers des élèves sont dans l'enseignement spécial.

Les établissements publics sont constitués d'une centaine de lycées et d'environ deux cents collèges communaux. Les premiers sont financés par l'État, les seconds le sont essentiellement par les communes. Lycées et collèges sont placés sous le contrôle du ministère de l'Instruction publique. Ces établissements et leurs professeurs sont désignés comme faisant partie de l'Université, une administration fondée en 1806. Cependant, l'écart est énorme entre les grands lycées parisiens qui scolarisent l'élite de ces élèves, où la bourgeoisie provinciale inscrit ses fils, et les collèges de province qui ne dispensent parfois qu'une partie de l'enseignement.

Les établissements privés sont pour la plupart de petite taille. Parmi les plus importants d'entre eux, il faut citer l'École Sainte Geneviève, l'École Sainte Barbe et l'Institution Duvignaud qui accueillent à Paris plusieurs centaines de candidats aux baccalauréats scientifiques et aux écoles du gouvernement.

Dans cette partie, nous désignerons donc sous l'appellation *enseignement secondaire* l'enseignement qui va de la classe de 6e aux classes qui préparent aux différents baccalauréats. Sont donc exclues de cette dénomination la classe de mathématiques spéciales, les classes préparatoires aux écoles du gouvernement, classées à l'époque comme des classes de mathématiques élémentaires, ainsi que la classe appelée « mathématiques élémentaires supérieures » ou « mathématiques élémentaires A ». Créée dans les années 1880, elle est en effet destinée à préparer les élèves à la classe de mathématiques spéciales en raison du développement des programmes et des exigences des concours. Elle n'existe que dans les lycées les plus importants[3].

Avant d'être le nom d'une classe, l'expression « mathématiques élémentaires » désigne un ensemble de connaissances en arithmétique, algèbre, géométrie et mécanique considérées comme faisant partie des « éléments » des mathématiques. En algèbre, jusqu'en 1890, les

[3] Cette classe deviendra en 1905 la classe de mathématiques spéciales préparatoires.

éléments excluent la théorie des fonctions dérivées. Contrairement à ce que nous avons vu pour le programme d'admission à l'École polytechnique, rien ne nous permet de supposer, jusqu'à cette date, qu'un enseignement de cette théorie ait été donné en classe de mathématiques élémentaires. Il en est de même pour les classes préparatoires au concours de Saint-Cyr. Cette école militaire est l'école du gouvernement qui recrute le plus grand nombre d'élèves. En 1890, 461 élèves y sont admis contre 265 à l'École polytechnique[4]. Le programme d'admission correspond à celui de la classe de mathématiques élémentaires augmenté d'un certain nombre de notions. Si nous ne disposons pas de chiffres pour la période considérée, nous avons dénombré, en 1903, 43 classes préparatoires à Saint-Cyr dans les lycées, 11 à Paris et 32 en province[5]. La préparation à ce concours joue donc un rôle de tout premier plan pour l'organisation des études scientifiques dans l'enseignement secondaire.

L'écrasante majorité des professeurs de mathématiques élémentaires sont agrégés. Ceux des classes terminales de l'enseignement spécial sont agrégés de l'enseignement spécial. Le calcul différentiel et intégral est au programme de l'agrégation de mathématiques de l'enseignement spécial. Tous ces professeurs ont donc eu la formation nécessaire pour pouvoir enseigner les premiers éléments d'analyse.

En 1891, à l'occasion d'une réforme qui transforme l'enseignement spécial en enseignement moderne, la théorie des fonctions dérivées est mise au programme de la classe terminale de ce nouvel enseignement. C'est la première fois que cette théorie apparaît à ce niveau de l'enseignement secondaire. La même année, elle est aussi inscrite pour la première fois au programme d'admission à Saint-Cyr. Il faudra attendre onze ans pour que l'enseignement de cette théorie se généralise et atteigne les élèves de l'enseignement classique. Cela se produira à l'occasion de la réforme de 1902, réforme majeure du système éducatif français qui unifie l'enseignement secondaire. C'est à cet épisode de l'enseignement de l'analyse en secondaire, à ce moment d'entre-deux des programmes, que nous consacrerons cette partie.

[4] Source : *Journal officiel de la République française*, du 27/09/1890 pour les candidats admis à l'École polytechnique, du 14/10/1890 pour les candidats admis à Saint-Cyr.

[5] Source : *Classement et traitement des personnels des lycées et collèges de garçons*, Paris, Imprimerie Nationale, 1903.

Dans un premier chapitre, nous reviendrons sur les circonstances dans lesquelles se produit cette réforme de 1891. Destinée à organiser des « humanités scientifiques », elle prolonge et complète une réforme du baccalauréat de l'enseignement classique qui modifiait considérablement les conditions d'obtention du baccalauréat scientifique. Nous verrons comment l'introduction de la théorie des dérivées participe à ce projet ministériel et nous nous interrogerons sur la concomitance de cette introduction dans l'enseignement moderne et dans le programme d'admission à Saint-Cyr. Puis, comme dans la partie précédente nous analyserons des manuels de l'enseignement moderne. Ils nous serviront d'indicateurs pour comprendre comment ce programme a été mis en œuvre de. Nous nous demanderons dans quelle mesure le concours d'admission à Saint-Cyr oriente la rédaction de ces ouvrages. Durant la même période paraissent les premiers manuels destinés à la classe de mathématiques élémentaires qui introduisent la théorie des fonctions dérivées. Nous nous interrogerons sur les motivations des auteurs qui emploient une théorie qui n'a pas encore été inscrite au programme de cette classe, et nous chercherons en quoi leurs textes diffèrent de ceux écrits pour l'enseignement moderne.

Un second chapitre sera consacré aux circonstances dans lesquelles est généralisé l'enseignement de la théorie des dérivées dans le secondaire. En effet, en 1902, elle apparaît dès la classe de seconde, dans le programme des filières scientifiques instituées par le nouveau plan d'études, ainsi qu'en classe de philosophie. L'analyse d'articles et de textes publiés durant la décennie qui nous intéresse ici nous montrera l'engagement des acteurs que sont les enseignants en faveur de cette généralisation. La lecture des comptes rendus de la commission d'enquête parlementaire sur l'enseignement secondaire instituée en 1898, couplée à l'analyse de statistiques nous permettra de comprendre en quoi les modifications intervenues en 1890-1891 ont impacté l'enseignement des mathématiques et ont pu peser sur les programmes adoptés en 1902. Pour terminer, nous analyserons ces nouveaux programmes à la lumière de l'ensemble des résultats apportés par cette thèse.

Chapitre 7 : Premiers enseignements de la théorie des dérivées dans le secondaire (1890-1898)

Écrire l'histoire de l'introduction des premiers éléments d'analyse dans l'enseignement secondaire à la charnière des XIX^{e} et XX^{e} siècles nécessite de revenir sur ce que fut l'enseignement secondaire des mathématiques depuis sa création, au début des années 1800. Dans un premier temps, nous retracerons donc cette histoire, en nous intéressant plus particulièrement à l'enseignement des éléments d'algèbre qui précèdent les premières notions d'analyse. Car, encore une fois, la notion de fonction dérivée est introduite dans le programme d'algèbre de la classe de 1^{e} Sciences, qui est la classe terminale de l'enseignement moderne.

Cette introduction se produit dans le cadre général des réformes de 1890-1891. Nous chercherons les raisons qui ont poussé les réformateurs à inscrire cette théorie dans les programmes de l'enseignement moderne l'année même elle figure dans le nouveau programme d'admission à Saint-Cyr. Nous verrons qui sont les hommes à l'origine de ce nouveau programme et nous le comparerons à celui adopté par le Conseil de perfectionnement de Saint-Cyr.

Comme lors de l'introduction des dérivées en mathématiques spéciales, ce sera l'analyse de manuels destinés à la classe de 1^{e} Sciences qui nous permettra d'approcher la mise en œuvre de ce programme. Nous en avons retenu deux. L'un de ces manuels a été écrit par un acteur institutionnel de toute première importance. Il s'agit de Charles Vacquant qui était alors Inspecteur général. L'autre est l'œuvre d'un enseignant, Paul Porchon. Auteur de nombreux ouvrages destinés aux élèves de l'enseignement secondaire, il est professeur au lycée de Versailles, lieu important pour la préparation à l'École Saint-Cyr. Reprenant la méthodologie suivie lors de l'étude des premiers manuels de mathématiques spéciales à introduire la théorie des dérivées, après la réforme de 1851, nous analyserons simultanément ces deux ouvrages.

Lors de cette analyse, nous rechercherons en particulier les écarts aux textes officiels. Dans les chapitres précédents, ils nous avaient permis de comprendre les modifications ultérieures apportées au programme d'admission à l'École polytechnique. Cette fois, ces manuels préparent à un baccalauréat dont le programme est proche de celui du concours de Saint-Cyr. Nous nous demanderons en quoi ce concours a pu orienter l'écriture de ces ouvrages.

Dans les années qui suivent, nous retrouvons la théorie des dérivées dans certains manuels de la classe de mathématiques élémentaires. Aucun texte officiel ne guidant les auteurs de ces ouvrages, nous nous interrogerons sur leurs motivations à mettre en œuvre une théorie que le programme n'exige pas. L'un d'eux est particulièrement intéressant puisqu'il est publié dans le cadre d'un *Cours complet de mathématiques élémentaires* dirigé par Gaston Darboux. Il s'agit des *Leçons d'algèbre* de Charles, dit Carlo, Bourlet. Cet ouvrage mérite d'autant plus notre attention qu'il a été précédé, dans le cadre de ce même cours, d'un manuel d'arithmétique dû à Jules Tannery. Nous avons insisté au chapitre précédent sur les rôles joués par Darboux et Tannery dans la fondation et l'enseignement de l'analyse depuis 1875. Ce *Cours complet* est donc une indication de ce que ces deux personnalités institutionnelles estimaient être un enseignement de mathématiques élémentaires. Avant l'analyse du manuel de Bourlet, nous verrons comment Tannery propose dans son ouvrage les fondements de l'analyse que sont les nombres irrationnels et certains théorèmes sur les ensembles. Rappelons que, quelques années plus tôt, ces notions formaient pour lui la base de son *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable* destinée à des élèves sortant de la classe de mathématiques spéciales.

C'est à ce titre aussi que le manuel de Narcisse Cor et Jules Riemann a retenu notre attention. Professeurs en mathématiques spéciales et en mathématiques élémentaires supérieures, ces deux anciens élèves de Tannery se réclament de son enseignement. Mais ni Darboux ni Tannery ne cautionnent officiellement cet ouvrage. Il est la libre interprétation par leurs auteurs de l'adaptation aux mathématiques élémentaires de l'enseignement de leur maître. Ce manuel est en quelque sorte une descendance de l'*Introduction à la théorie des fonctions d'une variable,* et ce, à double titre. D'une part, car ses auteurs sont des élèves de Tannery, d'autre part parce qu'il s'adresse au niveau inférieur de l'enseignement secondaire.

Enfin, nous analyserons le manuel de Henri Neveu, professeur dans l'enseignement primaire supérieur et agrégé de l'enseignement spécial. Il donne le point de vue d'un enseignant qui ne se situe pas dans la lignée des auteurs de manuels que nous étudions depuis le début de la deuxième partie : il n'a été formé ni à l'École normale supérieure, ni à l'École polytechnique.

Les manuels de Tannery, Bourlet, Cor et Riemann, et Neveu présentent des dissemblances qui justifient de les analyser séparément.

1 – Les mathématiques dans l'enseignement secondaire jusqu'en 1890

1 – 1 De la création des lycées au Second Empire (1802-1890)

Les lycées succèdent aux écoles centrales en 1802. Napoléon les a voulus comme des internats où règne une véritable discipline militaire. L'article premier de la loi du 19 frimaire an XI qui organise l'enseignement dans les lycées indique : « On enseignera essentiellement dans les lycées le latin et les mathématiques »[1]. Il est prévu, dans les deux dernières années, d'enseigner en mathématiques transcendantes, le calcul différentiel et intégral d'après le *Traité élémentaire* de Lacroix[2]. La part des mathématiques dans l'enseignement des lycées va cependant rapidement être réduite. En 1809, les mathématiques ne sont plus enseignées dans les deux premières années (années de grammaire) et les classes de mathématiques transcendantes sont réservées aux lycées des chefs-lieux d'académie et aux lycées parisiens.

La Restauration change la dénomination des lycées en collèges royaux. La partition des études devient la suivante : les classes de 6^e^, 5^e^ et 4^e^ forment la division de grammaire ; la 3^e^ et la 2^nde^ forment la division supérieure ; elles sont suivies par la classe de rhétorique et la classe de philosophie. La part de l'enseignement scientifique est encore diminuée. Les classes de mathématiques transcendantes disparaissent. En dehors des rudiments d'arithmétique, l'enseignement des mathématiques est repoussé à la classe de seconde. Il est reporté en 1^e^ année de philosophie en 1821, une 2^e^ année de philosophie étant entièrement consacrée aux mathématiques et aux sciences physiques. Il est réintroduit en 2^nde^ en 1826. La réforme de 1840 du philosophe Victor Cousin marque la victoire des tenants de l'enseignement classique qui supportaient mal l'enseignement des sciences dans les classes d'humanité : tout l'enseignement mathématique et scientifique est à nouveau renvoyé en classe de philosophie. Cependant, dès l'année suivante, des conférences facultatives sont organisées dans les classes de 3^e^, 2^nde^ et rhétorique. Il s'agit d'un enseignement des mathématiques essentiellement tourné vers l'arithmétique et la géométrie. Le programme d'algèbre du cours de

---

[1] « 19 frimaire an XI (10 décembre 1902) : l'enseignement des sciences dans les lycées » dans BELHOSTE Bruno, *Les Sciences dans l'Enseignement secondaire français, Textes officiels. Tome I: 1789–1914*, Paris, Institut national de recherche pédagogique, 1995, p. 77.

[2] Voir *supra*, p. 192

mathématiques élémentaires est particulièrement succinct, limité à : « Opérations. Résolution des équations du premier degré, de l'équation déterminée du second degré. Binôme de Newton, dans le cas d'un exposant entier et positif »[3].

En 1808 est instauré le diplôme du baccalauréat qui sanctionne les études secondaires[4]. Le baccalauréat ès sciences ne peut être obtenu qu'à la suite du baccalauréat ès lettres. Une ordonnance de 1820 instaure un baccalauréat ès sciences particulier pour ceux qui veulent s'inscrire en faculté de médecine. Il est étendu en 1823 à ceux qui veulent étudier les sciences naturelles. À partir de 1829, des examens différents sont organisés pour les baccalauréats ès sciences mathématiques et ès sciences physiques. Rappelons que, jusqu'en 1852, le baccalauréat ne sera pas exigé des candidats à l'École polytechnique. L'enseignement préparatoire à cette École s'inscrit, dans une certaine mesure, en marge de l'enseignement secondaire. Le plan d'études de 1821 prévoit que « les élèves qui, d'après le vœu de leurs parents, ne sont pas destinés à prendre des grades dans les facultés, peuvent, après la troisième, passer au cours de philosophie et de sciences mathématiques et physiques »[5].

La suprématie des études littéraires va être contestée dans un pays où l'industrie se développe et a besoin de cadres ayant une formation scientifique sérieuse. En 1846 les mathématiques obligatoires sont de retour dans les classes d'humanités tandis que le chimiste Jean-Baptiste Dumas, l'un des créateurs de l'École centrale des arts et manufactures, appelle, en 1847 à « la constitution d'un véritable enseignement classique de la science »[6] dans un rapport commandé par Narcisse-Achille de Salvandy, ministre de l'Instruction publique. Cette même année, Salvandy crée un « Enseignement intermédiaire » tourné vers les applications de la science à l'industrie. Appelé aussi « enseignement commercial et industriel », ou « enseignement spécial », cet enseignement d'une durée de trois ans est ouvert aux élèves sortant de la classe de 4e. Ses études ne sont sanctionnées par aucun diplôme. Même s'il reste un enseignement de second ordre, il s'agit cependant de la reconnaissance officielle d'un

[3] , « 10 février 1843 : programmes de mathématiques élémentaires et de mathématiques spéciales » dans BELHOSTE Bruno, *op. cit.*, p. 192.
[4] Sur l'histoire du baccalauréat, voir PIOBETTA Jean-Baptiste, *Le baccalauréat de l'enseignement secondaire*, Paris, Baillière, 1932.
[5] *Statistique de l'enseignement secondaire en 1887, Première Partie : Enseignement Secondaire des Garçons*, Paris, Imprimerie nationale, 1889, p. 416.
[6] DUMAS Jean-Baptiste cité par BELHOSTE Bruno, « Rapport dur l'état actuel de l'enseignement scientifique par la faculté des sciences de Paris 'extraits) », *op. cit*., p. 209.

enseignement sans latin dont les premiers cours avaient été organisés dès 1829 dans certains lycées. Les élèves qui ont suivi le cours complet de l'enseignement secondaire spécial peuvent être admis en classe de mathématiques élémentaires. Révisés en 1849 par une commission présidée par Dumas, les programmes de l'enseignement spécial sont plus ambitieux, introduisant notamment en troisième année des notions de géométrie analytique.

1 – 2 De la réforme de la bifurcation en 1852 à la Commission Simon en 1888

Dans le même mouvement de réformes qui voit la remise en cause de l'École polytechnique et la mise en place de la Commission Le Verrier, le ministre de l'Instruction publique, Hippolyte Fortoul organise en 1852 la réforme dite de la bifurcation[7]. Après la loi Falloux de 1851 qui garantit la liberté d'enseignement, il s'agit pour lui de sauver l'Université et, en particulier, d'organiser, dans le secondaire, un enseignement scientifique qui puisse concurrencer les institutions privées qui préparent aux concours d'entrée aux Écoles du gouvernement.

Fortoul s'appuie sur le rapport rédigé par Dumas en 1847 [8]. Ce dernier préconisait, à partir de la 3e, de séparer les collèges scientifiques des collèges littéraires. Fortoul ne retient pas cette idée de séparation des collèges mais, à partir de la classe de 3e, l'enseignement est divisé en deux sections : une section littéraire, sanctionnée par le baccalauréat ès lettres, et une section scientifique sanctionnée par le baccalauréat ès sciences. Remplaçant la classe de mathématiques élémentaires, la classe de logique devient la classe terminale de cette section scientifique. Les conceptions de Dumas qui souhaitait un enseignement des mathématiques appuyé sur les applications, sont reprises par Fortoul.

Les programmes de sciences, et en particulier de mathématiques sont développés dans la section scientifique créée par cette réforme. En géométrie, en classe de 3e, figure la notion de limite, la circonférence du cercle étant « la limite vers laquelle tend le périmètre d'un polygone inscrit dans cette courbe, à mesure que ses côtés diminuent indéfiniment »[9]. Dans le programme d'algèbre de cette même classe, après l'étude du trinôme du second degré, se

[7] Sur cette réforme, voir HULIN Nicole, *L'organisation de l'enseignement des sciences: la voie ouverte par le Second Empire,* Paris, Éditions du C.T.H.S., 1989.
[8] Voir les extraits de ce rapport dans BELHOSTE Bruno, *op. cit.*, p. 207-222 et, pour une analyse du rapport et de son impact, le Chapitre III « Le rapport Dumas de 1847 et les années 1848-1850 » dans HULIN Nicole, *op. cit.*, p. 79-109.
[9] « 30 août 1852: Nouveaux programmes de l'enseignement scientifique », dans BELHOSTE Bruno, *op. cit*., p. 285.

trouve l'article suivant : « De questions de maximum et de minimum, qui peuvent se résoudre par des équations du second degré »[10].

Après un début prometteur, la réforme échoue. Les professeurs des disciplines littéraires sont majoritairement opposés à cette réforme. Ceux des disciplines scientifiques sont mal préparés à une pédagogie nouvelle qui résulte de l'orientation utilitaire donnée à l'enseignement scientifique. Opposant à cette réforme, le ministre Victor Duruy abandonne le régime de la bifurcation en 1864 et reconstitue le secondaire autour de l'enseignement des humanités gréco-latines. Le plan d'études de l'enseignement secondaire est alors le suivant (figure 1):

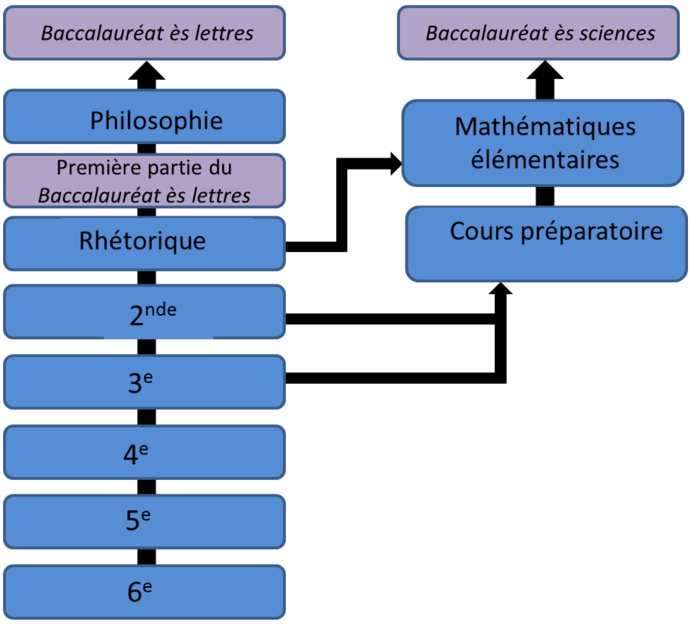


Figure 1: l'organisation de l'enseignement secondaire en 1865

Selon le Ministre, « les familles qui voudraient pour leurs enfants des études sérieuses leur feraient suivre cette marche simple et sûre : après la philosophie, les mathématiques élémentaires »[11]. Pour les « gens pressés », l'accès à la classe de mathématiques élémentaires est possible à l'issue de la rhétorique ou, après un examen, à partir de la 2nde ou de la 3e, après une année dans une classe appelée « première année de mathématiques élémentaires », ou « cours préparatoire ». Dans la pratique,certains élèves intégreront ce cours préparatoire à

[10] *Ibid.*, p. 283.
[11] DURUY Victor cité dans BELHOSTE Bruno, « 4 décembre 1864 : Abolition du régime de la bifurcation », *op. cit.*, p. 389.

l'issue de la 4e, voire de la 5e[12]. L'enseignement scientifique retrouve une position marginale dans l'enseignement secondaire.

Le programme d'algèbre pour la classe de mathématiques élémentaires rédigé lors de cette réforme ne connaît pas de modification significative.

Parallèlement à cet abandon du régime de la bifurcation, Duruy élabore un véritable cadre réglementaire légal à l' « enseignement secondaire spécial »[13]. Portées à quatre ans, les études sont sanctionnées par un diplôme qui ne porte cependant pas le nom de baccalauréat. Destiné aux élèves qui, pour des raisons de temps ou d'argent, ne peuvent accomplir le cycle complet des études classiques, il est organisé pour que « chaque année [forme] un tout complet en soi, et que les plus indispensables [soient] placées dans les premiers cours »[14]. Pour atteindre cet objectif, les programmes sont organisés « comme un ensemble de cercles concentriques »[15]. En mathématiques la recherche des extrema par la résolution d'équations du second degré est abordée en dernière année.

Un corps de professeurs est formé spécialement pour ce nouvel enseignement secondaire qui s'appuie sur un enseignement des sciences à visée pratique. Une École normale pour l'enseignement spécial ouvre à Cluny, en Saône et Loire, et des agrégations de littérature et économie, de mathématiques, de sciences physiques et naturelles sont instituées pour ce nouveau corps enseignant. Le calcul différentiel et intégral est au programme de l'agrégation de mathématiques, et donc de la formation des futurs enseignants à Cluny. Par exemple, pour le concours de 1890, quatre leçons orales portent sur l'analyse :

> 9. Notions sur les infiniment petits. Limite d'un rapport ou d'une somme d'infiniment petits. Applications.
>
> 10. Dérivée et différentielle des fonctions d'une variable. Exemple. Théorème des fonctions de fonctions.
>
> 11. Application des dérivées à l'étude de fonctions. Exemples.

---

[12] Voir dans BELHOSTE Bruno, le texte « 20 septembre 1886 : Admission des élèves des lycées dans le cours préparatoire aux mathématiques élémentaires », *op. cit.*, p. 513.

[13] Sur l'enseignement special, voir aussi DAY Charles R., « Technical and Professional Education in France: The Rise and Fall of l'Enseignement Secondaire Spécial, 1865-1902 », *Journal of Social History*, vol. 6, 1972-1973, p. 177-201.

[14] DURUY Victor cité dans BELHOSTE Bruno, « 6 avril 1866 : Plan d'études et programmes de Sciences de l'enseignement spécial », op. cit., p. 414.

[15] *Ibid.*, p. 414.

12. Notion de l'intégrale définie. Quadrature d'une courbe plane. Exemples. [16]

Nous remarquerons la leçon 9 où nous retrouvons les notions de base de la *méthode infinitésimale de* Jean-Marie Constant *Duhamel*.

L'enseignement secondaire spécial connaît un réel succès. En 1876, il scolarise environ 30% des élèves de l'enseignement secondaire public. Les opposants à ce nouvel enseignement sont cependant nombreux. Certains le considéraient comme une véritable trahison à la formation intellectuelle classique basée sur les humanités et souhaitaient qu'il soit intégré à l'enseignement primaire. D'autres, au contraire, critiquaient un programme trop général et surchargé, souhaitant que cet enseignement trouve place dans des établissements séparés, à l'image des Realschulen allemandes qui dispensaient un enseignement tourné vers les sciences industrielles. Duruy, plutôt partisan d'une séparation des deux ordres d'enseignement, établira deux lycées dédiés à l'enseignement spécial, à Pontivy et Mont-de-Marsan. Par manque de crédits, mais aussi en raison d'une hostilité des premiers gouvernements de la III^e^ République à l'enseignement spécial[17], aucun autre lycée de ce type ne verra le jour.

À la fin des années 1870, les républicains disposent de tous les leviers du pouvoir et peuvent appliquer leur politique éducative. En matière d'enseignement secondaire elle se caractérise par une volonté de développer l'enseignement des sciences et d'obtenir une égalité de traitement entre les deux ordres d'enseignement qui coexistent dans les lycées. En 1880, un plan d'études de l'enseignement classique adopté sous l'impulsion de Jules Ferry, place pour la première fois l'enseignement des sciences au même niveau que l'enseignement littéraire. Toutefois, cela ne se traduit pas par une modification du programme de la classe de mathématiques élémentaires.

En 1881, une cinquième année complémentaire devient obligatoire dans l'enseignement spécial et le diplôme final devient le « baccalauréat de l'enseignement secondaire spécial ». Notons que les problèmes de recherche d'extrema par la résolution d'équations du second degré disparaissent des programmes rédigés à l'occasion de cette réforme. En 1886 une

[16] Voir « Agrégation de l'enseignement secondaire spécial. Section des sciences mathématiques », *Bulletin administratif du Ministère de l'Instruction publique*, t. 46, 1889, p. 532.
[17] En 1872, le ministre de l'Instruction publique Jules Simon, partisan d'un enseignement spécial dépendant de l'enseignement primaire, placera l'École normale de Cluny sous la juridiction du Rectorat de Lyon.

sixième année est ajoutée à cet ordre d'enseignement et son baccalauréat permet de préparer Saint-Cyr et l'École polytechnique. Cela ne modifie pratiquement pas les connaissances exigées en mathématiques en fin d'études. Elles sont simplement mieux réparties dans le temps. Ces réformes gomment peu à peu les particularismes de l'enseignement spécial voulu par Duruy et le rapprochent d'un enseignement classique où le Français remplacerait l'étude du latin et du grec pour la formation de la culture générale. Cependant, l'École polytechnique ne reconnaîtra qu'avec réticence le baccalauréat de l'enseignement spécial et il faudra attendre 1887 pour qu'elle admette les titulaires de ce diplôme à concourir, sous la pression du Conseil supérieure de l'Instruction publique (CSIP) et de la Chambre des députés[18].

Les tenants d'un enseignement secondaire dominé par les humanités gréco-latines vont s'opposer aux réformes promues par Ferry. Les représentants des matières littéraires sont prépondérants dans les assemblées de professeurs et au Conseil supérieur de l'instruction publique[19]. Les premières, qui visent à associer les professeurs à la marche du lycée, initiées dès 1821 puis tombées en désuétude, ont été relancées en 1872 par le Ministre de l'Instruction publique, Jules Simon[20], qui voulait les associer à la réforme pédagogique qu'il avait alors engagée. Le CSIP est une instance qui a succédé en 1850 au Conseil de l'Université institué en 1806. Réformé par Ferry en 1880, y siègent neuf conseillers nommés par décret du Président de la République, et des membres élus par leurs collègues : cinq membres de l'Institut, deux professeurs du Collège de France, un professeur du Museum, deux professeurs des facultés de médecine, un professeur des facultés de pharmacie, deux professeurs des facultés des sciences, deux professeurs des facultés des lettres, deux délégués de l'École normale supérieure, un professeur de l'École des langues orientales, un délégué de l'École polytechnique, un délégué du Conservatoire des arts et métiers, un délégué de l'École centrale des arts et manufactures, un délégué de l'Institut agronomique, huit agrégés de chacun des ordres d'agrégation, deux délégués des collèges communaux, six membres de l'enseignement

[18] Voir SHINN Terry, *Savoir scientifique et pouvoir social. L'École polytechnique (1794-1914),* Paris, Presses de la Fondation Nationale des Sciences Politiques, 1980, p. 107-109.
[19] Nous désignerons par la suite le Conseil supérieur de l'Instruction publique sous le sigle CSIP. Sur cette instance, voir l'entrée : « Conseil supérieur de l'Instruction publique », dans l'édition électronique du *Nouveau dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire publié sous la direction de Ferdinand Buisson,* édition de 1911, Institut Français de l'Education, http://www.inrp.fr/edition-electronique/lodel/dictionnaire-ferdinand-buisson/ consulté le 30/08/2017.
[20] Voir SAVOIE Philippe, « Autonomie et personnalité des lycées : la réforme administrative de 1902 et ses origines », *Histoire de l'Éducation*, n° 90, 2001, p. 169-204.

primaire. Siègent aussi quatre membres de l'enseignement libres nommés par le Président de la République. Les membres sont désignés ou élus tous les quatre ans. Ce Conseil, qui se réunit lors de deux sessions annuelles, n'émet que des avis et ne décide pas de l'ordre du jour des débats. Il doit cependant être consulté avant toute réforme.

L'opposition des représentants des disciplines littéraires n'est pas seule en cause. Il faut aussi compter avec le conservatisme d'une majorité de professeurs de sciences qui estiment que les sciences doivent être enseignées à des esprits déjà formés. Les agrégés de mathématiques et de physiques élisent en 1884 au CSIP des représentants hostiles à la réforme Ferry. En 1885, une contre-réforme ampute l'horaire de l'enseignement scientifique dans les lycées. Elle ne règle cependant pas la question de la crise que traverse, selon certains, l'enseignement secondaire. Sont tour à tour pointés du doigt les conséquences d'une réduction des horaires consacrés au latin et au grec, la surcharge des programmes, la concurrence de l'enseignement spécial ou l'organisation du baccalauréat. Plus généralement, le lycée napoléonien, sa discipline militaire liée à son fonctionnement comme internat, sont remis en cause[21]. En 1888, une Commission présidée par Jules Simon, républicain conservateur, est chargée de faire des propositions pour réformer l'enseignement secondaire. Nous la désignerons comme la *Commission Simon*.

En marge de ces réformes qui ne concernent que les lycées et collèges de garçons, il faut rappeler la création, en 1880, par Camille Sée, d'un enseignement secondaire pour les « jeunes filles »[22]. Il n'existait auparavant, depuis Duruy, que quelques « cours secondaires » qui leur étaient destinés. Divisé en deux périodes formant cinq années d'études, il s'agit d'un enseignement sans latin. Le niveau des cours dispensés semble y avoir été inférieur à celui donné dans les lycées de garçons. Il faut cependant noter, dans le programme d'algèbre de cinquième année, après la résolution des équations du second degré, l'article suivant : « Représentation de la variation des fonctions les plus simples par une courbe »[23]. À cette

[21] On pourra lire à ce sujet, dans Pierre CASPARD, Jean-Noël LUC et Philippe SAVOIE (dir.), *Lycées, lycéens, lycéennes, deux siècles d'histoire,* Paris, INRP, 2005 les textes de BANTIGNY Ludivine, « De la modernité dans les lycées des années 1850 », p. 269-281, et de CLASTRES Patrick, « L'internat public au XIXe. Question politique ou pédagogique ? », p. 397-413.

[22] Voir à ce sujet BARBIN Évelyne, « L'enseignement des mathématiques aux jeunes filles et les stéréotypes de genre (1880-1960) », *Repères IREM*, n° 97, 2014, p. 67-89.

[23] « 28 juillet 1882 : Programme des sciences de l'enseignement secondaire de jeunes filles » dans BELHOSTE Bruno, *op. cit.*, p. 470.

époque, la notion de fonction ne figure pas explicitement dans les programmes des enseignements classique et spécial.

2 – Les réformes de 1890-1891 de l'enseignement secondaire

2 – 1 1890 : réforme et contre-réforme pour l'enseignement classique

La commission présidée par Simon s'appuie sur des sous-commissions spécialisées. La sous-commission des sciences ne rend pas de rapport et introduit les programmes par une « Instruction générale » de quelques lignes seulement. Il faut sans doute y lire une confirmation du peu d'intérêt porté à l'enseignement des sciences par la commission Simon. Le compte rendu de la session de décembre 1889 du CSIP qui étudie les propositions de cette commission, précise simplement, à propos des programmes de sciences dans les classes de lettres : « après un échange d'observations, ces programmes sont adoptés »[24].

Le nouveau plan d'études et les programmes sont publiés en janvier 1890 au *Journal officiel*. Ils aggravent les retranchements horaires dans les disciplines scientifiques. De la 6e à la rhétorique, le volume horaire hebdomadaire consacré à l'enseignement des mathématiques est divisé par 2, passant de 9h à 4h1/2.

En mars 1890, le radical-socialiste Léon Bourgeois est nommé Ministre de l'Instruction publique. Dans le discours qu'il prononce à l'occasion de la session de juillet du CSIP il affirme l'unité de l'enseignement classique, « un ensemble harmonieux, un tout qu'on ne peut diviser sans le détruire » où « sciences et lettres […] ont également leur nécessité »[25]. La préparation du baccalauréat ès sciences est, selon lui, un reste du système de la bifurcation. L'unité de l'enseignement classique ne peut se réaliser, selon Bourgeois, que si les élèves qui entrent dans cet ordre d'enseignement le suivent intégralement jusqu'à la fin de la rhétorique. Il propose donc une réforme du baccalauréat qui impose à tous les élèves de passer, à l'issue de la rhétorique, la première partie de l'examen. La classe préparatoire qui préparait à la classe de mathématiques élémentaires est supprimée. Après la classe de rhétorique trois séries parallèles d'enseignement sont créées : la philosophie, les mathématiques élémentaires et les

[24] « Conseil supérieur de l'Instruction publique. Compte rendu de la deuxième session ordinaire de 1889 », *Bulletin administratif du Ministère de l'Instruction publique*, t. 46, 1889, p. 955.
[25] « Discours prononcé le 24 juillet 1890, par M. Léon Bourgeois, Ministre de l'Instruction publique et des Beaux-Arts », *Bulletin administratif du Ministère de l'Instruction publique*, t. 48, 1890, p. 170.

sciences physiques et naturelles, chacune de ces filières étant sanctionnée par une seconde partie du baccalauréat.

Le compte rendu de la session du CSIP consacrée à l'examen du projet de réforme du baccalauréat indique que l'article 1er dont « dépend le sort du projet […] a été l'objet d'une vive discussion »[26]. Certains membres craignaient que les candidats au baccalauréat avec mention « mathématiques » ne fassent baisser le niveau des études littéraires. Ils devraient en effet subir une version latine plus difficile qu'à l'ancien baccalauréat ès sciences et passer une épreuve de grec en première partie de l'examen. D'autres craignaient que cela n'entraîne une fuite d'élèves de l'enseignement classique vers l'enseignement spécial. Darboux a déclaré à plusieurs reprises s'être opposé à cette réforme[27].

Finalement approuvée par le CSIP, cette réforme fait l'objet d'un décret au mois d'août 1890. Le décret institue, après la rhétorique, les séries « Lettres, Philosophie » et « Lettres, Mathématiques ». Il remet à plus tard la création de la série « Lettres, Sciences physiques et naturelles ». Elle ne verra finalement pas le jour. Elle était destinée à remplacer le baccalauréat ès sciences restreint[28] institué en 1859 pour les candidats aux facultés de médecine. En 1893, sur un projet de Gaston Darboux, il sera créé en faculté des sciences un certificat d'études physiques, chimiques et naturelles (PCN) pour les aspirants au doctorat en médecine[29].

Et, pour affirmer la nécessité d'un enseignement scientifique minimal dans l'enseignement classique, une circulaire adressée le même mois aux recteurs réattribue à l'enseignement des mathématiques l'horaire perdu à l'issue de la Commission Simon. Le Ministre ajoute :

> j'examinerai, en outre, s'il ne conviendrait pas d'organiser en seconde, en rhétorique et en philosophie, des conférences facultatives de mathématiques pour les élèves qui ont l'intention de suivre plus tard les cours de sciences.[30]

---

[26] « Conseil supérieur de l'Instruction publique. Compte rendu de la première session ordinaire de 1890 », *op. cit.*, p. 873.

[27] Voir notamment « Déposition de M. Darboux », *Enquête sur l'enseignement secondaire*, t. I, Paris, Imprimerie de la Chambre des Députés, 1899, p. 303-313.

[28] Il s'agit d'un baccalauréat « restreint pour la partie mathématique ». Voir HULIN Nicole, *op. cit.*, p. 159.

[29] Voir le « Rapport le rapport de Gaston Darboux relatif au projet de P.C.N. » dans BELHOSTE Bruno, *op. cit*., p. 554-561.

[30] « Circulaire du 12 août 1890 relative aux programmes de l'enseignement scientifique dans les classes de lettres de la division supérieure », *Bulletin administratif du Ministère de l'Instruction publique*, t. 48, 1890, p. 555.

Cette première partie des réformes voulue par Bourgeois intègre l'enseignement scientifique dans l'enseignement classique en supprimant, après une période de transition, les voies parallèles qui menaient au baccalauréat ès sciences. Elle est complétée l'année suivante par une réforme de l'enseignement spécial qui achève d'édifier l'enseignement secondaire suivant l'architecture voulue par le Ministre.

2 – 2 1891 : la création d'un enseignement moderne qui concurrence l'enseignement classique

Lors d'une interpellation au Sénat, avant même la réforme du baccalauréat de l'enseignement classique, Bourgeois avait, en juin 1890, annoncé vouloir placer, « sur un pied d'égalité, à côté [du] vieil enseignement classique, l'enseignement moderne »[31]. Ayant « écarté complètement l'idée d'un but utilitaire donné à l'enseignement […] spécial », il souhaite lui donner ce qu'il considère comme le caractère spécifique de l'enseignement classique : non pas la « préparation à une carrière déterminée [mais] un enseignement qui doit donner l'éducation intellectuelle et morale dans sa généralité et dans son intégralité »[32].

Le projet de décret modifiant l'organisation de l'enseignement spécial est présenté au CSIP lors de l'ouverture de la session de mai 1891. La fuite d'un certain nombre d'élèves de l'ancienne filière scientifique de l'enseignement classique vers ce nouvel enseignement qui va prendre le nom d'enseignement moderne est assumée comme le prouve le rapport de Benoist, directeur de l'enseignement secondaire. Il affirme que l'enseignement moderne est « destiné à recueillir la succession [des] anciennes classes de sciences » et que le baccalauréat qui le sanctionne est destiné « à devenir le vrai baccalauréat scientifique et moderne » [33]. Le projet prévoit en outre l'unification des corps enseignants du classique et du moderne en supprimant les agrégations de l'enseignement spécial.

[31] « Intervention au Sénat de Léon Bourgeois, Ministre de l'Instruction publique *», Revue internationale de l'enseignement,* t. 20, juillet-décembre 1890, p. 86.
[32] *Ibid.*, p. 87.
[33] « Rapport fait au Conseil supérieur de l'Instruction publique sur l'organisation de l'enseignement secondaire moderne, par M. BENOIST, membre du conseil », dans BEAUCHAMP (de) Alexis, *Recueil des lois et règlements sur l'enseignement supérieur*, t. 5, Paris, Delalain Frères, p. 152.

Nous résumons par la figure 2, l'organisation de l'enseignement secondaire français à l'issue de cette réforme[34]. La durée des études ne respecte cependant pas l'égalité entre les deux ordres d'enseignement annoncée par Bourgeois. Celle de l'enseignement moderne reste de six ans, contre sept à l'enseignement classique. Il faut peut-être y voir le résultat d'un arbitrage entre les tenants d'un baccalauréat classique français à égalité avec le baccalauréat de l'enseignement classique et ceux qui souhaitaient maintenir la suprématie de ce dernier[35].

Les classes de l'enseignement moderne, auparavant désignées comme première année, deuxième année, etc, prennent les noms des classes de l'enseignement classique, à l'exception de la classe terminale de cet enseignement qui est désignée sous le nom de « première » et non de « rhétorique »[36]. À l'issue de la classe de seconde, après la première partie du baccalauréat, les élèves qui se destinent à des études scientifiques peuvent entrer en 1e Sciences et passer le baccalauréat de l'enseignement moderne, mention « Lettres-Sciences ». Ils peuvent aussi choisir d'entrer en classe de mathématiques élémentaires pour obtenir le baccalauréat « Lettres-Mathématiques » de l'enseignement moderne[37]. Si les baccalauréats des enseignements classiques et modernes obtenus à l'issue de cette classe portent des mentions distinctes, la classe de mathématiques élémentaires devient de fait une classe commune aux deux ordres d'enseignement.

Le rapport de Benoist nous apprend que certains membres avaient exprimé la crainte que la classe de première ne soit désertée au profit de la classe de mathématiques élémentaires. Il leur fut répondu : « le programme de cette classe est de nature à attirer les élèves »[38].

[34] Voir le « Décret portant réorganisation de l'enseignement secondaire spécial et donnant à cet enseignement le nom d'enseignement moderne – Du 4 juin », *Bulletin administratif du Ministère de l'Instruction publique*, t. 49, 1891, p. 582.

[35] Voir le Chapitre XI, « La réforme de 1890 et l'unification des baccalauréats » dans PIOBETTA Jean-Baptiste, *op. cit*.

[36] Ce changement de dénomination des classes avait suscité la protestation d'un membre du Conseil supérieur de l'instruction publique qui craignait qu'une appellation commune amène « une équivoque dans l'esprit des familles, des professeurs, et des administrateurs » (Voir « Conseil supérieur de l'Instruction publique. Compte rendu de la session extraordinaire de mai 1891 », *Bulletin administratif du Ministère de l'Instruction publique*, t. LXI, 1891, p. 675.

[37] Il existait également une 1e « Lettres » qui permettait d'obtenir le baccalauréat « Lettres, Philosophie » de l'enseignement moderne.

[38] « Rapport fait au Conseil supérieur de l'Instruction publique sur l'organisation de l'enseignement secondaire moderne, par M. BENOIST, membre du conseil », dans BEAUCHAMP (de) Alexis, *op. cit.*, p. 155.

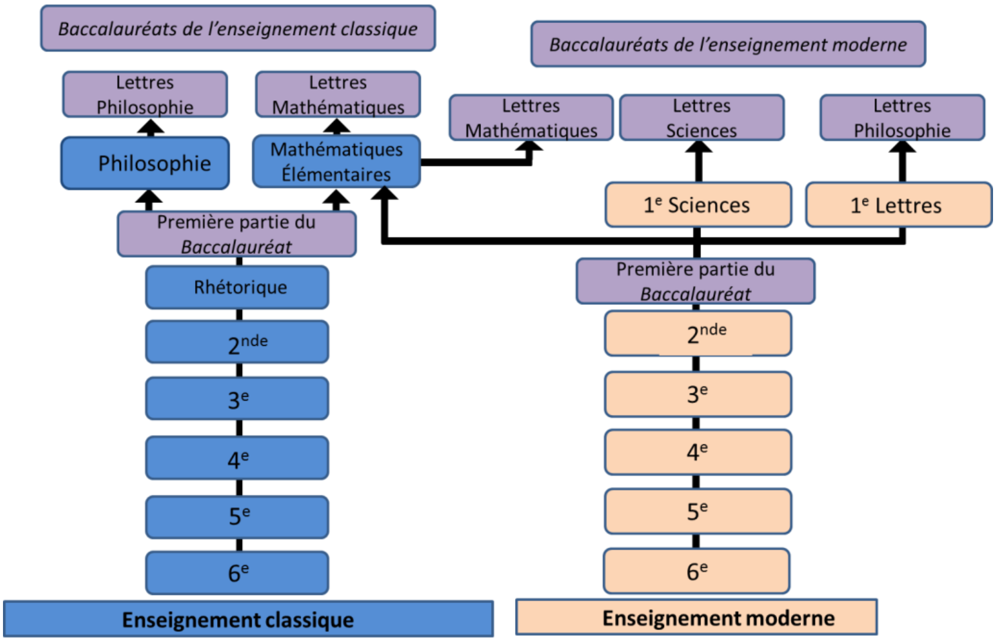


Figure 2: l'organisation de l'enseignement secondaire en 1891

De plus, les prérogatives du baccalauréat de l'enseignement moderne sont étendues. Il donne à présent accès à la section sciences de l'École normale supérieure. Il ne permet cependant pas d'accéder aux facultés de lettres, droit et médecine. Même si l'égalité des baccalauréats n'est pas réalisée, les élèves de l'enseignement moderne vont pouvoir « concurrencer » ceux de l'enseignement classique, d'autant plus que les réticences de l'École polytechnique face à ce baccalauréat s'atténueront comme nous le verrons dans le prochain chapitre.

La comparaison des horaires hebdomadaires consacrés aux mathématiques dans les deux ordres d'enseignement (tableau 1 ci-dessous), met en évidence la différence de préparation des élèves du moderne et du classique.

En 1897, une modification des horaires de mathématiques atténuera cette différence en augmentant les horaires de l'enseignement classique et en diminuant les horaires du moderne (tableau 2 ci-dessous).

Il est remarquable, qu'en 1897, la modification ne se fasse pas seulement en faveur de l'enseignement classique, mais aussi au détriment du moderne. Cela marque à notre avis le manque de considération pour l'enseignement moderne et surtout, cela traduit la réussite croissante des élèves du moderne aux concours d'entrée aux écoles du gouvernement, dont nous reparlerons au prochain chapitre. Il devenait indispensable de procéder à un rééquilibrage en faveur de l'enseignement classique.

Classes	Enseignement classique	Enseignement moderne
6e	1/2 h	2 h1/2
5e	1/2 h	2 h1/2
4e	1 h1/2	3 h
3e	3 h	4 h1/2
2nde	1 h1/2	4 h1/2
Rhétorique/1e	1 h1/2	6 h
Total	8 h 1/2	17 h(*)

(*) *Ce total ne tient pas compte de l'horaire de 1e . Nous n'avons compté ici que les heures hebdomadaires pour les élèves qui vont entrer en classe de mathématiques élémentaires avec leurs camarades issus de rhétorique.*

Tableau 6: horaire hebdomadaire de mathématiques dans les enseignements classique et moderne en 1891

Classes	Enseignement classique	Enseignement moderne
6e	1 h	2 h
5e	1 h	2 h
4e	2 h	3 h
3e	3 h	4 h
2nde	3 h	4 h
Rhétorique/1e	2 h (+1h facultative)	6 h
Total	12 h (+1h facultative)	15 h(*)

(*) *Ce total ne tient pas compte de l'horaire de 1e*

Tableau 7 : horaire hebdomadaire de mathématiques dans les enseignements classique et moderne en 1897

3 – La théorie des fonctions dérivées dans l'enseignement moderne et au concours d'admission à Saint-Cyr

3 – 1 La théorie des fonctions dérivées en classe de 1e Sciences de l'enseignement moderne (1891)

Darboux, Jules Tannery et Boleslas Niewenglowski étaient membres élus du CSIP. Émile Pruvost en était l'un des membres désignés. Tous quatre ont donc participé à la rédaction des programmes de mathématiques de l'enseignement moderne. Il ne faut bien sûr pas mettre les quatre hommes sur un pied d'égalité. Darboux, l'une des figures majeures des mathématiques françaises de cette fin de siècle, doyen de la faculté des sciences, est la personnalité dominante. Au point de vue institutionnel il est suivi, nous semble-t-il, par Tannery et Pruvost qui occupent l'un et l'autre des fonctions au plus haut sommet hiérarchique. Niewenglowski, représentant des agrégés de mathématiques, n'a pas leur importance.

La nouveauté essentielle des programmes de mathématiques est l'introduction en classe de 1e Sciences des éléments de la théorie des fonctions dérivées. C'est la première fois que ces notions sont inscrites au programme d'un baccalauréat. Ceux qui affirmaient, lors de la discussion du projet de réforme de l'enseignement spécial, que le programme de la classe de 1e Sciences serait de nature à attirer les élèves pensaient probablement à la théorie des dérivées. Introduire à ce niveau d'enseignement une théorie qui était l'apanage de la classe de mathématiques spéciales, des classes préparatoires à l'École centrale et à l'École navale, et que Saint-Cyr venait juste de mettre au programme de son concours, ne pouvait, selon les concepteurs du projet, que séduire un public qui envisageait d'entrer dans une de ces écoles du gouvernement.

Nous recopions intégralement ci-dessous la partie du programme concernée. Il s'agit de la totalité du programme d'algèbre de cette classe :

Compléments d'algèbre

> Notions très succinctes de géométrie analytique. – Équation du premier degré. – Coefficient angulaire d'une droite. – Construction d'une droite donnée par son équation.
>
> Représentation d'une fonction par une courbe. – Notion de la dérivée. – La dérivée est le coefficient angulaire de la tangente.
>
> Variation des fonctions suivantes :
>
> $$y = ax^2 + bx + c\,,$$
> $$y = \frac{ax+b}{a'x+b'}\,,$$
> $$y = \frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}\,.$$
>
> Pour cette dernière fonction, on se bornera à des exemples numériques.

> *Remarque*. – En vue de la variation des fonctions précédentes, il suffira de faire connaître la dérivée d'une somme, d'un produit et d'un quotient.[39]

Cette partie du programme n'introduit rien en termes d'applications mathématiques nouvelles dans une classe terminale de l'enseignement secondaire. Le programme de la classe de mathématiques élémentaires, revu la même année à la suite de la réforme de 1890, permettait tout autant, à l'aide de méthodes élémentaires, d'obtenir les variations de ces différentes fonctions. Ce programme était ainsi libellé : « variation du quotient de deux trinômes du second degré ; représentation graphique (exemples numériques) »[40]. L'emploi de la dérivée permettait bien sûr de faciliter les calculs et donnait accès à une méthode générale. Mais surtout, ce qui nous semble en jeu ici, c'est bien l'introduction de cette théorie à ce niveau de l'enseignement secondaire. La timidité de cette introduction dénote probablement une crainte des rédacteurs des programmes sur la capacité d'élèves de cet âge à maîtriser de tels concepts mathématiques. Sans doute aussi redoutaient-ils que les professeurs n'aillent trop loin dans l'exposé de cette théorie. Malheureusement, l'absence de relevé de discussion au CSIP à propos des programmes de l'enseignement moderne ne nous permet pas d'en savoir plus.

Comme le montreront les statistiques dans le prochain chapitre, les élèves de l'enseignement moderne ne rencontreront pas d'obstacle majeur dans l'emploi de cette théorie. Cela sera, comme nous le verrons, un argument pour les partisans d'une introduction de la théorie des fonctions dérivées en classe de mathématiques élémentaires.

Remarquons la première apparition du mot « fonction » dans un programme de l'enseignement secondaire pour garçons. Il est introduit dans l'enseignement moderne à l'occasion des représentations graphiques, dans des termes très semblables à ceux que nous avons vu pour le programme de l'enseignement secondaire des filles. Il n'est, là non plus, précédé d'aucune indication sur une éventuelle définition de cette notion.

Enfin, notons pour conclure, l'ancrage géométrique de cette introduction des fonctions dérivées. Les premières notions de géométrie analytique d'un élève de l'enseignement moderne sont introduites pour cette occasion et la notion de dérivée est, dans l'énoncé des

[39] « Arrêté déterminant le plan d'études et les programmes de l'Enseignement secondaire moderne », *Bulletin administratif du Ministère de l'Instruction publique*, t. 49, 1891, p. 655.
[40] « Arrêté relatif à la classe de mathématiques élémentaires », *op. cit.*, p. 99.

programmes, précédée de la représentation d'une fonction par une courbe, et suivie par son interprétation géométrique. Cela contraste avec l'introduction purement analytique de cette théorie au concours d'admission à l'École polytechnique, en 1851. Il faut probablement le mettre en relation avec le projet d'introduction de l'histoire des sciences proposé par Paul Tannery et distribué aux membres du CSIP lors de cette réforme de 1891. Dans ce projet que nous avons évoqué au chapitre précédent, il n'est pas fait clairement allusion au calcul infinitésimal mais il est indiqué : «XVIII^{e} siècle. – Progrès des mathématiques et de l'astronomie ». Le lien entre le programme et l'histoire aurait trouvé place ici. Quinze ans plus tard, lorsqu'il fera paraître ce projet après le décès de son frère Paul, Jules Tannery écrira : « il faut bien avouer qu'aujourd'hui, comme il y a quinze ans, l'enseignement de cette histoire est impossible dans nos lycées, parce que le personnel n'est pas préparé »[41]. Si ce projet n'a pas abouti, il convient de remarquer, encore une fois, que c'est dans l'enseignement moderne que cette tentative a eu lieu.

Le baccalauréat « Lettres-Sciences » de l'enseignement moderne comporte le même type d'épreuves que le baccalauréat « Lettres-Mathématiques » de l'enseignement classique. Concernant les mathématiques, il s'agit d'une composition écrite de mathématiques et de physique, et d'une interrogation orale de mathématiques.

Le compte rendu de la session de juillet 1891 du CSIP indique une demande de révision du programme de l'enseignement classique. Les demandeurs sont des professeurs de disciplines littéraires aussi bien que scientifiques. Parmi eux, figurent en mathématiques Darboux, Niewenglowski et Tannery. Pour que « l'enseignement classique soit mis à même de développer toutes ses ressources, [ils souhaitent] que ses programmes soient révisés et complétés de façon à lui donner une forme définitive »[42]. Aucune précision n'est donnée. Il paraît cependant probable que les demandeurs souhaitaient introduire la théorie des dérivées dans le programme de la classe de mathématiques élémentaires. Le compte rendu indique : « la question est actuellement soumise à l'étude »[43]. Leur demande restera sans suite.

[41] TANNERY Jules dans TANNERY Paul, « Programme d'un cours d'Histoire des Sciences », *La Revue du Mois*, n° 13, 1907, p. 385-391.
[42] « Conseil supérieur de l'instruction publique. Séance du 29juillet », *Bulletin administratif du Ministère de l'Instruction publique*, t. 50, 1891, p. 489.
[43] *Ibid.*, p. 489.

3 – 2 L'introduction de la théorie des dérivées au concours d'admission à Saint-Cyr (1891)

Rappelons que l'École spéciale militaire a été créée par Napoléon en 1802[44]. Fondée à Fontainebleau puis transférée à Saint-Cyr en 1808, elle est habituellement désignée sous le nom d'École Saint-Cyr. Elle forme des officiers pour l'infanterie, la cavalerie et l'État-major. L'accès se fait sur concours à partir de 1818 pour la moitié des places, l'autre moitié étant réservée aux élèves de l'École préparatoire de La Flèche. À partir de 1825, le concours devient l'unique voie d'admission.

Cette école partage avec l'École polytechnique, l'École navale et l'École forestière une même organisation du concours d'admission et les mêmes examinateurs jusqu'à la fin des années 1830, même si le concours d'admission à l'École polytechnique est le plus exigeant. À partir de 1844, l'École spéciale militaire dispose de ses propres examinateurs d'admission. Les mathématiques sont la matière principale sur laquelle porte l'examen. Comme pour l'École polytechnique, la classe de mathématiques élémentaires, éventuellement augmentée de conférences, prépare les élèves à Saint-Cyr. Certains grands lycées organisent des classes dédiées à cette préparation. Des institutions privées, préparent aussi à ce concours. Elles sont cependant moins nombreuses que pour l'École polytechnique.

Comme à l'École polytechnique, le baccalauréat ès sciences est exigé à partir de 1852. Cependant, alors que la théorie des dérivées fait son apparition au concours de l'École polytechnique dans les programmes de 1851, les candidats à Saint-Cyr continuent d'être interrogés sur les mathématiques élémentaires. Sous le régime de la bifurcation, la classe de logique devient la classe préparatoire à Saint-Cyr. À partir de 1865 les classes préparatoires aux écoles du gouvernement se multiplient dans les lycées. Si les élèves peuvent toujours passer le concours à l'issue de la classe de mathématiques élémentaires, des établissements organisent une 2^e^ année de mathématiques élémentaires pour préparer Saint-Cyr et l'École forestière, avant l'année de mathématiques spéciales. Parallèlement, un certain nombre

[44] Sur l'histoire de cette école, on pourra lire JAZET, Paul, *Histoire de l'École spéciale militaire de Saint-Cyr*, Paris, 1886. Sur le concours d'admission à Saint-Cyr et sa préparation, voir BELHOSTE Bruno, « La préparation aux grandes écoles scientifiques au XIXe siècle : établissements publics et institutions privées », *Histoire de l'éducation*, N°. 90, 2001, p. 101-130.

d'institutions privées laïques qui préparent à Saint-Cyr périclitent alors que des établissements préparatoires catholiques, comme l'École Sainte-Geneviève, prennent leur essor.

En 1891, les premiers éléments de la théorie des fonctions dérivées sont inscrits pour la première fois au concours d'admission à Saint-Cyr, dans le programme d'algèbre. Le Conseil de perfectionnement de cette École s'aligne ainsi sur celui d'une autre école militaire, l'École navale, qui avait déjà pris une décision semblable, quatre ans plus tôt, pour le concours de 1887. L'impact de la décision de l'École navale sur l'enseignement préparatoire était moindre. Cette dernière offre en effet beaucoup moins de places au concours (environ 70 places), et, dans les lycées, le nombre de classes qui préparent exclusivement à ce concours est beaucoup plus faible. En 1903, nous en avons décompté huit, trois à Paris et cinq en Province, qu'il faut comparer aux 43 classes préparatoires à Saint-Cyr[45]. Mais surtout, ce qui nous intéresse ici, c'est la concomitance entre la décision du Conseil de perfectionnement de Saint-Cyr et celle du Ministère de l'Instruction publique d'introduire la notion de fonction dérivée dans l'enseignement moderne.

Après la division des polynômes, la résolution des équations et des inéquations du premier et du deuxième degré, le nouveau programme d'algèbre pour l'admission à Saint-Cyr indique :

> *Fonctions algébriques explicites d'une seule variable.* – Continuité. Exemples de fonctions continues (binôme du premier degré en x, trinôme du second degré). Définition de la dérivée d'une fonction explicite d'une seule variable. Exemples simples. Notions sur le calcul des dérivées. Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient. Dérivée de x^m, d'un polynôme entier, d'une fraction rationnelle du premier degré et du second degré en x. Dérivée de sin.x, de cos.x et de tang.x.
> *Fonctions croissantes et décroissantes:* 1°dans un intervalle donné; 2° pour une valeur donnée de la variable. Maximum et minimum d'une fonction explicite d'une seule variable.
> Application des principes précédents à l'étude des variations de quelques fonctions simples (binôme du premier degré, trinôme du deuxième degré, fractions rationnelles du premier et du deuxième degré). Courbes représentatives et la marche de ces fonctions.
> Application à des questions de maximum et de minimum.[46]

En le comparant au programme de 1e Sciences de l'enseignement moderne, il faut noter qu'il n'est pas indiqué de lien avec la représentation géométrique des fonctions.

[45] Source : *Classement et traitement des personnels des lycées et collèges de garçons*, Paris, Imprimerie Nationale, 1903.
[46] « Instruction pour l'admission à l'École spéciale militaire en 1891 », *Journal officiel*, 24 décembre 1890, p. 6197.

À l'occasion de l'étude du projet de loi remaniant le baccalauréat de l'enseignement classique par le CSIP, lors de la séance du 30 juillet 1890, le compte rendu précisait que la nouvelle section « Lettres-Mathématiques » devait recevoir les candidats à Saint-Cyr. Cependant la théorie des dérivées ne figure pas dans les nouveaux programmes de la classe de mathématiques élémentaires de janvier 1891. Cette théorie doit donc être enseignée à partir de 1891 dans les classes préparatoires à Saint-Cyr des lycées. Cependant, tous les lycées français ne disposent pas d'une telle classe. Ce qui suppose, pour les candidats à Saint-Cyr dans les lycées concernés, soit l'organisation de conférences supplémentaires, pour reprendre la terminologie de l'époque, soit l'introduction de la théorie des dérivées dans la classe de mathématiques élémentaires.

En 1897 la théorie des fonctions dérivées disparaîtra du programme d'admission à Saint-Cyr. Nous ne disposons malheureusement pas d'information sur la raison de ce retour en arrière. Gaston Gohierre de Longchamps met en parallèle cette décision avec les modifications survenues la même année pour le concours d'admission à l'École polytechnique, écrivant dans le *Journal de Mathématiques Élémentaires* de 1897 :

> Un vent de réaction qui, il faut l'espérer, ne durera pas, en même temps qu'il touchait gravement le programme d'admission à l'École polyetchnique, a fait supprimer [l'introduction des dérivées] de l'enseignement des candidats à l'École de Saint-Cyr.[47]

L'École navale ne suivra pas Saint-Cyr et conservera la théorie des dérivées dans son programme d'admission.

3 – 3 La théorie des fonctions dérivées dans les manuels de Porchon (1894) et de Vacquant et Macé de Lépinay (1893-1898)

En 1893, Charles Vacquant fait paraître des *Principes d'algèbre* dont le titre précise qu'ils sont *à l'usage des élèves de l'enseignement moderne*. Vacquant est un ancien élève de l'École normale supérieure de la promotion de 1849, ancien professeur de mathématiques spéciales aux lycées Henri IV puis Saint-Louis, Inspecteur général de l'Instruction publique depuis 1876 et professeur à l'École centrale des arts et manufactures depuis 1875. Il est l'auteur d'une série de manuels d'algèbre, de géométrie et de trigonométrie destinés à l'enseignement

[47] LONGCHAMPS (Gohierre de) Gaston, « Cours d'algèbre élémentaire, […] par J.F. *», Journal de Mathématiques élémentaires, 5e série*, tome XXI, 1897, p. 43.

secondaire. Il décède en 1895. Ses ouvrages sont repris par son gendre, Auguste Macé de Lépinay, lui-même ancien élève de l'École normale supérieure, de la promotion 1866, et professeur de mathématiques spéciales au lycée Henri IV. Le texte de l'ouvrage que nous analyserons est celui de la deuxième édition, de 1898[48]. Indiqué comme conforme aux programmes de juin 1891, comme l'édition précédente, rien n'indique qu'il ait été modifié.

Cet ouvrage d'environ 450 pages regroupe les programmes de 3e, 2nde et 1e. Il est divisé en trois parties, une pour chaque année. La troisième partie occupe les cent-vingt dernières pages, du chapitre XX au chapitre XXII. Les chapitres XX et XXI sont consacrés aux notions de géométrie analytique. Ils introduisent les notions d'équation de droite et de coefficient angulaire. Le dernier chapitre traite des fonctions dérivées

Paul Porchon est un ancien élève de l'École normale supérieure. Entré à l'École en 1860, il obtient l'agrégation de mathématiques en 1864. En 1894 il est professeur au lycée de Versailles. Il est déjà l'auteur d'une dizaine de manuels d'arithmétique, d'algèbre, de géométrie et de cosmographie, destinés pour la plupart aux classes de lycées qui précédent la classe de mathématiques élémentaires, un certain nombre de ces manuels s'adressant également à des classes de l'enseignement moderne ou de l'enseignement primaire supérieur. Les *Compléments d'algèbre et de géométrie* qu'il publie en 1894 pour la classe de 1e Sciences font suite à un *Cours élémentaire d'arithmétique pratique* publié en 1893 et destiné exclusivement à l'enseignement moderne.

Cet ouvrage d'environ deux cents pages est partagé équitablement en deux parties, la première étant consacrée à l'algèbre. Cette partie est formée de douze chapitres, les six premiers, très courts, introduisant les éléments de la théorie des fonctions dérivées et de géométrie analytique. Les trois chapitres suivants sont consacrés aux études de fonctions prévues par le programme. Porchon y a ajouté trois chapitres consacrés à des problèmes sur la ligne droite, à l'équation du cercle et à la recherche de lieux géométriques. Ces chapitres utilisent fort peu la théorie des dérivées et ne correspondent pas à des points du programme d'algèbre de la classe de 1e Sciences.

[48] Il est numéroté « treizième édition »,

Fonction et continuité

Pour Vacquant, une variable y est dite fonction de x, variable indépendante, s'il existe une relation telle qu'à toute valeur de x on puisse faire correspondre une valeur de y et, lorsque x est comprise entre deux nombres donnés a, b. Si « la valeur de y est bien déterminée, on dit que cette fonction y est bien définie dans l'intervalle (a, b) »[49]. Précisons que pour Vacquant et les auteurs suivants que nous aborderons dans ce chapitre, et quelle que soit la notation employée, un tel intervalle désigne toujours ce que nous appelons de nos jours un intervalle fermé.

Vacquant n'évoque pas les fonctions implicites. Les exercices qu'il consacre à des « constructions de lignes » dont l'équation est de la forme

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

se ramènent à l'étude des variations d'une fonction explicite.

Porchon définit une fonction comme « une quantité y [qui] dépend d'une autre quantité x » appelée variable. Les exemples proposent des expressions algébriques, polynômes ou rationnelles, et l'expression d'une fonction implicite, $x^2 + y^2 = r^2$, équation qui « définit en réalité deux fonctions distinctes »[50].

La définition de Porchon est la seconde définition eulérienne. Celle de Vacquant s'approche des définitions de Tannery ou Jordan mais aucune allusion n'est faite aux fonctions arbitraires qu'elle permet de construire. En revanche, pour l'un comme pour l'autre, les fonctions implicites ne font plus vraiment partie des fonctions. Nous avons rencontré pour la première fois chez Jordan, en 1887, la critique de la notion de fonction implicite. Quelques années plus tard, la notion de fonction réduite aux seules fonctions explicites se retrouve dans les manuels de l'enseignement moderne.

Immédiatement après la notion de fonction, Vacquant et Porchon abordent la notion de continuité d'une fonction qui, nous l'avons vu, ne figure pas dans le programme de 1[e] Sciences, mais se trouve dans le programme d'admission à Saint-Cyr.

[49] VACQUANT Charles et MACÉ de LÉPINAY Auguste, *Principes d'Algèbre*, 13e éd., Paris, Delagrave, 1898, p. 392.
[50] PORCHON Paul, *Compléments d'Algèbre et de Géométrie*, Paris, Alcan, 1894, p. 2.

La définition de la continuité d'une fonction est, chez Porchon, celle de Cauchy. Elle est suivie de la démonstration en ε,η de la continuité des fonctions :

$$y = ax^2 + bx + c \;\; et\; y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}.$$

Dans le chapitre II, « Définition des coordonnées – Équation d'un lieu géométrique » qui introduit les premières notions de géométrie analytique, Porchon précise que, pour toute fonction y, explicite et continue, lorsque M est un point de coordonnées x, y « si le pied N de l'ordonnée passe d'une manière continue d'une position à une autre, le point M décrit un arc continu »[51].

Chez Vacquant,

> une fonction $f(x)$ d'une variable x est continue pour une valeur particulière de x_0 de cette variable si, ε étant un nombre positif donné, aussi petit que l'on veut, on peut déterminer un nombre positif α assez petit pour que, pour toute valeur de x comprise entre $x_0 - \alpha$ et $x_0 + \alpha$, la valeur de la fonction soit comprise entre $f(x_0) - \varepsilon$ et $f(x_0) - \varepsilon$. Ces conditions sont traduites par les inégalités suivantes :
>
> si l'on a
>
> $$x_0 - \alpha < x < x_0 + \alpha$$
>
> on a aussi
>
> $$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \;.$$ [52]

Vacquant démontre ensuite qu'un trinôme du second degré est une fonction continue.

Limite

Vacquant et Porchon font précéder la notion de dérivée d'une étude sur les limites. Rappelons que la notion de limite était habituellement abordée en algèbre à propos des progressions géométriques, c'est-à-dire en classe de seconde pour l'enseignement moderne. La limite d'une telle progression était définie sans symbolisme mathématique, en constatant que, pour une raison q positive inférieure à 1, q^n diminuait de façon à devenir plus petite que toute quantité donnée, la somme des termes se rapprochait indéfiniment de $\frac{a}{1-q}$, a désignant le premier terme.

[51] *Ibid.*, p. 7.
[52] VACQUANT Charles et MACÉ de LÉPINAY Auguste, *op. cit.*, p. 394.

Porchon commence son chapitre intitulée « Notions sur les dérivées » par la section « Principes sur les limites ». Il définit la limite d'une suite, sans symbolisme mathématique, puis donne les théorèmes sur les limites de somme, produit, quotient « de quantités » qui ne sont plus explicitement des suites. Ses démonstrations, toujours sans symbolisme, emploient les expressions : « il est évident que » et « on voit que »[53]. Pour Porchon, les théorèmes sur les limites relèvent de l'intuition, ce dont ne se satisfait pas Vacquant.

Dans la section intitulée « Limite d'une variable. Limite d'une fonction d'une variable », il définit tout d'abord la limite d'une variable x :

> On dit qu'une variable x a pour limite un nombre fixe a, quand la loi des variations de cette variable est telle que sa valeur finit par tomber et rester indéfiniment comprise entre $a - \varepsilon$ et $a + \varepsilon$, ε étant un nombre positif donné aussi petit que l'on veut.[54]

Il considère ensuite une fonction bien définie sur un intervalle (a, b), sauf en une valeur x_0, qui est donc une « valeur limite de la variable x ». Il définit, lorsqu'elle existe, la limite en x_0 de la fonction en termes de ε, η. La définition est illustrée par l'exemple de la fonction $\frac{x}{\sin x}$, bien définie pour toute valeur de x comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, à l'exception de 0. Cette limite n'est pas considérée comme la « vraie valeur » de la fonction. Les théorèmes sur les limites de somme, produit, quotient de fonctions sont ensuite démontrés en ε, η.

Dérivée et tangente

Porchon aborde la notion de dérivée par l'exemple de la fonction carré. Considérant le rapport des accroissements de la fonction à celui de la variable, $\frac{k}{h} = 2x + h$, il conclut : « lorsque h tend vers zéro, le rapport [..] tend vers $2x$. Cette limite s'appelle la fonction dérivée»[55] ; Il généralise à une fonction quelconque puis affirme :

> Il peut arriver que, pour certaines valeurs, le rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable ne tende pas vers une limite déterminée lorsque l'accroissement de la variable tend vers zéro ; pour ces valeurs, la fonction n'a pas de dérivée.[56]

[53] PORCHON Paul, *op. cit.*, p. 17.
[54] VACQUANT Charles et MACÉ de LÉPINAY Auguste, *op. cit*., p. 395.
[55] PORCHON Paul, *op. cit.*, p. 18.
[56] *Ibid.*, p. 18.

Vacquant définit de manière générale la dérivée d'une fonction continue f en une valeur x_0 de la variable. Il considère le rapport $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ et affirme : « en général, […] ce rapport tend vers une limite finie, bien déterminée […] appelée la dérivée de la fonction $f(x)$ pour la valeur x_0 »[57].Cette précision de Vacquant semble sous-entendre que la fonction n'a pas de dérivée si la limite du rapport est infinie alors que Porchon, comme c'est fréquemment l'usage à l'époque, considère que, dans ce cas, la fonction admet une dérivée infinie.

Un peu plus loin, Vacquant ajoute :

> de la définition même de la dérivée d'une fonction d'une variable, il résulte que pour qu'une fonction d'une variable x ait une dérivée pour une valeur x_0 donnée à cette variable, il faut que cette fonction soit continue pour la valeur x_0. Mais on n'est pas en droit d'affirmer que toute fonction $f(x)$ continue pour $x = x_0$ a une dérivée pour cette valeur de la variable

Tous deux font suivre la définition de la dérivée de son interprétation géométrique comme coefficient angulaire de la tangente à la courbe. Pour Porchon, l'existence de la tangente, position limite d'une sécante, paraît relever de l'intuition géométrique alors que pour Vacquant, l'existence de la dérivée prouve l'existence d'une tangente. Sa section intitulée « Signification géométrique de la dérivée d'une fonction d'une variable » commence en effet par :

> admettre qu'une fonction $f(x)$ a une dérivée pour une valeur x_0 donnée à la variable équivaut à admettre que la courbe dont l'équation est $y = f(x)$ a une tangente au point M_0 de cette ligne qui a pour abscisse x_0 »[58].

L'interprétation géométrique permet à Porchon d'affirmer que toute fonction dont la dérivée est constamment nulle se réduit à une constante, « car la tangente à la courbe représentative est constamment parallèle à l'axe des x. Cette courbe doit donc se réduire à une droite parallèle à l'axe des x »[59]. Ce théorème est chez Vacquant, l'objet d'une démonstration analytique.

Variation et extrema

Porchon et Vacquant définissent une fonction croissante ou décroissante sur un intervalle, sans évoquer la notion de fonction croissante ou décroissante en une valeur. Cependant, pour

---

[57] VACQUANT Charles et MACÉ de LÉPINAY Auguste, *op. cit.*, p. 403.
[58] *Ibid.*, p. 407.
[59] PORCHON Paul, *op. cit.*, p. 20.

démontrer qu'une fonction dont la dérivée est positive sur un intervalle (a, b) est croissante sur cet intervalle, Porchon utilise la définition d'une fonction croissante en une valeur. Dans sa démonstration par l'absurde il écrit : « en effet, […] la fonction ne peut être décroissante pour aucune des valeurs de la variable puisque alors sa dérivée serait négative ou nulle ». Il en déduit, en considérant une fonction continue, ainsi que sa dérivée, entre deux valeurs de la variable, que la dérivée s'annule et change de signe lorsque la fonction admet un extrémum entre ces valeurs de la variable, et réciproquement.

Par des considérations purement géométriques, Porchon étudie ensuite la concavité de la courbe qu'il lie au signe de la dérivée seconde et il définit la notion de point d'inflexion. Imaginant (figure numérotée 23 dans la figure 1 ci-dessous) la tangente à la courbe transportée en un point fixe et indique : « si la dérivée d'une fonction prend des valeurs croissantes […], la tangente […] tourne dans le sens direct »[60].

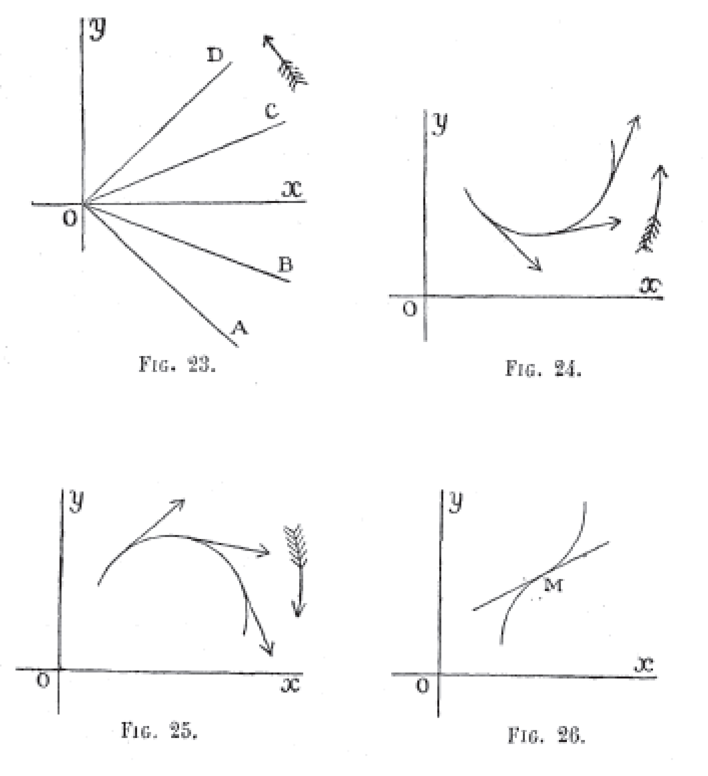


Figure 16: étude de la concavité de la courbe dans les *Compléments d'algèbre* de Porchon

Vacquant démontre lui aussi par l'absurde le lien entre signe de la dérivée et sens de variation de la fonction mais sa démonstration, qui ne fait pas intervenir la notion de fonction croissante

[60] *Ibid.*, p.34.

ou décroissante en une valeur, suppose implicitement la continuité de la fonction dérivée. En corollaire, il donne comme Porchon le théorème sur l'existence d'extrema. Il n'aborde pas la notion de concavité de la courbe.

Les fonctions étudiées : cours et exercices

Pour ce qui concerne les fonctions étudiées, Porchon déborde le cadre imposé par le programme en étudiant la dérivée d'une puissance, qu'il utilise pour dériver la fonction racine carrée. Vacquant dérive aussi la puissance d'une fonction ainsi que les fonctions sinus, cosinus, tangente, cotangente, sécante et cosécante.

L'ouvrage de Vacquant reprend le schéma classique des manuels scolaires : des exemples sont traités en cours d'ouvrage et des exercices sont proposés en fin de chapitre. Les exemples traités se limitent à ceux imposés par le programme, si ce n'est que pour les quotients de trinômes du second degré, il étudie le cas général. Les exercices traitent d'exemples plus généraux (variations des fonctions $x^3 + px + q$, $x^4 + px^2 + q$), abordent la dérivée de la racine carrée lors de l'étude de courbes définies par une équation du second degré en x et y, et proposent un seul exemple utilisant les fonctions circulaires : l'étude des variations de la fonctions : $x - 2\sin x$.

Porchon ne propose pas de liste d'exercices en fin de chapitre mais consacre deux chapitres à l'étude d'exemples de fonctions au programme. Il fournit de plus une « classification des fonctions rationnelles du second degré ». Il utilise la dérivation de la racine carrée dans le chapitre un chapitre intitulé : « Équation du cercle ».

Les exercices que nous trouvons dans ces deux ouvrages reflètent, pour la plupart, le niveau d'exigence du baccalauréat de l'enseignement moderne dont nous reproduisons ici les questions portant sur l'analyse de deux sujets donnés en 1896 :

> Maximum et minimum de la fonction $\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)}$ (Académie de Besançon)
> Étudier par la méthode de la dérivée, les variations de la fonction : $y = \frac{x^2+2}{x^2-2x+2}$ (Académie de Bordeaux)[61]

Nous ne trouvons dans aucun des deux ouvrages de question posée au concours de Saint-Cyr.

---

[61] Source : *Journal de mathématiques élémentaires*, *4e série*, t. V, 1896.

Des ouvrages pour le baccalauréat moderne, orientés vers le concours d'admission à Saint-Cyr et inspirés par les nouveaux fondements de l'analyse

Malgré l'absence de questions du concours d'admission à Saint-Cyr parmi les exercices, l'analyse de ces deux manuels destinés à l'enseignement moderne nous permet de constater qu'au-delà du programme de la classe de 1^{e} Sciences, ils sont tournés vers la préparation à ce concours. Les différents points hors programmes que nous avons cités sont, pour la plupart, inclus dans le programme d'admission à cette École (tableau 3 ci-dessous).

	Vacquant	Porchon	Programme d'admission à Saint-Cyr
Continuité	X	X	X
Limites	X	X	
Concavité		X	
Extrema	X	X	X
Dérivées des fonctions			
• puissance, racine carrée	X	X	X
• circulaires	X		X

Figure 17: les notions hors-programme de la classe de 1^{e} Sciences chez Vacquant et Porchon, et le programme d'admission à Saint-Cyr

Cependant, la préparation à Saint-Cyr ne nous semble pas seule en cause dans les choix des auteurs de ces manuels. Le traitement de la continuité d'une fonction qui devient dans les deux ouvrages une notion première, les développements donnés à la notion de limite, nous semblent relever plus de la volonté de mettre leurs textes en conformité avec les derniers développements des mathématiques sur les fondements de l'analyse. Ceci est beaucoup plus nettement marqué dans le livre de Vacquant. Il faut aussi lire dans ces ouvrages les conséquences des conceptions de l'enseignement des mathématiques qui s'imposaient alors, comme nous avons pu le montrer dans le chapitre précédent.

Cependant, même l'ouvrage de Vacquant ne va pas jusqu'à la démonstration rigoureuse du lien entre signe de la dérivée et sens de variation d'une fonction, comme nous l'avons rencontrée au chapitre précédent. Cette démonstration engage des résultats fondamentaux autrement plus complexes, faisant intervenir des éléments de la théorie des ensembles et la notion de nombre incommensurable qui ne figure nulle part au programme de l'enseignement moderne[62]. Porchon et Vacquant se contentent, pour cette propriété, d'un entre-deux, entre intuition géométrique et rigueur, pour eux sans doute bien suffisante à ce niveau d'enseignement.

4 – Les leçons d'arithmétique et d'algèbre dans le *Cours complet de mathématiques élémentaires* de Darboux

De 1984 à 1901 vont paraître chez Armand Colin les six volumes d'un *Cours complet de mathématiques élémentaires publié sous la direction de M. Darboux*[63]. Ce cours se situe, en cette fin du XIXe siècle, dans un contexte général de renouvellement des mathématiques enseignées dans les manuels du secondaire[64].

Pour ne citer que les manuels d'algèbre, Justin Bourget, Recteur de l'Académie d'Aix, avait publié, dès 1880, un manuel d'algèbre dans lequel il voulait « présenter l'algèbre sous un jour nouveau, conforme aux progrès que cette science a faits par l'étude approfondie des quantités dites imaginaires »[65]. Ainsi, il introduisait les nombres positifs et négatifs comme des quantités complexes ayant des sens opposé : +2 était noté 2_0 et -3 était noté 3_π. 2 et 3 étaient appelés les modules, 0 et π, les arguments. Après que le programme de mathématiques élémentaires de 1890 eut placé l'introduction des nombres négatifs au tout début de l'algèbre, Henri Padé avait publié, en 1892, ses *Premières Leçons d'Algèbre Élémentaire*[66] dans lesquelles il proposait une définition purement arithmétique des nombres négatifs. En 1893, Eugène Humbert, définissait les nombres négatifs dans son *Traité d'arithmétique*[67], ce qui était une innovation. Il proposait aussi une définition des nombres irrationnels comme mesures de grandeurs incommensurables, en utilisant les *suites de Cauchy*. Humbert et Padé sont d'anciens élèves de l'École normale supérieure. Humbert est de la promotion 1878. Il a eu Darboux comme maître de conférences. Padé est de la promotion

---

[62] Le programme d'arithmétique de 3e introduit seulement la notion de racine carrée.
[63] Nous le désignerons par la suite comme le *Cours de Darboux*.
[64] Voir RENAUD Hervé, « Academics, textbooks and reform of mathematics education in secondary French schools (1890-1905) », dans Kristin BJARNADOTTIR, Fulvia FURINGHETTI, Johan PRYTZ et Gert SCHUBRING (éditeurs), *Proceedings of the Third International Conference on the History of Mathematics Education,* Uppsala University, 2015, p. 327-343.
[65] BOURGET Justin, *Algèbre Élémentaire*, Paris, Delagrave, 1880.
[66] PADÉ Henri, *Premières Leçons d'Algèbre Élémentaire*, Paris, Gauthier-Villars, 1892. Sur l'introduction des nombres négatifs, voir aussi GLIÈRE André-Jean*, Histoire et épistémologie des nombres négatifs de d'Alembert à nos jours*, Thèse de doctorat, EHESS, Paris, 2007.
[67] HUMBERT Eugène, *Traité d'Arithmétique*, Paris, Nony, 1893.

1883, donc un ancien élève de Tannery. Ce dernier a rédigé une préface pour chacun de ces deux ouvrages.

Le premier volume du *Cours de Darboux*, est intitulé *Leçons d'arithmétique théorique*. Publié en 1894, il est l'œuvre de Tannery. Suivent, en 1895, les *Leçons de cosmographie* de Félix Tisserand et Henri Andoyer, puis, en 1896 et 1897, deux volumes écrits par Charles, dit Carlo, Bourlet : *Leçons d'algèbre élémentaire* et *Leçons de trigonométrie rectiligne*. Jacques Hadamard publiera en 1898 et 1901 deux volumes intitulés *Leçons de géométrie*, le premier pour la géométrie plane et le second pour la géométrie dans l'espace. Comme Darboux, Tisserand est une personnalité reconnue dans la communauté scientifique. Ancien élève de l'École normale supérieure, astronome, élu en 1878 à l'Académie des sciences, il est de la génération de Darboux, à qui il a succédé dans la suppléance de Liouville sur le poste de professeur de mécanique rationnelle à la Sorbonne. Andoyer, Bourlet et Hadamard sont eux des normaliens de la génération suivante, admis respectivement dans cette École en 1881, 1885 et 1884. Ils ont eu les trois premiers comme professeurs et débutent leur carrière d'enseignant dans les années 1890. Si nous ne savons pas dans quelles circonstances a germé l'idée de ce *Cours*, nous pouvons cependant imaginer que Darboux, Tannery et Tisserand ont tous trois choisi Andoyer, Bourlet et Hadamard parmi leurs anciens élèves.

Nous savons l'intérêt porté par Darboux à un renouvellement de l'enseignement des mathématiques. Ses interventions au CSIP ont montré que cet intérêt se cantonne pas à l'enseignement supérieur. Sa présence comme directeur de ce cours s'inscrit donc dans la continuité de son action en faveur d'une modification des programmes de l'enseignement secondaire.

Tannery, Bourlet et Hadamard le citent tous trois dans leur préface. Si l'on omet les nécessaires remerciements au directeur de ce *Cours*, il semble que Darboux ait donné quelques grandes lignes directrices. Ainsi, nous lisons chez Tannery :

> dans le chapitre sur la mesure des grandeurs, j'ai essayé, sur les conseils de M. Darboux, de tirer ce que l'on pouvait de la vieille définition « une grandeur est tout ce qui est susceptible d'augmentation et de diminution »[68],

et, chez Bourlet :

[68] TANNERY Jules, *Leçons d'arithmétique théorique et pratique*, Paris, Armand Colin, 1894, p. VII.

> d'après les conseils de M. Darboux, conseils qu'il m'a été bien agréable de suivre, j'ai résolument abandonné, pour l'étude de la variation des fonctions, la méthode dite élémentaire et j'ai adopté celle des dérivées.[69]

Remarquons que la rédaction du manuel d'arithmétique par Tannery témoigne de l'intérêt de cet auteur pour ce sujet[70] et confirme la proximité des conceptions mathématiques des deux hommes que nous avons déjà relevée dans le chapitre précédent.

4 – 1 Les *Leçons d'arithmétique* de Tannery (1894): les fondements de l'analyse accessibles aux meilleurs élèves de mathématiques élémentaires

Il n'y a pas à proprement parler d'analyse dans ce gros volume de plus de cinq cent pages qui étudie des notions bien au-delà du programme de la classe de mathématiques élémentaires. Tannery y aborde en effet la théorie des nombres et y fait figurer la loi de réciprocité des restes quadratiques dans le dernier chapitre. Les trois derniers chapitres, numérotés XII, XIII et XIV, sont d'ailleurs signalés par l'auteur comme dépassant les connaissances exigées pour le baccalauréat et « s'adressent aux lecteurs qui veulent pousser plus loin leurs études scientifiques »[71]. Il est cependant remarquable que figure dans cet ouvrage d'arithmétique, le chapitre XII intitulé « Nombres irrationnels – Limites ». Les notions qui ici, d'une certaine façon, terminent l'arithmétique élémentaire sont en effet celles par lesquelles il commençait son *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable* analysée au chapitre précédent. D'autant plus que dans la préface, Tannery indique, à propos des efforts nécessaires à l'étude de ce chapitre : « je ne crois nullement que ces efforts soient au-dessus de la portée d'un bon élève de la classe de mathématiques élémentaires »[72].

Comme dans son *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, il introduit les irrationnels par la méthode des coupures. Il ne définit toutefois que les nombres irrationnels positifs. En effet, à l'époque, les nombres négatifs n'avaient pas leur place dans un livre d'arithmétique. Ils étaient introduits en algèbre[73]. Dans ce nouvel ouvrage Tannery définit de

---

[69] BOURLET Carlo, *Leçons d'Algèbre élémentaire*, Paris, Armand Colin, 1896, p. VI.

[70] Voir RENAUD Hervé, « Les Leçons d'Arithmétique théorique et pratique de Jules Tannery (1894) : enseigner les nombres comme fondements des mathématiques », dans Évelyne BARBIN et Marc MOYON (dir.), *Les ouvrages de mathématiques dans l'Histoire. Entre recherche, enseignement et culture*, Limoges, Presses Universitaires de Limoges, 2013, p. 217-228.

[71] TANNERY Jules, *op. cit.*, p. VI.

[72] *Ibid.*, p. VII.

[73] Le programme de mathématiques élémentaires de 1891 prévoit de définir les nombres négatifs au tout début du programme d'algèbre, ce qui est considéré comme une nouveauté majeure. Ils étaient introduits auparavant

la même façon l'égalité de deux nombres irrationnels, l'ordre des nombres rationnels ou irrationnels, puis les opérations sur les irrationnels. Il ne démontre cependant pas l'équivalence entre la définition par les coupures et celle par les *suites de Cauchy*[74].

Les deux dernières sections de ce chapitre sont consacrées aux ensembles et aux limites. La notion ensemble y est introduite comme dans l'*Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*. Tannery démontre ensuite que tout ensemble limité, c'est-à-dire majoré, admet une borne supérieure (qu'il appelle limite supérieure) puis définit la limite d'une suite a_n de nombres rationnels ou irrationnels en termes de ε, n. Il démontre ensuite qu'une suite croissante majorée admet une limite et que toute suite admet une limite si et seulement si elle vérifie le *critère de Cauchy.*

Le chapitre se termine sur la notion de « valeur limite » d'un ensemble, c'est-à-dire de point d'accumulation et sur cet énoncé du théorème désigné maintenant sous le nom de Théorème de Bolzano-Weierstrass : si un ensemble (E) comprenant un nombre infini de termes « est limité et si M et m sont respectivement la limite supérieure et la limite inférieure de cet ensemble, cet ensemble admet au moins une valeur limite qui est M ou m, ou un nombre intermédiaire »[75].

Nous avons là, avec la définition des nombres irrationnels et cette succession de théorèmes sur les ensembles et les limites, la présentation dans ce livre d'arithmétique des fondements de l'analyse. Ils sont à la disposition du futur rédacteur du manuel d'algèbre qui pourra introduire la théorie des fonctions dérivées avec toute la rigueur souhaitée.

La finalité de ce chapitre est, dans cet ouvrage, de répondre au souhait que Tannery présentait comme celui d Darboux dans la préface : définir la notion de grandeur. C'est l'objet du chapitre XIII, « Mesure des grandeurs ». Tannery définit la notion de « grandeur directement mesurable » à l'aide d'une correspondance entre l'ensemble des états de la grandeur et l'ensemble des nombres positifs, rationnels ou irrationnels[76].

à l'occasion de l'étude des polynômes ou de la résolution des équations du premier degré. Sur cette question de la définition des nombres négatifs, voir GLIÈRE André-Jean, *op. cit.*.

[74] Une note de bas de page évoque cependant cette méthode à propos de laquelle « Heine, pour ce qui est du point de départ, s'est rencontré avec M. Méray » (ibid., p. 379). Notons aussi qu'il ne revendique plus la paternité de la construction des irrationnels par les coupures, l'attribuant à Dedekind.

[75] TANNERY Jules, *op. cit*., p. 424.

[76] Voir RENAUD Hervé, *op. cit*.

4 – 2 La théorie des dérivées dans les *Leçons d'algèbre* de Bourlet (1896) : une méthode générale pour la classe de mathématiques élémentaires

Après avoir obtenu l'agrégation en 1888, Bourlet a soutenu en 1891 une thèse intitulée « Sur les équations aux dérivées partielles simultanées qui contiennent plusieurs fonctions inconnues »[77]. À partir de 1891 il est professeur au lycée Henri IV, dans la classe préparatoire à Saint-Cyr d'abord, puis en classe de mathématiques élémentaires supérieures. Intéressé par l'apparition alors récente de la bicyclette telle que nous la connaissons aujourd'hui, il publie en 1894 un *Traité des bicycles et des bicyclettes, suivi d'une application à la construction des vélodromes*.

Dans l' « Avertissement », Bourlet décrit son ouvrage d'algèbre comme « destiné, plus spécialement aux élèves de la classe de Mathématiques Élémentaires »[78]. Il précise qu'avec les appendices portant sur les nombres complexes, les fonctions circulaires, et les radicaux et exposants fractionnaires, il expose toutes les connaissances exigées pour l'admission à Saint-Cyr. La théorie des fonctions dérivées s'adresse donc bien, selon lui, à l'ensemble des élèves de mathématiques élémentaires. L'emploi de cette théorie conseillée par Darboux est justifié dans la préface pour la recherche d'extrema :

> Au premier abord, ceci peut paraître une hardiesse ; mais si on se reporte aux difficultés que présente l'exposition *rigoureuse* et complète d'une quelconque des méthodes réputées élémentaires (1), on sera forcé de convenir que celle des dérivées, sans être plus difficile à concevoir, est d'une application beaucoup plus régulière et beaucoup plus aisée(2). D'ailleurs, le domaine de la science mathématique s'élargissant de jour en jour, il faut bien pour permettre aux jeunes générations d'aller plus loin que nous dans l'étude de cette science, élaguer l'enseignement de tout ce qui fait double emploi. Il faut bien nous résoudre […] à reléguer au second plan les procédés particuliers non susceptibles de généralisation.[79]

Sa première note de bas de page renvoie à la méthode qu'il attribue à Charles Hermite, qui ramène l'étude des quotients de trinômes du second degré à l'étude de la fonction $x \pm \frac{a}{x}$. La seconde indique :

> L'expérience sur ce sujet est, d'ailleurs, faite. Il y a longtemps qu'on enseigne la méthode des dérivées dans les classes de l'enseignement moderne et on a pu

[77] Sur Bourlet, voir : https://sites.google.com/site/rolandbrasseur/5---dictionnaire-des-professeurs-de-mathematiques-speciales , consulté le 30/08/2017.
[78] BOURLET Carlo, *op. cit.*, p. V.
[79] *Ibid.*, p. VI.

> constater qu'elle ne présentait aucune difficulté insurmontable pour des débutants.[80]

Les premiers baccalauréats « Lettres-Sciences » de l'enseignement moderne ont été attribués en 1893. Au moment de la parution de l'ouvrage, le « longtemps » dont parle Bourlet ne correspond qu'à quatre années d'enseignement. Mais le bilan qu'il en dresse est positif, même si l'absence de difficulté « insurmontable » semble le tempérer. Il est important aussi de bien souligner ce terme d' « expérience » qui qualifie l'enseignement de la théorie des dérivées pour les élèves de l'enseignement moderne. Il est écrit par quelqu'un qui, s'il n'a pas contribué à l'élaboration des programmes, est un proche de Darboux et Tannery qui ont été des acteurs essentiels de leur rédaction.

L'ouvrage de Bourlet, d'environ 550 pages, est partagé en « Livres » qui suivent le programme d'algèbre de la classe de mathématiques élémentaires. Le « Livre premier » introduit le calcul algébrique. Les « Livres II et III » traitent des équations du premier et du second degré[81]. Le « Livre IV », d'une centaine de pages, est intitulé, « Dérivées, variation des fonctions ». Il comporte cinq chapitres : « Des limites », « Continuité », « Dérivées des fonctions simples », « Application des dérivées à l'étude de la variation des fonctions » et « Recherche directe de quelques maxima et minima absolus ».

La notion de fonction a été définie au « Livre premier » comme « toute quantité qui dépend d'une autre »[82]. Bourlet accompagne sa définition d'exemples de fonctions exprimées par des relations algébriques simples, de celles que les élèves peuvent concevoir à ce point du cours. Il généralise sa définition aux sciences physiques, où « toute loi, régissant un phénomène, exprime une certaine quantité en fonction d'une autre ou de plusieurs autres »[83], ce qui permet d'imaginer des fonctions plus compliquées. À cette occasion, il définit une fonction croissante comme une fonction qui varie dans le même sens que la variable. La notion de fonction implicite ne figure pas dans l'ouvrage.

Le chapitre premier du « Livre IV » commence par la définition suivante :

---

[80] *Ibid.*, p. VI.

[81] Dans l'introduction, Bourlet expose les éléments de la théorie de « segment porté par un axe » qu'il utilise par la suite pour introduire les nombres négatifs. Voir GLIÈRE André-Jean, *op. cit.*

[82] BOURLET Carlo, *op. cit.*, p. 81.

[83] *Ibid.*, p. 83.

> On dit qu'une fonction y, de la variable x, a pour limite b, lorsque x tend vers a, si, à tout nombre positif ε (d'ailleurs aussi petit qu'on le voudra), on peut faire correspondre un nombre positif α, tel que, pour toutes les valeurs de x vérifiant l'inégalité
>
> $$|x - a| < \propto$$
>
> les valeurs correspondantes de y vérifient l'inégalité :
>
> $$|y - b| < \varepsilon ,$$
>
> sauf, peut-être, pour $x = a$.[84]

Si nous comparons la définition de Bourlet à celle de Vacquant pour des élèves d'un même niveau, il faut bien sûr remarquer l'emploi de la valeur absolue, définie au chapitre premier, « Nombres positifs et négatifs »[85]. Mais il nous faut surtout noter l'approche inverse choisie par Bourlet qui, contrairement à Vacquant, définit la limite a d'une fonction avant de définir la notion de continuité. Bourlet considère d'emblée la notion de fonction indépendamment de la continuité.

Ceci lui permet par la suite de définir la notion de vraie valeur d'une fonction qui, nous l'avons vu, était remise en cause par les nouvelles conceptions de la notion de fonction : la vraie valeur d'une fonction en a est la limite vers laquelle tend cette fonction lorsque x tend vers a.

Dans la suite du chapitre, Bourlet définit les notions de limite infinie en a, et de limite finie ou infinie à l'infini, renvoyant à cette occasion à la définition de la limite d'une suite donnée par Tannery dans son manuel d'arithmétique. Il démontre, en utilisant les inégalités, les théorèmes usuels sur les limites.

Une fonction continue en a est donc définie, au chapitre suivant, comme une fonction qui a une valeur bien déterminée pour $x = a$ et dont la limite en a est sa valeur pour $x = a$. La fonction partie entière est proposée comme exemple de fonction discontinue et le *théorème des valeurs intermédiaires* est simplement évoqué de la façon suivante :

> lorsqu'une fonction est continue, pour toutes les valeurs de la variable, on conçoit que, comme elle ne peut varier que par degrés insensible, elle ne puisse

[84] *Ibid.*, p. 307.
[85] On pourra, à propos de l'introduction par Bourlet des nombres négatifs, voir GLIÈRE André-Jean, *Histoire et épistémologie des nombres négatifs de d'Alembert à nos jours*, Thèse de doctorat, EHESS, Paris, 2007.

> passer d'une valeur à une autre sans passer par toutes les valeurs intermédiaires.[86]

Au chapitre III, « la dérivée d'une fonction est la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à l'accroissement de la variable, lorsque l'accroissement de la variable tend vers zéro », et, lorsque ce rapport « *croît indéfiniment*, on dit encore qu'il y a une dérivée, mais que cette dérivée est *infiniment grande* » [87]. Bourlet précise qu'une fonction n'a pas de dérivée lorsque le rapport n'a pas de limite, mais ne donne pas d'exemple de fonction sans dérivée. Il ne précise rien non plus sur les liens entre continuité et dérivabilité. Dans la fin du chapitre III, il démontre les théorèmes au programme de la classe de 1e Sciences et, comme Porchon, dérive en plus la puissance entière d'une fonction et la fonction racine carrée.

Dans le chapitre IV Bourlet définit une fonction croissante ou décroissante pour $x = a$: f est dite croissante pour $x = a$ « si on peut déterminer un nombre positif ε assez petit pour que, pour toutes les valeurs de h (positives ou négatives) plus petites en valeur absolue que ε, l'on ait :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} > 0 \text{ »}^{88}.$$

Il remarque alors que, lorsqu'une fonction est croissante dans un intervalle, c'est-à-dire au sens où il l'avait défini précédemment, la fonction est croissante pour toutes les valeurs comprises dans cet intervalle,

> mais réciproquement, il n'est pas évident qu'une fonction qui est croissante, pour toutes les valeurs de x comprises dans un intervalle (a, b), varie dans le même sens que la variable sur cet intervalle. Il est cependant, assez naturel, d'admettre cette réciproque ; c'est ce que nous ferons dans cette étude élémentaire.[89]

Ceci lui permet d'obtenir le théorème qui lie signe de la dérivée et le sens de variation de la fonction sur un intervalle. Cependant, dans une longue note de bas de page, il fournit une démonstration de la propriété admise[90]. Sans doute plus qu'aux élèves, nous pouvons imaginer que cette note était destinée aux professeurs.

---

[86] *Ibid.*, p. 332.
[87] *Ibid.*, p. 333.
[88] *Ibid.*, p. 348.
[89] *Ibid.*, p. 348.
[90] En termes actuels, il démontre par l'absurde qu'on peut recouvrir un intervalle [α,β] contenu dans (a, b) par un nombre fini d'intervalles [x_i, x_i+ε], avec $x_1 = \alpha$, à l'intérieur desquels la fonction est croissante.

Il faut remarquer à ce propos que Bourlet ne fait pas usage des théorèmes fondamentaux de l'analyse mis à sa disposition par le manuel d'arithmétique de Tannery : la démonstration rigoureuse du *théorème des valeurs intermédiaires*, des *théorèmes de Rolle et des accroissements finis* ne sont pas pour lui des notions de mathématiques élémentaires.

Ce n'est qu'après avoir utilisé les théorèmes précédents pour la recherche d'extrema qu'il donne la signification géométrique de la dérivée. L'introduction de la théorie des fonctions dérivées est donc chez Bourlet purement analytique, les applications géométriques n'intervenant qu'après l'exposition de tous les éléments de la théorie.

Signalons enfin que la notion de point d'inflexion est étudiée à l'occasion de l'étude d'une fonction polynôme du troisième degré. Bourlet donne de plus la définition d'une branche de courbe asymptote à une droite et étudie les exemples suivants de fonctions « à variation limitée, c'est-à-dire dans lesquelles on ne peut pas donner à x toutes les valeurs possibles (de $-\infty$ à $+\infty$) »[91] :

$$y = \sqrt{1-x^2} \text{ et } y = x\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}, \ a \text{ étant une constante positive.}$$

La dérivation des fonctions circulaires est, nous l'avons déjà dit, renvoyée dan l'appendice.

L'exigence de Bourlet dans l'exposition de la théorie se retrouve dans les exercices, d'une plus grande difficulté que ceux que nous avons trouvés chez Vacquant et Porchon. Ainsi, à la fin du chapitre sur la continuité, il demande de prouver « directement » la continuité des fonctions $x^2 + px + q, \sqrt{x^2+1}$, et $\frac{x^2+a^2}{x^2+b^2}$. Un autre exercice demande de « démontrer, rigoureusement, que le trinôme du second degré ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par les valeurs intermédiaires »[92]. Dans le chapitre « Dérivées des fonctions simples », il demande de calculer les dérivées « de tous les ordres » des fonctions :

$$(x-a)^p, \frac{1}{x-a}, \frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}\right]$$

Les exercices portant sur l'étude des variations de fonctions dépassent largement le cadre fixé par le programme. Nous y trouvons notamment l'étude de $y = x\sqrt{\frac{x}{a-x}}$ et des exercices

[91] *Ibid.*, p. 373.
[92] *Ibid.*, p. 332.

d'oraux du concours de Saint-Cyr qui appliquent la théorie des dérivées à des problèmes de géométrie. Ainsi, par exemple :

> On considère une circonférence et un diamètre AB de cette circonférence. Soit AT la tangente à la circonférence au point A et M un point quelconque de la circonférence, on demande d'étudier la variation du volume, engendré par le triangle AMB tournant autour de AT, lorsque M décrit la circonférence.[93]

5 – Le manuel d'un professeur issu de l'enseignement spécial : le *Cours d'algèbre* de Neveu (1897)

Neveu, sur lequel nous disposons de peu d'informations, a obtenu l'agrégation de l'enseignement spécial en 1888. Lorsque paraît la deuxième édition de son *Cours d'algèbre*, il enseigne à l'École Lavoisier. Fondée en 1872, elle fait partie des « écoles Turgot », nom sous lequel sont désignés cinq établissements d'enseignement primaire supérieur fondés et entretenus par la ville de Paris[94]. Neveu deviendra par la suite directeur de l'École Lavoisier[95].

Le titre de l'ouvrage précise que le cours est « *à l'usage des classes de mathématiques élémentaires, de l'enseignement secondaire moderne, des candidats à l'École Saint-Cyr et au professorat des écoles normales* ». La préface de la première édition, en 1889, indique que le cours est celui professé par l'auteur « dans [ses] classes d'élémentaires, aussi [a-t-il] adopté à dessein la division en leçons »[96]. L' « Avertissement » à la deuxième édition signale que l'ouvrage a été rendu conforme aux nouveaux programmes et ajoute : « les candidats à l'École de Saint-Cyr trouveront dans les leçons complémentaires les questions relatives aux dérivées qui, depuis la première édition, ont été ajoutées aux programmes »[97], sans mentionner l'enseignement moderne. Il s'agit des dernières leçons, numérotées de 32 à 35, soit une soixantaine de pages sur les 600 que compte l'ouvrage. Les leçons précédentes correspondent au programme d'algèbre des classes de mathématiques élémentaires. Elles traitent en particulier de la recherche d'extrema par des méthodes élémentaires.

---

[93] *Ibid.*, p. 379.

[94] Les autres sont l'École Turgot, fondée en 1839, l'École Colbert en 1868, l'École Jean-Baptiste Say en 1873, et l'École Arago en 1880. Voir l'entrée « Turgot (écoles) », *Nouveau dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire publié sous la direction de Ferdinand Buisson,* édition de 1911, Institut Français de l'Education, http://www.inrp.fr/edition-electronique/lodel/dictionnaire-ferdinand-buisson/ consulté le 28/08/2017.

[95] Selon la brève notice de la Bibliothèque Nationale de France : http://catalogue.bnf.fr/ark:/12148/cb10744383h, consultée le 29/08/17.

[96] NEVEU Henri, *Cours d'Algèbre*, 2e éd., Paris, Masson, 1897, p. I.

[97] *Ibid.*, p. III.

Nous ne pouvons pas affirmer que Neveu a enseigné dans ses classes la théorie des dérivées qui n'est pas au programme de l'enseignement primaire supérieur. Cette hypothèse nous semble cependant tout à fait plausible.

Neveu a défini la notion de fonction à la 23e leçon intitulée « Notions sur la continuité des fonctions ». Sa définition qui considère les fonctions implicites, et n'est pas sans rappeler dans sa formulation celle de Cauchy, est la suivante :

> deux quantités sont fonctions l'une de l'autre lorsqu'elles sont liées entre elles de telle manière que si l'une d'elles varie, à chaque valeur qu'elle prend il en résulte pour la seconde quantité une ou plusieurs valeurs parfaitement déterminées. – Exemple : un cercle et le rayon.[98]

Définissant ensuite une quantité qui varie de manière continue comme une quantité qui ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par les valeurs intermédiaires il poursuit :

> nous dirons que y est une fonction continue de x, entre deux valeurs α et β, lorsque x variant de α à β par degrés aussi rapprochés que l'on possibles, il en résulte pour y des variations aussi petites que l'on veut.
> Ainsi, par définition, une fonction continue ne peut passer du positif au négatif, ou inversement, sans s'annuler.[99]

Dans cette même leçon, Neveu définit sans symbolisme mathématique les notions de fonction croissante ou décroissante entre deux valeurs α et β (une fonction est croissante si elle varie dans le même sens que la variable, décroissante si elle varie dans le sens contraire) et d'extremum relatif : une fonction « passe par un maximum pour $x = \alpha$ lorsque […] cette fonction prend une valeur *plus grande que les valeurs qui la précèdent ou la suivent immédiatement* »[100].

Nous ajouterons deux remarques avant d'en venir à la théorie des fonctions dérivées dans cet ouvrage. Tout d'abord, Neveu ne définit pas formellement la notion de limite. Dans le cas de fonctions usuelles, ces fonctions peuvent croître ou décroître « au-delà de toute limite ». Lors de l'étude des progressions géométriques, en considérant la somme :

$$S = \frac{a(1-q^n)}{1-q},$$

[98] *Ibid.*, p. 401.
[99] *Ibid.*, p. 402.
[100] *Ibid.*, p. 408; la fin de la phrase est en italiques dans le texte.

pour $q < 1$, il écrit : « le facteur q^n tend vers 0 quand n augmente indéfiniment, donc la somme a une limite donnée par la formule :

$$\lim . S = \frac{a}{1-q} \text{ .»}^{101}$$

Tout comme la notion de continuité, la notion de limite reste purement intuitive dans cet ouvrage.

Contrairement à l'ouvrage de Bourlet, celui de Neveu sépare bien les programmes de mathématiques élémentaires de ceux de 1e Sciences et de Saint-Cyr : les méthodes élémentaires de recherche des extrema sont étudiées avant d'aborder la théorie des fonctions dérivées. La première des « Leçons complémentaires » consacrées à cette théorie revient sur les notions de fonctions explicites et implicites et définit la dérivée d'une fonction explicite comme la limite du rapport de l'accroissements de la fonction à celui de la variable , précisant seulement, à propos de l'existence de cette limite : « il ne résulte pas de la définition que la dérivée existe »[102]. Rien n'est dit sur le lien entre continuité et dérivabilité. L'interprétation géométrique de la dérivée suit la définition, puis Neveu démontre les théorèmes sur la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient et d'un radical et dérive les fonctions sinus, cosinus et tangente.

La deuxième leçon sur la théorie des dérivées est intitulée « Dérivée d'une fonction de fonction ». Y figurent les théorèmes sur la dérivée d'une fonction composée et la notion de dérivée partielle pour obtenir la dérivée d'une fonction implicite.

C'est également dans cette leçon que figure l'étude des variations d'une fonction. Neveu reprécise formellement la notion de fonction croissante ou décroissante sur un intervalle : une fonction F est croissante dans l'intervalle (a, b) si, pour deux valeurs quelconques α et β comprises entre a et b on a :

$$\frac{F(\alpha) - F(\beta)}{\alpha - \beta} > 0,$$

et décroissante quand ce quotient est négatif.

Le *théorème de Rolle* est démontré ensuite, sous le nom de « lemme de Rolle ». Neveu reprend la démonstration de Ossian Bonnet qui suppose que pour toute fonction continue, il

---

[101] *Ibid.*, p. 509.
[102] *Ibid.*, p. 552.

existe un intervalle sur lequel elle sera monotone. Il démontre ensuite la « formule des accroissements finis » qu'il utilise pour démontrer les théorèmes qui lient le sens de variation de la fonction au signe de la dérivée. Il donne ensuite la définition d'une fonction croissante ou décroissante en une valeur, définition qu'il n'utilise pas par la suite.

Enfin, dans la dernière leçon consacrée aux variations des fonctions trigonométriques, Neveu donne la *règle de l'Hôpital* pour chercher la vraie valeur des expressions qui se présentent sous une forme indéterminée »[103].

Les exercices proposés à la fin des « leçons complémentaires » sont pour la plupart des exercices donnés à l'oral de Saint-Cyr en 1895. On y trouve par exemple le calcul des dérivées des fonctions : $\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, y = \operatorname{tg} x . \operatorname{cotg} x . \sec x . \cos x$. Les exemples d'études des variations de fonctions, tirés eux aussi des oraux d'admission à Saint-Cyr montrent que, très rapidement, les examinateurs ont posé des exercices qui dépassaient le cadre du programme. Voici quelques exemples de ces fonctions :

$$y = \frac{x^3 + x^2}{x + 2}, y = x^3 + \frac{1}{x^2}, y = \frac{\cos x}{1 + \cos^2 x}.$$

Des exercices de calcul de limite utilisent également la *règle de l'Hôpital* qui n'était pas non plus au programme d'admission à Saint-Cyr.

6 – L'empreinte de Tannery dans un manuel pour la classe de mathématiques élémentaires : le *Traité d'algèbre* de Cor et Riemann (1898)

Cor et Riemann sont deux anciens élèves de l'École normale supérieure, de la promotion de 1883[104]. Ils ont tous deux obtenu leur agrégation en 1886. Après son agrégation, Cor obtient avec Paul Painlevé une bourse pour aller étudier à l'Université de Göttingen. Il y suit les cours de Hermann Schwarz et de Felix Klein. À son retour il enseigne en mathématiques spéciales aux lycées de Brest, puis de Caen, avant d'être nommé, de 1895 à 1898 dans les classes préparatoires à l'École centrale des arts et manufactures aux lycées Carnot et Condorcet à Paris. En 1898, il obtient un poste de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis.

[103] *Ibid.*, p. 601.

[104] Sur Cor et Riemann, voir : https://sites.google.com/site/rolandbrasseur/5---dictionnaire-des-professeurs-de-mathematiques-speciales consulté le 31/08/2017.

Après l'agrégation, Riemann est agrégé-préparateur à l'École normale supérieure et prépare une thèse, « Sur une généralisation du principe de Dirichlet », qu'il soutient en 1888. Par la suite, il enseigne les mathématiques spéciales au lycée de Moulins, puis les mathématiques élémentaires au lycée Condorcet avant d'être nommé, en 1895, dans une classe de mathématiques élémentaires supérieures au lycée Louis-le-Grand.

Le *Traité d'algèbre élémentaire* qu'ils publient en 1898 est, selon le sous-titre, « *à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires, des aspirants au baccalauréat de l'enseignement classique (*2e Série*) et au baccalauréat de l'enseignement moderne (*2e et 3e Séries*), et des candidats aux écoles du gouvernement* ». À l'exception des candidats au professorat dans les écoles normales, le public visé est le même que celui de l'ouvrage de Neveu. Mais, contrairement à ce dernier, rien dans la présentation ne permet de séparer les différents publics. Il faut donc considérer que ce manuel présente ce que doit être l'algèbre en classe de mathématiques élémentaires pour ses auteurs.

Une brève introduction revendique leur filiation avec Tannery, se référant au manuel, *Leçons d'arithmétique théorique et pratique*, et à « l'admirable *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable* du même auteur, à laquelle [ils ont] fait de fréquents emprunts », mais aussi à « l'enseignement oral de ce maître auquel nous devons tant et sans qui, à coup sûr, le livre n'aurait jamais vu le jour »[105]. La fin de la phrase est trop équivoque pour déterminer une éventuelle participation de Tannery à la conception de l'ouvrage mais elle témoigne de son rôle essentiel comme professeur à l'École normale supérieure

Les trois premiers chapitres suivent le programme de la classe de mathématiques élémentaires : nombres algébriques (c'est-à-dire relatifs) et polynômes, équations du premier degré et du second degré. Les auteurs y ont inclus, dans une typographie différente, des points du programme de mathématiques spéciales : binôme de Newton, éléments de la théorie des déterminants. Le chapitre IV intitulé « Généralités sur les fonctions. Fonctions élémentaires » s'éloigne considérablement des programmes annoncés sur la page de garde.

Il s'ouvre en effet sur une très brève introduction, d'un peu plus d'une page, des nombres irrationnels par la méthode des coupures. Cette introduction ne part d'aucun exemple

[105] COR Narcisse et RIEMANN Jules, *Traité d'algèbre élémentaire*, Paris Nony, 1898.

contrairement à ce que faisait Tannery dans les deux ouvrages cités par Cor et Riemann. Après avoir réparti les irrationnels positifs en deux classes telles que :

> 1e tout nombre α de la première classe soit inférieur à tout nombre α' de la seconde classe ; 2e il n'y ait, ni dans la première classe de nombre supérieur à tous les autres, ni dans la seconde classe de nombre inférieur à tous les autres,[106]

les auteurs se contentent d'affirmer que cette « séparation […] définit un nombre irrationnel positif a »[107]. Concernant les opérations sur les irrationnels, ils n'abordent que la somme, sans réellement la définir.

La section suivante introduit la notion de fonction de la variable entière positive qui, « à chaque nombre entier positif n […] fait correspondre un nombre u_n »[108]. La notion de limite d'une suite est définie en termes de ε, n, puis Cor et Riemann démontrent les théorèmes sur la limite de au_n et la limite d'une somme de suites. Ils utilisent ensuite la définition des irrationnels par la méthode des coupures pour démontrer, en employant le vocabulaire actuel, que toute suite croissante majorée est convergente.

La notion de fonction est généralisée après avoir défini la notion d'intervalle :

> imaginons que, par un moyen quelconque, on fasse correspondre à chaque nombre x appartenant à l'intervalle (a, b) un autre nombre y ; on dit alors que y est une fonction de la variable indépendante x définie dans l'intervalle (a, b).[109]

Les nombres a et b sont appelés les limites supérieure et inférieure de l'intervalle. Par « analogie », ils considèrent des fonctions définies sur $(-\infty, a), (a, +\infty)$ et $(-\infty, +\infty)$.

Après avoir défini la notion de « fonction finie sur l'intervalle (a, b) », Cor et Riemann démontrent que les valeurs prises par une telle fonction possèdent une borne supérieure et une borne inférieure, qu'ils nomment limites supérieure et inférieure de la fonction sur l'intervalle.

Ils définissent ensuite la limite en a d'une fonction par valeurs supérieures : y est une fonction « définie dans un intervalle dont la limite inférieure est $a + \varepsilon$, ε étant un nombre positif aussi

[106] COR Narcisse et RIEMANN Jules, *op. cit.*, .p. 201.
[107] *Ibid.*, .p. 201.
[108] *Ibid.*, p. 203.
[109] *Ibid.*, p. 217.

petit que l'on veut (cela arrivera si y est définie dans un intervalle dont la limite inférieure est a) »[110]. Alors, y aura pour limite un nombre b par valeurs supérieures si, « quel que soit le nombre positif β, il existe un nombre positif α tel que, pour x compris entre a et $a+\alpha$, la valeur de y soit comprise entre $b-\beta$ et $b+\beta$ »[111]. La limite en a par valeurs inférieures est définie de façon semblable en considérant des intervalles de limite supérieure $a-\varepsilon$ et, si ces deux limites sont égales à un même nombre b, ils l'appellent « limite de y pour x tendant vers a »[112].

Les théorèmes sur les limites de somme, produit, quotient de fonctions, ainsi que sur la limite de la racine $n^{\text{ème}}$ d'une fonction sont démontrés avant d'aborder la continuité. Cor et Riemann définissent d'abord la continuité à droite et la continuité à gauche, une fonction étant continue si elle est continue à droite et à gauche et donc,

> une fonction $f(x)$ définie dans un intervalle (a, b) est dite continue dans l'intervalle (a, b) lorsqu'elle est : 1° continue pour toute valeur de x comprise entre a et b ; 2° continue à droite pour $x=a$; 3° continue à gauche pour $x=b$.[113]

Il faut remarquer que le manuel de Cor et Riemann est le premier que nous analysons dans cette thèse à exposer ces notions de continuité à gauche et à droite.

Ils démontrent ensuite les théorèmes sur la continuité des somme, produit, quotient de fonctions continues et sur la continuité de la racine $n^{\text{ème}}$ d'une fonction continue, puis ce qu'ils nomment « théorème de Cauchy », c'est-à-dire le *théorème des valeurs intermédiaires*. La démonstration de ce théorème utilise des suites adjacentes dont ils démontrent la convergence en utilisant le théorème démontré précédemment sur la convergence d'une suite croissante majorée, ou décroissante minorée. Rappelons que Tannery ne démontrait pas, dans son *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, la convergence des suites adjacentes, propriété qu'il considérait comme évidente.

Après avoir appliqué le *théorème des valeurs intermédiaires* pour démontrer que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine, Cor et Riemann démontrent qu'une

[110] *Ibid.*, p. 220.
[111] *Ibid.*, p. 220.
[112] *Ibid.*, p. 221.
[113] *Ibid.*, p. 243.

fonction continue sur un intervalle (a, b) atteint ses bornes précisant : « cette proposition nous servira dans le chapitre VI pour établir le théorème de Rolle »[114].

Ils définissent ensuite la notion de fonction croissante ou décroissante sur un intervalle, puis terminent le chapitre par la « représentation graphique de la marche d'une fonction continue ». Même si cette ligne, « tracée avec soin, […] rend intuitif le sens de variation de $f(x)$ »[115], leur introduction aux notions fondamentales de l'analyse est, comme nous venons de la voir, purement analytique, bien dans l'esprit de l'ouvrage de Tannery de 1886.

Les fonctions usuelles du programme de la classe de mathématiques élémentaires (fonctions polynômes du premier et second degré, quotients de telles fonctions) sont ensuite étudiées d'une façon élémentaire.

Le chapitre suivant est consacré aux « Fonctions exponentielle, logarithmique et circulaire ». Signalons la démonstration de la continuité de ces fonctions. Celle de la continuité de la fonction logarithmique est généralisée pour démontrer la continuité de la fonction inverse d'une fonction définie dans un intervalle (a, b), « variant constamment dans le même sens […], continue sur cet intervalle »[116]. La continuité d'une fonction de fonction, c'est-à-dire de la composée de fonctions continues, est également démontrée.

Utilisant la définition des limites par valeurs inférieures ou par valeurs supérieures, le dernier chapitre, intitulé « Des dérivées » introduit les notions de dérivée à droite et à gauche, une fonction étant dérivable en a lorsque ses dérivées à gauche et à droite coïncident. Nous avons vu que Tannery introduisait ces notions dans *son Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*. Si une fonction dérivable est « nécessairement continue », Cor et Riemann n'évoquent pas l'existence de fonctions continues non dérivables. L'interprétation géométrique qui suit la définition considère les positions limites MT et MT' des droites MN et MN' joignant le point M d'abscisse a a des points N et N' d'abscisses $a + h$ avec h positif puis négatif obtenues lorsque la fonction est dérivable à gauche et à droite, et conclut, lorsque la fonction est dérivable : « alors les droites MT, MT' sont confondues, et la et la ligne CMC' *admet une tangente TT' au point M* »[117] (figure 3 ci-dessous). Ils ne considèrent pas la fonction

[114] *Ibid.*, p. 253.
[115] *Ibid.*, p. 259.
[116] *Ibid.*, p. 302.
[117] *Ibid.*, p. 387.

comme dérivable à gauche ou à droite lorsque la limite du rapport des accroissements est infinie.

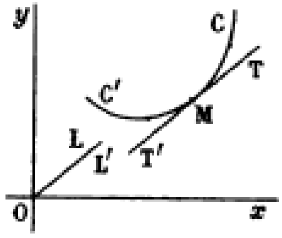


Figure 18 : interprétation géométrique de la dérivée dans le *Traité d'algèbre élémentaire* de Cor et Riemann

Les démonstrations du « Théorème de Rolle » et de la « Formule des accroissements finis » suivent cette interprétation géométrique. Cette « formule » est interprétée géométriquement puis utilisée pour démontrer le lien entre signe de la dérivée et sens de variation de la fonction sur un intervalle et rechercher les extrema.

Les différents théorèmes du programme de l'enseignement moderne, ainsi que ceux qui ont été au programme du concours d'admission à Saint-Cyr de 1890 à 1896, figurent dans le manuel. Cor et Riemann y ajoutent les dérivées des fonctions exponentielle et logarithmique, la dérivation de la fonction inverse, les dérivées des fonctions circulaires inverses, et la dérivée d'une fonction de fonction.

Parmi les exemples et les exercices proposés par Cor et Riemann, nous trouvons des études de fonctions au programme du baccalauréat moderne. Nous trouvons aussi de nombreux exercices d'un niveau bien supérieur aux exigences de ce baccalauréat, mais aussi à ceux donnés aux oraux de Saint-Cyr, dont nous avons vu quelques exemples. Nous en citerons deux :

> 1. Soit y la fonction égale à $x^2 \, sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ et à 0 pour $x = 0$. 1° Pour quelles valeurs de x est-elle continue ? 2° Pour quelles valeurs de x a-t-elle une dérivée ? 3° Pour quelles valeurs de x cette dérivée est-elle continue ?
>
> 11. Calculer la dérivée de la fonction :
>
> $$\arcsin\left(u\sqrt{1-v^2} - v\sqrt{1-u^2}\right),$$
>
> où u et v sont deux fonctions de x qui admettent des dérivées u' et v'.[118]

[118] *Ibid.*, p. 411-412.

7 – Conclusion

La théorie des fonctions dérivées est introduite dans les programmes de l'enseignement moderne dans un contexte de crise pour l'enseignement des mathématiques. Pour les représentants des disciplines scientifiques, les mesures de la Commission Simon, même en partie annulées par l'arrivée de Bourgeois au ministère de l'Instruction publique, se conjuguent à l'effet redouté de la réforme du baccalauréat sur l'enseignement scientifique. La suppression du cours préparatoire, vestige de la réforme de la bifurcation, menace la filière qui conduisait au baccalauréat ès sciences. La promotion de l'enseignement moderne voulue par Bourgeois en 1891 est l'occasion pour eux d'inscrire cette théorie au programme de la classe de 1^e^ Sciences. Réservée jusqu'alors aux élèves de mathématiques spéciales et de quelques classes préparatoires, elle donne du lustre à ce nouvel enseignement qui conduit à ce qui doit devenir « le vrai baccalauréat scientifique et moderne ». De plus, enseigner une théorie qui vient juste d'être inscrite au concours d'admission à saint-Cyr, l'école du gouvernement qui offre le plus grand nombre de places, ne pouvait semble-t-il que drainer vers le moderne un nouveau public.

Avec un recul de plus quarante ans sur l'enseignement des dérivées en mathématiques spéciales, les éléments de cette théorie présentée dans une approche géométrique, paraissaient à la portée des élèves de cet âge. La restriction imposée par le programme à l'étude des variations de fonctions polynômes et de fractions rationnelles simples limitait les risques d'une telle introduction. Nous retrouvons une nouvelle fois, comme ce fut le cas pour le programme d'admission à l'école polytechnique, l'extrême prudence avec laquelle cette théorie est introduite à un niveau inférieur. Cette prudence est d'autant plus de mise que les rédacteurs du programme n'ont cette fois aucun recul : Ils ne peuvent pas s'appuyer sur des enseignements préexistants. Cette introduction est une complète nouveauté. Ce n'est que la deuxième fois que nous la constatons depuis le début de cette thèse. La première a eu lieu quelques années plus tôt, lorsque le Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique a introduit la méthode infinitésimale et l'intégrale définie au programme d'admission.

À la suite de cette introduction, nous retrouvons aussi, du côté des auteurs de manuels, la même démarche que celle constatée chez leurs prédécesseurs, une quarantaine d'années plus tôt, pour l'enseignement en mathématiques spéciales : ils vont au-delà des exigences du programme. Et, comme pour leurs prédécesseurs, dans les notions hors programme qu'ils développent, on y lit, tout autant que l'impact du concours d'admission à Saint-Cyr, la volonté pour un professeur de mathématiques de présenter une théorie de la façon la plus rigoureuse possible. En cela leurs manuels se situent dans la lignée des ouvrages de mathématiques spéciales qui paraissent à cette époque.

Les manuels pour la classe de mathématiques élémentaires sont contraints, jusqu'en 1897, par le programme de Saint-Cyr d'exposer eux aussi la théorie des fonctions dérivées. Mais, la perspective dans laquelle Neveu et Bourlet l'abordent est bien différente. Neveu sépare clairement les programmes de mathématiques élémentaires et la théorie des fonctions dérivées tandis que Bourlet a pour objectif d'imposer cette théorie en classe de mathématiques élémentaires. Derrière l'ouvrage de Bourlet il y a probablement l'intention de Darboux et Tannery de réussir dans la pratique ce qu'ils n'ont pas pu obtenir au niveau institutionnel. Leur demande rejetée, lors d'une réunion du CSIP, de compléter le programme de mathématiques élémentaires avait sans doute pour objectif d'y inclure, entre autre, cette théorie.

L'ouvrage de Cor et Riemann paraît après la suppression de la théorie des dérivées au programme d'admission à Saint-Cyr. Il s'adresse aux élèves de la classe de mathématiques élémentaires et a, quant à lui, une toute autre ambition. Il se rapproche des critères les plus exigeants de l'époque en matière d'introduction de la théorie des fonctions dérivées. S'il nous paraît aujourd'hui encore d'une rigueur excessive pour ce niveau d'enseignement, il semblait à ses auteurs la meilleur voie pour enseigner une théorie mathématique : ne rien passer sous silence pour des commençants plutôt que de laisser s'installer des confusions.

Plus encore que celui de Darboux, ce manuel montre à quel point l'enseignement de Tannery à l'École normale supérieure a marqué toute une génération d'élèves. Les propos tenus en 1835 par Hadamard, lors de la célébration de son 70e anniversaire par la communauté scientifique française, le confirment. Hadamard était de la promotion de 1884, celle d'après Cor et Riemann. Les phrases suivantes, prononcées vers la fin d'une brillante carrière ne peuvent être suspectées d'être des éloges académiques de convenance :

> Les jeunes gens d'aujourd'hui ne peuvent se douter de ce que fut pour notre génération la lumineuse figure de Tannery. Ils ne peuvent pas s'en douter parce

> qu'il ne reste pas de lui une production scientifique personnelle. Mais, pour nous, ce fut le guide scientifique, intellectuel, moral.[119]

Il ne fait donc pas de doute que, pour Cor et Riemann, cet ouvrage épousait les conceptions de leur maître en matière d'enseignement des mathématiques élémentaires, conceptions qu'ils avaient à cœur de propager.

Il nous semble cependant douteux que ce manuel ait pu servir de base à un cours de mathématiques élémentaires. Il n'en va pas de même pour ceux de Bourlet et de Neveu, d'un abord beaucoup plus aisé. Ces deux derniers ouvrages témoignent probablement d'un enseignement de la théorie des dérivées qui avait commencé de s'installer en mathématiques élémentaires. Nous n'avons pas de preuve formelle que des professeurs de mathématiques élémentaires aient enseigné cette théorie en algèbre. En revanche, une lettre d'Étienne Wallon atteste de cet enseignement en mécanique.

La mécanique était une partie du programme de mathématiques. Elle a parfois, d'après le témoignage suivant, été enseignée par des professeurs de physique. En 1914, Wallon est professeur au lycée Janson de Sailly. Il préside de l'Union des physiciens. Ses propos sont extraits d'une lettre citée par Charles Bioche dans son rapport sur « L'organisation de l'enseignement du calcul des dérivées et des fonctions primitives dans les lycées de France et sur les résultats obtenus » qu'il présentera en 1914 à la Conférence de Paris. Il s'agit d'une conférence intermédiaire en les V^e^ et VI^e^ Congrès internationaux des mathématiciens. Le V^e^ congrès a eu lieu en 1912 à Rome. Le VI^e^ devait avoir lieu en 1916 à Stockholm. Il n'aura pas lieu à cause de la guerre. Bioche est professeur de mathématiques élémentaires au lycée Louis-le-Grand, et délégué à la Commission internationale de l'enseignement mathématique. Selon Bioche, Wallon écrivait :

> Nous nous sommes trouvés d'accord pour penser que l'introduction dans l'enseignement secondaire des notions élémentaires de calcul différentiel et intégral, nous avait rendu service et pour en souhaiter le maintien. Tel de nos collègues qui est, en même temps que d'un cours dans un lycée de Paris, chargé dans un lycée de jeunes filles de conférences complémentaires, nous signalait qu'à ces jeunes filles il était obligé, pour les besoins de son enseignement, de donner ces notions élémentaires. Et tous ceux d'entre nous qui ont eu autrefois à faire, en Mathématiques élémentaires par exemple, quelques leçons de

[119] HADAMARD Jacques, cité dans MAZ'A Vladimir Gilelevič et SHAPOSHNIKOVA Tatyana, *Jacques Hadamard, un mathematicien universel*, traduction Gérard TRONEL, Les Ulis, EDP Sciences, 2005, p. 28.

> mécanique se trouvaient dans la même obligation : seulement il leur arrivait souvent de ne pas appeler les choses par leur nom.[120]

Un tel témoignage, l'existence des manuels que nous avons analysés, et d'autres encore que nous n'avons pas retrouvés[121], les débats dans les journaux mathématiques que nous aborderons au prochain chapitre, sont autant d'indices qui vont dans le sens d'un enseignement de cette théorie en mathématiques élémentaires durant la dernière décennie du XIXe siècle. Le manuel de Cor et Riemann, en franchissant une étape supplémentaire dans la présentation rigoureuse de cette théorie confirme, selon nous, le développement de cet enseignement.

Les manuels de Bourlet, Neveu et Cor et Riemann ont, à des titres divers, contribué à installer la théorie des fonctions dérivées dans l'enseignement secondaire durant une décennie où elle se situait dans un entre-deux, absente du programme de la classe de mathématiques élémentaires mais inscrite dans celui de l'enseignement moderne et, pour quelques années, au programme d'admission à Saint-Cyr.

---

[120] WALLON Étienne, cité par BIOCHE Charles, « L'organisation de l'enseignement du calcul des dérivées et des fonctions primitives dans les lycées de France et sur les résultats obtenus », *L'Enseignement Mathématique*, 16e année, 1914, p. 288

[121] Nous évoquons au prochain chapitre le *Cours d'algèbre élémentaire conforme aux derniers programmes de l'enseignement classique et de l'enseignement moderne,* de J. F., édité par la librairie Mame à Tours.

Chapitre 8 : Vers une généralisation de l'enseignement de la théorie des fonctions dérivées dans un enseignement secondaire réformé (1898-1902)

À la suite des réformes de 1890-1891, il existe en France deux baccalauréats scientifiques. Le premier, désigné sous le nom de baccalauréat « Lettres-Mathématiques » est obtenu à l'issue de la classe de mathématiques élémentaires accessible aux élèves de l'enseignement classique et de l'enseignement moderne. Le second, le baccalauréat « Lettres-Sciences » est attribué à des élèves issus exclusivement de l'enseignement moderne, après la classe de 1^{e} Sciences qui est la classe terminale de cet ordre d'enseignement.

La théorie des dérivées a été inscrite en 1891 au programme de la classe de 1^{e} Sciences sans qu'elle le soit à celui de la classe de mathématiques élémentaires. Néanmoins, dès 1896, soit trois ans seulement après la délivrance des premiers baccalauréats modernes, nous avons vu au chapitre précédent que des manuels développant cette théorie ont été publiés à destination de la classe de mathématiques élémentaires. La présentation qu'ils proposaient de cette notion, les applications qu'ils en faisaient, dépassaient de loin les exigences du programme de l'enseignement moderne.

La réforme voulue par le Ministre de l'Instruction publique, Léon Bourgeois, en 1891, si elle avait rehaussé le prestige l'enseignement moderne en inscrivant cette théorie dans son programme, n'avait pas réglé les problèmes de l'enseignement secondaire. Selon les observateurs de l'époque, ce dernier traverse une crise sérieuse qui a même été aggravée par la création de l'enseignement moderne. La progression de l'enseignement confessionnel au détriment de l'enseignement public est, pour certains, la manifestation la plus sensible de cette crise. Des projets de loi sont déposés à la Chambre des députés pour remettre en cause la loi Falloux de 1850 qui organisait la liberté d'enseignement. La Commission de l'enseignement de cette même Chambre se saisit du problème et obtient l'autorisation, en décembre 1898, de procéder à une enquête sur l'enseignement secondaire. D'une ampleur sans précédent, elle débouchera sur la réforme de 1902 qui verra la généralisation de la théorie des dérivées dans les programmes de l'enseignement secondaire. Cette période a fait l'objet de nombreux travaux d'historiens de l'enseignement et d'historiens des sciences[1]. Notre objectif dans ce chapitre est de comprendre comment s'articule cette extension de l'enseignement des éléments de l'analyse avec la réforme institutionnelle de 1902.

Nous avons déjà vu comment Terquem, avant 1851, militait dans les *NAM* pour l'introduction du calcul infinitésimal au concours d'admission à l'École polytechnique. Nous verrons de même, à travers les articles d'une presse mathématique qui s'est diversifiée, qu'il se dégage, en cette fin de XIX^{e} siècle, un consensus en faveur de l'introduction de la notion de dérivée dans les « élémentaires ». Nous montrerons aussi, qu'aux arguments mathématiques qui plaident en faveur de la généralisation de l'enseignement de l'analyse, des personnalités importantes de la communauté scientifique, Charles Méray, Charles-Ange Laisant et Jules Tannery ajoutent des arguments d'ordre économique, industriel et social.

En y inscrivant la théorie des dérivées, le programme de la classe de 1^{e} Sciences avait été pensé pour attirer un nouveau public vers l'enseignement moderne et faire du baccalauréat « Lettres-Sciences » le « véritable baccalauréat scientifique ». Les comptes rendus de la Commission Ribot, les statistiques commandées au Ministère de l'Instruction publique par cette Commission, ainsi que celles sur le baccalauréat publiées en 1919, nous permettront d'apprécier les résultats de cette réforme. En précisant l'importance réelle de la classe de 1^{e} Sciences et de son baccalauréat au tournant du XIX^{e} siècle, nous pourrons évaluer l'impact de la réforme de 1891 sur les programmes de 1902.

À la lumière de cette étude, nous analyserons pour terminer ces programmes, afin de comprendre comment ils se rattachent à ceux de 1891, mais aussi, de façon plus générale, en

[1] En plus des sources qui retracent l'histoire de l'enseignement secondaire, déjà signalées au début de cette partie, il nous faut ajouter concernant l'enquête de la Commission de l'enseignement (que nous désignerons comme la Commission Ribot) et la réforme de 1902 : KAHN Pierre, « L'influence du positivisme dans la réforme de l'enseignement secondaire de 1902 », *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, t. 49, « Études sur l'histoire de l'enseignement des sciences physiques et naturelles », textes recueillis par Nicole HULIN, 2001, p. 181-194, PROST Antoine, « De l'enquête à la réforme. L'enseignement secondaire des garçons de 1898 à 1902 », *Histoire de l'éducation*, N° 119, Paris, INRP, 2008, p. 29-80, dans l'ouvrage, *Lycées, lycéens, lycéennes, deux siècles d'histoire*, Paris, INRP, 2005, les contributions de CONDETTE Jean-François, « La crise des lycées de garçons à la fin du XIXe siècle. Le point de vue et les propositions des recteurs d'académie », p. 427-441, de CLASTRES Patrick, « L'internat public au XIXe. Question politique ou pédagogique ? », p 397-413. Et, à propos de l'enseignement scientifique, dans ce même ouvrage : d'ENFERT Renaud, « L'enseignement mathématique dans le primaire et le secondaire au début du XXe siècle : vers une culture commune ? », p 247-256, BELHOSTE Bruno, « L'enseignement secondaire français et les sciences au début du XXe siècle. La réforme de 1902 des plans d'études et des programmes », *Revue d'histoire des sciences*, t. 43, 1990, p. 371-400, et HULIN Nicole, *L'enseignement et les sciences. L'exemple français au début du XXe siècle*, Paris, Vuibert, 2005.

les mettant en perspective avec les résultats obtenus au cours de cette thèse. Nous verrons comment leur fabrication s'insère dans le processus que nous suivons depuis la réforme de 1851.

1 – La théorie des fonctions dérivées dans le secondaire : un enseignement nécessaire

Durant la dernière décennie du XIX^e siècle, la réforme des programmes et des méthodes d'enseignement dans le secondaire est une question d'actualité dont les journaux mathématiques se font l'écho. Le sujet n'est pas neuf mais les réformes de 1890-1891 étudiées au chapitre précédent l'ont relancé[2]. Tous les domaines des mathématiques sont concernés. La géométrie qui, dans les programmes, occupe la place la plus importante, est le domaine le plus fréquemment traité. Les méthodes d'introduction des nombres fractionnaires en arithmétique, des nombres négatifs en algèbre sont deux autres sujets souvent rencontrés. Et, parmi les questions débattues qui sont au cœur de notre problématique, nous trouvons celles de la définition des nombres irrationnels, de l'introduction de la notion de fonction, et bien sûr le problème de l'enseignement de la théorie des dérivées en mathématiques élémentaires.

La parution de manuels qui innovent dans leur approche de l'enseignement des mathématiques élémentaires est bien souvent, pour les auteurs des recensions dans les journaux mathématiques, l'occasion de donner leur avis sur ce que sont et ce que devraient être les programmes et les méthodes du secondaire. Nous l'avions observé au chapitre 3, à propos des interventions de Terquem et de Finck dans les *NAM*. Les auteurs sont à présent plus nombreux car l'offre éditoriale qui s'adresse aux professeurs et élèves de l'enseignement secondaire s'est considérablement diversifiée à la fin de XIXe siècle.

Aux *NAM* qui dominaient ce paysage éditorial, se sont ajoutés un certain nombre de titres dont les deux principaux sont : le *Journal de mathématiques élémentaires* (*JME*) fondé en 1877 par Justin Bourget, qui devient *Journal de mathématiques élémentaires et spéciales* en 1880

[2] Voir BKOUCHE Rudolf, « De la modernité dans l'enseignement des mathématiques », dans Évelyne BARBIN et Marc MOYON (dir.), *Les ouvrages de mathématiques dans l'Histoire. Entre recherche, enseignement et culture*, Limoges, Presses Universitaires de Limoges, 2013, p. 205-216 et RENAUD Hervé, « Academics, textbooks and reform of mathematics education in secondary French schools (1890-1905) », dans Kristin BJARNADOTTIR, Fulvia FURINGHETTI, Johan PRYTZ et Gert SCHUBRING (éditeurs), *Proceedings of the Third International Conference on the History of Mathematics Education*, Uppsala University, 2015, p. 327-343.

qui, à partir de 1882, se scinde en *Journal de mathématiques élémentaires* et *Journal de mathématiques spéciales* (*JMS*); et la *Revue de mathématiques spéciales* (*RMS*) fondée en 1890 par Henry Vuibert.

Parmi leurs objectifs, tous ces journaux ont celui de promouvoir de nouvelles méthodes et de nouveaux programmes dans l'enseignement secondaire. Ce que nous avons constaté pour les *NAM* est vrai pour les autres. Ainsi, en 1877, Justin Bourget, directeur des études à l'École préparatoire Sainte-Barbe, situait le *JME* qu'il fondait dans la lignée des *NAM*, et écrivait :

> on connaît toute l'importance des services rendus à l'enseignement par les nouvelles Annales de Mathématiques que M. Gerono a fondées. C'est en partie sous l'influence de ce journal que les cours de mathématiques spéciales se sont peu à peu transformées et perfectionnées.[3]

De même, Eugène Humbert, professeur en classe de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand, lorsqu'il remplace Boleslas Niewenglowski comme rédacteur de la *RMS* en 1895 écrit, à propos des articles à visée pédagogique que publiera la revue :

> Ce seront des articles pédagogiques, tendant, soit à d'heureuses modifications des programmes, soit à préconiser l'emploi de nouveaux systèmes d'enseignement, non encore appliqués, et qui seront ainsi livrés à la critique de tous.[4]

C'est donc dans ce cadre que s'expriment les auteurs des textes que nous avons analysés et dont nous proposons une synthèse.

À ces journaux, il faut ajouter la revue *L'Enseignement mathématique* fondée en 1899. Nous avons vu, au chapitre précédent, l'objectif beaucoup plus général que s'étaient fixé ses rédacteurs, Charles-Ange Laisant et Henri Fehr. Nous avions en particulier noté leur volonté d'agir sur les méthodes et les programmes d'enseignement. Parmi les articles de fond que publie cette revue, le long article « L'enseignement des mathématiques » qui paraît en 1901 mérite un traitement particulier. Il reprend des extraits de l'étude de Charles Méray, « Considérations sur l'enseignement des mathématiques » publiée en 1892 dans la *Revue bourguignonne de l'enseignement supérieur*. Sept ans après une première publication dans une revue locale, cette nouvelle publication dans une revue internationale a clairement pour

---

[3] BOURGET Justin, « Avant-propos », *Journal de mathématiques élémentaires*, t. 1, 1877, p. 4.
[4] HUMBERT Eugène, « Supplément au N°5 de la Revue de mathématiques spéciales », *Revue de mathématiques spéciales,* t. 3, 1894-95 et 1895-96.

objectif de diffuser les idées d'un mathématicien redécouvert en cette fin de XIXe siècle, à un moment où se prépare une réforme de l'enseignement secondaire.

L'enquête organisée en 1898, sur laquelle s'appuieront les rédacteurs de cette réforme, implique des personnalités et des institutions extérieures à l'enseignement secondaire. Les Conseils généraux et les Chambres de commerce sont invités à donner leur avis. Ce contexte explique probablement que la problématique de l'enseignement des mathématiques dans le secondaire déborde du cadre habituel des journaux mathématiques. En 1901, Jules Tannery, fait paraître dans la *Revue de Paris* un long article intitulé « Les mathématiques dans l'enseignement secondaire ». Nous avons déjà mis largement en évidence le rôle de Tannery dans l'enseignement secondaire des mathématiques. Il écrit ici dans une revue littéraire fondée en 1829 par le journaliste et homme politique Louis-Désiré Véron pour concurrencer la *Revue des deux mondes*. Elle lui offre une tribune beaucoup plus large qui dépasse le cercle des mathématiciens et des enseignants à un moment où la réforme de l'enseignement secondaire est une question politique de premier plan.

Mais la parution d'un article sur l'enseignement secondaire des mathématiques dans une revue concurrente de la *Revue des deux Mondes* est aussi à replacer dans le cadre de la polémique qui a éclaté en 1895 à propos de la « faillite de la science ». Cette année-là, Fernand Brunetière avait publié dans la *Revue des deux mondes* qu'il dirigeait, un article qui accusait la science d'avoir failli[5]. Brunetière est un spécialiste de la littérature du XVIIe siècle, membre de l'Académie française. Il affirmait dans son article que la connaissance avait progressé mais que les progrès matériels n'avaient pas suivi, et concluait que la science ne pouvait plus « revendiquer […] le gouvernement de la vie présente »[6]. Relayé par le journal *Le Figaro*, l'article avait provoqué une polémique à laquelle avaient notamment participé le chimiste Marcellin Berthelot, le mathématicien Paul Painlevé et le romancier Émile Zola. En 1901, cette polémique n'est pas éteinte.

[5] Voir à ce sujet THUILLIER Pierre, « Un débat de fin de siècle : la « faillite de la science » », *La Recherche*, n° 234, 1991, SICARD Monique, *L'année 1895, l'image écartelée entre voir et savoir*, Les empêcheurs de penser en rond, 1994 et RASMUSSEN Anne, « Critique du progrès, « crise de la science » : débats et représentations du tournant du siècle », *Mil neuf cent*, n° 14, 1996, p. 89-113.
[6] BRUNETIÈRE Fernand cité par SICARD Monique, *op. cit.*, p. 116.

Enfin nous nous attacherons aux conceptions de l'enseignement exprimées par Laisant. Il publie en 1898 un ouvrage intitulé *La Mathématique. Philosophie. Enseignement*[7]. Nous avons déjà souligné au chapitre 6 le rôle de ce mathématicien qui à la fin du XIXe est rédacteur de *L'Intermédiaire des mathématiciens*, des *NAM*, et de *L'Enseignement mathématique*. Comme les articles de Méray et Tannery, ce livre alimente un débat sur l'enseignement secondaire des mathématiques et aborde la question de l'introduction de l'analyse en mathématiques élémentaires.

1 – 1 Inscrire la théorie des dérivées au programme des « élémentaires » : des arguments mathématiques

Nous avons vu que la notion de fonction avait été introduite en classe de 1e Sciences de l'enseignement moderne en 1891. En 1892, Laisant et Élie Perrin, publient des *Premiers principes d'algèbre,* destinés selon le titre aux élèves des classes de troisième et de seconde de l'enseignement moderne, de l'enseignement primaire supérieur, des écoles normales primaires et des candidats aux école de commerce. Nous avons peu de renseignements sur Perrin. La Société mathématique de France dont il est membre indique qu'il est professeur de mathématiques[8]. Il ne semble pas avoir été élève de l'École normale supérieure ou de l'École polytechnique. Il ne figure pas parmi les agrégés de mathématiques, ni parmi les personnes ayant soutenu une thèse de mathématiques.

La recension de cet ouvrage, est signée de Émile Lemoine dans le *JME* de 1892. Polytechnicien, ingénieur civil à Paris, Lemoine est l'un des cofondateurs de la géométrie du triangle[9]. Il est proche de Laisant qu'il a rencontré à l'École polytechnique. Son compte rendu, très laudateur d'un « nouveau livre dans toute l'acceptation élogieuse du mot »[10], insiste sur

> une innovation qui [lui] semble fort utile : les auteurs, au commencement du calcul par équations (12e leçon) n'ont pas craint de donner la notion générale de

[7] Sur Laisant, voir AUVINET Jérôme, *Charles-Anges Laisant : itinéraires et engagements d'un mathématicien, d'un siècle à l'autre (1841-1920),* Thèse de doctorat, Université de Nantes, Nantes, 2011.
[8] Voir l' « État de la Société mathématique de France », *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 31, 1903, p. XI.
[9] Sur Lemoine et la géométrie du triangle voir ROMERA-LEBRET Pauline, *La nouvelle géométrie du triangle : passage d'une mathématique d'amateurs à une mathématique d'enseignants (1873-1929*), Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2009.
[10] LEMOINE Émile, « Premiers principes d'algèbre […] par C.A. LAISANT et ÉLIE PERRIN », *Journal de mathématiques élémentaires*, 4e série, t. 1, 1892, p. 184.

> l'idée de fonction, idée qui formant le fond même de l'analyse, est cependant si simple et qu'on a, d'habitude le grand tort de proscrire des éléments.[11]

Cette notion de fonction, notion première du calcul différentiel et intégral depuis Euler, a donc sa place, selon les auteurs et Lemoine, dans les éléments d'algèbre, à l'occasion de la résolution des équations. Ceci la place en classe de seconde de l'enseignement moderne, soit un an avant le programme officiel. Il ne fait guère de doute que les auteurs de l'ouvrage comme celui de l'article lui réservent la même place dans l'enseignement classique, ce qui la placerait là aussi en seconde.

Mais, en cette fin de XIX^{e} siècle, pour les mathématiciens, l'analyse est fondée sur la construction des nombre incommensurables (ou irrationnels suivant les auteurs). En 1893, l'année précédant les *Leçons d'arithmétique* de Tannery, Eugène Humbert a publié un *Traité d'arithmétique* qui propose une construction des nombres irrationnels. Comme nous l'avons signalé au chapitre précédent, Humbert est un ancien élève de l'École normale supérieure, de la promotion de 1878. Tannery a rédigé une préface pour cet ouvrage qui s'adresse aux élèves de mathématiques élémentaires, aux candidats aux baccalauréats des enseignements classique et moderne, à l'Institut agronomique et aux grandes écoles du Gouvernement.

Dans la préface, Tannery s'insurge contre le « véritable scandale » qu'est l'introduction des nombres irrationnels en arithmétique car, « c'est là […] que sont condensées toutes les difficultés de l'idée de limite, de convergence, de continuité »[12]. S'il ne précise pas sa pensée, nous pouvons supposer qu''il évoque ici les définitions habituellement données dans ces ouvrages à partir de notion de racine carrée. Il remercie Humbert d'avoir essayé d'apporter le plus de clarté possible à cette notion.

L'introduction proposée par Humbert n'est pas purement arithmétique contrairement à celle de Tannery dans ses *Leçons d'arithmétique*. Il part de la notion de longueur pour définir la notion de limite puis de nombre irrationnel, avant de définir les opérations sur les nombres irrationnels.

Laisant rédige un compte rendu de ce manuel pour le *JME*. Il regrette qu'on « exige aujourd'hui des détails et une rigoureuse précision, peut-être en disproportion avec la

[11] *Ibid.*, p. 184.

[12] TANNERY Jules, « Préface » dans Eugène HUMBERT, *Traité d'Arithmétique*, Paris, Nony, 1893, p. IV.

puissance intellectuelle moyenne des élèves », sur la définition des nombres incommensurables mais termine en affirmant que la méthode de Humbert lui semble « de beaucoup la meilleure, surtout au point de vue de l'enseignement »[13]. Il n'y a pas là le souhait, de voir figurer la définition d'un nombre irrationnel dans toute sa rigueur en mathématiques élémentaires. Cependant, la reconnaissance de la méthode de Humbert comme la plus acceptable en matière d'enseignement entérine l'introduction de ce fondement de l'analyse en mathématiques élémentaires.

La publication des *Leçons d'algèbre* de Bourlet, puis du *Traité d'algèbre* de Cor et Riemann, sont l'occasion de s'exprimer pour les partisans d'une introduction de la théorie des dérivées en mathématiques élémentaires.

Dans la *RMS*, Humbert, rédacteur de la revue, se charge de la recension de l'ouvrage de Bourlet. À propos de l'emploi de la méthode des dérivées, il écrit :

> Je suis absolument de l'avis de M. Bourlet sur ce point : il y a tout intérêt pour les élèves à ce que les choses soient ainsi présentées, d'abord parce que cette méthode est plus simple au fond que les procédés artificiels employés d'ordinaire dans les classes de mathématiques élémentaires, ensuite parce que c'est une méthode générale dont ils feront constamment usage dans la suite.[14]

Humbert, reprend à son compte les arguments de simplicité et de généralité développés par Bourlet dans l' « Avertissement » des *Leçons d'algèbre*.

Dans la même revue c'est Henri Vogt qui signe la recension du *Traité d'algèbre élémentaire* de Cor et Riemann. Vogt est ancien élève de Tannery à l'École normale supérieure, de la promotion de 1881. Que ce manuel, qui expose les fondements de l'analyse suivant les critères les plus exigeants de l'époque en termes de rigueur, soit parfaitement adapté à la classe de mathématiques d élémentaires ne fait pour lui aucun doute. Il écrit en effet à propos de cet ouvrage :

> Les auteurs du traité actuel ne craignent pas de faire appel, à propos des questions de limites, de fonction et de continuité, aux notions que l'on a l'habitude de donner dans les cours de Mathématiques spéciales ; mais ces

[13] LAISANT Charles-Ange, « E. Humbert. – Traité d'arithmétique », *Journal de mathématiques élémentaires*, 4e série, t. 2, 1893, p. 65. On peut d'ailleurs se demander si la précision en « disproportion avec la puissance intellectuelle des élèves » ne justifie pas que les manuels de Tannery et de Bourlet du « Cours de Darboux » ne soient pas recensés dans le *JME*.

[14] HUMBERT Eugène, « Leçons d'algèbre élémentaire par C. BOURLET », *Revue de mathématiques spéciales*, t. 4, 1896-1897 et 1897-1898, p. 32.

> notions, telles qu'elles sont présentées ici, sont accessibles à tout élève de Mathématiques élémentaires et lui sont même indispensables. Il vaut mieux donner sur ces points fondamentaux des explications précises, sans craindre les longueurs, que de laisser des confusions dans l'esprit de ceux qui approfondissent ces questions ; c'est ce que les auteurs de ce traité ont compris, et il faut les féliciter d'avoir insisté sur ces points délicats ; ils n'ont pas craint d'aller jusqu'aux dérivées pour traiter complètement la variation des fonctions […].[15]

Précisons que l'ouvrage de Bourlet est aussi l'objet d'un compte rendu dans les *NAM.* Très descriptif, l'article non signé laisse penser que l'auteur s'est plus référé aux indications de Bourlet dans la préface qu'il n'a réellement analysé le livre. Il reprend en effet les propos de celui-ci sans y apporter de commentaire.

Plus intéressante est la recension du livre de Cor et Riemann dans cette même revue. Elle est signée de Henri Padé, dont nous avons indiqué au chapitre précédent qu'il est un ancien élève de l'École normale supérieure, de la promotion 1883, et l'auteur des *Premières leçons d'algèbre élémentaire,* ouvrage publié en 1892. La spécificité de ce manuel, soulignée dans la préface rédigée par Tannery, résidait essentiellement dans une introduction purement arithmétique des nombres négatifs[16]. Un compte rendu sévère de sa méthode avait été publié dans le *JME* de 1894. Bien que les constructions des nombres négatifs n'entrent pas dans notre problématique, cet article nous intéresse ici car il montre bien l'opposition à un enseignement de mathématiques que nous qualifierons de *modernes* puisque l'auteur l'oppose à celui de « théories anciennes ». L'auteur débute ainsi son article :

> M. Padé s'est proposé de donner une nouvelle théorie des nombres négatifs. Quel reproche peut-on faire aux théories anciennes ? Il est regrettable que l'auteur ne le dise pas. Certaines d'entre elles étaient rigoureuses et cependant plus courtes. D'après le nouveau système, il faudrait aux élèves un volume entier pour apprendre les quatre premières règles.[17]

L'auteur termine l'article, avant de reproduire la table des matières, en écrivant que l'ouvrage a reçu, « en dépit de la critique légère que nous croyons devoir lui faire ici, de hautes

[15] VOGT Henri, « Traité d'algèbre par MM. N. Cor […] et J. Riemann », », *Revue de mathématiques spéciales*, t. 4, 1896-1897 et 1897-1898, p. 400.
[16] Sur cet ouvrage de Padé, voir GLIÈRE André-Jean, *op. cit*. Pour une biographie de Padé, consulter https://sites.google.com/site/rolandbrasseur/5---dictionnaire-des-professeurs-de-mathematiques-speciales , consulté le 30/08/2017.
[17] X., « Première leçons d'algèbre élémentaire – Nombres positifs et négatifs. – Opérations sur les polynômes, par Henri Padé […] », *Journal de mathématiques élémentaires*, 4e série, t. 1, 1892, p. 143.

approbations »[18]. La critique ne nous semble pas légère puisque c'est la majeure partie du texte qui est remise en cause. Quant aux hautes approbations, ce sont bien évidemment celles de Tannery dans la préface. S'il est courant que des comptes rendus d'ouvrages ne soient pas signés, il est rare qu'ils soient signés « X. » comme c'est le cas ici. Cela semble indiquer que la critique d'un livre ayant reçu de « hautes approbations » était malaisée. Un tel article avait sa place dans le *JME* où Gohierre de Longchamps défendait une ligne éditoriale opposée à cet enseignement *moderne.* Il avait notamment critiqué l'excès de rigueur du mathématicien belge Paul Mansion dans son *Résumé du cours d'analyse infinitésimale de l'Université de Gand*, écrivant en particulier : « il ne faut rien exagérer, et peut-être a-t-on été trop loin dans ces développements philosophiques concernant les notions premières de la limite »[19].

Lorsqu'il rédige le compte rendu du livre de Cor et Riemann, Padé est professeur de mathématiques élémentaires supérieures au lycée de Lille. Il est aussi chargé de conférences à la faculté des sciences de Lille et donne des cours à l'Institut industriel du Nord. Il émet un certain nombre de critiques sur l'ouvrage de Cor et Riemann. Il juge en particulier qu'ils ont abordé de façon trop sommaire les sujets qu'il traitait dans ses *Premières leçons d'algèbre élémentaire.* Cependant, il y voit « une fraîcheur, un rajeunissement, des choses qui vous enchantent »[20]. En particulier, écrit-il, « nous entrons dans la théorie des fonctions, avec les notions précises de limite et de continuité, le théorème de Cauchy et l'étude directe des fonctions rationnelles »[21]. Et de résumer :

> Quoi qu'il en soit, celui qui comparera cette exposition des principes du calcul algébrique avec ce qui s'écrivait, sur le même sujet, il y a seulement quelques années, sera frappé du chemin parcouru et des progrès véritablement considérables qui ont été réalisés et qui ont leur origine dans les profondes leçons faites à l'École normale par M. Jules Tannery.[22]

Les ouvrages de Tannery, Bourlet, Cor et Riemann ne font l'objet d'aucun compte rendu dans le *JME*. On peut se demander si cela correspond à la ligne éditoriale de cette revue dirigée jusqu'en 1897 par Gohierre de Longchamps. Sans doute était-il difficile pour un professeur de

---

[18] *Ibid.*, p. 143.
[19] LONGCHAMPS (Gohierre de) Gaston, « Résumé du Cours d'Analyse infinitésimale de l'Université de Gand par P. Mansion », *Journal de Mathématiques spéciales*, 2e série, tome I, Paris, Delagrave, 1887, p. 280.
[20] PADÉ Henri, « Traité d'algèbre élémentaire, par MM. Cor et Riemann », *Nouvelles annales de mathématiques*, 3e série, t. 17, 1898, p. 140.
[21] *Ibid.*, p. 140.
[22] *Ibid.*, p. 142.

mathématiques spéciales de se livrer à de telles critiques d'ouvrages écrits par des collègues. Mais, concernant l'introduction de la théorie des fonctions dérivées en mathématiques élémentaires, son point de vue est le même que ceux que nous venons de voir. En effet, dans sa recension en 1897 du *Cours d'algèbre élémentaire conforme aux derniers programmes de l'enseignement classique et de l'enseignement moderne,* dont il ne donne que les initiales de l'auteur, J. F.[23], Gohierre de Longchamps écrit : « j'ai vu avec plaisir que l'auteur maintenait l'introduction des dérivées et les premières notions de Géométrie analytique, dans l'ensemble des connaissances qu'on doit aborder dans le cours de mathématiques élémentaires »[24].

L'étude de la réception des ouvrages d'algèbre dans les journaux mathématiques indique qu'il se dégage un consensus en faveur de l'introduction de la théorie des fonctions dérivées en classe de mathématiques élémentaires. La généralité de cette méthode pour l'étude des variations et la recherche des extrema est mise en avant. Sur la théorie à mobiliser pour parvenir aux théorèmes d'application des dérivées, la ligne de partage passe clairement, comme nous l'avons vu au chapitre 6 à propos des enseignements en mathématiques spéciales, entre les partisans de la construction la plus rigoureuse possible, qui ne laisse aucune difficulté dans l'ombre, et les partisans d'une ligne plus intuitive fondée sur l'intuition géométrique. Les plus jeunes des auteurs de ces articles, professeurs dans l'enseignement secondaire et souvent eux-mêmes auteurs de manuels, anciens élèves de Tannery à l'École normale supérieure, se placent du côté de la rigueur.

1 – 2 Inscrire la théorie des dérivées dans les « élémentaires » : l'argument scientifique, social et industriel

Les textes de Méray, Laisant et Tannery sur l'enseignement secondaire des mathématiques sont de nature et d'ampleur très différentes mais paraissent tous trois (ou est republié pour celui de Méray) à un moment crucial où la question de l'enseignement secondaire est d'actualité. Au tournant du siècle, la crise que traverse l'enseignement secondaire est alors une réalité qui dépasse les frontières françaises comme le notera la Commission de

[23] L'ouvrage est édité par la librairie Alfred Mame à Tours, ce qui laisse penser que l'auteur était professeur dans l'enseignement confessionnel, cette maison édition étant très liée aux milieux catholiques (on pourra voir le site de l'Université de Tours : http://mameetfils.univ-tours.fr/ consulté le 01/09/2017).
[24] LONGCHAMPS (Gohierre de) Gaston, « Cours d'algèbre élémentaire, […] par J.F. », *Journal de Mathématiques élémentaires, 5e série,* tome XXI, Paris, Delagrave, 1897, p. 43.

l'enseignement dans son rapport d'enquête[25]. Mais en France, plus particulièrement, à la suite des réformes de 1890-1891, on assiste à un déclin de l'enseignement scientifique qui se traduit par une diminution du nombre de baccalauréats scientifiques distribués[26].

La Mathématique de Laisant paraît en 1898. L'ouvrage est partagé en trois parties. Dans les deux premières intitulées « La Mathématique pure. Philosophie » et « La Mathématique appliquée. Philosophie », il expose ses vues sur les différentes « subdivisions » des mathématiques. La troisième partie évoque l'enseignement des mathématiques.

L'article de Tannery paraît en 1900, après les travaux de la commission d'enquête, alors que le contenu de la future réforme est négocié entre les membres de la Commission, le Ministère de l'Instruction publique et le CSIP. Plus restreint de par son ampleur (une quarantaine de pages) il l'est aussi de par son sujet, ne traitant que de l'enseignement secondaire des mathématiques. Dressant un constat sombre de cet enseignement (« je crois que le mal est profond »[27]), il envisage les remèdes à y apporter sans entrer dans un détail des programmes.

Détailler les programmes, c'est en revanche l'exercice auquel se livre Méray dont des extraits de son texte sont republiés en 1901. Outre sa publication initiale dans la *Revue bourguignonne de l'enseignement supérieur*, ce texte d'une cinquantaine de pages avait fait l'objet d'une brochure parue chez Darantière, un éditeur dijonnais. C'est à ce texte que nous nous référons.

Les trois auteurs s'accordent sur le fait que l'enseignement scientifique n'a pas la place qu'il mérite dans l'enseignement français. Tannery ouvre son article sur le constat suivant : « les sciences ne pénètrent pas notre système d'études secondaires »[28]. Laisant regrette « une incroyable faiblesse dans les résultats de l'enseignement mathématique »[29], tandis que Méray affirme : « les progrès de cet enseignement [des mathématiques] n'ont pas suivi ceux de la

[25] Voir l'introduction de l'*Enquête sur l'enseignement secondaire, Procès-verbaux des dépositions*, t. I, Paris, Imprimerie de la Chambre des Députés, 1899, et le chapitre 8 intitulé « Le modèle secondaire, de la crise générale à la refondation » dans SAVOIE Philippe, *La construction de l'enseignement secondaire*, Lyon, ENS Éditions, 2013, p. 401-445.

[26] Voir DARBOUX Gaston, « Le problème de l'éducation secondaire, extrait du rapport présenté au Conseil académique de Paris par M. le Doyen de la Faculté des sciences », *Revue Internationale de l'Enseignement*, t. XXXVI, Paris, Armand-Colin, 1898.

[27] TANNERY Jules, « Les Mathématiques dans l'Enseignement secondaire », *La Revue de Paris*, 7e année, t. 4, 1900, p. 632.

[28] *Ibid.*, p. 619.

[29] LAISANT Charles-Ange, *La Mathématique. Philosophie. Enseignement*, 2e éd. Paris, Gauthiers-Villars, 1907, p. 223.

science qui est son objet ; il s'en faut plus encore qu'il donne toute la satisfaction désirable aux besoins intellectuels et professionnels de la jeunesse »[30].

Laisant et Méray expriment clairement leur souhait de voir la théorie des dérivées inscrite au programme des « élémentaires ». Laisant, pose

> deux axiomes qui [lui] paraissent vérifiés par une saine observation des faits :
>
> 1° Dans le milieu actuel, des notions mathématiques sont utiles à tous ;
>
> 2° Chaque intelligence moyenne est apte à acquérir ces notions, restreintes à de certaines limites.[31]

Il considère que l'étude des « *éléments* » forme la limite entre les notions de base, accessibles à tous, et celles destinées aux élèves dont « les aptitudes naturelles » leur permettront de pousser plus loin leurs études mathématiques, en précisant :

> Je crois qu'on pourrait sans inconvénient grouper sous ce titre, sans que cela ait rien d'absolu, ce que contiennent les programmes de l'ancien baccalauréat ès sciences, complétés par les notions qu'on a introduites avec juste raison dans l'enseignement moderne, et par quelques vues rapides sur la Géométrie moderne.[32]

La théorie des fonctions dérivées fait partie de ces notions introduites avec « juste raison » dans l'enseignement moderne. Elle est en effet la seule partie du programme de mathématiques qui distingue les enseignements classique et moderne.

Méray propose un programme « pour les élèves appelés à parcourir le cycle entier des études classiques, y compris ce qui appartient à l'Enseignement supérieur »[33]. Il n'indique cependant pas de découpage suivant les années d'études, ce qui laisse un certain flou dans son exposition.

Il détaille pour commencer le programme de ce qu'il nomme « la science générale des *nombres* ou *Analyse mathématique* »[34], proposant un ordre des connaissances dans lequel va s'inscrire la théorie des dérivées. Après le « groupe d'axiomes et de premiers théorèmes de l'Arithmétique », exposés « catégoriquement et avec soin »[35], il introduirait les fractions

---

30 MÉRAY Charles, *Considérations sur l'enseignement des mathématiques*, Dijon, Darantière, 1892, p. 4.
31 LAISANT Charles-Ange, *op. cit.*, p. 158.
32 *Ibid.*, p. 159.
33 MÉRAY Charles, *op. cit.*, p. 20
34 *Ibid.*, p. 1.
35 *Ibid.*, p. 22.

comme des « quantités fictives », pour aborder les premières notions d'algèbre, persuadé que « les élèves n'arriveront jamais assez vite au calcul algébrique »[36]. Dans les débuts de l'algèbre, Il souhaiterait ouvrir « largement l'esprit des élèves à ces notions relatives de fonctions et de variables indépendantes dissimulées en Mathématiques élémentaires »[37].

La notion de quantité variable l'amènerait aux notions de suite, de quantité infiniment petite, de convergence de limite pour exposer à « [ses] élèves la grande loi de continuité des fractions rationnelles, tout en leur exposant une théorie acceptable des nombres incommensurables »[38].

Après l'étude des séries entières, il aborderait la dérivation des fonctions analytiques, en adoptant le point de vue de Lagrange et les appliquerait « à la discussion des fonctions réelles (croissance, décroissance, maxima, etc.) »[39]. Ce « Cours d'Algèbre […] bien caractérisé par la dénomination « Principes d'Algèbre pure et premiers éléments d'Analyse infinitésimale » ferait selon lui partie des « Éléments », avant d'aborder le « Cours d'Analyse infinitésimale » qui en serait l'extension « toute naturelle »[40].

Le programme d'analyse des « élémentaires » selon Méray ressemblerait donc plus au programme de la classe de mathématiques spéciales qu'à celui de l'enseignement moderne.

Dans son article, Tannery ne va pas jusqu'à détailler un programme pour l'enseignement secondaire des mathématiques mais ce que nous savons par ses écrits ne permet guère de douter de ses positions. Et, lorsqu'il affirme que la classe de mathématiques élémentaires[41] « doit mettre en mesure les jeunes gens d'acquérir une instruction plus spéciale dans les Universités, dans les Instituts ou les Écoles techniques »[42], que les élèves ne devraient entrer en mathématiques spéciales qu'avec une forte culture scientifique, il y inclut sans conteste la théorie des fonctions dérivées. Nous le confirmerons un peu plus loin.

---

[36] *Ibid.*, p. 25.
[37] *Ibid.*, p. 26.
[38] *Ibid.*, p. 30.
[39] *Ibid.*, p. 34.
[40] *Ibid.*, p. 36.
[41] Tannery la désigne comme « la dernière classe de nos lycées », mais il s'agit bien de la classe de mathématiques élémentaires. Il ajoute en effet : « le chemin du lycée à l'Université n'existe pas ; il est barré par la classe de mathématiques spéciales » (TANNERY Jules, *op ; cit.,* p. 639).
[42] TANNERY Jules, *op ; cit.,* p. 638.

Tous trois s'accordent aussi pour situer la nécessité de développer l'enseignement scientifique en général, et mathématique en particulier, dans le cadre d'une modernité économique et sociale.

Pour Méray,

> l'Analyse et la Géométrie figurent parmi les agents les plus efficaces de la formation du patrimoine économique et intellectuel des individus et des nations ; leur influence est directe par les facilités qu'elles donnent aux évaluations et transactions journalières, indirecte, mais aussi grande, par leurs applications innombrables à toutes les Sciences, à la Mécanique, à la Physique générale en particulier, où les Arts industriels, la Biologie agricole et médicale, vont de plus en plus chercher des lumières.[43]

Les « parties moyennes » de ces sciences « comprennent les éléments théoriques les plus indispensables à l'exercice des professions industrielles »[44]. Les premiers éléments sont indispensables à tous et il « [déplore] surtout la somme incalculable des forces productives que paralyse l'insuffisance de l'instruction mathématique donnée aux enfants du peuple »[45]. Il se dit convaincu que « la diffusion, parmi les ouvriers, de la moindre notion intéressante de Calcul algébrique, de Géométrie théorique et descriptive, de Cinématique, serait bientôt suivie d'un accroissement sensible de la production nationale »[46].

Laisant affirme que « les résultats obtenus par la Mathématique pure, sous toutes ses formes et dans tous ses domaines, peuvent être utilisés pour résoudre les questions que présente à nous le monde réel »[47] et que « la question « À quoi cela peut-il servir ? » est en matière de science la plus folle et la plus vaine qui puisse se poser »[48]. L'exemple qu'il propose pour montrer l'utilité de la science est celui des États-Unis. Il cite une phrase que Jules Houël lui aurait écrite dans une de ses lettres, aux environs de 1873, avant que ne se développe aux États-Unis un véritable enseignement universitaire des mathématiques : « Quant aux États-Unis, ils importent juste la quantité de science pure qui est nécessaire à leur industrie »[49]. Constatant que, depuis, les mathématiciens américains « ne le cèdent en rien à leurs confrères d'Europe », que « la Mathématique » est depuis devenue dans ce pays « un article essentiel

[43] MÉRAY Charles, *op. cit.*, p. 2.
[44] *Ibid.*, p. 3.
[45] *Ibid.*, p. 11.
[46] *Ibid.*, p. 11.
[47] LAISANT Charles-Ange, *op. cit.*, p. 119.
[48] *Ibid.*, p. 121.
[49] HOUËL Jules cité par LAISANT Charles-Ange, *op. cit.*, p. 122.

de la production nationale »[50], il observe que l'industrie américaine « prend à tâche de transporter les résultats de la science pure dans le domaine des applications dès qu'elle les juge utilisables »[51]. Et « c'est tout naturellement dans l'art de l'ingénieur que ces applications, là-bas comme partout, trouvent surtout leur emploi »[52], qu'il s'agisse de construire une machine à vapeur ou d'utiliser la topographie en agriculture car, « sans son secours, les drainages, les irrigations sont impossibles à concevoir et à exécuter d'une façon rationnelle »[53].

Pour mieux comprendre la vision développée par Tannery, il faut sans doute la remettre en perspective en l'insérant dans le débat provoqué par l'article de Brunetière en 1895 évoqué plus haut. Il décrit une modernité économique, résultat des découvertes scientifiques, particulièrement agressive. Il écrit en effet :

> les découvertes scientifiques ont déchainé les intérêts matériels ; rien n'arrêtera la foule qui se rue à la conquête des forces naturelles, et il faut, aujourd'hui, s'entêter étrangement à fermer les yeux pour ne pas voir venir l'invasion qui, bientôt, précipitera les ruines. À ceux qui, demain, seront partout les maîtres, dans l'agriculture le commerce ou l'industrie, qui possèderont les richesses matérielles et les idées fécondes, la science fournit leurs armes : par elles les conditions de la vie et du travail changent d'année en année ; ceux qui veulent vivre et travailler n'ont qu'à se plier à ces conditions nouvelles ; sinon ils n'encombreront pas longtemps la face de la terre. [54]

Et donc, « le but de l'enseignement secondaire [devant] être de former les jeunes gens au travail qui occupera leur vie, à un travail intellectuel qui, le plus souvent, consistera à diriger, d'une façon plus ou moins immédiate, l'effort physique des autres hommes »[55], il annonce aux défenseurs d'un enseignement secondaire centré sur les humanités gréco-latines, que les sciences « prendront dans l'enseignement, bon gré, mal gré, une place qui est déjà occupée »[56].

[50] *Ibid.*, p. 122.
[51] *Ibid.*, p. 123
[52] *Ibid.*, p. 123.
[53] *Ibid.*, p. 136..
[54] TANNERY Jules, *op ; cit.,* p. 632.
[55] *Ibid.*, p. 631.
[56] *Ibid.*, p. 633.

Dans les applications des mathématiques à l'économie moderne, l'analyse trouve pour ces auteurs une place de choix. Laisant, citant les applications du calcul, et notamment les « instruments logarithmiques de calcul » écrit :

> Ce n'est pas seulement de la fonction logarithmique, ainsi convertie en tables ou en instruments, que les sciences d'application peuvent avoir à faire usage. À tout instant, et de la manière la plus inattendue, la question de l'étude d'une fonction particulière se présente et exige la mise en œuvre des connaissances d'Algèbre ou de Calcul infinitésimal de nature à rendre possible cette étude. Nous ne faisons même pas allusion ici à l'emploi possible des fonctions elliptiques assez peu répandu encore ; nous voulons simplement parler de questions beaucoup plus élémentaires et d'un usage fréquent. La méthode des représentations graphiques offrira souvent d'immenses avantages ; elle permet de se rendre rapidement compte, par un dessin ou même par un simple croquis, des variations de la fonction qu'il s'agit d'étudier ; de résoudre grossièrement, et à vue, les équations qui nous intéressent, et d'ébaucher ainsi les problèmes pratiques par une approximation, évidemment insuffisante, mais qui constitue néanmoins une excellente préparation à la solution définitive.[57]

L'importance de la représentation graphique des fonctions se trouvait déjà chez Méray qui affirmait :

> pour un Bachelier ès-sciences mieux vaudrait connaître les principes de la représentation géométrique des fonctions si utiles à l'enregistrement graphique et à la discussion d'une foule de phénomènes continus que l'inscription d'un décagone régulier dans une circonférence, la construction plane du rayon d'une sphère matérielle, la cubature d'un segment sphérique, etc.[58]

Ce même argument figurera quelques années plus tard dans la préface du manuel intitulé *Notions de mathématiques* que Tannery destinera aux élèves de la classe de philosophie à la suite de la réforme de 1902. Il écrit, à propos de l'analyse :

> On ne sait un peu ce que sont les mathématiques, on ne soupçonne leur extraordinaire extension, la nature des problèmes qu'elles posent et qu'elles résolvent, que lorsqu'on sait ce que c'est qu'une fonction, comment on étudie une fonction donnée, comment on suit ses variations, comment on représente son allure par une courbe, comment l'algèbre et la géométrie s'aident mutuellement, comment le nombre et l'espace s'éclairent l'un l'autre, comment on est amené à créer de nouvelles fonctions, de nouvelles courbes, à en étudier les propriétés. Ce sont ces notions et ces méthodes dont on a besoin pour lire les livres techniques où les mathématiques interviennent. Elles sont indispensables à celui qui veut comprendre quelque chose à ce mouvement scientifique qui

[57] LAISANT Charles-Ange, *op. cit.*, p. 131.
[58] *Ibid.*, p. 20.

> s'accélère, à ces applications des sciences qui se multiplient et qui, de jour en jour, tendent à modifier plus profondément notre façon de penser et de vivre.[59]

Tannery ne précise à quels « livres techniques » il fait allusion. Nous pouvons penser notamment aux très nombreux traités de calcul graphique publiés à partir des années 1870[60].

Si les rédacteurs d'ouvrages et de compte rendus de ces ouvrages s'attachaient à la notion de généralité d'une méthode pour promouvoir l'introduction de la notion de dérivée dans les « élémentaires », Laisant, Méray et Tannery développent aussi, (et surtout même, peut-on dire, pour Tannery) l'idée de l'utilité de cette théorie pour la formation scientifique de jeunes gens destinés à livrer une véritable bataille économique. Et, dans sa recension de l'ouvrage de Laisant dans la *RMS*, en 1898, Eugène Humbert insistera encore plus sur ce point que ne le faisait l'auteur, en écrivant :

> Il faut qu'il soit donné à tous uniformément jusqu'aux premières notions de la géométrie analytique et du calcul infinitésimal, afin que la grande majorité des jeunes gens de notre pays soit prête pour la lutte industrielle et commerciale qui paraît devoir être malheureusement le couronnement de la civilisation moderne.[61]

2 – La généralisation de la théorie des dérivées dans les programmes du secondaire : la réforme de 1902

2 – 1 L'enquête parlementaire de1899 : quel impact de l'enseignement moderne sur l'enseignement secondaire des mathématiques ?

En 1898, c'est donc préoccupée par l'importance croissante de l'enseignement catholique et, en particulier, du rôle qu'il jouait dans la préparation aux écoles du gouvernement, que la Commission de l'enseignement de la Chambre des Députés lance une vaste enquête sur l'enseignement secondaire. Le républicain modéré Alexandre Ribot présidera cette Commission.

[59] TANNERY Jules, *Notions de mathématiques suivi de Notions historiques* par TANNERY Paul, Paris, Delagrave, 1903, p. VI.
[60] Voir TOURNÈS Dominique, « Notes & Débats. Pour une histoire du calcul graphique », *Revue d'Histoire des Mathématiques*, n° 6, 2000, p. 127-161.
[61] HUMBERT Eugène, « La Mathématique, Philosophie, Enseignement, par C.A. LAISANT », *Revue de mathématiques spéciales*, t. 4, 1896-1897 et 1897-1898, p. 536.

Elle demande une statistique détaillée au Ministère de l'Instruction publique[62], complétée par une enquête auprès des chefs d'établissements et de leur hiérarchie. Simultanément, elle lance une enquête très générale où tous ceux qui le désirent peuvent s'exprimer sur l'organisation de l'enseignement secondaire, consultant également les Conseils généraux et les Chambres de commerce. Elle auditionne aussi près de deux cent personnalités. Les résultats de ses travaux font l'objet de six volumes publiés en 1899 sous le titre *Enquête sur l'enseignement secondaire*.

Cette étude fait apparaître une véritable crise de l'enseignement moderne voulu par Bourgeois au début de la décennie. Critiqué par les tenants de l'enseignement classique, il est accusé de ne pas répondre aux besoins des familles, d'être trop long, trop ambitieux et pas assez professionnalisant. Regroupant 41 000 élèves contre 84 000 pour le classique[63], l'enseignement moderne s'est beaucoup plus développé dans les collèges communaux que dans les lycées. Cependant, la « grande bourgeoisie » a tendance à fuir des lycées qui se popularisent sous l'effet de l'augmentation des effectifs du moderne. De plus, si dans les lycées la proportion d'élèves du moderne qui abandonnent leurs études en cours de route est proche de celle observée pour les élèves du classique, dans les collèges elle est beaucoup plus importante, la moitié des élèves arrêtant entre la 5e et la 2nde.

L'enseignement moderne subit aussi la concurrence de l'enseignement primaire supérieure. Les écoles primaires supérieures (EPS), gratuites, sont en plein développement et proposent un enseignement proche de l'ancien enseignement spécial[64]. Les proviseurs des lycées et les principaux des collèges reprochent aux instituteurs de favoriser les EPS au détriment des établissements universitaires. Certains principaux souhaitent la suppression des EPS pour intégrer leurs élèves dans l'enseignement moderne.

[62] La première étude statistique sur l'enseignement secondaire date de 1843. Depuis la statistique de 1865, sous le ministère Duruy, elle avait lieu environ tous les dix ans, les suivantes datant de 1876 et 1887.

[63] Ces chiffres sont ceux des élèves de l'enseignement secondaire public et privé confondus, à l'exclusion des classes élémentaires, et comprennent les élèves des petits séminaires. Source : *Enquête sur l'Enseignement secondaire, Tome III, Statistique et Rapports des Recteurs et des Inspecteurs d'Académie*, Paris, Imprimerie de la Chambre des Députés, 1899.

[64] Fondées par Guizot en 1833, les EPS ont été supprimées par la loi Falloux même si certaines ont subsisté. Elles sont recrées en 1880 et se développent rapidement. Elles proposent un enseignement en quatre ans. À la fin du siècle, elles scolarisent autant d'élèves que l'enseignement moderne. Sur les EPS, voir BRIAND Jean-Pierre et CHAPOULIE Jean-Michel, *Les collèges du peuple, L'enseignement primaire supérieur et le développement de la scolarisation prolongée sous la IIIe République*, 2e éd., Rennes, Presses Universitaires de Rennes, 2011.

Cependant, concernant la qualité de l'enseignement scientifique, et en particulier celui des mathématiques, les personnalités scientifiques auditionnées n'expriment pas un échec de l'enseignement moderne, bien au contraire. Lors de son audition, Darboux déclare, évoquant les membres des jurys des baccalauréats de la Sorbonne :

> pour ce qui concerne les sciences, l'opinion de mes collègues [de la Sorbonne] est en général très favorable aux élèves de l'enseignement moderne. On s'accorde à reconnaître qu'ils ont plus de connaissances, qu'ils sont mieux préparés. […] somme toute, la Faculté des Sciences est très favorable à l'enseignement moderne, puisqu'elle a émis à l'unanimité le vœu que cet enseignement soit conservé et qu'elle a exprimé le désir qu'il donne accès aux Facultés de Médecine et de Droit.[65]

Cette déposition qui reconnaît une meilleure préparation scientifique des élèves de l'enseignement moderne est confirmée par les rapports des Inspecteurs généraux établis lors de leurs tournées d'inspections. Ainsi, lorsque Charles Vacquant inspecte en 1894 Alphonse Ducatel, ancien élève de l'École normale supérieure, de la promotion de 1872, dans sa classe de mathématiques élémentaires au lycée Condorcet, il note : « Les résultats sont bons, et, chose heureuse et rare, dans sa classe de Maths. élémentaires les meilleurs élèves sont des élèves qui étaient l'an dernier en rhétorique »[66]. Rappelons que la classe de rhétorique est la classe de l'enseignement classique qui précède la classe terminale, et que les élèves de la classe de mathématiques élémentaires proviennent de rhétorique ou de la classe de 2nde de l'enseignement moderne. Dans cette formulation, apparaît donc en creux, la supériorité des élèves issus du moderne.

La même année, Émile Pruvost inspecte Charles Lefrançois, ancien élève de l'École normale supérieure, promotion 1875, et professeur au lycée de Grenoble. Il note : « Dans sa classe de mathématiques élémentaires de 20 élèves, 11 viennent de rhétorique et font bonne figure »[67]. Il faut aussi noter la formulation des deux rapports d'inspection. Ils expriment une crainte pour les élèves du classique plutôt que de manifester leur satisfaction pour la réussite des élèves du tout nouvel enseignement moderne.

---

[65] DARBOUX Gaston cité dans « Déposition de M. Darboux », *Enquête sur l'enseignement secondaire*, t. I, Paris, Imprimerie de la Chambre des Députés, 1899, p. 308.
[66] Dossiers de carrière, *Dossier F/17/25763, Archives nationales.*
[67] Dossiers de carrière, *Dossier F/17/2 2493/B, Archives nationales.*

La qualité des élèves issus de l'enseignement moderne se retrouve au-delà du baccalauréat, dans la préparation aux grandes écoles, et notamment à la première d'entre-elles. Ernest Mercadier, directeur des études à l'École polytechnique, auditionné en mars 1899, annonce que, dans la dernière promotion, 45 élèves sur 201, soit 22%, viennent de l'enseignement moderne. Il s'agit d'élèves admis au concours en 1898. La plupart des élèves passant deux ans en classe de mathématiques spéciales[68], il s'agit donc d'élèves ayant pour la plupart obtenu leur baccalauréat en 1896. Comparant les élèves issus du moderne aux bacheliers de l'enseignement classique, il affirme : « maintenant nous avons à compter avec l'enseignement moderne. Je dois dire qu'à notre point de vue il fait des progrès notables ». Prenant le rang moyen des bacheliers du moderne reçus au concours d'admission sur les trois dernières années, il déclare : « ce n'est guère que depuis deux ans que les bacheliers modernes ont suivi le cycle complet d'études. Ils gagnent une vingtaine de rangs, ce qui est beaucoup »[69]. Et, à la question de Ribot dans laquelle percent les critiques dominantes formulées contre l'enseignement moderne : « on a dit au contraire qu'au début ils savaient beaucoup, se plaçaient bien puis qu'ensuite ils baissaient faute de bonnes méthode de travail »[70], la réponse de Mercadier est sans détour : « le fait est brutal : ils gagnent des rangs »[71].

Une juste comparaison entre les élèves admis à l'École polytechnique issus de l'enseignement moderne et ceux issus de l'enseignement classique est difficile à réaliser. Il faut tenir compte des effectifs de ces deux ordres d'enseignement et, comme Mercadier le précise, de la *jeunesse* de l'enseignement moderne, mais aussi des avantages en points attribués aux bacheliers du classique : quinze points sont attribués aux titulaires de la première partie du baccalauréat, trente points aux bacheliers ès lettres, aucun pour le moderne. Ce que Mercadier commente ainsi : « les conseils de l'école ont toujours tendu, jusqu'à présent, à favoriser l'enseignement classique »[72]. Enfin précisons que la statistique de Mercadier ne

---

[68] Dans l'article analysé à la section précédente, les propos de Tannery montrent qu'il n'est pas rare que des élèves passent trois, voire quatre années en classe de mathématiques spéciales.
[69] MERCADIER Ernest, cité dans « Déposition de M. Mercadier », *Enquête sur l'enseignement secondaire*, t. II, Paris, Imprimerie de la Chambre des Députés, 1899, p. 500.
[70] RIBOT Alexandre, cité dans « Déposition de M. Mercadier », *op. cit.*, p. 500.
[71] MERCADIER Ernest, *op. cit.*, p. 500.
[72] Jusqu'en 1896, les titulaires du baccalauréat « Lettres-Philosophie » de l'enseignement classique bénéficiaient de 50 points. Émile Combes, nommé au poste de Ministre de l'Instruction en 1896 avait fait pression sur l'École polytechnique pour qu'elle renonce à son attitude partiale envers les baccalauréats de l'enseignement moderne (Voir SHINN Terry, *Savoir scientifique et pouvoir social. L'École polytechnique (1794-1914),* Paris, Presses de la Fondation Nationale des Sciences Politiques, 1980, p. 112-114).

répartit pas les candidats du moderne admis à l'École suivant le baccalauréat obtenu : « Lettres-Sciences » ou « Lettres-Mathématiques ».

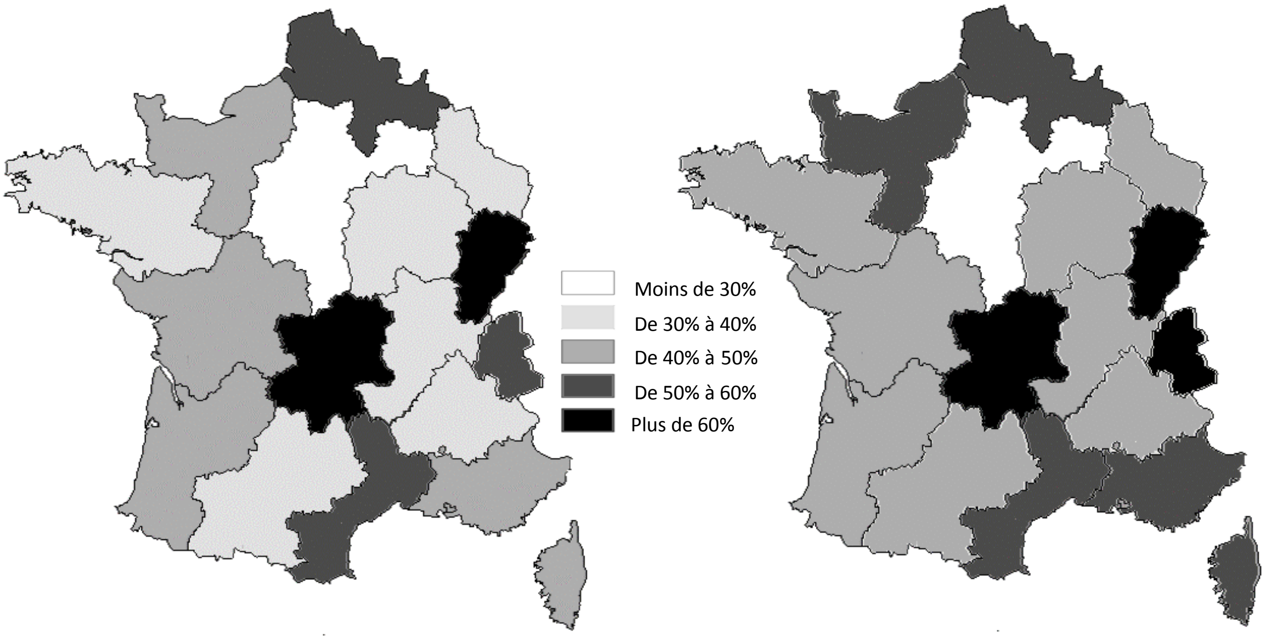
L'audition de Paul Buquet, directeur de l'École centrale des arts et manufactures confirme les propos de Mercadier. Selon lui, 20 à 25 % des admis à l'École centrale viennent de l'enseignement moderne. Précisons qu'au concours de cette école, les titulaires d'un baccalauréat, quel qu'il soit, se voient tous attribuer quinze points. À Buquet évoquant les progrès des élèves du moderne dans les dernières années, Ribot résume : « en somme, Monsieur Buquet, vous constatez une tendance de ceux qui viennent de l'enseignement moderne à dépasser les autres »[73], ce à quoi Buquet répond simplement « oui ».

Les statistiques commandées au ministère par la Commission Ribot croisées avec celles établies en 1919 par Paul Meuriot dans son ouvrage *Le baccalauréat – Son évolution historique et statistique des origines à nos jours,* montrent tout à la fois les faiblesses de l'enseignement moderne signalées par ses détracteurs, mais aussi ses forces en terme de qualité de la formation scientifique.

Les statistiques de 1898 répartissent les élèves des classes de mathématiques élémentaires et spéciales de l'enseignement public suivant leur provenance. Il apparaît ainsi que, dans les lycées, 34% des élèves de la classe de mathématiques élémentaires proviennent de l'enseignement moderne. Ce pourcentage monte à 41% si l'on considère les élèves des lycées et collèges, ce qui confirme le plus fort développement du moderne dans les collèges. Il est important de noter que sont comptées comme classes de mathématiques élémentaires, les classes préparatoires aux écoles du gouvernement. Une étude de la répartition académique des élèves de l'enseignement moderne en classe de mathématiques élémentaires nous a permis de dresser les cartes de la page suivante. Nous avons choisi une répartition académique car elle nous semble plus significative qu'une statistique départementale. La proportion d'élèves issus du moderne en mathématiques élémentaires peut en effet fortement varier dans un département d'une année à l'autre. Par exemple, au lycée de Grenoble, elle est successivement de 14%, 39% et 26% en 1899, 1900 et 1901[74].

[73] RIBOT Alexandre, cité dans « Déposition de M. Buquet », *op. cit*., p. 505.
[74] Voir le rapport d'inspection de Charles Lefrançois par Émile Pruvost, datant de janvier 1902, dossiers de carrière, *Dossier F/17/2 2493/B, Archives nationales.*

La carte de gauche donne la répartition pour les élèves de lycées ; celle de droite donne la répartition pour les élèves de lycées et collèges. Elles traduisent l'implantation provinciale de l'enseignement moderne[75]. Elles contredisent aussi certains détracteurs de cet enseignement. Ainsi, dans sa déposition, l'historien Charles Seignobos, professeur à la Sorbonne, affirmait : « dans le Midi […] il n'y a que les cancres qui fassent de l'enseignement moderne »[76]. Elles montrent en effet que les élèves du moderne des Académies de Montpellier et Aix sont bien représentés en mathématiques élémentaires.



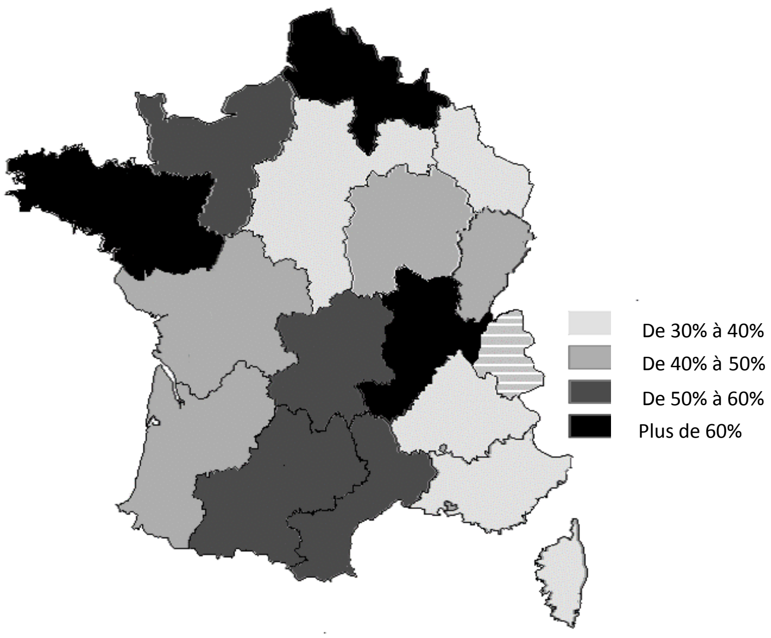
Cartes 1 et 2 : pourcentage des élèves issus de l'enseignement moderne en mathématiques élémentaires (y compris les classes préparatoires aux écoles du gouvernement). À gauche dans les lycées ; à droite dans les lycées et collèges

La proportion des élèves du moderne en classe de mathématiques spéciales confirme et même amplifie ce que nous observons en mathématiques élémentaires : ils sont 43% des 1024 élèves inscrits en mathématiques spéciales. Cette répartition ne concerne que les lycées et les collèges Chaptal et Rollin à Paris. Ce sont en effet les seuls collèges de France à disposer d'une classe de mathématiques spéciales. Nous les avons inclus dans les lycées de l'académie de Paris qui à eux seuls regroupent 491 élèves en mathématiques spéciales, soit 48% du total.

[75] Sur cette implantation provinciale, voir PROST Antoine, *op. cit.* Il est cependant intéressant de remarquer qu'elles ne recouvrent que partiellement la carte de l'implantation de l'enseignement moderne en France (voir la carte 10, p. 65 dans PROST Antoine, *op. cit.*). Les cartes s'accordent bien pour les académies de Rennes, Poitiers, Aix, Montpellier. En revanche, les élèves de l'enseignement moderne sont surreprésentés en mathématiques élémentaires dans les académies de Clermont et Besançon et Lille.
[76] SEIGNOBOS Charles cité dans « Déposition de M. Seignobos », *Enquête sur l'enseignement secondaire*, t. II, Paris, Imprimerie de la Chambre des Députés, 1899, p. 235. Voir aussi à ce sujet, PROST Antoine, *op. cit.*

La carte 3 indique la répartition de ces élèves suivant les académies. Précisons qu'en 1898 il n'y avait pas de classe de mathématiques spéciales dans l'Académie de Chambéry.

Nous y retrouvons bien sûr l'implantation provinciale de l'enseignement moderne. L'accroissement de la proportion d'élèves de l'enseignement moderne en mathématiques spéciales par rapport aux mathématiques élémentaires est nettement marqué, y compris à Paris, même s'il ne touche pas les académies de Nancy, Clermont et Aix.

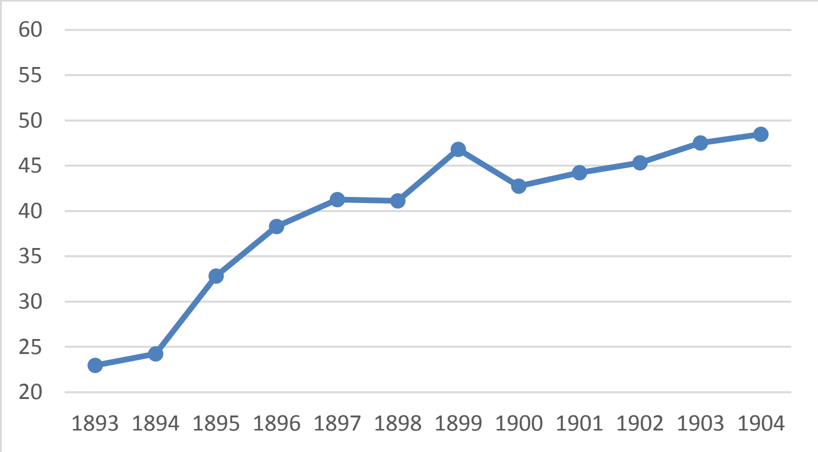


Carte 3 : proportion d'élèves de l'enseignement moderne en classe de mathématiques spéciales

Si nous croisons ces données avec les résultats du baccalauréat « Lettre-Mathématiques », nous pouvons comparer les performances des élèves de l'enseignement moderne à ceux de l'enseignement classique. En effet, dans cette série, ils subissent les mêmes épreuves. Et nous retrouvons, en 1898, la même proportion : 41% des élèves admis à ce baccalauréat proviennent de l'enseignement moderne[77]. Ce résultat est plus significatif car il tient compte des élèves issus de « l'enseignement libre » où le moderne s'est moins développé que dans l'enseignement public.

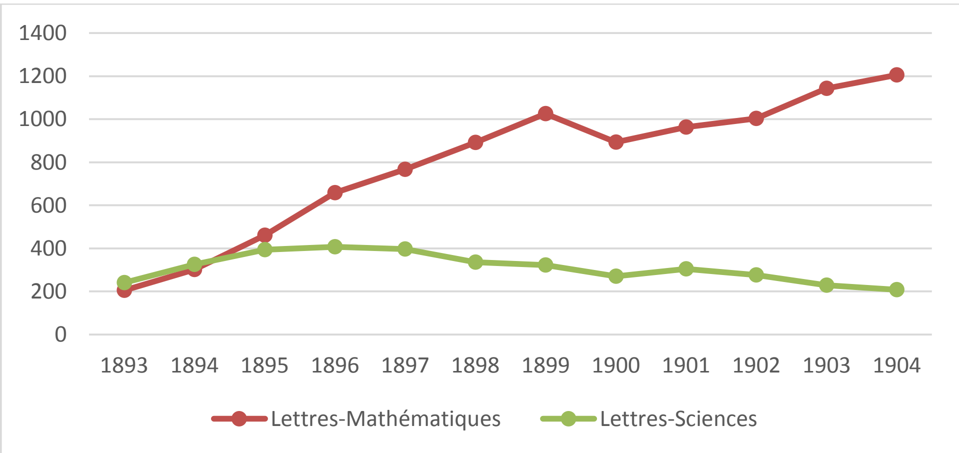
[77] Source : MEURIOT Paul, *Le baccalauréat – Son évolution historique et statistique des origines à nos jours,* Berger-Leuvrot, Nancy, 1919.

Cette proportion va même augmenter dans les années suivantes comme le montre le graphique 1, les élèves du moderne représentant quasiment la moitié des admis au baccalauréat « Lettres-Mathématiques » en 1904, dernière année avant la mise en place des nouveaux baccalauréats.



Graphique 1 : pourcentage d'élèves du moderne parmi les admis au baccalauréat "Lettres-Mathématiques"

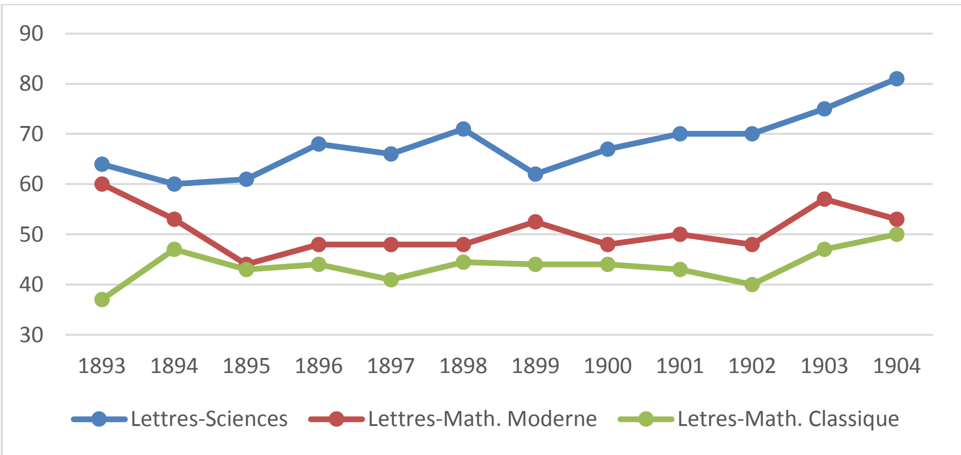
Mais, parallèlement, les résultats du baccalauréat montrent l'échec de la section « Lettres-Sciences ». Après des débuts prometteurs pour la 1e Sciences, les élèves du moderne s'orientent préférentiellement, en fin de seconde, vers la série « Lettres-Mathématiques ». Le nombre de baccalauréats « Lettre-Sciences » s'effondre dans les dernières années comme le montre le graphique 2. Nous avons vu au chapitre précédent, lors de l'examen de la réforme Bourgeois, que certains membres du CSIP redoutaient une telle éventualité. L'inscription de la théorie des dérivées au programme de la classe de 1e Sciences, sur laquelle les réformateurs de 1891 comptaient pour attirer les élèves, n'a pas suffi.



Graphique 2 : Nombre d'élèves admis aux baccalauréats de l'enseignement moderne

Lors de son audition par la Commission Ribot, Émile Fernet, Inspecteur général pour l'enseignement des sciences explique le choix par les élèves de l'enseignement moderne de la section « Lettres-Mathématiques » au détriment de la section « Lettres-Sciences » par la difficulté de ce dernier baccalauréat : « la plupart des élèves, après avoir suivi les cours de l'enseignement moderne, les abandonnent avant la dernière année et préparent le baccalauréat classique qui leur semble plus facile ». Et à Ribot qui lui demande : « le baccalauréat « lettres-mathématiques » est moins difficile que le baccalauréat moderne ? », il répond : « les élèves le trouvent moins difficile : pour certains points, je suis un peu de leur avis »[78]. Remarquons que Fernet qualifie de « classique » le baccalauréat obtenu par les élèves de l'enseignement moderne qui passent en classe de mathématiques élémentaires. Il s'agit cependant d'un baccalauréat qui porte la mention de « moderne ». Cette erreur de Fernet est significative des conceptions de l'époque : pour lui, un baccalauréat obtenu après la classe de mathématiques élémentaires restait un baccalauréat « classique ».

Le *Bulletin administratif* fournit à chaque session les taux de réussite aux différents baccalauréats. La série complète des taux de réussite de la session de juillet[79], celle à laquelle se présentaient la quasi-totalité des candidats, nous a permis d'établir le graphique 3. Nous y avons fait figurer, pour l'enseignement moderne, les séries « Lettres-Mathématiques » et « Lettres-Sciences », et pour l'enseignement classique, la série « Lettres-Mathématiques ».



Graphique 3 : taux de réussites comparés aux baccalauréats "Lettres-Sciences" et "Lettres-Mathématiques" de l'enseignement moderne, et "Lettres-Mathématiques de l'enseignement classique"

[78] FERNET Émile et RIBOT Alexandre cités dans, « Déposition de M. Fernet », *Enquête sur l'enseignement secondaire*, t. I, Paris, Imprimerie de la Chambre des Députés, 1899, p. 431.
[79] La collection de *Bulletin administratif* que nous avons consultée contenait des lacunes pour les sessions de mars-avril et de novembre.

Le graphique contredit les propos de Fernet. Pour justifier cette attirance des élèves du moderne vers le baccalauréat « Lettres-Mathématiques », nous pouvons supposer qu'un diplôme obtenu après la classe de mathématiques élémentaires, considérée comme une classe de l'enseignement classique, restait plus prestigieux qu'un diplôme de l'enseignement moderne. Ce graphique prouve de plus que les élèves de l'enseignement moderne réussissaient mieux au baccalauréat « Lettres-Mathématiques » que ceux de l'enseignement classique. Il corrobore les propos de Darboux.

Pour terminer, il faut signaler la raison essentielle pour laquelle les réformes Bourgeois de 1890, 1891, ont été rapidement perçues comme négatives pour l'enseignement scientifique. Darboux, lors de son audition, déplorait la baisse du nombre de bacheliers scientifiques. Meuriot, en comptabilisant les baccalauréats littéraires et scientifiques distribués par décennie constate que, de 1881 à 1890 il a été distribué 26 775 baccalauréats ès sciences complet et 38 538 baccalauréats ès lettres. De 1893 à 1902, il dénombre 21 720 baccalauréats scientifiques et 49 138 baccalauréats littéraires. La réforme du baccalauréat en 1890 a été effectivement défavorable aux sciences. Un certain nombre d'élèves du classique ont délaissé le baccalauréat scientifique au profit de l'enseignement littéraire.

2 – 2 La théorie des dérivées dans les programmes de 1902

À la suite de cette enquête, la Commission Ribot propose une division des études secondaires en deux cycles, aussi bien pour l'enseignement classique que pour le moderne. Elle souhaite de plus organiser des passerelles entre l'enseignement primaire supérieur et le moderne. Elle s'oppose ainsi au ministre de l'Instruction publique Georges Leygues, et au CSIP, attachés majoritairement à l'enseignement classique. Leygues souhaite fermer l'accès des classes scientifiques aux élèves du premier cycle moderne en exigeant du latin pour ces classes. Ribot réagit fermement en demandant l'audition du ministre et la Commission a finalement gain de cause. Le décret du 31 mai 1902 propose l'architecture décrite par le schéma ci-dessous pour un enseignement secondaire unifié :

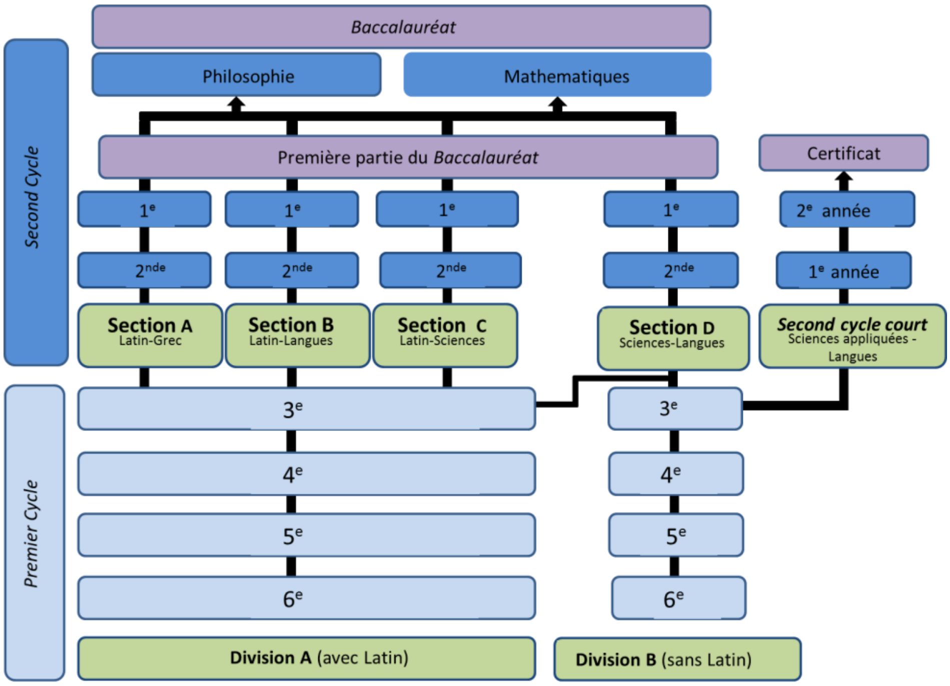


Figure 19: l'organisation de l'enseignement secondaire après la réforme de 1902

On reconnaît bien sûr dans les divisions A et B les anciens enseignements classique et moderne. Mais les changements sont profonds. La division B en premier cycle suivie de la section D correspond à l'ancien enseignement moderne auquel on aurait rajouté l'année de mathématiques élémentaires. Il y a réellement mise sur un pied d'égalité, dans leur organisation, des deux ordres d'enseignement. Notons la création d'un cycle court « Sciences appliquées-Langues » pour les élèves de l'enseignement moderne à l'issue de la 3^{e}. Permettant d'obtenir un diplôme qui n'est pas un baccalauréat, il accède à la demande de ceux qui souhaitaient voir se recréer l'enseignement spécial, même si la durée des études y reste de six ans.

L'ancien enseignement classique qui se retrouve dans la division A suivie des seconds cycles A, B et C, subit d'importantes modifications avec une « bifurcation » à l'issue de la classe de 3^{e} et la création d'une série « Latin-Langues ». Il en sort grandement renforcé pour ce qui est de la formation scientifique des élèves. En ce qui concerne les mathématiques, pour un élève suivant les heures facultatives, le différentiel horaire hebdomadaire en mathématique par rapport à un élève de la Division B reste ce qu'il était depuis 1897, c'est à dire de 4h de la 6^{e} à la 3^{e} (voir tableau ci-dessous). Mais l'horaire en mathématique est renforcé, augmentant de 2 h pour chacun des anciens d'ordres d'enseignement. Puis, à l'issue du premier cycle, pour un élève qui se dirige vers un baccalauréat scientifique, les programmes et horaires des sections C et D sont identiques.

Classes	Division A	Division B
6e	2 h	3h
5e	2 h	3 h
4e	1h (1h*)	4 h
3e	2h (1h*)	3 h
Total	7h (9h**)	13 h

** : heure facultative ; ** y compris les 2 heures facultatives*

Tableau 8:horaire hebdomadaire en mathématiques de la 6e à la 3e

Une commission est nommée en février 1901 pour l'élaboration des programmes de sciences. Présidée par Daboux, elle est constituée de 18 membres. Outre Darboux et Tannery, font partie de la sous-commission chargée des programmes de mathématiques: Paul Appell, professeur à la faculté des sciences de Paris, Ernest-Adolphe Bichat, doyen de la faculté des sciences de Nancy (il démissionnera moins d'un mois après sa nomination), Amédée Combe, ancien professeur de mathématiques, censeur du Lycée Charlemagne, Gabriel Koenigs, professeur à la faculté des sciences de Paris, Paul Mathieu, professeur au lycée Louis-le-Grand et Jules Prouvost, Inspecteur général de l'Instruction publique. Appell, Combe, Koenigs et Mathieu sont tous d'anciens élèves de l'École normale supérieure. Nous n'avons pas trouvé d'information sur les conceptions mathématiques de Combe, Koenigs et Mathieu.

Les préoccupations d'Appell vont plus vers la classe de mathématiques spéciales comme le montre l'article « Sur la classe de mathématiques spéciales » paru en 1900 dans *L'Enseignement mathématique*. Dans cet article qu'il écrit « au moment où il est question de grandes réformes dans l'enseignement secondaire » [80], il déplore un enseignement presque entièrement dirigé par les questions posés aux concours d'admission et excessivement orienté vers la géométrie analytique. Pour remédier à cet état de choses il propose de

[80] Voir APPELL Paul, « Sur la classe de mathématiques spéciales », *L'Enseignement mathématique*, 2e année, 1900, p. 340.

supprimer les concours et de juger les candidats sur une ou deux années d'une formation dont il préconise qu'elle soit délivrée en faculté des sciences.

En 1904, il rédigera un rapport pour la sous-commission de mathématiques de la commission interministérielle dite des grandes Écoles, chargée de préparer de nouveaux programmes de mathématiques spéciales. Ce rapport précise notamment : « le professeur devra éviter de s'étendre sur les nombres incommensurables », puis : « dans la théorie des fonctions d'une variable réelle, on s'abstiendra de toute complication pour la notion de continuité ; on n'envisagera que des fonctions continues ayant une dérivée »[81]. Le rapport émane d'un collectif mais il ne peut pas ne pas refléter l'opinion de son rédacteur. Nous pouvons donc situer Appell parmi les opposants à une « rigueur excessive » dans les classes de mathématiques spéciales.

En ce qui concerne les programmes de mathématiques, les premières notions de géométrie analytique sont introduites dans le programme d'algèbre de 3e B. On y lit en effet les articles suivants : « variation de l'expression $ax + b$, représentation graphique » et « Représentation graphique des variations de x^2, $\frac{1}{x}$, etc »[82].

La théorie des dérivées est abordée en classe de 2nde C et D: « Notion de la dérivée ; signification géométrique de la dérivée. – Le sens de variation est indiqué par le signe de la dérivée ; application à des exemples numériques très simples »[83].

L'algèbre de première C et D consiste en des révisions du programme de 2nde. La notion de dérivée y apparaît en mécanique. Le programme prévoit en effet l'étude d'un mouvement varié quelconque et indique : « La vitesse est la dérivée de l'arc de trajectoire prise par rapport au temps »[84]. Nous avons vu, au chapitre précédent, que l'importance de l'utilisation de la dérivée en mécanique était soulignée par Étienne Wallon, professeur de physique au lycée

[81] « 7 juillet 1904 : Rapport de Paul Appell sur les programmes de la classe de mathématiques spéciales » dans BELHOSTE Bruno, « Programmes de sciences et de comptabilité des classes secondaires dans les lycées et collèges de garçons », *Les Sciences dans l'Enseignement secondaire français, Textes officiels. Tome I: 1789–1914*, Paris, Institut national de recherche pédagogique, 1995, p. 633.
[82] « Programmes de sciences et de comptabilité des classes secondaires dans les lycées et collèges de garçons » dans BELHOSTE Bruno, *op. cit*., p. 588.
[83] *Ibid.*, p. 598.
[84] *Ibid.*, p. 602.

Janson de Sailly. Nous pouvons penser que la notion de dérivée est introduite dès la 2nde pour le programme de mécanique de 1e.

En classe de mathématiques, le programme d'algèbre qui a trait aux de notions de géométrie analytique et à la théorie des fonctions dérivées est le suivant :

> Coordonnées d'un point. Représentation d'une droite par une équation du premier degré.
>
> Variations et représentations graphiques de des fonctions :
>
> $$y = ax + b, \quad y = \frac{ax+b}{a'x+b'}\,, \quad y = ax^2 + bx + c \quad , \quad y = ax^4 + bx^2 + c\,.$$
>
> Notion de la dérivée. Signification géométrique (coefficient angulaire de la tangente) et cinématique (vitesse dans le mouvement rectiligne) de la dérivée ; le sens de variation d'une fonction est indiqué par le signe de la dérivée. Dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, de la racine carrée d'une fonction, de $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.
>
> Application de l'étude de la variation, à la recherche des minimums ou des maximums de quelques fonctions simples, en particulier des fractions de la forme
>
> $$\frac{ax^2+bx+c}{a'x^2+b'x+c'}\,, \quad x^3 + px + q\,,$$
>
> où les coefficients ont des valeurs numériques. Dérivée de l'aire d'une courbe considérée comme fonction de l'abscisse (on admettra la notion d'aire). Le professeur laissera de côté toutes les questions subtiles que soulève une exposition rigoureuse de la théorie des dérivées ; il aura surtout en vue les applications et ne craindra pas de faire appel à l'intuition.[85]

Remarquons tout d'abord que ce programme permet aux élèves qui ont suivi les sections A ou B du second cycle d'intégrer cette classe de mathématiques en reprenant tous les notions vues en seconde C et D.

D'un point de vue mathématique, observons pour commencer qu'il n'indique jamais clairement une définition de la notion de fonction et n'aborde jamais la question de la continuité. Une approche élémentaire est privilégiée pour l'étude des fonctions les plus simples avant d'étudier la notion de dérivée. Les fonctions étudiées sont plus nombreuses que dans le programme de 1e Sciences de l'enseignement moderne. La plupart figuraient déjà dans des manuels comme nous avons pu le voir. Ce programme élargit à un public plus large un

---

[85] « Programmes de sciences et de comptabilité des classes secondaires dans les lycées et collèges de garçons » dans BELHOSTE Bruno, *op. cit.*, p. 607.

enseignement qui avait déjà fait ses preuves en 1e Sciences et dans un certain nombre de classe de mathématiques élémentaires.

Enfin, avec la dérivée de l'aire d'une courbe, les rédacteurs du programme franchissent une nouvelle étape dans l'enseignement secondaire des éléments de l'analyse. Le calcul intégral est abordé sans qu'aucun élément ne nous permette de penser qu'il avait, au préalable, été enseigné en classe de mathématiques élémentaires.

La parenthèse sur la notion d'aire qui doit être admise, ainsi que la phrase sur les « subtilités » d'une approche rigoureuse et l'appel à l'intuition marquent le refus de la méthode suivie par un ouvrage comme celui de Cor et Riemann. Il semble d'ailleurs difficile de ne pas relier le mot d'intuition aux textes de Poincaré que nous avons évoqué au chapitre précédent. Le programme exclut ainsi les développements hors programme, mais pourtant « à la portée d'un bon élève de mathématiques élémentaires » selon Tannery. Il ne suit pas non plus la voie adoptée par Bourlet qui ne donnait l'interprétation géométrique de la notion de dérivée qu'après une étude purement analytique. Peut-on en conclure que, malgré la présence au sein de la commission de Darboux, Tannery et Pruvost, trois membres sur sept (après la démission de Bichat), dont le président, la ligne d'une présentation rigoureuse défendue par ces hommes ne l'ait pas emporté ? Il nous paraît plus probable qu'une certaine prudence l'ait emporté. Le nouveau programme prévoyait déjà l'extension de la dérivation à la fonction racine carrée, à des polynômes du 3e degré, aux fonctions circulaires, au calcul intégral et surtout à la notion de dérivée dès la seconde. L'introduction de cette théorie à un tel niveau était probablement la nouveauté la plus audacieuse de ce programme.

Notons encore l'accent mis sur les applications. Nous y voyons un écho des textes de Méray, Tannery et Laisant analysés dans la section précédente sur la nécessité technique de l'enseignement du calcul des dérivées. Cette volonté de préparer les élèves à la lutte économique pour le siècle qui s'ouvre est clairement affirmée dans la lettre que le Ministre de l'Instruction publique adresse au président de la Commission de l'enseignement le 1er février 1902. Cette lettre est jointe aux propositions de réforme du ministère, qui obtiendront l'approbation de la Commission et ouvriront la voie au décret du 31 mai. Commentant les programmes, Leygues affirme que le rôle de l'enseignement est double. Il doit d'une part préparer « une aristocratie d'esprit qui, s'élevant au-dessus du réalisme utilitaire, se voue aux recherches désintéressés, aux hautes spéculations », et d'autre part « constituer fortement l'armée du travail, lui donner un état-major et des cadres »[86]. Il poursuit :

> dans un pays comme la France, où la population professionnelle et active (industriels, négociants, agriculteurs) représente 48 p. 100 de la population totale, 18,000,000 d'individus sur 38,000,000 d'habitants, où le capital industriel s'élève à 96 milliards 700 millions de francs ; où le capital agricole atteint 78 milliards de francs ; où les exportations se sont chiffrées, en 1900, pour plus de 4 milliards de francs, l'Université ne peut se contenter de préparer les jeunes gens qui lui sont confiés aux carrières libérales, aux grandes écoles et au professorat : elle les préparer aussi à la vie économique, à l'action.[87]

En l'absence d'indication horaire, il est difficile d'évaluer la part du programme de la classe de mathématiques affecté à l'analyse. En nombre de lignes, cela représente un peu plus de la moitié du programme d'algèbre. Par rapport à la totalité du programme, cela correspond à environ 7%. La géométrie reste de loin la partie la plus importante, avec environ 1/3 du programme de mathématiques devant l'algèbre et l'arithmétique.

La théorie des dérivées est également introduite en classe de philosophie où les mathématiques sont facultatives, à raison de deux heures par semaine. Le programme est le suivant :

> Notion de la tangente et de la dérivée. Exemples de tangentes obtenues géométriquement comme limites d'une sécante (cercle, parabole). Coefficient angulaire de la tangente : applications à quelques cas simples ($y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$). Notions sur l'usage de la dérivée pour reconnaître le sens de la variation d'une fonction.
> Évaluation approximative de l'aire d'une courbe tracée sur du papier quadrillé en comptant les carrés contenus à l'intérieur de la courbe : limite de l'erreur fournie par le nombre des carrés qui traverse la courbe ; cette erreur peut être rendue très petite en employant un quadrillage très fin.
>
> […]
>
> Problème inverse de la recherche d'une dérivée. Aire d'un triangle ou d'une parabole, obtenue par la recherche d'une fonction dont la dérivée par rapport à x est ax ou ax^2.
>
> Notions sur la méthode infinitésimale ; exemples d'infiniment petits de divers ordres, limites de rapports ou de sommes obtenues en négligeant des quantités infiniment petites par rapport à celles que l'on conserve.

---

[86] LEYGUES Georges, « Lettre adressée par le Ministre de l'Instruction publique au Président de la Commission de l'enseignement de la Chambre des députés », *Bulletin administratif*, t. 69, 1902, p. 101.
[87] *Ibid.*, p. 101, 97-106.

> Application à l'évaluation des volumes ou des surfaces de corps considérés en géométrie élémentaire.[88]

Le programme de la classe de philosophie, semble particulièrement ambitieux, même s'il s'adresse à des élèves dont certains suivront par la suite les cours préparatoires au certificat de sciences physiques, chimiques et naturelles, et si les « Conseils généraux » rappelle que le professeur doit éviter « toute théorie abstraite »[89]. Il faut notamment remarquer, en lien avec le calcul intégral, l'introduction de la *méthode infinitésimale de* Jean-Marie Constant *Duhamel*, méthode qui venait d'être supprimée du programme d'admission à l'École polytechnique quelques années plus tôt. Il convient aussi de rappeler les critiques que Tannery formulera quelques années plus tard contre le théorème de substitution des infiniment petits dans les sommes, que nous avions signalées au chapitre 7.

Il faut aussi relier cette introduction du calcul infinitésimal à une initiation à l'histoire des mathématiques. Le programme indique : « Notions sur l'algèbre géométrique des Grecs : représentation d'un nombre par une ligne, d'un produit par la surface d'un rectangle ; figures équivalentes aux identités »[90] et les « Conseils généraux » précisent : « [le maître] pourra parler de la méthode d'exhaustion chez les anciens (Euclide, Archimède) et donner quelques détails sur l'invention du calcul différentiel et intégral »[91]. Le programme de la classe de philosophie suit les conceptions de Duhamel sur « l'enseignement idéal « du calcul différentiel et intégral. Il nous faut aussi rappeler que Paul Tannery[92], l'historien des sciences qui domine la scène française à cette époque, est le frère de Jules Tannery et que, dès 1892, le directeur de l'enseignement secondaire au ministère de l'Instruction publique avait commandé à Paul Tannery des programmes pour une histoire des sciences qui devait être enseignée en terminale[93].

---

[88] *Ibid.*, p. 595.

[89] En 1905 les deux heures deviendront obligatoires. Un rapport au Conseil académique de Paris rédigé par Ducatel, en 1905 jugera « l'intéressant programme élaboré il y a quelques années par M. Tannery […] trop élevé pour ces élèves » (DUCATEL Alphonse, « Sur l'enseignement des mathématiques dans la classe de philosophie », *La revue de l'enseignement des sciences*, 2e année, 1908, p. 14). En 1909, les mathématiques seront supprimées de la classe de philosophie.

[90] « Programmes de sciences et de comptabilité des classes secondaires dans les lycées et collèges de garçons » dans BELHOSTE Bruno, *op. cit.*, p. 594.

[91] *Ibid.*, p. 596.

[92] Sur Paul Tannery voir PINEAU François, *Historiographie de Paul Tannery et réceptions de son œuvre : sur l'invention du métier d'historien des sciences*, thèse de Doctorat, Université de Nantes, 2010.

[93] Voir supra, p. 483.

Il nous paraît aussi utile de rappeler ici les propos de Olry Terquem de 1848, déjà cités au chapitre 4 :

> Nous voyons [que d'Alembert] conseillait il y a près d'un siècle l'enseignement du calcul infinitésimal dans l'enseignement élémentaire ; et toutefois, en 1848, ce calcul, non seulement n'est pas admis, mais est encore superstitieusement repoussé, à tel point que beaucoup de professeurs ignorent ce calcul, que le grand nombre l'oublie, et qu'une classe entière de savants, les médecins et chirurgiens, n'en entendent jamais parler et restent ainsi complètement étrangers aux lois dynamiques, qui occupent une place si importante dans le jeu des fonctions vitales.[94]

Plus encore que les programmes des sections C et D et de la classe de mathématiques élémentaires, il nous paraît que ce programme de la classe de philosophie réalise le souhait de Terquem, exprimé un demi-siècle plus tôt, d'inscrire les premiers éléments d'analyse dans les « élémentaires ». Cet outil jugé indispensable à l'efficacité économique dans la société du début du XX^{e} siècle est dorénavant enseigné au public visé par Terquem. Ce public s'est élargi en raison du développement qu'a connu l'enseignement secondaire depuis 1848. Méray jugeait les premiers éléments d'analyse utiles à tous une dizaine d'années plus tôt. Avant même la réforme de 1902, peut-être avaient-ils déjà commencé à se répandre dans les écoles normales. En effet, l'exemplaire des *Principes d'algèbre* de Vacquant dont nous disposons était, d'après la mention manuscrite de la page de garde de l'ouvrage, le livre d'algèbre d'un élève de deuxième année de l'école normale de La Sauve[95].

La réforme des programmes de sciences de 1902 a été faite sans véritable concertation avec les professeurs de l'enseignement secondaire. Les nouveaux programmes, exécutoires à la rentrée de 1902, vont susciter de leur part un certain nombre d'interrogations. Des conférences sont organisées en 1904 au Musée pédagogique pour réfléchir sur les nouveaux programmes et les méthodes d'enseignement des sciences. Elles concerneront les professeurs des lycées parisiens[96].

---

[94] TERQUEM Olry, « Pensées de d'Alembert sur divers sujets de mathématiques », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 7, 1848, p. 276.

[95] Il s'agit probablement de l'école normale qui a succédé, à la fin du XIXe siècle, à un collège de jésuites établi dans les bâtiments conventuels de l'abbaye de La Sauve Majeure, en Gironde. Le livre a en effet été acheté dans une librairie de Bordeaux comme l'indique la couverture.

[96] Voir à propos de ces Conférences, GISPERT Hélène, HULIN Nicole et ROBIC Marie-Claire, *Science et enseignement. L'exemple de la grande réforme des programmes du lycée au début du XX^{e} siècle*, Paris, INRP/Vuibert, 2007.

En février elles portent sur l'enseignement des sciences mathématiques et physiques. Les intervenants pour les mathématiques sont Henri Poincaré, Émile Borel et Francis Marotte. Nous n'aborderons pas le contenu de ces conférences. Il porte sur l'application de la réforme de 1902 et dépasse donc le cadre de ce travail. Ce qui nous intéresse ici, c'est d'observer que dans les discussions qui suivent les conférences, la question de l'enseignement de l'analyse n'est pas évoquée. Il s'agit cependant d'un aspect majeur de la réforme des programmes de mathématiques. La France est l'un des tout premiers pays européen à introduire l'analyse à ce niveau d'enseignement. Les résultats de cette introduction seront suivis avec intérêt par de nombreux pays. Un rapport avait été demandé par le Comité central du Comité international des mathématiciens sur « L'organisation de l'enseignement du calcul des dérivées et des fonctions primitives dans les lycées de France et sur les résultats obtenus ». Dans ce rapport présenté à la Conférence internationale de Paris, en avril 1914, Charles Bioche, écrit : « la notion de dérivée, quand on évite les subtilités logiques, semble très accessible aux élèves : ceux-ci s'intéressent aux applications et arrivent facilement à étudier des fonctions simples »[97]. La partie analyse dans le programme d'algèbre n'avait guère changé depuis 1902 en mathématiques élémentaires. Le constat dressé par Bioche en 1914 n'aurait probablement pas été très différent en 1904. L'enseignement de la théorie des fonctions dérivées est un non-sujet lors des Conférences au Musée pédagogique car sa mise en œuvre ne pose visiblement pas de problème.

3 – Conclusion

Comme en 1851, l'introduction de la théorie des dérivées a été précédée d'un mouvement des professeurs de mathématiques en faveur de son inscription dans les programmes. Cette fois, l'enseignement avait été officiellement « expérimenté », pour reprendre l'expression de Bourlet, dans le moderne, et, de manière moins officielle, bien que soutenue par des personnalités comme Darboux ou Tannery, dans le classique. L'absence de « difficultés insurmontables » rencontrées dans ces enseignements explique probablement que les rédacteurs des programmes se soient risqués à introduire la notion de dérivée dès la classe de 2[nde]. Il ne s'agissait après tout que de l'étendre à des élèves ayant un an de moins que ceux de la classe de 1[e] Sciences. Quant à la méthode d'introduction, c'est une approche géométrique privilégiant l'intuition qui est retenue. Elle avait fait ses preuves dans

[97] BIOCHE Charles, *op. cit.*, p. 287.

l’enseignement moderne. Il faut cependant remarquer que le programme en classe de mathématiques élémentaires, s’il élargit la gamme de fonctions étudiées et introduit le calcul intégral, n’approfondit pas les questions théoriques. La méthode intuitive est celle de l’enseignement secondaire.

Et c’est une nouvelle fois à l’occasion d’une crise que se généralise l’enseignement de la théorie des fonctions dérivées dans le secondaire, en 1902. L’opposition politique à « l’enseignement libre » se transforme en une virulente critique de l’enseignement moderne. Mais sur le plan de la formation mathématique, le constat est très différent. Les résultats des études statistiques confirment les propos tenus par Darboux, Mercadier et Buquet lors de leurs auditions. Si nous nous intéressons aux résultats des élèves qui parvenaient au terme du cursus, il est indiscutable que l’enseignement moderne a été une réussite. Cependant, cette réussite, construite de la 6^{e} à la 2nde, ne se traduit réellement qu’au baccalauréat « Lettres-Mathématiques ». La désaffection des élèves envers la série « Lettres-Sciences » signe en partie l’échec du projet de Bourgeois de faire du baccalauréat moderne le véritable baccalauréat scientifique. Cette série avait pourtant été dotée de la grande nouveauté que représentait l’enseignement de l’analyse dans le secondaire.

Il apparaît donc que, durant sa décennie d’existence, l’enseignement moderne a pesé sur l’enseignement mathématique du classique pour une double raison. La première a été traitée dans le chapitre précédent : il a accéléré l’enseignement de la théorie des dérivées en mathématiques élémentaires. Le seconde, probablement la plus importante, celle qui transparaît dans les rapports d’inspection et que met en évidence l’enquête de 1898 et les statistiques du baccalauréat : ses élèves ont concurrencé ceux de l’enseignement classique. Malgré le rééquilibrage, en 1897, des horaires de mathématiques en faveur de l’enseignement classique que nous avons indiqué au chapitre précédent, cette concurrence tournait en faveur des élèves du moderne comme le montre l’évolution du pourcentage d’élèves du moderne parmi les reçus au baccalauréat « Lettre-Mathématiques ». Ceci nous semble justifier, plus que tout autre aspect de la réforme de 1891, le mot de Francisque Vial, directeur de l’enseignement secondaire de 1924 à 1936 à propos de cette réforme : elle ne« tarde pas à apparaître comme un danger. Elle risque de compromettre l'unité spirituelle de la nation et de créer deux jeunesses rivales »[98].

Entre la réussite de ses élèves qui viennent concurrencer ceux du classique en classe de mathématiques élémentaires, mais aussi dans les grandes écoles, et le succès de son programme moderne qui prépare efficacement les jeunes gens à la « lutte économique », il n'était plus possible de laisser à la traîne les programmes scientifiques de l'enseignement classique, celui de l'élite. Darboux, Tannery, mais aussi Pruvost, pouvaient, à la commission des programmes, achever ce qui avait été commencé dix ans plus tôt, et même l'amplifier puisque l'expérience de l'enseignement moderne avait été un succès pour l'enseignement des mathématiques.

[98] VIAL Francisque cité dans PIOBETTA Jean-Baptiste, *Le baccalauréat de l'enseignement secondaire*, Paris, Baillière, 1932, p. 205.

Conclusion générale

Le sujet de cette thèse est la recherche du processus qui voit l'enseignement des premiers éléments de l'analyse passer de l'École polytechnique à la classe de mathématiques spéciales, puis de celle-ci aux classes qui préparent au baccalauréat. Nous nous sommes tout d'abord interrogés sur les premiers enseignements de calcul différentiel et intégral en classes préparatoires au concours d'admission à l'École polytechnique avant 1851, qui ont lieu hors de tout programme officiel. Ils sont attestés depuis les écoles centrales. Notre objectif était de comprendre comment un tel enseignement avait pu se développer, quelle en était la portée et quels en avaient été les effets.

La réussite de l'École polytechnique où l'enseignement de l'analyse joue un rôle important fournit une première explication. La circulaire de Lucien Bonaparte et Sylvestre François Lacroix pose en effet cette École en modèle dès 1800 pour les écoles centrales ; en 1812 le directeur des études de l'École polytechnique, Étienne Pierre Henri Durivau, veut profiter de la « grande concurrence » entre les candidats pour introduire les éléments de calcul différentiel et intégral au concours d'admission ; cette concurrence conduit à une préparation étalée sur plusieurs années qui justifie, selon Pierre Henry Blanchet, la publication en 1838 de ses *Compléments de mathématiques spéciales* pour les élèves en deuxième année préparatoire au concours d'admission.

La présence, en classes préparatoires, de professeurs qui ont été en contact avec les protagonistes du mouvement révolutionnaire de refondation du système éducatif, et aussi d'enseignants formés à l'École polytechnique dans les premières promotions, accélère ce mouvement. Pierre Tedenat était maître de conférences à l'École normale de l'An III, Louis-Benjamin Francoeur avait été répétiteur auprès de Lacroix, Jean-Guillaume Garnier avait enseigné l'analyse à l'École, et Jean-Louis Boucharlat était élève de la première promotion avant d'y exercer les fonctions de répétiteur adjoint. Pierre Henry Blanchet ne semble pas avoir de lien direct avec l'École polytechnique mais nous avons mis en évidence qu'il était un lecteur de Cauchy. Ces liens forts entre l'École polytechnique et les enseignants de classes préparatoires expliquent que les débats sur les principes de l'analyse à l'École se retrouvent dans les manuels de ces auteurs. Rejetés à la création de l'École, les infiniment petits n'occupent qu'une place marginale dans leurs manuels. Ces derniers exposent néanmoins la notion d'infiniment petit, probablement moins en raison des exigences du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique qui demande, en 1811, de revenir aux infiniment petits pour l'introduction du calcul différentiel, qu'en raison de leur emploi dans les applications à la géométrie et à la mécanique, dont tous s'accordent à reconnaître l'efficacité.

Les conceptions de Lagrange avaient marqué les débuts de l'École. Nous les retrouvons, dans les manuels de Tedenat, Garnier, Francoeur, Jean-Baptiste d'Estienne du Bourguet. La critique de Lagrange contre la méthode des limites est reprise dans les mêmes termes par Tedenat et du Bourguet. Cependant la méthode des limites propagée à l'École par Lacroix, reprise par Boucharlat, finit par s'imposer dans les manuels comme elle s'est imposée à l'École polytechnique. Et Cournot, pourtant attaché aux infiniment petits, accepte de parler le « langage des écoles » dans son manuel, c'est-à-dire d'utiliser la méthode des limites, la notion de fonction dérivée et sa notation. S'il n'est pas destiné à l'enseignement préparatoire, le manuel de Cournot est pour nous très important parce qu'il a un impact sur la formation des futurs enseignants de ces classes. Enfin, Blanchet diffuse les conceptions sur les infiniment petits et la continuité développés par Cauchy.

Le *Manuel des aspirants à l'École polytechnique* de Georges Ritt, les témoignages des protagonistes de la tentative de réforme de l'enseignement à l'École polytechnique par Gaspard-Gustave de Coriolis en 1840, les manuels de Blanchet et Édouard Gouré nous ont permis de mettre en évidence la portée de ces enseignements d'analyse. Une grande partie du programme de première année de l'École polytechnique était abordé dans certaines classes préparatoires ; l'introduction de Blanchet dans un lycée parisien était plus modeste et les petits lycées de province étaient à la traîne.

L'introduction de la théorie des dérivées au programme d'admission à l'École polytechnique, en 1851, prolonge celle que nous avons déjà trouvée dans certains manuels de classes préparatoires. Après que les Conseils de l'École eurent refusé par deux fois d'inscrire le calcul différentiel au programme d'admission, la Commission Le Verrier y inscrit la théorie des dérivées à l'occasion d'une des crises majeures que connaît l'École polytechnique. Cette introduction est timide. Les notions de différentielle, d'infiniment petits, d'intégrale, n'y figurent pas. L’objectif est d’offrir, officiellement, une méthode générale aux enseignants de classes préparatoires et de libérer quelques leçons d’analyse pour l’enseignement interne à l’École. Le nouveau programme est strictement encadré par des textes qui ont pour objet d’empêcher les professeurs et examinateurs de dépasser le programme.

Nous avons ensuite mis en évidence que, malgré ces limites strictes, les auteurs de manuels outrepassaient rapidement ce programme après la réforme de 1851. Ceci nous a amené à questionner la nature des notions qu’ils ajoutaient, leurs motivations et les effets de ces ajouts.

Immédiatement après 1851, la notion de continuité prend chez Joseph Bertrand, Charles Choquet, Charles Briot et Eugène Catalan, une ampleur bien supérieure à celle prévue par le programme de mathématiques spéciales. Des exigences de rigueur les motivent. Tous quatre expriment la nécessité de démontrer la continuité de la fonction exponentielle et de justifier plus rigoureusement le lien entre signe de la dérivée et sens de variation de la fonction ; Briot veut justifier l’existence de primitives ; Laurent voudra démontrer l’équivalence, pour une fonction, entre la propriété des valeurs intermédiaires et la définition de Cauchy de la continuité.

Mais la question des applications est l’une des toutes premières motivations des auteurs de manuels. Parmi ces applications, la résolution de problèmes de géométrie analytique joue un rôle majeur. L’étude de courbes algébriques les conduit à la dérivation des fonctions implicites et à l’emploi des dérivées secondes pour leur concavité.

C’est encore la question des applications qui justifie l’introduction du théorème de Taylor par Briot. La démonstration d’Homersham Cox l’ayant rendu plus abordable, il propose dans son manuel de 1862 un théorème essentiel de l’analyse. La nouvelle position qu’occupe ce théorème dans les éditions suivantes des *Leçons d’algèbre* de Briot, le fait qu’il se retrouve par la suite dans les manuels de Hermann Laurent en 1867 et de Gaston Gohierre de Longchamps en 1883 sont autant d’indicateurs de la diffusion de ce théorème dans les classes préparatoires.

L’inscription au programme d’admission à l’École polytechnique de notions qui se retrouvent dans la plupart des manuels indique aussi qu’elles étaient enseignées. Celles que nous venons d'énoncer ne suscitent pas de débats entre 1851 et 1885. Comme en 1851, les Conseils de l'école entérinent des pratiques, tout en essayant encore une fois de les encadrer pour éviter de nouveaux débordements.

L'introduction des notions d'infiniment petits, de différentielle et d'intégrale définie dans le programme d'admission de 1885 ne se situe pas dans cette logique. Elle nous a amené à questionner l'enseignement de ces notions dans le supérieur. Les conceptions du calcul différentiel de Jean-Marie Constant Duhamel, son importance dans l'enseignement supérieur de l'analyse sont connus des historiens. Nous avons approfondi l'analyse de ses textes et recherché l'ampleur de la diffusion de sa méthode infinitésimale dans l'enseignement de l'analyse. Ceci nous a permis de mettre en évidence une lignée de manuels dont l'origine est Duhamel, qui se poursuit avec Bertrand, Joseph-Alfred Serret, et, même si le lien est plus lâche, Valentin Boussinesq et Jules Houël. Mais nous avons aussi pu montrer que la pertinence de l'emploi de la méthode de Duhamel est remise en cause par Charles Hermite, Hippolyte Sonnet et Édouard Collignon. Ce qui nous a permis de conclure au rôle décisif joué par Bertrand dans l'introduction de cette méthode dans le programme d'admission de 1885. La prudence des Conseils de l'Ecole est à nouveau de mise pour ces notions nouvelles puisqu'ils préfèrent la « notion d'intégrale définie » à la « définition de l'intégrale définie » pour éviter que les professeurs de classes préparatoires ne donnent trop d'ampleur à cette notion.

Car, à cette époque, les travaux qui édifiaient l'analyse sur des fondements arithmétiques avaient été publiés, issus de l'École allemande, reçus et prolongés en France par Gaston Darboux, maître de conférences à l'École normale supérieure. Il nous fallait donc rechercher le processus par lequel ces nouveaux fondements allaient se propager en classe de mathématiques spéciales. Les manuels de Darboux et Camille Jordan qui, en 1886 et 1887, diffusaient ces idées dans l'enseignement supérieur étaient connus. Nous avons mis en évidence une lignée de manuels dont ces deux ouvrages sont à l'origine, et dont les descendants sont, en mathématiques spéciales, les ouvrages de Bosleslas Niewenglowski, Émile Pruvost et Dominique Piéron. Les nombres irrationnels, les éléments de la théorie des ensembles, la distinction entre continuité, continuité uniforme et propriété des valeurs intermédiaires, l'enchaînement des *théorèmes de Rolle*, *des accroissements finis* pour démontrer le lien entre signe de la dérivée et sens de variation de la fonction, et la définition de l'intégrale de Riemann figurent dans ces manuels, en dehors de tout programme officiel.

Ces ouvrages indiquent la place fondamentale prise par l'École normale supérieure dans l'enseignement des mathématiques durant les dernières décennies du XIX^{e} siècle. Parmi tous ces auteurs, seul Jordan a été formé et enseigne à l'École polytechnique. Après les polytechniciens du début du siècle, ce sont à présent des normaliens qui tentent d'imposer leurs conceptions de l'enseignement de l'analyse.

Nous avons aussi montré les réticences de certains auteurs de manuels déjà édités à plusieurs reprises à employer ces nouveaux fondements de l'analyse. Les nombres irrationnels, les éléments de la théorie des ensembles, l'intégrale de Riemann ne figurent ni chez Émile Lacour ni chez Laurent. Ce dernier ne démontre que sous la contrainte des éditeurs que toute fonction continue sur un intervalle fermé borné atteint ses bornes. Cette contrainte des éditeurs qui imposent de « de rendre [l'ouvrage] aussi correct que possible », selon les propos de Joseph-Hyacinthe Marchand qui participe à la révision du manuel de Laurent, est un autre indicateur de la diffusion dans les enseignements des notions propagées par les manuels. Les débats vifs au Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique, autour des « développements parasites », lors de la révision du programme d'admission de 1893, confirment ces enseignements. Il s'agit d'une véritable crise qui s'ouvre en 1896 entre certains membres du Conseil d'instruction et le Conseil de perfectionnement, lorsque ce dernier décide de supprimer les notions d'infiniment petits, de différentielle et d'intégrale définie. Ce moment de l'histoire, que nous retraçons dans cette thèse, est le plus révélateur des tensions engendrées au sein des Conseils de l'École par des enseignements préparatoires hors programme. Il est le seul à se traduire par un retour en arrière du programme d'analyse.

Pour terminer, nous avons recherché comment la théorie des fonctions dérivées était introduite dans l'enseignement moderne, en 1891, puis comment elle était généralisée en 1902 à l'enseignement secondaire. Comme ce fut le cas pour le programme d'admission à l'École polytechnique de 1885, les rédacteurs des programmes de 1^{e} Sciences de l'enseignement n'entérinent pas une pratique d'enseignement. Nous n'avons en tout cas trouvé aucun élément allant dans ce sens. Darboux et Tannery, que nous identifions comme les deux principaux acteurs de cette réforme, se saisissent de la volonté de Léon Bourgeois, Ministre de l'Instruction publique, de faire de l'enseignement moderne un enseignement classique fondé sur une culture scientifique. La crise que connaît l'enseignement secondaire accélère alors le transfert de l'enseignement de l'analyse vers un niveau inférieur.

L'introduction en classe terminale de l'enseignement moderne de la notion de dérivée, jusque-là réservée à une élite d'élèves admis en classes préparatoires, a pour objectif de faire du baccalauréat « Lettres-Sciences » le véritable baccalauréat scientifique moderne selon le souhait du Ministre. Cette introduction se produit l'année même où cette notion est inscrite au concours d'admission à l'École Saint-Cyr, renforçant pour les initiateurs de la réforme, l'attractivité de la classe de 1e Sciences.

Le besoin des auteurs de manuels de dépasser les exigences du programme est à nouveau manifeste dans la dernière décennie du siècle pour l'enseignement secondaire. L'inscription de la notion de dérivée au programme de la classe de 1e Sciences se traduit dans les manuels de l'enseignement moderne par le développement de notions en vue du concours d'entrée à l'École Saint-Cyr. Mais le concours n'est pas l'unique préoccupation des auteurs. Les manuels se rapprochent des exigences de rigueur de l'époque dont les programmes ne disent pourtant rien. Les effets du programme de l'enseignement moderne sont aussi sensibles sur la classe de mathématiques élémentaires. Ainsi, Carlo Bourlet peut justifier d'employer la notion de fonction dérivée en mathématiques élémentaires car ce qu'il nomme « l'expérimentation » de cet enseignement dans le moderne a été une réussite. Et Narcisse Cor et Jules Riemann peuvent proposer une introduction des éléments de l'analyse fondée sur des bases arithmétiques.

Nous retrouvons, en 1902, d'une part le processus de généralisation d'enseignements existants, et, d'autre part, un moment de crise dont se saisissent les rédacteurs des programmes, au tout premier plan desquels se placent Darboux et Tannery. La réforme d'un enseignement secondaire que l'on considérait comme traversant une crise grave leur permet d'aller plus loin. Ils introduisent en classe terminale des éléments du calcul intégral dont aucun indice ne nous permet de penser qu'ils avaient été auparavant enseignés à ce niveau de l'enseignement secondaire.

Tout au long de cette thèse, la recherche du processus de passage des premiers de l'analyse de l'École polytechnique à l'enseignement secondaire, nous a aussi permis de mettre en évidence, parmi les auteurs étudiés, deux courants de pensée sur ce que doit être la rigueur mathématique dans un manuel d'enseignement. Le premier considère qu'il suffit de bien montrer l'enchainement des idées, des principes aux théorèmes et à leurs conséquences mais que, pour ce qui concerne la justification des principes ou pour certaines démonstrations on peut, on doit, même, avoir recours à l'intuition, celle-ci s'appuyant la plupart du temps sur des images géométriques. Pour les partisans du second courant, qui s'appuient sur une rigueur calculatoire, il convient de ne laisser dans l'ombre aucune difficulté, afin d'éviter que des confusions ne s'installent dans l'esprit des élèves.

Si nous prenons des représentants de ces deux courants de pensée dans des textes d'enseignants de l'École polytechnique, Lacroix paraît être le plus parfait représentant du premier courant, Lagrange et Cauchy du second. En ne considérant que les manuels destinés aux classes de mathématiques spéciales et à l'enseignement secondaire, c'est-à-dire ceux qui sont véritablement dans le champ de notre recherche, Boucharlat, Briot, Bertrand, Gaston Gohierre de Longchamps, Lacour, Paul Porchon et Henri Neveu sont à placer dans ce premier courant. Tedenat, Bourguet, Garnier, Niewenglowski, Pruvost et Pieron, Tannery comme auteur des *Leçons d'arithmétique*, Bourlet et Cor et Riemann appartiennent au second.

Les deux lignées de manuels citées plus haut montrent que la formation suivie par ces auteurs est l'un des facteurs déterminants qui forgent leurs conceptions de ce que doit être la rigueur d'un enseignement de l'analyse. Cette formation peut résulter d'un enseignement direct, de maître à élève, mais aussi bien sûr de la lecture d'ouvrages. À ce titre, il faut aussi considérer les manuels comme des outils de formation de leurs premiers lecteurs, les enseignants. La formation n'est pas cependant le seul facteur déterminant. Lacroix, qui passe de son *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* au *Traité élémentaire*, Bourguet qui essaie d'améliorer la démonstration de Lagrange du théorème de Taylor devant les difficultés rencontrées par les élèves, montrent que ces conceptions ne sont pas figées et se nourrissent en retour de pratiques enseignantes.

Tous les auteurs que nous avons étudiés ne sont pas dans ces listes. En effet, la ligne de partage entre ces courants de pensée est souvent difficile à déterminer, et parfois même, poreuse. Mais, d'être partisan de l'un ou l'autre courant amène les auteurs à introduire dans les manuels des notions différentes, ou de faire des usages différents d'une même notion. La continuité d'une fonction n'est pas traitée de la même manière chez Bertrand et chez Laurent. Le premier considère l'équivalence entre continuité et propriété des valeurs intermédiaires comme une évidence alors que le second veut la démontrer analytiquement. Plus tard, Niewenglowski, Pruvost et Pieron, Lacour, démontreront que toute fonction continue sur un intervalle fermé borné atteint ses bornes alors que Laurent sera réticent à démontrer ce qu'il considère cette fois comme une évidence. Laurent est le meilleur exemple de la porosité évoquée plus haut entre ces deux courants de pensée. Jusqu'à l'arithmétisation de l'analyse, il se situe dans le premier courant, puis, ensuite, dans le second.

La fabrication d'un enseignement d'analyse pour le secondaire résulte de toutes ces composantes : décisions politiques, conceptions des rédacteurs de programme, mise en œuvre de ces programmes, action en retour sur les programmes des enseignements, et conceptions des auteurs de manuels et des professeurs sur ce que doit être la rigueur mathématique dans l'enseignement.

Parmi les perspectives de recherche ouvertes par cette thèse, nous en distinguons principalement deux. Nous avons montré l'importance de l'inscription de la théorie des dérivées au programme d'admission de l'école Saint-Cyr lors de la réforme de 1891 et l'impact de ce concours sur les manuels publiés par la suite. Ceci nous suffisait dans le cadre de notre problématique. Nous n'avons pas questionné les enseignements dans les classes de mathématiques élémentaires préparatoires à cette École, que ce soit avant ou après la réforme. De même, nous ne nous sommes pas intéressés aux classes préparatoires à l'École navale ou à l'École des mineurs de Saint-Étienne qui avaient inscrit la théorie des fonctions dérivées à leur programme d'admission dans les années qui précédaient. Ce domaine de recherche nous paraît un complément indispensable à nos travaux.

À l'occasion de l'analyse du manuel de Vacquant, nous avons constaté que cet ouvrage circulait dès 1900 dans les École normales d'instituteurs. L'enquête parlementaire de 1899 a mis en évidence la concurrence entre enseignement primaire et enseignement moderne. Des travaux récents ont rapproché les enseignements primaire et secondaire des mathématiques[1]. Les liens entre ces ordres d'enseignement méritent d'être approfondis et il conviendrait de rechercher dans l'enseignement primaire supérieur et dans les École normales d'instituteurs une éventuelle introduction de l'analyse qui, là aussi, se serait faite au début du siècle en dehors de tout programme officiel. Le passage vers l'enseignement secondaire d'une

[1] Voir notamment d'ENFERT Renaud et Gispert Hélène, « L'enseignement mathématique dans le primaire et le secondaire « dans François JACQUET-FRANCILLIN, Renaud d'ENFERT et Laurence LOEFFEL (dir.), *Une histoire de l'école. Anthologie de l'éducation et de l'enseignement en France XVIIIe-XXe siècle*, Paris, Retz, 2010, p. 333-341.

théorie autrefois réservée aux élites ne pouvait manquer d'intéresser les professeurs de ces écoles dont un certain nombre étaient titulaires d'une licence[2]. Le développement de l'enseignement de l'analyse en France la fin du XIX^e siècle se situe aussi dans la perspective d'une démocratisation de l'enseignement des mathématiques souhaitée par de nombreux mathématiciens[3].

---

[2] BRIAND Jean-Pierre et CHAPOULIE Jean-Michel, *Les collèges du peuple, L'enseignement primaire supérieur et le développement de la scolarisation prolongée sous la IIIe République*, 2^e éd., Rennes, Presses Universitaires de Rennes, 2011.

[3] Voir au chapitre 8 l'analyse des textes de Charles Méray et Charles-Ange Laisant et, de AUVINET Jérôme, *Charles-Anges Laisant : itinéraires et engagements d'un mathématicien de la Troisième République*, Paris, Hermann, 2013.

Bibliographie

SOURCES ARCHIVALES

AMPERE André Marie, Cours de calcul différentiel et intégral, 1811-1912-1813, Notes prises par l'élève OLIVIER, promotion 1811, III 3 b, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

AMPÈRE André Marie, *Précis des leçons sur le calcul différentiel et le calcul intégral*, CRH cours : A3a 174, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

Dossiers de carrière F/17/25763 et F/17/2 2493/B, Archives Nationales.

BERTRAND Joseph, *Résumé du cours d'analyse*, CRH cours : Bertrand 1860-1862, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

BERTRAND Joseph, *Cours d'analyse*, CRH cours : Bertrand 1878-1879, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

BERTRAND Joseph, *Cours d'analyse rédigé par les élèves*, CRH cours : Bertrand 1882-1884, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

BERTRAND Joseph, *Cours d'analyse*, CRH cours : Bertrand 1892-1893, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

CORIOLIS (de) Gaspard-Gustave, « Note sur les changements à faire au programme d'admission de l'École polytechnique (1840) », III/ 3/a, carton n°1, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

DARBOUX Gaston, *Conférences faites à l'École normale supérieure (3e année, Mathématiques),* t. I, MS 1704, Paris, Manuscrits de la bibliothèque de la Sorbonne.

DUHAMEL Jean-Marie Constant, *Cours de calcul infinitésimal professé à l'École polytechnique en 1838 par M. Duhamel*, CRH cours : Duhamel 1838, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

DUHAMEL Jean-Marie Constant, *Résumé du cours d'analyse*, CRH cours : Duhamel 1857-1859, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

GARNIER Jean-Guillaume, *Leçons d'analyse algébrique, différentielle et intégrale donnée en l'An IX à la première division de l'École polytechnique*, CRH cours : Garnier 1800, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique

GARNIER Jean-Guillaume, *Cours d'analyse algébrique, fait en l'an 10. Cours d'analyse différentielle, fait en l'an 10,* CRH cours : Garnier 1801/COU, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

GARNIER Jean-Guillaume, *Correspondance d'Ampère, Lettre L 1058*, Archives de l'Académie des sciences, Paris, http://www.ampere.cnrs.fr/amp-corr1058.html , consulté le 29/09/2017.

HERMITE Charles, *Résumé du cours d'analyse, année 1869-1870*, *2e division*, CRH cours : Hermite 1869-1870, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

HUMBERT Georges, *Cours d'analyse, 2e division, année 1900-1901*, CRH cours : Humbert 1900-1901, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

JORDAN Camille, *Cours d'analyse, 1ère année, 2ème division, année 1893-1894,* CRH cours : Jordan 1893-1894, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

JORDAN Camille, *Cours d'analyse, 2ème division, année 1899-1900,* CRH cours : Jordan 1899-1900, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

LIOUVILLE Joseph, *Cours d'analyse, 1ère année, 2ème division. Calcul intégral*, CRH cours : Liouville 1843-1844, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

LIOUVILLE Joseph, *Cours d'analyse : cours de calcul différentiel, 1ère année*, CRH cours : Liouville 1845-146, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

LIOUVILLE Joseph, *Cours d'Analyse, 2ème Division, 1ère Année, 1847-1848*, CRH cours : Liouville 1847-1848, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

LIOUVILLE Joseph, *Calcul intégral, 1ère Année, 1847-1848*, CRH cours : Liouville 1847-1849/ANA, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

MATHIEU Louis, *Résumé du cours d'analyse : 1e année, 1835-1836*, CRH cours : Mathieu 1835-1836, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

NAVIER Claude, *Résumé des leçons d'analyse données à l'École polytechnique : 1e année, 1832-1833,* CRH cours, Navier 1832-1833/RES, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

Rapports du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique, X2B/10, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

Registre des procès-verbaux du Conseil d'instruction de l'École polytechnique, X2C/30, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

Registre des procès-verbaux du Conseil de perfectionnement de l'École polytechnique, X2C/29, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

STURM Charles, *Cours d'Analyse, 1e année, 2edivision*, CRH cours, Sturm 1846-1848, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

STURM Charles, *Cours d'analyse intégrale : 1e année : calcul intégral*, CRH cours, Sturm 1847-1849, Palaiseau, Archives de l'École polytechnique.

SOURCES PRIMAIRES IMPRIMÉES

d'ALEMBERT Jean le Rond, Article « Analyse », *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, Arts et des Métiers*, tome I, 1754, p. 400-401.

d'ALEMBERT Jean le Rond, Article « Continu », *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, Arts et des Métiers*, tome IV, 1754, p. 115.

d'ALEMBERT Jean le Rond, Article « Ellipse », *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, Arts et des Métiers*, tome V, 1755, p. 1745.

d'ALEMBERT Jean le Rond, Article « Géométrie », *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, Arts et des Métiers*, tome VII, 1757, p. 638.

d'ALEMBERT Jean le Rond, Article « Limite », *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, Arts et des Métiers*, tome IX, 1759, p. 542.

d'ALEMBERT Jean le Rond, Article « Grandeur », *Encyclopédie méthodique*, t. II, Paris /Liège, Panckoucke, Plomteux, 1785, p. 149.

AGNESI Maria Gaetana, *Traités élémentaires de calcul différentiel et de calcul intégral*, traduit de l'italien par Pierre-Thomas ANTELMY, Paris, Jombert, 1775.

AMPÈRE André-Marie, "Mémoire: Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor, et à l'expression finie des termes qu'en néglige lorsqu'on arrête cette série à un terme quelconque," *Journal de l'École Polytechnique*, tome 6, cahier 13, 1806, p. 148–181.

AMPÈRE André-Marie, *Précis des leçons sur le calcul différentiel et le calcul intégral*, 1824, BCXRH CRH cours : A3a 174.

Annuaire de l'École Royale Polytechnique, Paris, Bachelier, 1832.

ANDRÉANI A., *Les Écoles françaises, civiles et militaires*, Paris, Berger-Levrault, 1891.

APPELL Paul, « Sur la classe de mathématiques spéciales », *L'Enseignement mathématique*, 2e année, 1900, p. 340-346.

« Appendice, 1851 », *Nouvelles Annales de Mathématiques, 1ère série*, tome 10, Paris, Bachelier, 1851, p. 154-156.

ARAGO François, « Éloge historique de Joseph Fourier », *Mémoires de l'Académie royale de des sciences de l'Institut de France*, tome XIV, Paris, Firmin Didot Frères, 1838, p. LXIX-CXXXVIII.

ARBOGAST Louis François Antoine, *Du calcul des dérivations*, Strasbourg, Levrault, 1800.

ARCHIMÈDE, « De la sphère et du cylindre, Livre premier », *Œuvres d'Archimède traduites littéralement, avec un commentaire par F. Peyrard*, Paris, Buisson, 1807.

BERTRAND Joseph, *Traité d'Arithmétique*, Paris, Hachette, 1849

BERTRAND Joseph, *Traité élémentaire d'Algèbre*, Paris, Hachette, 1851.

BERTRAND Joseph et GARCET Henri, *Traité d'Algèbre*, t. 2, 3e éd., Paris, Hachette, 1863.

BERTRAND Joseph, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, Paris, Gauthier-Villars, 1864.

BERTRAND Joseph et GARCET Henri, *Traité d'Algèbre*, t. 2, 4e éd., Paris, Hachette, 1866.

BERTRAND Joseph, *Traité d'Algèbre, Deuxième Partie, à l'usage des classes de mathématiques spéciales, nouvelle édition mise en harmonie avec les derniers programmes officiels par Jospeh BERTRAND et Henri GARCET*, Paris, Hachette, 1874.

BERTRAND Joseph, « Préface » dans *École Polytechnique, Livre du centenaire, 1794-1894, Tome I, L'École et la Science*, Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1895, p. XXXI-LIV.

BÉZOUT Étienne, *Cours de mathématiques à l'usage du corps de l'artillerie, Nouvelle édition revue, corrigée et augmentée de l'Exposition abrégée du nouveau Système de Poids et Mesures, d'après le Mètre définitif ; par le C. GUILLARD, professeur de mathématiques*, t. I à IV, Paris, Richard, Caille et Ravier, 1797.

Bibliographie de la France, Paris, Pillet Aîné, années 1809 à 1850.

BIOCHE Charles, *Rapports : Vol II. Enseignement Secondaire. Commission internationale de l'enseignement mathématique. Sous-commission française*, Paris, Hachette, 1911.

BIOCHE Charles, « L'organisation de l'enseignement du calcul des dérivées et des fonctions primitives dans les lycées de France et sur les résultats obtenus », *L'Enseignement Mathématique*, *16e année*, 1914, p. 285-289.

Biographie universelle des musiciens, t. 4, Bruxelles, Méline, Cans et Compagnie, 1837.

Biographie universelle et portative des contemporains, t. 5, Paris, Levrault, 1834.

Biographie des hommes du jour, t. 6, 2e partie, Paris, Krabbe, 1842.

BINET Paul-René, « Mémoire sur la fonction dérivée, ou coefficient différenciel du premier ordre, lu par M. BINET, professeur de mathématiques transcendantes au lycée de Rennes », *Nouveau Bulletin des Sciences par la Société philomatique de Paris*, tome premier, IIe année, Paris, Bernard 1708, p. 275-278.

BLANCHET Pierre Henry, *Compléments de mathématiques spéciales*, Paris, Hachette, 1838.

BOLZANO Bernhard, « Démonstration purement analytique du théorème : entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposé se trouve au moins une racine réelle de l'équation », traduction de Jan SEBESTIK, *Histoire des Sciences*, n° 17, 1964, p. 136-164.

BOSSUT (Abbé) Charles, *Traités de calcul différentiel et de calcul intégral*, 2 tomes, Paris, Imprimerie de la République, An VI (1797).

BOSSUT (Abbé) Charles, *Essai sur l'histoire générale des mathématiques*, 2 tomes, Paris, Louis, 1802.

BOUCHARLAT Jean-Louis, *Théorie des courbes et des surfaces du second ordre*, Paris, 2nde éd., Paris, Courcier, 1810.

BOUCHARLAT Jean-Louis, *Eléments de calcul différentiel et de calcul intégral*, Paris, Béchet, 1813.

BOUCHARLAT Jean-Louis, *Eléments de calcul différentiel et de calcul intégral*, 2e éd. Paris, Courcier, 1820, Bachelier, 1838 pour la 5e éd., 1852 pour la 6e éd., 1858 pour la 7e éd.

BOUQUET Jean-Claude, « Sur l'intégration d'un système d'équations différentielles totales simultanées du premier ordre », *Bulletin des Sciences mathématique et astronomiques*, t. 3, 1872, p. 265-274.

BOURDON Louis Pierre Marie , *Éléments d'Algèbre*, 8e éd., Bruxelles, Méline, Cans et Compagnie, 1837, Société Nationale, pour la 9e éd., Paris, Bachelier, 1848 pour la 10e éd., Paris, Mallet-Bachelier, 1856 pour la 11e éd.

BOURDON Louis Pierre Marie , *Éléments d'Algèbre, quatorzième édition revue et annotée par M. E. PROUHET*, Paris, Gauthier-Villars, 1873, 17e éd., 1891.

BOURGET Justin, « Avant-propos », *Journal de mathématiques élémentaires*, t. 1, 1877, p. 4-5.

BOURGET Justin, *Algèbre Élémentaire*, Paris, Delagrave, 1880.

BOURGUET (du) Jean-Baptiste-d'Estienne, *Traités élémentaires de calcul différentiel et de calcul intégral*, t. 1 et 2, Paris, Courcier, 1810.

BOURLET Carlo, *Leçons d'Algèbre élémentaire*, Paris, Armand Colin, 1896.

BOURLET Carlo, *Leçons de Trigonométrie rectiligne*, Paris, Armand Colin, 1898.

BOUSSINESQ Joseph, *Cours d'analyse infinitésimale de l'Institut industriel du Nord*, Lille, Danet, 1883.

BOUSSINESQ Joseph, *Cours d'analyse infinitésimale*, tome I, Paris, Gauthier-Villars, 1887.

BRASSINE Émile, « Cours d'Analyse de l'École polytechnique par M. *Sturm* », *Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques* dans *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 16, 1857, p. 59-62.

BRIOT Charles et BOUQUET Charles, *Leçons nouvelles de géométrie analytique*, 2e éd., Paris, Dezobry et Magdeleine, 1851

BRIOT Charles, *Leçons d'algèbre*, tome II, Paris, Carilian-Goeury et Vve Dalmont, 1855.

BRIOT Charles, *Leçons d'algèbre*, tome II, 2e éd., Paris, Dalmont, 1856.

BRIOT Charles, *Leçons d'algèbre*, tome II, 3e éd., Paris, Dalmont et Dunod, 1859.

BRIOT Charles, *Leçons d'algèbre*, tome II, Paris, Dunod, 1862 pour la 4e éd., 1868 pour la 6e éd.

BRIOT Charles, *Leçons d'algèbre*, tome II, 11e éd., Paris, Delagrave, 1881.

BRIOT Charles, *Leçons d'algèbre*, tome II, 16e *édition revue et mise au courant des nouveaux programmes par E. Lacour*, Paris, Delagrave, 1893.

Bulletin administratif de l'Instruction publique, années 1888 à 1905, Paris, Imprimerie Nationale.

CALLANDREAU Pierre , « Francoeur (1773-1849) » dans *École Polytechnique, Livre du centenaire, 1794-1894, Tome I, L'École et la Science*, Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1895, p. 223-335.

CARNOT Lazare, « Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal », *Œuvres mathématiques du citoyen Carnot*, Bâle, J. Decker, 1797, p. 127-204.

CATALAN Eugène, *Manuel des candidats à l'École polytechnique*, tome I, Paris, Mallet-Bachelier, 1857.

CATALAN Eugène, *Cours d'analyse de l'Université de Liège*, 2e éd., Liège/Paris/Bruxelles, Decq/Gauthier-Villars/Hayez, 1879.

CATALAN Eugène, « Lettre à M. Charles Brisse », *Mathesis*, tome 6, 1886, p. 151-153.

CASSANAC Eugène, *Traité d'arithmétique*, Paris, édité par l'auteur, 1858.

Catalogue des livres de la bibliothèque de M. Labey, Paris, potelet, 1839.

CAUCHY Augustin-Louis, *Cours d'Analyse de L'École Royale Polytechnique, Première Partie. Analyse algébrique,* Paris, Imprimerie Royale, 1821.

CAUCHY Augustin-Louis, *Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal*, tome I, Paris, Imprimerie Royale, 1823.

CAUCHY Augustin-Louis, *Leçons sur le calcul différentiel*, Paris, Bure Frères, 1829.

CAUCHY Augustin-Louis, L*es applications du calcul infinitésimal à la géométrie*, Paris, Ellipses, 1994.

CHEVREUX H., « Lettre d'André-Marie Ampère à J. Bredin, 30 novembre 1821 », *André-Marie Ampère et Jean-Jacques Ampère, Correspondance et souvenirs (1805-1864)*, Paris, Hetzel et Cie, 1875, p. 207.

CHOQUET Charles et MAYER Mathias, *Traité élémentaire d'Algèbre*, 2e éd., Paris, Bachelier, 1836.

Classement et traitement des personnels des lycées et collèges de garçons, Paris, Imprimerie Nationale, 1903.

COLLIGNON Édouard, *Traité de mécanique*, t. 1, Paris, Hachette, 1873.

COLLIGNON Édouard, *Cours d'analyse de l'École préparatoire à l'externat de l'École des Ponts et Chaussées*, paris, Dunod, 1877.

COMBEROUSSE (de) Charles, *Cours de Mathématiques à l'usage des candidats à l'École centrale des arts et manufactures*, t. 1, Paris, Mallet-Bachelier, 1860.

COMBEROUSSE (de) Charles, *Cours de Mathématiques à l'usage des candidats à l'École centrale des arts et manufactures,* t. 2, Paris, Mallet-Bachelier, 1861.

COMBEROUSSE (de) Charles, *Histoire de l'École centrale des Arts et Manufactures*, Paris, Gauthier Villars, 1879.

COMBEROUSSE (de) Charles, *Cours de Mathématiques, Tome troisième, Algèbre supérieure, Première Partie*, 2e éd., Paris Gauthier-Villars, 1887.

COMBEROUSSE (de) Charles, *Cours de Mathématiques, Tome quatrième, Algèbre supérieure, Deuxième Partie*, 2e éd., Paris Gauthier-Villars, 1890.

COMBEROUSSE (de) Charles, *Cours d'algèbre supérieure, Troisième édition refondue et augmentée*, Première partie, Paris, Gauthier-Villars, 1904.

« Complément d'Algèbre », *Nouvelles Annales de Mathématiques, 1ère série*, tome 10, Paris, Bachelier, 1851, p. 282-285.

Compte rendu des séances de l'Académie des Sciences, t. 20.

CONDORCET (marquis de) Marie-Jean-Antoine-Nicolas de Caritat, *Rapport et projet de décret sur l'organisation générale de l'instruction publique*, Paris, Imprimerie nationale, 1792.

COR Narcisse et RIEMANN Jules, *Traité d'algèbre élémentaire*, Paris Nony, 1898.

« Correspondance », *Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série*, t. 12, 1873, p. 231.

COURNOT Antoine-Augustin, *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal*, tomes I et II, Paris, Hachette, 1841.

COURNOT Antoine-Augustin, *De l'origine et des limites de la correspondance entre l'algèbre et la géométrie*, Paris, Hachette, 1847.

COURNOT Antoine-Augustin, *Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique*, Paris, Hachette, 1851.

COURNOT Antoine-Augustin, *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal*, *deuxième édition revue et corrigée*, tomes I et II, Paris, Hachette, 1857.

COURNOT Antoine-Augustin, *Traité de l'enchainement des idées fondamentales dans les sciences et dans l'histoire*, tomes I et II, Paris, Hachette, 1861.

COURNOT Antoine-Augustin, *Des institutions d'instruction publique en France*, Paris, Hachette, 1864.

COURNOT Antoine-Augustin, *Souvenirs (1760-1860)*, Paris, Hachette, 1913.

COURNOT Antoine-Augustin, *Écrits de jeunesse et pièces diverses, Œuvres complètes tome XI*, édité par Bernard BRU et Thierry MARTIN, Paris/Besançon, Vrin /Presses Universitaires de Franche Comté, 2010.

« Cours de calcul infinitésimal professé à la Faculté des Sciences de Bordeaux par Jules Houël, 1871-1872 », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, *2e série*, t. 12, 1873, p. 49-53.

COUSIN Jacques Antoine Joseph, *Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral*, Paris, Jombert, 1777.

COUSIN Jacques Antoine Joseph, *Traité de Calcul différentiel et de calcul intégral*, Paris, Régent et Bernard, 1796.

COX Homersham, « A demonstration of Taylor's Theorem », *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, Vol. 6, 1851a, 80-81.

DARBOUX Gaston, « Lindelöf (L.). – Remarques sur les différentes façons d'obtenir la formule $\frac{d^2z}{dxdy} = \frac{d^2z}{dydx}$», *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, t. 1, 1870, p. 275.

DARBOUX Gaston, « Mémoire sur les fonctions discontinues », *Annales scientifiques de l'École normale supérieure, 2e série*, tome 4, 1875, p. 57-112.

DARBOUX Gaston, « Addition au mémoire sur les fonctions discontinues », *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, *2e série*, t. 8, 1879, p. 195-202.

DARBOUX Gaston, « Éloge historique de Joseph-Louis-François Bertrand», 1901, http://www.academie-sciences.fr/pdf/eloges/bertrand_vol3262.pdf, consulté le 29/08/2017.

Dictionnaire général des sciences théoriques et appliquées, 1ère partie, Paris, Delagrave et Garnier, 1877.

DEMOULIN Alphonse, « La vie et l'œuvre de Paul Mansion », *Annuaire de l'Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique*, 1929, p. 77-147.

DREYFUS-BRISAC Edmond, « Les Réformes de l'Enseignement Secondaire en France », *Revue Internationale de l'Enseignement*, t. 1, 1881, p. 1-24 et p. 121-136.

DUCATEL Alphonse, « Sur l'enseignement des mathématiques dans la classe de philosophie », *La revue de l'enseignement des sciences*, 2e année, 1908, p. 13-15.

DUHAMEL Jean-Marie Constant, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, Paris, Bachelier, 1841, 2e éd., 1847.

DUHAMEL Jean-Marie Constant, *Éléments de calcul infinitésimal*, Paris, Mallet-Bachelier, 1856.

DUHAMEL Jean Marie Constant, *Des méthodes dans les sciences des raisonnements*, Paris, Mallet-Bachelier, 1865 pour le tome I, Gauthier-Villars, 1866 pour le tome II et 1868 pour le tome III.

DUPUY Paul, « L'École normale (1810-1883) », *Revue Internationale de l'Enseignement*, t. 6, 1883, p. 887-918, p. 937-955, p. 1057-1075.

Encyclopédie méthodique, ou par ordre des matières : Mathématiques, Paris, Panckoucke, t. 1, 1784, t.2, 1785, t. 3, 17889.

Enquête sur l'enseignement secondaire, *Procès-verbaux des dépositions,* t. I et II, Paris, Imprimerie de la Chambre des Députés, 1899

Enquête sur l'Enseignement secondaire, Tome III, Statistique et Rapports des Recteurs et des Inspecteurs d'Académie, Paris, Imprimerie de la Chambre des Députés, 1899.

« État de la Société mathématique de France », *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 31, 1903, p. V-XVI.

EULER Leonhard, *Introduction à l'analyse infinitésimale*, traduction Jean-Baptiste LABEY, Paris Barrois, 1796.

FALCUCCI Clément, *L'humanisme dans l'enseignement secondaire en France au XIX^e^ siècle*, Toulouse, Privat, 1939.

FERNEUIL Théodore, « La Réforme du plan d'études de l'Enseignement secondaire en France », *Revue Internationale de l'Enseignement*, t. 5, 1883, p. 131-146.

FINCK Pierre Joseph Étienne, *Traité élémentaire d'analyse infinitésimale*, Bachelier, 1834.

FINCK Pierre Joseph Étienne, *Système d'algèbre élémentaire*, Strasbourg, Derivaux, 1839.

FINCK Pierre Joseph Étienne, *Principes de l'analyse infinitésimale*, Strasbourg, Derivaux, 1841.

FINCK Pierre Joseph Étienne, « Lettre », *Nouvelles Annales de Mathématiques,* t. 1, 1842, p. 353-355.

FINCK Pierre Joseph Étienne, « Sur l'élimination », *Nouvelles Annales de Mathématiques,* t. 4, 1845, p. 198-203.

FINCK Pierre Joseph Étienne, « Correspondance relative aux Examens de Strasbourg », *Nouvelles Annales de Mathématiques,* t. 4, 1845, p. 584-587.

FOUCHÉ Maurice, « Sur la définition de l'intégrale définie », *Nouvelles Annales de Mathématiques, 3^e^ série*, tome 15, Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1896, p. 207-215.

FOURCY Ambroise, *Histoire de l'École Polytechnique*, Paris, École polytechnique, 1828.

FOURIER Jean-Baptiste, *Leçons d'un cours d'analyse rédigées par C. L. Donop*, *Ms. Vitt. Em. 1509*, Edité par Anne-Marie LORRAIN, Ferrare, 1989.

FRANCOEUR Louis-Benjamin, *Cours complet de Mathématiques pures*, tome II, Paris, Bernard et Didot 1809.

FRANCOEUR Louis-Benjamin, *Cours complet de Mathématiques pures*, 3^e^ éd, Paris, Bachelier, 1828.

FRANCOEUR Louis-Benjamin, *Cours complet de Mathématiques pures*, *Quatrième édition revue et corrigée*, Paris, Bachelier, 1837.

GARNIER Jean Guillaume, *Leçons de calcul différentiel*, 3e éd., Paris, Vve Courcier, 1811.

GARNIER Jean Guillaume, *Leçons de calcul intégral*, 3e éd., Paris, Béchet, 1812.

GERGONNE Joseph-Diez, « Exposition élémentaire des principes du calcul différentiel », *Annales de mathématiques pures et appliquées,* t. 20, 1829-1830, p. 213-284.

GERONO Camille et PROUHET Eugène, « Avertissement des Rédacteurs », *Nouvelles Annales de Mathématiques, 2e série*, t. 1, 1862, p. 1-2.

GOURE Émile, *Théories générales de géométrie analytique*, Paris, Bachelier, 1842.

HAAG Paul, *Cours de calcul différentiel et intégral*, Paris, Dunod, 1893.

HACHETTE Jean Nicolas Pierre, *Correspondance sur l'École Impériale Polytechnique*, Paris, Bernard, 1808.

HADAMARD Jacques, *Leçons de Géométrie Élémentaire (Géométrie Plane),* Paris, Armand Colin, 1898.

HADAMARD, Jacques, *Leçons de Géométrie Élémentaire (Géométrie dans l'Espace),* Paris, Armand Colin, 1901.

« Heine (H.). – Les éléments de la théorie des fonctions (17 p.) », *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, t. 3, 1872, p. 264-265.

HERMITE Charles, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, tome I, Paris, Gauthier-Villars, 1873.

HOEFER Ferdinand, *Histoire des mathématiques depuis leurs origines jusqu'au commencement du dix-neuvième siècle*, Paris, Hachette, 1874.

HOUËL Jules, « SCHLÖMILCH (O) : Compendium der höheren Analysis", *Nouvelles Annales de Mathématiques*, *2ème série*, t. 9, 1870, p. 385-392.

HOUËL Jules, « Hankel (Dr Hermann), Recherches sur les fonctions oscillantes et discontinues un nombre infini de fois. Étude pour contribuer à fixer la notion de fonction », *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, t. 1, 1870, p. 117-124.

HOUËL Jules, *Cours de calcul infinitésimal*, Paris, Gauthier-Villars, 1878 pour le tome I.

HUMBERT Eugène, *Traité d'Arithmétique*, Paris, Nony, 1893, 1903 pour la 3e éd.

HUMBERT Eugène, « Supplément au N°5 de la Revue de mathématiques spéciales », *Revue de mathématiques spéciales,* t. 3, 1894-95 et 1895-96.

HUMBERT Eugène, « Leçons d'algèbre élémentaire par C. BOURLET », *Revue de mathématiques spéciales*, t. 4, 1896-1897 et 1897-1898, p. 32.

HUMBERT Eugène, « La Mathématique, Philosophie, Enseignement, par C.A. LAISANT », *Revue de mathématiques spéciales*, t. 4, 1896-1897 et 1897-1898, p. 536.

HUMBERT Georges, *Cours d'analyse professé à l'École polytechnique*, t. 1, Paris, Gauthier-Villars, 1903.

JAMIN Jules, « Funérailles de M. Duhamel. Disours de M. Jamin au nom de l'Académie des Sciences », *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, t. 3, 1872, p. 314-317.

JAZET, Paul, *Histoire de l'École spéciale militaire de Saint-Cyr*, Paris, 1886

JORDAN Camille, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, t. 1, Paris, Gauthiers-Villars, 1882.

JORDAN Camille, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, t. 2, Paris, Gauthiers-Villars, 1883.

JORDAN Camille, « Extrait d'une lettre de M. C. Jordan », *Nouvelles annales de mathématiques, 3e série*, t. 3, 1884, p. 47.

JORDAN Camille, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, t. 3, Paris, Gauthiers-Villars, 1887.

JORDAN Camille, *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, *Deuxième édition entièrement refondue*, t. 1, Paris, Gauthiers-Villars, 1893.

Journal Officiel de la République Française, années 1878, 1885, 1890.

KARTSCHER Maurice, « Traité de calcul différentiel et de calcul intégral par Mr. le Prof. S.F. Lubbe », *Journal für die reine und angewandte Mathemati*k, 1832, p. 419-420.

KLEIN Felix, « Sur « l'arithmétization » des mathématiques », traduit par Alexandre VASSILIEFF, *Nouvelles annales de mathématiques, 3e série*, t. 16, 1897, p. 114-128.

LA CHAPELLE Jean-Baptiste (abbé de), article « Exhaustion », *Encyclopédie méthodique*, tome 1, Paris, Panckouke, Liège, Plomteux, 1884, p. 703).

LACROIX Sylvestre-François, *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, tome I, Paris, Duprat, 1797.

LACROIX Sylvestre-François, *Élémens d'algèbre à l'usage de l'École centrale des Quatre-Nations*, 4e éd., Paris, Courcier, 1804.

LACROIX Sylvestre-François, *Complément des Élémens d'algèbre à l'usage de l'École centrale des Quatre-Nations*, 3e éd., Paris, Courcier, 1804.

LACROIX Sylvestre-François, *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral, précédé de réflexions sur la manière d'enseigner les Mathématiques, et d'apprécier dans les examens le savoir de ceux qui les ont étudiées*, Paris, Duprat, An X (1802).

LACROIX Sylvestre-François, *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*, 2e éd., Paris, Courcier, 1806, 1820 pour la 3e ed.

LACROIX Sylvestre-François, *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, *Deuxième édition revue et augmentée*, Paris, Duprat, 1810.

LACROIX Sylvestre-François, *Essais sur l'enseignement en général et celui des mathématiques en particulier*, Paris, Courcier, 1803, 1816 pour la 2e éd., Bachelier, 1838 pour la 4e éd.

LACROIX Sylvestre-François, *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*, *Sixième édition revue et augmentée de notes par MM. HERMITE et J.-A. SERRET*, Paris, Mallet-Bachelier, tome I, 1861, tome II, 1862.

LAFFITE Pierre, « Auguste Comte, examinateur d'admission à l'École Polytechnique », *Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série*, tome 13, 1894, p. 65-80, p. 113-120, p. 405-428, p. 462-482.

La France littéraire ou dictionnaire bibliographique, t. 9, Paris, Didot Frères, 1838.

LAGRANGE Joseph-Louis, « Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables », *Œuvres de Lagrange*, tome 3, Paris, Gauthier-Villars, 1869, p. 441-476.

LAGRANGE Joseph-Louis, *Méchanique analitique*, paris, Veuve Desaint, 1788.

LAGRANGE Joseph-Louis, *Traité des fonctions analytiques*, Paris, Imprimerie de la République, 1797.

LAGRANGE Joseph-Louis, « Discours sur l'objet de la Théorie des Fonctions analytiques », *Journal de l'École Polytechnique*, 6e cahier, tome II, An VII (1799), p. 232-235.

LAGRANGE Joseph-Louis, « Leçons sur le calcul des fonctions » *Journal de l'École Polytechnique,* 12e cahier, tome V, Paris, Imprimerie Impériale, An XII(1804).

LAGRANGE Joseph-Louis, *Leçons sur le calcul des fonctions, Nouvelle édition, revue, corrigée et augmentée par l'Auteur,* Paris, Courcier, 1806.

LAGRANGE Joseph-Louis, « Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration de quantités variables », *Œuvres de Lagrange publiées par les soins de M. J.-A. SERRET*, tome III, Paris, Gauthier-Villars, 1869.

LAISANT Charles-Ange, « E. Humbert. – Traité d'arithmétique », *Journal de mathématiques élémentaires*, 4e série, t. 2, 1893, p. 64-65.

LAISANT Charles-Ange et FEHR Henri, « L'Enseignement mathématique », *L'Enseignement mathématique*, t. 1, 1899, p. 1-5.

LAISANT Charles-Ange, *La Mathématique. Philosophie. Enseignement*, 2e éd. Paris, Gauthiers-Villars, 1907.

LANDEN John, *The Residual Analysis*, tome I, Londres, L. Hawes, W. Clarke, 1764.

LARDNER Dionysius, *An elementary treatise on the differential and integral calculus*, Londres, John Taylor, 1825.

LAUNAY Louis, *Compléments d'Algèbre et Notions de Géométrie analytique*, Paris, Hachette, 1895.

LAURENT (abbé), *Traité de Calcul différentiel*, Paris, Mallet-Bachelier, 1853.

LAURENT Hermann, *Traité d'Algèbre*, Paris, Gauthier-Villars, 1867.

LAURENT Hermann, *Traité d'Algèbre*, 2e éd., Paris, Gauthier-Villars, 1875.

LAURENT Hermann, « Méray (Ch.), Nouveau précis d'Analyse infinitésimale », *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques,* t. IV, 1873, p. 25-28.

LAURENT Hermann, *Traité d'Algèbre*, tome II, 3e éd., Paris, Gauthier-Villars, 1881.

LAURENT Hermann, « Préface », dans BOUCHARLAT Jean-Louis, *Éléments de calcul différentiel et de calcul intégral*, 8e éd., Paris, Gauthier-Villars, 1881, p. 1-2.

LAURENT Hermann, *Traité d'Analyse, Tome I, Calcul différentiel, applications analytiques et géométriques*, Paris, Gauthier-Villars, 1885.

LAURENT Hermann, *Traité d'Algèbre, Quatrième édition en harmonie avec les nouveaux programmes, revue par J.-H. Marchand, Ancien élève de l'École polytechnique, Deuxième partie,* Paris, Gauthier-Villars, 1887.

LAURENT Hermann, *Traité d'Analyse, Tome III, Calcul intégral, intégrales définies et indéfinies*, Paris, Gauthier-Villars, 1888.

LAURENT Hermann, *Traité d'Algèbre*, *Deuxième partie, 5e édition revue par J.-H. Marchand*, Paris, Gauthier-Villars, 1894.

LAURENT Hermann, « Considérations sur l'enseignement des mathématiques dans les classes de spéciales en France », *L'enseignement mathématique, 1e Année*, 1899, p. 38-44.

LAUVERNAY Eugène, *Traité d'Algèbre élémentaire*, Paris, Masson, 1877.

LAUVERNAY Eugène, « Introduction du polynôme dérivé en mathématiques élémentaires », *Journal de Mathématiques élémentaires*, tome VI, Paris, Delagrave, 1882, p. 3-8.

LEBON Ernest, *Gaston Darboux*, Paris, Gauthier-Villars, 1910.

LEFÉBURE de FOURCY Louis, *Leçons d'algèbre*, 5e éd., Paris, Bachelier, 1845.

LEMOINE Émile, « Premiers principes d'algèbre […] par C.A. LAISANT et ÉLIE PERRIN », *Journal de mathématiques élémentaires*, 4e série, t. 1, 1892, p. 184-185.

« Le nouveau programme d'admission à l'École Polytechnique », *Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e série*, t. 16, 1897, p. 40-45.

LEYGUES Georges, « Lettre adressée par le Ministre de l'Instruction publique au Président de la Commission de l'enseignement de la Chambre des députés », *Bulletin administratif*, t. 69, 1902, p. 97-106.

L'HUILLIER Simon, *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs*, Berlin, Decker, 1786.

LIARD Louis, *L'Enseignement supérieur en France, 1789-1889*, Paris, Armand Colin, 1888 pour le tome I, 1894 pour le tome II.

LONGCHAMPS (Gohierre de) Gaston, *Cours de mathématiques spéciales, Première partie, Algèbre*, Paris, Delagrave, 1883.

LONGCHAMPS (Gohierre de) Gaston, « La première leçon de calcul intégral», *Journal de Mathématiques spéciales*, 2*e série*, 1886, p. 3-6.

LONGCHAMPS (Gohierre de) Gaston, « *Résumé du Cours d'Analyse infinitésimale de l'Université de Gand* par P. Mansion », *Journal de Mathématiques spéciales*, *2e série*, tome I, 1887, p. 279-282.

LONGCHAMPS (Gohierre de) Gaston, « Compléments d'algèbre et notions de géométrie analytique », *Journal de Mathématiques élémentaires*, *3e série*, tome V, 1891, p. 88-89.

LONGCHAMPS (Gohierre de) Gaston, « Cours d'algèbre élémentaire, […] par J.F. », *Journal de Mathématiques élémentaires, 5e série,* tome XXI, 1897, p. 43-44.

LONGCHAMPS (Gohierre de) Gaston, « Bibliographie », *Journal de Mathématiques élémentaires, 4e série,* tome IV, 1895, p. 251-254.

LUBBE Samuel Ferdinand, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, traduit de l'allemand par Maurice KARTSCHER, Paris, Bachelier, 1832.

Journal de Mathématiques élémentaires, Paris, Delagrave, 1892-1902.

MANGIN Louis, « Nécrologie : Joseph Boussinesq », *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, t. 188, 1929, p. 589-591.

MANSION Paul, *Leçons d'analyse infinitésimale*, Gand/Mons, Hoste/Manceaux, 1876.

MANSION Paul, *Résumé du cours d'analyse infinitésimale de l'Université de Gand. Calcul différentiel et principes du calcul intégral*, Paris, Gauthier-Villars, 1887.

MARION Henri, *Le mouvement des idées pédagogiques en France depuis 1870,* Paris, Imprimerie nationale, 1889.

MAYER Mathias et CHOQUET Charles, *Traité élémentaire d'algèbre*, 4e éd., Paris, Bachelier, 1845.

MERAY Charles, « Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limite à des variables données », *Revue des Sociétés savantes*, *2e série*, t. IV, 1869, p. 220-289.

MÉRAY Charles, *Nouveau précis d'analyse infinitésimale*, Paris, Savy, 1872.

MÉRAY Charles, *Nouveaux Éléments de Géométrie*, Paris, Savy, 1874.

MÉRAY Charles, *Considérations sur l'enseignement des mathématiques*, Dijon, Darantière, 1892.

MÉRAY Charles, *Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques*, Paris, Gauthier-Villars, 1894.

MERCADIER Ernest, « Histoire de l'Enseignement de l'École Polytechnique » dans *École Polytechnique, Livre du centenaire, 1794-1894, Tome I, L'École et la Science*, Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1895, p. 1-88.

MERLIEUX Edouard, « Question sur les équations dérivées », *Nouvelles Annales de Mathématiques,1e série*, tome 3, Paris, Carilian-Goeury et Dalmont, 1844, p. 178-181.

Messages, Arrêtés et Proclamations du Directoire exécutif, tome I, Paris, Baudoin, An IV (1796).

MEURIOT Paul, *Le Baccalauréat- Son évolution historique et statistique des origines (1808) à nos jours*, Nancy, Berger-Levrault, 1919.

Moniteur Universel, année 1851.

MONTFERRIER (SARRAZIN de) Alexandre, *Cours élémentaire de mathématiques pures*, 2 tomes, Paris, Bibliothèque Ecclésiastique, 1837.

MONTUCLA Jean-Etienne, *Histoire des mathématiques*, 2e édition, 4 tomes, Paris, Agasse, An VII-An X (1799-1802).

MORITZ Robert Edouard, « A note on Taylor's theorem », *The American Mathematical Monthly,* Vol. 44, 1937, p. 31-33.

NAVIER Henri, *Résumé des Leçons d'Analyse données à l'École Polytechnique, Cours de Première Année*, Paris, Carilian-Goeury et Vve Dalmont, 1840.

NAVIER Henri, *Résumé des Leçons d'Analyse données à l'École Polytechnique*,2e éd., Paris, Dalmont, 1856.

NEVEU Henri, *Cours d'Algèbre*, 2e éd., Paris, Masson, 1897.

NIEWENGLOWSKI Boleslas, *Cours d'algèbre*, t. 1 et t. 2, Armand Colin, 1889.

« Notice sur Jean Guillaume GARNIER », http://www.academieroyale.be/academie/documents/GARNIERJeanGuillaumeARB_184158077.pdf , consulté le 31/0/2017 , consulté le 30/08/2017.

Nouveau dictionnaire de pédagogie et d'instruction primaire publié sous la direction de Ferdinand Buisson, édition de 1911, Institut Français de l'Education, http://www.inrp.fr/edition-electronique/lodel/dictionnaire-ferdinand-buisson/ , consulté le 28/08/2017.

Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-lettres, Berlin, Decker, 1786.

Œuvres de LAGRANGE publiées par les soins de M. J.-A. SERRET, Paris, Gauthier-Villars, 1867-1869.

OLIVIER Théodore, *Mémoires de géométrie descriptive, théorique et appliquée*, Paris, Carilian-Gœury et V[ve] Dalmont, 1851.

PADÉ Henri, *Premières Leçons d'Algèbre Élémentaire*, Paris, Gauthier-Villars, 1892.

PADÉ Henri, « Traité d'algèbre élémentaire, par MM. Cor et Riemann », *Nouvelles annales de mathématiques*, 3[e] série, t. 17, 1898, p. 139-143.

PAULY Jean, *Notions élémentaires du calcul différentiel et du calcul intégral*, Paris, Baudry et C[ie], 1887.

PEANO Giuseppe, « Extrait d'une lettre de M. le D[r] J. Peano », *Nouvelles annales de mathématiques, 3[e] série*, t. 3, 1884, p. 45-47.

PICARD Émile, « La vie et l'œuvre de Jules Tannery. Lecture faite dans la séance publique annuelle du 14/12/1925 », p. XVIII, http://www.academie-sciences.fr/pdf/dossiers/Picard/Picard_pdf/Picard_Tannery.pdf, consulté le 03/09/2018.

PIOBETTA Jean-Baptiste, *Le baccalauréat de l'enseignement secondaire*, Paris, Baillière, 1932.

POINCARÉ Henri, « La notation différentielle et l'enseignement », *L'enseignement mathématique, 1[e] Année*, 1899, p. 106-110.

POINCARÉ Henri, « La logique et l'intuition dans la science mathématique et dans l'enseignement », *L'enseignement mathématique, 1[e] Année*, 1899, p. 157-162.

POINCARÉ Henri, « Cournot et les principes du calcul infinitésimal », *Revue de Métaphysique et de Morale*, Paris, XIIIe année, 1905, p. 293-306.

« Point », article non signé, *Encyclopédie* méthodique, tome 2, Paris, Panckouke, Liège, Plomteux, 1885, p. 617.

PORCHON Paul, *Compléments d'Algèbre et de Géométrie*, Paris, Alcan, 1894.

PROCLUS de Lycie, *Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide*, traduction de Paul VER EECKE, Bruges, Desclée de Brouwer, 1948.

Programmes de l'Enseignement de l'École Royale Polytechnique, Paris, Imprimerie Nationale, 1826.

Programmes pour l'admission et l'enseignement à l'Ecole polytechnique, Paris, Imprimerie nationale, 1850.

Programme des connaissances exigées pour l'admission à l'École polytechnique, Paris, Paris, Delalain Frères, 1893.

PRONY (RICHE de) Gaspard, « Cours d'analyse appliquée à la mécanique », *Journal Polytechnique*, 1er cahier, An III (1795), p. 92-119.

PRONY (RICHE de) Gaspard, « Suite des leçons d'analyse », *Journal de l'École Polytechnique*, 2e cahier, An IV (1796), p. 1-23.

PRONY (RICHE de) Gaspard, « Notice sur un cours élémentaire d'analyse fait par Lagrange», *Journal de l'École Polytechnique*, 2e cahier, An IV (1796), p. 206-208.

PRONY (RICHE de) Gaspard, « Suite des leçons d'analyse », *Journal de l'École Polytechnique*, 3e cahier, An IV (1796), p. 209-273.

PRONY (RICHE de) Gaspard, « Suite des leçons d'analyse », *Journal de l'École Polytechnique*, 4e cahier, An V (1796), p. 459-569.

PRONY (RICHE de) Gaspard, « Introduction aux cours d'analyse pure et d'analyse appliquée à la mécanique », *Journal de l'École Polytechnique*, 6e cahier, tome II, An VII (1799), p. 213-218.

« Programme rétrograde d'admission à l'École Polytechnique, 1849 », *Nouvelles Annales de Mathématiques, 1e série*, tome 8, Paris, Carilian-Goeury et Dalmont, 1849, p. 74-75.

PROUHET Eugène, « Notice sur la vie et les travaux de M. Ch. Sturm » dans STURM Charles*, Cours d'analyse de l'École polytechnique, publié d'après le vœu de l'auteur par M. E. PROUHET*, tome I, Paris, Mallet-Bachelier, 1857.

PROUHET Eugène, « Notice sur la vie et les travaux d'Olry Terquem », *Bulletin de Bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques*, t 8, 1862, p. 81-90.

PRUVOST Émile, PIERON Dominique, *Leçons d'Algèbre*, t. 1, Paris, Imprimerie et librairie administratives et classiques, 1893.

« Question d'examen (1864) », *Nouvelles annales de mathématiques, 2e série*, 1865, p. 280-285.

Rapport du Conseil de Perfectionnement de l'École Impériale Polytechnique, Paris, Imprimerie Nationale, 1807.

« Rapport fait au Conseil supérieur de l'Instruction publique sur l'organisation de l'enseignement secondaire moderne, par M. BENOIST, membre du conseil », dans BEAUCHAMP (de) Alexis, *Recueil des lois et règlements sur l'enseignement supérieur*, t. 5, Paris, Delalain Frères, p. 151-157.

Recueil de règlements relatifs à l'enseignement secondaire, Paris, Imprimerie Nationale, 1900.

REYNAUD Antoine André Louis, *Élémens d'algèbre et introduction au calcul différentiel*, *Deuxième section,* Paris, Courcier, 1810.

REYNAUD Antoine André Louis, *Traité d'application de l'algèbre à la géométrie*, Paris, Vve Courcier, 1819.

REYNAUD Antoine-André-Louis, *Traité d'algèbre*, 5e éd., Paris, Vve Courcier, 1821.

REYNAUD Antoine André Louis et DUHAMEL Jean Marie Constant*, Problèmes et développmens sur diverses parties des mathématiques*, Paris, Bachelier, 1823.

RIBOT Alexandre, *La réforme de l'enseignement secondaire*, Paris, Armand Colin, 1900.

RIEMANN Bernhard, « Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe », traduit par Jules HOUËL, *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, t. 5, 1873, p. 20-48 et p. 79-96.

RITT Georges, *Manuel des aspirants à l'École Polytechnique*, Paris, Hachette, 1839.

ROGUET Charles, *Leçons de géométrie analytique à deux et à trois dimensions*, Paris, Carilian-Gœury et Dalmont, 1854.

SARRAU Émile, « Duhamel (1797-1872) », *Livre du centenaire, 1794-1894, Tome I, L'École et la Science*, Paris, Gauthier-Villars et Fils, 1895, p. 126-130.

SERRET Joseph Alfred, *Cours de calcul différentiel et intégral*, Paris, Gauthier-Villars, 1868.

SONNET Hippolyte, *Premiers éléments de calcul infinitésimal*, Paris, Hachette, 1869.

SONNET Hippolyte et FRONTERA Geronimo, *Éléments de géométrie analytique*, Paris, Hachette, 1854.

SOUCHON Abel, *Éléments de calcul différentiel et de calcul intégral*, Paris, Arthus Bertrand, 1870.

Statistiques de l'Enseignement Secondaire en 1865, Paris, Imprimerie Impériale, 1865

*Statistiques de l'Enseignement Secondaire en 1887, Première Partie : Enseignement Secondaire des Garçons ,*Paris, Imprimerie Nationale, 1887.

« Stolz. – Rôle de Bolzano dans l'histoire du calcul infinitésimal (255-279) », *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, 2e série, t. 7, 1883, p. 245.

STURM Charles, *Cours d'analyse de l'École polytechnique, publié d'après le vœu de l'auteur par M. E. PROUHET*, tome I, Paris, Mallet-Bachelier, 1857.

STURM Charles, *Cours d'analyse de l'École polytechnique, publié d'après le vœu de l'auteur par M. E. PROUHET*, tome II, Paris, Mallet-Bachelier, 1859.

STURM Charles, *Cours d'analyse de l'École polytechnique, deuxième édition revue et corrigée par M. E. PROUHET*, tome I, Paris, Mallet-Bachelier, 1863.

STURM Charles, *Cours d'analyse de l'École polytechnique, revu et corrigé par M. E. PROUHET, suivie de la théorie élémentaire des fonctions elliptiques par H. Laurent,* 8e éd*.,* tome I, Paris, Gauthier-Villars, 1884.

STURM Charles, *Cours d'analyse de l'École polytechnique, revu et corrigé par M. E. PROUHET, et augmenté de la théorie élémentaire des fonctions elliptiques par H. Laurent, dixième édition revue et mise au courant du nouveau programme de la licence par A. de Saint-Germain*, tome I, Paris, Gauthier-Villars, 1895.

« Supplément », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4e série, t. 1, 1901, p. XXXIII-XXXVI.

TANNERY Jules, « Cantor (G), …, Bendixson (J) », *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, t. 8, 1884, p. 162-171.

TANNERY Jules, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, Paris, Hermann, 1886.

TANNERY Jules, « Le baccalauréat ès-sciences mathématiques », *Revue Internationale de l'Enseignement*, t. XI, 1886, p. 519-527.

TANNERY Jules, « Mansion – *Résumé du cours d'analyse infinitésimale de l'Université de Gand* », *Bulletin des Sciences Mathématiques* ,2e série, tome XII, 1888, p. 95-97.

TANNERY Jules, « Les licences et les agrégations d'ordre scientifique », *Revue Internationale de l'Enseignement,* t. XXII, 1891, p. 473-498.

TANNERY Jules, « Préface » dans Eugène HUMBERT, *Traité d'Arithmétique*, Paris, Nony, 1893, p. I-VII.

TANNERY Jules, « Jordan (C.). – Cours d'analyse de l'École polytechnique. Deuxième édition, entièrement refondue », *Bulletin des Sciences mathématiques, 2e série,* t. XVII, p. 249-250.

TANNERY Jules, *Leçons d'arithmétique théorique et pratique*, Paris, Armand Colin, 1894.

TANNERY Jules, *Les idées mathématiques : notes prises par Maurice PRADINES à un cours de Jules TANNERY à l'École Normale Supérieure*, Paris, Sorbonne BIU Centrale, MS 2172, 1895-1896.

TANNERY Jules, « Les Mathématiques dans l'Enseignement secondaire », *La Revue de Paris*, 7e année, t. 4, 1900, p. 619-641.

TANNERY Jules, *Notions de mathématiques suivi de Notions historiques* par TANNERY Paul, Paris, Delagrave, 1903.

TANNERY Paul, « Programme d'un cours d'Histoire des Sciences », *La Revue du mois*, Paris, n° 13, 1907, p. 385-391.

TEDENAT Pierre, *Leçons élémentaires de mathématiques*, t. 1 et 2, Paris, Duprat, 1801.

TERQUEM Olry, *Nouveau manuel de géométrie*, 2e éd., Paris, Roret, 1838.

TERQUEM Olry, « Théories générales de géométrie analytique appliquées à la discussion des courbes algébriques de degrés supérieurs, à l'usage des candidats à l'École Polytechnique, par É. Gouré », *Nouvelles Annales de Mathématiques,* t. 1, 1842, p. 404-407.

TERQUEM Olry, « Théorème de M. Sturm », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 2, 1843, p. 97-106.

TERQUEM Olry, « Démonstration élémentaire d'un théorème de Newton », *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1844, t. 3, p. 580-582.

TERQUEM Olry, « Note », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 4, 1845, p. 203-205.

TERQUEM Olry, « Essai sur les principes fondamentaux de l'analyse transcendante », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 4, 1845, p. 365-366.

TERQUEM Olry, « Théorèmes sur les puissances des Nombres», *Nouvelles Annales de Mathématiques,* t. 5, 1846, p. 70-78.

TERQUEM Olry, « De l'examen des candidats à l'École Polytechnique, par un ancien élève de cette école », *Nouvelles Annales de Mathématiques,* t. 5, 1846, p. 407-411.

TERQUEM Olry, « Avis », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 6, 1847, p. 204.

TERQUEM Olry, « Pensées de d'Alembert sur divers sujets de mathématiques », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 7, 1848, p. 204.

TERQUEM Olry, « Programme rétrograde d'admission à l'École polytechnique, 1849 », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 8, 1849, p. 74-75.

TERQUEM Olry, « Exercices et problèmes de calcul différentiel et intégral, par M. F.-D. Greory », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 9, 1850, p. 44-45.

TERQUEM Olry, « Appendice, 1851 », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 10, 1851, p. 154-156.

TRESSE Arthur, « Leçons d'algèbre par Ch. Briot, revues et mises au courant des nouveaux programmes, par M. E. Lacour », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, t. 17, 1898, p. 143-145.

VACQUANT Charles et MACÉ de LÉPINAY Auguste, *Principes d'Algèbre*, 13e éd., Paris, Delagrave, 1898.

VALLÉE Gustave, « L'École centrale de la Vienne (1795-1805) », *Annales révolutionnaires*, t.9, Paris, Armand Colin, 1917, p202-220.

VALLÈS Jules, *Le Bachelier*, Paris Gallimard, 1974.

VINCENT A.-J.-H., « Note sur la construction des tables de sinus naturels », *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. 1, 1842, p. 272-277.

VOGT Henri, « Traité d'algèbre par MM. N. Cor […] et J. Riemann », », *Revue de mathématiques spéciales*, t. 4, 1896-1897 et 1897-1898, p. 400.

X., « Première leçons d'algèbre élémentaire – Nombres positifs et négatifs. – Opérations sur les polynômes, par Henri Padé […] », *Journal de mathématiques élémentaires*, 4e série, t. 1, 1892, p. 143-144.

SOURCES SECONDAIRES

ARBOLEDA, « French Treatises in the Teaching of Analysis in Colombia », 2002, http://www.academia.edu/4210389/French_Treatises_in_the_Teaching_of_Analysis_in_Colombia , consulté le 01/09/2017.

AUROUX Sylvain, « La philosophie mathématique de Condillac », *Bulletin de la Société Française de Philosophie,* vol. 75, 1981, p. 7-17.

AUVINET Jérôme, *Charles-Anges Laisant : itinéraires et engagements d'un mathématicien, d'un siècle à l'autre (1841-1920),* Thèse de doctorat, Université de Nantes, Nantes, 2011.

AUVINET Jérôme, *Charles-Anges Laisant : itinéraires et engagements d'un mathématicien de la Troisième République,* Paris, Hermann, 2013.

BANTIGNY Ludivine, « De la modernité dans les lycées des années 1850 », dans Pierre CASPARD, Jean-Noël LUC et Philippe SAVOIE (dir.), *Lycées, lycéens, lycéennes, deux siècles d'histoire,* Paris, INRP, 2005, p. 269-281

BARBIN Évelyne, « Historicité de la notion d'évidence en géométrie. Entre évidence visuelle et évidence manipulatoire », *Historia e Educacao Matematica*, Université de Braga, 1996, p. 124-135.

BARBIN Evelyne, *La révolution mathématique du XVII^e^ siècle*, Paris, Ellipses, 2006.

BARBIN Evelyne, « On the argument of simplicity in *Elements* and schoolbooks of geometry », *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 66, 2007, p.225-242.

BARBIN Evelyne, « Le Rapport sur les progrès de l'analyse de Joseph Bertrand », dans Evelyne BARBIN, Jean-Luc GODET et Gerhardt STENGER (dir.), *1867, L'année de tous les rapports*, Pornic, Éditions du Temps, 2009.

BARBIN Évelyne, "Teaching of conics in 19th and 20th centuries: on the conditions of changing (1854–1997)", dans K. Bjarnadottir, F. Furinghetti, J. M. Matos, et Gert Schubring (éd.), *Proceedings of the Second International Conference on the History of Mathematics Education*, Lisbonne, UIED, 2012, p. 44-59.

BARBIN Évelyne et MOYON Marc, « Avant-propos » dans Évelyne BARBIN et Marc MOYON (dir.), *Les ouvrages de mathématiques dans l'Histoire. Entre recherche, enseignement et culture*, Limoges, Presses Universitaires de Limoges, 2013, p. 7-10.

BARBIN Évelyne, « L'enseignement des mathématiques aux jeunes filles et les stéréotypes de genre (1880-1960) », *Repères IREM*, n° 97, 2014, p. 67-89.

BARBIN Evelyne, « Top-down: the role of the Preparatory Classes to the Grandes Écoles into the French System of Mathematical Curriculum (1870-1970) », dans *Proceedings of the Third International Conference on the History of Mathematics Education,* Uppsala Universitet, 2015, p. 49-64.

BARBIN Évelyne, « Descriptive Geometry in France : History of Élémentation of a method (1795-1865) », *International Journal for the History of Mathematics Education*, n° 10 2016, p.

BARBIN Évelyne, « Le réseau des professeurs de mathématiques des classes préparatoires au XIXe siècle », Arnaud HUREL (dir.), *La France savante* (édition électronique), Paris, 2017, http://cths.fr/_files/ed/pdf/13_barbin_frasav.pdf , consulté le 31/08/2017.

BARROW-GREEN June, « From cascades to calculus : Rolle's theorem", dans Eleanor ROBSON and Jacqueline STEDALL (éd.), *The Oxford handbook of the history of mathematics*, New York, Oxford University Press, 2009, p. 737-754.

BELHOSTE Bruno et LÜTZEN Jesper, « Joseph Liouville et le Collège de France », *Revue d'Histoire des Sciences*, Vol. 37, 1984, p. 255-304.

BELHOSTE Bruno, *Cauchy. Un mathématicien légitimiste au XIXe siècle,* Paris, Belin, 1985.

BELHOSTE Bruno, « Les caractères généraux de l'enseignement secondaire scientifique de l'Ancien Régime à la Première Guerre mondiale ». *Histoire de l'éducation*, n° 41,1989, p. 3-46.

BELHOSTE Bruno, « L'enseignement secondaire français et les sciences au début du XXe siècle. La réforme de 1902 des plans d'études et des programmes », *Revue d'histoire des sciences*, t. 43, 1990, p. 371-400.

BELHOSTE Bruno et TATON René, « L'invention d'une langue des figures », dans Jean DHOMBRES (dir.), *L'École normale de l'An III, Leçons de mathématiques : édition annotée des cours de Laplace, Legendre et Monge,* Paris, Dunod, 1992, p. 269-303.

BELHOSTE Bruno, « De l'École des Ponts et Chaussées à l'École centrale des travaux publics », *Bulletin de la Sabix*, n° 11, 1994, p. 1-57

BELHOSTE Bruno, DAHAN-DALMEDICO Amy et PICON Antoine (dir.), *La formation polytechnicienne, 1794-1994*, Paris, Dunod, 1994.

BELHOSTE Bruno, *Les Sciences dans l'Enseignement secondaire français, Textes officiels. Tome I: 1789–1914,* Paris, Institut national de recherche pédagogique, 1995.

BELHOSTE Bruno, « Le Bicentenaire de l'École normale supérieure. Entre histoire et mémoire », Histoire de l'Éducation, n° 69, 1996, p. 81-86.

BELHOSTE Bruno, « Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques », *Revue d'Histoire des Mathématiques*, Vol. 4, 1998, p. 289-304.

BELHOSTE Bruno, « A propos des missions de l'École polytechnique : une réflexion historique », *Bulletin de la Sabix*, n° 26, 2000, p. 23-26.

BELHOSTE Bruno, « La préparation aux grandes écoles scientifiques au XIXe siècle : établissements publics et institutions privées », *Histoire de l'Éducation*, n° 90, 2001, p. 101-130.

BELHOSTE Bruno, « Anatomie d'un concours. L'organisation de l'examen d'admission à l'École polytechnique de la Révolution à nos jours », *Histoire de l'Éducation*, n° 94, 2002, p. 141-175.

BELHOSTE Bruno, *La formation d'une technocratie : L'École polytechnique et ses élèves de la Révolution au Second Empire*, Paris, Belin, 2003.

BELLA Sandra, « L'Analyse des infiniment petits pour l'usage des lignes courbes : ouvrage de recherche ou d'enseignement ? », dans Évelyne BARBIN et Marc MOYON (dir.), *Les ouvrages de mathématiques dans l'Histoire. Entre recherche, enseignement et culture*, Limoges, Presses Universitaires de Limoges, 2013, p. 73-85.

BELNA Jean-Pierre, *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege. Théories, conceptions et philosophie*, Paris, Vrin, 1996.

BELNA Jean-Pierre, *Histoire de la théorie des ensembles*, Paris, Ellipses, 2009.

BENIS-SINACEUR Hourya, « Cauchy et Bolzano », *Revue d'Histoire des Sciences*, 1973, tome 26, p. 97-112.

BKOUCHE Rudolf, « La place de la géométrie dans l'enseignement des sciences en France : de la réforme de 1902 à la réforme des mathématiques modernes »,dans Bruno BELHOSTE, Hélène GISPERT et Nicole HULIN (dir.), *Les sciences au lycée. Un siècle de réforme des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*, Paris, Vuibert, 1996, p. 121-127.

BKOUCHE Rudolf, « De la modernité dans l'enseignement des mathématiques », dans Évelyne BARBIN et Marc MOYON (dir.), *Les ouvrages de mathématiques dans l'Histoire. Entre recherche, enseignement et culture*, Limoges, Presses Universitaires de Limoges, 2013, p. 205-216.

BLAY Michel, « Deux moments de la critique du calcul infinitésimal : Michel Rolle et Georges Berkeley », *Revue d'Histoire des Sciences*, tome 39, 1986, p. 223-253.

BLONDEL Christine, « Devenir un savant par correspondance à la fin du 18e siècle : échanges scientifiques et techniques entre deux jeunes amateurs, Ampère et Couppier », Dix-huitième siècle, n° 40, 2008, p. 79-92.

BOIS Pierre-Antoine et VERDIER Norbert, *Joseph Boussinesq (1842-1929) : de Gap à Lille ou de l'élève au savant technicien*, http://cnriut09.univ-lille1.fr/articles/Articles/Fulltext/260a.pdf, consulté le 29/08/17.

BONIFACE Jacqueline, *Les constructions des nombres réels dans le mouvement d'arithmétisation de l'analyse*, Paris, Ellipses, 2002.

BOTTAZINI Umberto, *The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass*, New-York, Springer-Verlag, 1986.

BOYER Carl B., *A History of Mathematics*, New-York, Wiley and Sons, 1968.

BRADLEY Margaret, « Gaspard-Clair-François-Marie Riche de Prony (1755-1839), Constructeur de ponts », *Bulletin de la Sabix*, N° 48, 2011, p. 5-13.

BRECHENMACHER Frédéric, « Un portrait kaléidoscopique du jeune Camille Jordan », *Images des mathématiques*, CNRS 2012, http://images.math.cnrs.fr/Un-portrait-kaleidoscopique-du.html , consulté le 30/08/2017.

BREZINSKI Claude, *Charles Hermite : père de l'analyse mathématique moderne*, Paris, Belin, 1990.

BRIAND Jean-Pierre et CHAPOULIE Jean-Michel, *Les collèges du peuple, L'enseignement primaire supérieur et le développement de la scolarisation prolongée sous la IIIe République*, 2e éd., Rennes, Presses Universitaires de Rennes, 2011.

BRU Bernard et MARTIN Thierry, « Le baron de Férussac, la couleur de la statistique et la topologie des sciences », *Journ@l Électronique d'Histoire des Probabbilités et de la Statistique*, vol. 1, n°2, 2005, www.jehps.net, consulté le 29/08/2017, p. 1-43.

BRU Marie-France, BRU Bernard et EID Salah, « Une introduction analytique à la théorie analytique. Hermann Laurent (1873) », *Journ@l Electronique d'Histoire des Probabilités et de la Statistique*, vol. 8, 2012, www.jehps.net, consulté le 29/08/2017

BRUTER Annie, « Les abrégés d'histoire d'Ancien Régime en France (XVIIe-XVIIIe siècles) », dans Jean-Louis JADOULLE (dir.), *Les manuels scolaires d'histoire : passé, présent, avenir*, Louvain-la-Neuve, Université Catholique de Louvain, 2005.

BRUTER Annie, « Le cours magistral comme objet d'histoire », *Histoire de l'Éducation*, n° 120, 2008, p. 5-32.

BRUTER Annie, « Le cours magistral dans l'enseignement secondaire. Nature, histoire, représentations (1802-1902). », *Histoire@Politique*, n° 21, 2013, p. 22-38.

CARAMALHO DOMINGUES João, *Lacroix and the Calculus*, Bâle, Birkhäuser, 2008.

CAVAILLÈS Jean, *Philosophie mathématique*, Paris, Hermann, 1962.

CHOPPIN Alain, « L'histoire des manuels scolaires. Une approche globale », *Histoire de l'Éducation*, n° 9, 1980, p. 1-25.

CHOPPIN Alain, « Le cadre législatif et réglementaire des manuels scolaires. I, De la Révolution à 1939 », *Histoire de l'Éducation*, n° 29, 1986, p. 21-58.

CHOPPIN Alain, « Le manuel scolaire, une fausse évidence historique », *Histoire de l'Éducation*, n° 117, 2008, p. 7-56.

CLASTRES Patrick, « L'internat public au XIXe. Question politique ou pédagogique ? », dans Pierre CASPARD, Jean-Noël LUC et Philippe SAVOIE (dir.), *Lycées, lycéens, lycéennes, deux siècles d'histoire,* Paris, INRP, 2005, p. 397-413.

COSTABEL Pierre, « L'activité scientifique d'Ampère », *Revue d'Histoire des Sciences*, Vol. 30, 1977, p. 105-112.

COUMET Ernest, « Paul Tannery : L'organisation de l'enseignement de l'histoire des sciences », *Revue de synthèse*, n° 102, 1981, p. 87-123.

CRILLY Tony, « The *Cambridge Mathematical Journal* and its descendants: the linchpin of a research community in the early and mid-Victorian Age », *Historia Mathematica*, Vol. 31, 2004, p. 455-497.

CROIZAT Barnabé, *Gaston Darboux : naissance d'un mathématicien, genèse d'un professeur, chronique d'un rédacteur*, thèse de doctorat, Université de Sciences et Technologie de Lille, 2016.

DAHAN-DALMEDICO Amy, « La méthode critique du "mathématicien-philosophe" » dans Jean DHOMBRES (dir.), *L'École normale de l'An III, Leçons de mathématiques : édition annotée des cours de Laplace, Legendre et Monge*, Paris, Dunod, 1992, p. 172-192.

DAHAN-DALMEDICO Amy et PEIFFER Jeanne, *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales*, Paris, Seuil, 1986.

DAY Charles R., « Technical and Professional Education in France: The Rise and Fall of l'Enseignement Secondaire Spécial, 1865-1902», *Journal of Social History*, vol. 6, 1972-1973, p. 177-201.

DAY Charles R., *Les Écoles d'arts et métiers : l'enseignement technique en France XIX*e*-XX*e *siècles,* trad. Jean-Pierre BARDOS*, Paris, Belin 1991.*

DELCOURT Jean, « Analyse et Géométrie, histoire des courbes gauches. De Clairaut à Darboux », *Archive for History of Exact Sciences,* Vol. 65, N° 3, 2011, p. 229-293.

DHOMBRES Jean, *Nombre, mesure et continu. Épistémologie et histoire*, Paris, CEDIC/Nathan, 1978.

DHOMBRES Jean, « Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonction », *Archive for History of Exact Sciences*, 1986, t. *36*, p. 91–181.

DHOMBRES Jean, « L'École Polytechnique et ses historiens », dans Ambroise FOURCY, *Histoire de l'École Polytechnique*, réédition, Paris, Belin, 1987, p. 7-69.

DHOMBRES Jean, « Les présupposés d'Euler dans l'emploi de la méthode fonctionnelle », *Revue d'Histoire des Sciences*, vol. 40, 1987, p. 179-202.

DHOMBRES Jean, « L'affirmation du primat de la démarche analytique », dans Jean DHOMBRES (dir.), *L'École normale de l'An III, Leçons de mathématiques : édition annotée des cours de Laplace, Legendre et Monge*, Paris, Dunod, 1992, p. 11-43.

DHOMBRES Jean et OTERO Mario H., « Les Annales de mathématiques pures et appliquées, le journal d'un homme seul au profit d'une communauté enseignante » dans Elena AUSEJO et Mariano HOMIGON (éd.), *Messenger of mathematics : European mathematical journals, 1800-1946*, Madrid, Siglo XXI, 1993.

DHOMBRES Jean et DHOMBRES Nicole, *Lazare Carnot*, Paris, Fayard, 1997.

DHOMBRES Jean, *Joseph Fourier (1778-1830) créateur de la physique mathématique*, Paris, Belin, 1998.

DUGAC Pierre, « Charles Méray (1835-1911) et la notion de limite », *Revue d'histoire des sciences et de leurs applications*, 1970, vol. 23, p. 333-350.

DUGAC Pierre, « Éléments d'analyse de Karl Weierstras », *Archive for History of Exact Science*, n° 10, 1973, p. 41-176.

DUGAC Pierre, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Paris, Vrin, 1976

DUGAC Pierre, « Cournot et le calcul infinitésimal » dans *Etudes pour le centenaire de la mort de A. Cournot,* Paris, Economica, 1978, p. 66-73.

DUGAC Pierre, « Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler », *Cahier du séminaire d'Histoire des Mathématiques,* N° 5, 1984, p. 49-285 et N°6, 1985, p. 79-217.

DUGAC Pierre, *Histoire de l'analyse*, Paris, Vuibert, 2003.

DÜRR Michel, « Ampère, professeur de légende », *Bulletin de la Sabix*, N° 37, 2004, p. 21-30.

EHRHARDT Caroline, « L'identité sociale d'un mathématicien et enseignant**,** Sylvestre-François Lacroix (1765-1843) », *Histoire de l'éducation*, No. 123, Paris, INRP, 2009, p. 5-43.

EHRHARDT Caroline et d'ENFERT Renaud, « Les mathématiques dans les écoles centrales (1795-1802) : un chaînon entre l'Ancien Régime et le XIX^{e} siècle » dans Christian GILAIN et Alexandre GUILBAUD (dir.), *Sciences mathématiques, 1750-1850, Continuités et ruptures*, Paris, CNRS Éditions, 2015, p. 155-180.

d'ENFERT Renaud et Gispert Hélène, « L'enseignement mathématique dans le primaire et le secondaire » dans François JACQUET-FRANCILLIN, Renaud d'ENFERT et Laurence LOEFFEL (dir.),. *Une histoire de l'école. Anthologie de l'éducation et de l'enseignement en France XVIIIe-XXe siècle*, Paris, Retz, 2010, p. 333-341.

EPPLE Moritz, « The End of the Science of Quantity: Foundations of Analysis, 1860-1910 », dans Hans Niels JAHNKE (dir.), *A History of Analysis*, Providence, American Mathematical Society, 2003, p. 291-323.

FRASER Craig G., « Joseph Louis Lagrange's Algebraic Vision of the Calculus », *Historia Mathematica*, N° 15, 1987, p. 38-53.

FRIEDELMEYER Jean-Pierre, *Le Calcul des Dérivations d'Arbogast dans le projet d'algébrisation de l'analyse à la fin du dix-huitième siècle*, Thèse de doctorat, Nantes, 1993.

GARDIÈS Jean-Louis, *Qu'est-ce que et pourquoi l'analyse ? Essai de définition*, Paris, Vrin, 2001.

GENTIL Bruno, « Les notes de cours d'AugusteComte, élève de l'École Polytechnique (1814-1816) », *Bulletin de la Sabix*, N°30, 2002, p. 51-56.

GENTIL Bruno, *Auguste COMTE, l'enfant terrible de l'École Polytechnique*, Paris, Cyrano, 2012.

GERINI Christian, *Les Annales de Gergonne, apport scientifique et épistémologique dans l'histoire des mathématiques*, Villeneuve d'Ascq, Éd. Du Septentrion, 2002.

GERINI Christian et VERDIER Norbert, « Enseigner les mathématiques au XIXème siècle. Portraits d'acteurs : du Bourguet, Miquel et l'abbé Aoust », *Repères-IREM*, n° 83, 2011, p. 57-74.

GERINI Christian et VERDIER Norbert, « L'émergence de la presse mathématique en Europe au 19ème siècle. Formes éditoriales et études de cas (France, Espagne, Italie et Portugal) », *College Publications*, Collection « Cahiers de logique et d'épistémologie », Vol. 19, Oxford, 2014.

GILAIN Christian, « Condorcet et le calcul intégral », dans Roshi RASHED (dir.*), Sciences à l'époque de la Révolution française. Recherches historiques*, Paris, Librairie A. Blanchard, 1988, p. 87-147.

GILAIN Christian, « Cauchy et le cours d'analyse de l'École polytechnique », *Bulletin de la Sabix*, N° 5, 1989, p. 3-31.

GILAIN Christian, « La place de l'analyse dans la classification des mathématiques : de l'*Encyclopédie* à *la Méthodique* », *Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie*, N° 45, 2010, p. 109-128.

GILAIN Christian et GUILBAUD Alexandre, « Articulation XVIIe-XIXe siècles : un bilan historiographique », dans Christian GILAIN et Alexandre GUILBAUD (dir.), *Sciences mathématiques, 1750-1850, Continuités et ruptures*, Paris, CNRS Éditions, 2015, p. 15-110.

GILLIPSIE Charles C., « Lazare Carnot savant » dans GILLIPSIE Charles C. et YOUSCHKEVITCH Adolf P., *Lazare Carnot savant et sa contribution à la théorie de l'infini mathématique*, Paris, Vrin, 1979, P. 17-165.

GILLIPSIE Charles C., « Un enseignement hégémonique : les mathématiques » dans BELHOSTE, DAHAN DALMEDICO et PICON, *La formation polytechnicienne, 1794-1994*, Paris, Dunod, 1994.

GILLIPSIE Charles C., *Science and Polity in France: the revolutionary and Napoleonic Years*, Princeton/Oxford, Princeton University Press, 2004.

GISPERT Hélène, *Jordan et les fondements de l'analyse (étude comparée des deux premières éditions de son cours d'analyse)*, Paris, Publications mathématiques d'Orsay, 1982.

GISPERT Hélène, « Sur les fondements de l'analyse en France », *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 28, 1983, p. 37-106.

GISPERT Hélène dans « La correspondance de G. Darboux et J. Houël », *Cahier du séminaire d'histoire des mathématiques,* t. 8, 1987, p. 67-202.

GISPERT Hélène, « Principes de l'analyse chez Darboux et Houël (1870-1880) : textes et contextes », *Revue d'Histoire des Sciences,* N° 43, 1990, p. 181-220.

GISPERT Hélène, « La Société Mathématique de France », *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences*, N°34, 1991, p. 11-180.

GISPERT Hélène, « La théorie des ensembles en France avant la crise de 1905 », *Revue d'Histoire des Mathématiques*, N° 1, 1995, p. 39-81.

GISPERT Hélène, HULIN Nicole et ROBIC Marie-Claire, *Science et enseignement. L'exemple de la grande réforme des programmes du lycée au début du XX^e^ siècle*, Paris, INRP/Vuibert, 2007.

GLIÈRE André-Jean, *Histoire et épistémologie des nombres négatifs de d'Alembert à nos jours*, Thèse de doctorat, EHESS, Paris, 2007.

GLIÈRE André-Jean, « La révolution conceptuelle accomplie par Hermann Hankel à propos des quantités négatives dans sa *Théorie des systèmes de nombres complexes* », dans Évelyne BARBIN et Marc MOYON (dir.), *Les ouvrages de mathématiques dans l'Histoire. Entre recherche, enseignement et culture*, Limoges, Presses Universitaires de Limoges, 2013, p. 161-172.

GOLDSTEIN Catherine, « Un arithméticien contre l'arithmétisation : les principes de Charles Hermite », dans Dominique Flament et Philippe Nabonnand (dir.), *Justifier en mathématiques*, Paris, MSH, 2011, p. 129-165.

GOLDSTEIN Catherine, « Les mathématiques comme science d'observation : les convictions de Charles Hermite », dans Francesca FERRARA, Livia GIACARDI, Miranda MOSCA, *Associazione Subalpina Mathesis Conferenze e seminari 2010-2011*, Turin, Kim Williams, 2011, p. 147-156.

GOLDSTEIN Catherine, « Charles Hermite between pure and applied mathematics », *Oberwolfach Reports 10-1*, 2013, p. 693-696.

GRABINER Judith V., « The origins of Cauchy's theory of the derivative », *Historia Mathematica*, N°5, 1978, p. 379-409.

GRABINER Judith V., *A Historian Looks Back: The Calculus as Algebra and Selected Writings*, Washington DC, Mathematical Association of America, 2010.

GRATTAN-GUINNESS Ivor, *Convolutions in French Mathematics, 1800-1840*, Bâle, Birkhaüser, 1990.

GRATTAN-GUINNESS Ivor, *The Search for Mathematical Roots 1870-1940: Logics, Sets Théories and the foundations of Mathematics from Cantor through Russel to Gödel*, Princeton, Princeton University Press, 2000.

GRATTAN-GUINNESS Ivor, « The Ecole Polytechnique, 1794-1850: Differences over Educational Purpose and Teaching Practice», *The American Mathematical Monthly*, Vol. 112, 2005, p. 233-250.

GRATTAN-GUINNESS Ivor, « Cournot et la mécanique (1826-1834) et particulièrement son utilisation des inégalités » dans Thierry MARTIN (éd.), *Actualité de Cournot*, Paris, Vrin, 2005, p. 69-86.

GRAY, Jeremy, *The Real and the Complex : a History of Analysis in the 19th Century*, Switzerland : Springer, 2015.

GRISON Emmanuel, « Lazare Carnot et le grand Comité de Salut public», *Bulletin de la Sabix*, N° 23, 2000, p. 15-21.

GRISON Emmanuel, « Lagrange », *Bulletin de la Sabix*, N° 23, 2000, p. 44-52.

GUITARD Thierry, « La querelle des infiniment petits à l'École Polytechnique au XIXe siècle », *Historia Scientiarum*, 1986, N° *30*, p. 1–61.

HÉRY Évelyne, « Les pratiques pédagogiques, objet d'histoire », *Carrefours de l'Éducation*, n° 19, 2005, p. 93-105.

HOCHKIRCHEN Thomas, « Theory of Measure and Integration from Riemann to Lebesgue » dans Hans Niels JAHNKE (dir.), *A History of Analysis*, Providence, American Mathematical Society, 2003, p. 262-290.

HULIN Nicole, « La rivalité École normale - École polytechnique. Un antécédent : l'action de Pasteur sous le Second Empire », *Histoire de l'Éducation*, 1986, vol. 30, p. 71-81.

HULIN Nicole, *L'organisation de l'enseignement des sciences: la voie ouverte par le Second Empire*, Paris, Éditions du C.T.H.S., 1989.

HULIN Nicole, « L'histoire des sciences et l'enseignement scientifique. Une composition en histoire des sciences à l'agrégation », *Revue de Synthèse, 4e série*, n° 2-3-4, 2001, p. 393-410.

HULIN Nicole, *L'enseignement et les sciences. L'exemple français au début du XXe siècle*, Paris, Vuibert, 2005.

HULIN Nicole, *Culture scientifique et humanisme. Un siècle et demi d'engagement sur le rôle et la place des sciences,* Paris, L'Harmattan, 2011.

JACOB Marie, « L'École royale militaire : un modèle selon l'*Encyclopédie* », *Recherches sur Diderot et sur l'Encyclopédie*, n° 43, p. 105-126.

Niels JAHNKE (dir.), *A History of Analysis*, Providence, American Mathematical Society, 2003.

JAHNKE Hans Niels, « Algebraic Analysis in the 18th Century», dans Hans Niels JAHNKE (dir.), *A History of Analysis*, Providence, American Mathematical Society, 2003, p. 105-136.

JANIN Joeph, « La vie passionnée d'André Marie Ampère », *Bulletin de la Sabix*, N° 37, 2004, p. 10-20.

JONGMANS François, *Eugène Catalan, géomètre sans patrie, républicain sans république*, Mons, Société belge des professeurs de mathématiques d'expression française, 1996.

JULIA Dominique, « L'École normale de l'an III et "l'art d'enseigner" : les séances de débats »*,* *La Révolution Française*, n°4, 2013, p. 1-20.

JULIA Dominique (dir.), *L'École normale de l'An III. Une institution révolutionnaire et ses élèves – Introduction historique*, vol V, Paris, Éditions Rue d'Ulm, 2016.

JUNG Marjorie, « Cousin Jacques-Antoine Joseph », http://cths.fr/an/prosopo.php?id=117280# , consulté le 28/08/2017 , consulté le 29/08/2017.

KAHN Pierre, « L'influence du positivisme dans la réforme de l'enseignement secondaire de 1902 », *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences*, t. 49, « Études sur l'histoire de l'enseignement des sciences physiques et naturelles », textes recueillis par Nicole HULIN, 2001, p. 181-194,

KAHN Pierre, *La leçon de choses, Naissance de l'enseignement des sciences à l'école primaire*, Villeneuve d'Ascq, Presses Universitaires du Septentrion, 2002.

LAMANDÉ Pierre, « La Mutation de l'enseignement scientifique en France (1750-1810) et le rôle des écoles centrales : l'exemple de Nantes », *Sciences et Techniques en Perspective*, vol. 15, Université de Nantes, 1988-1989.

LAMANDÉ Pierre, « La place des Bretons dans le recrutement des grandes écoles », dans Jean DHOMBRES (dir.), *La Bretagne des savants et des ingénieurs : 1825-1900*, Rennes, Ouest France, 1994.

LAMANDÉ Pierre, « La conception des nombres en France autour de 1800 : l'œuvre didactique de François Sylvestre Lacroix », *Revue d'Histoire des Mathématiques*, N° 10, 2004, p. 45-106.

LANGINS Janis, *La République avait besoin de savants*, Paris, Belin, 1987.

LANGINS Janis, « Sur l'enseignement et les examens à l'Ecole polytechnique sous le Directoire : A propos d'une lettre inédite de Laplace », *Revue d'Histoire des Sciences*, tome 40, n°2, 1987, p. 145-177.

LAURENTIN Jérôme, « Réflexions sur la triangulation des polygones convexes », *Bulletin de la Sabix*, N° 44, 2009, p. 141-150.

LE BARS Loïc, *Les professeurs de silence. Maîtres d'études, maîtres répétiteurs et répétiteurs au XIX^e siècle*, Paris, L'Harmattan, 2014.

LE CŒUR Marc, « Les lycées dans la ville : l'exemple parisien (1802-1914) », *Histoire de l'Éducation*, n° 90, 2001, p. 131-167.

LÉVY-LAMBERT Hubert, « Quelques polytechniciens dans l'affaire Dreyfus », http://www.annales.org/archives/x/dreyfusards.html , consulté le 28/08/2017/

LORRAIN Anne-Marie et PEPE Luigi, « Le Ms. Vitt. Em. 1509 et les débuts de l'enseignement de l'analyse mathématique à l'École polytechnique », dans FOURIER Jean-Baptiste, *Leçons d'un cours d'analyse rédigées par C. L. Donop*, *Ms. Vitt. Em. 1509*, Edité par Anne-Marie LORRAIN, Ferrare, 1989.

LUBET Jean-Pierre, « Faut-il étudier le calcul aux différences finies avant d'aborder le calcul différentiel et intégral ? Un état des lieux de la question dans la seconde moitié du XVIII ^e siècle », dans Évelyne BARBIN et Marc MOYON (dir.), *Les ouvrages de mathématiques dans l'Histoire. Entre recherche, enseignement et culture*, Limoges, Presses Universitaires de Limoges, 2013, p. 133-147.

LUBET Jean-Pierre, « Le calcul aux différences finies, une nouvelle branche de l'analyse », dans Christian GILAIN et Alexandre GUILBAUD (dir.), *Sciences mathématiques, 1750-1850, Continuités et ruptures*, Paris, CNRS Éditions, 2015, p. 443-473.

LUBET Jean-Pierre et FRIEDELMEYER Jean-Pierre, *L'analyse algébrique. Un épisode clé de l'histoire des mathématiques,* Paris, Ellipses, 2015.

LÜTZEN Jesper, *Joseph Liouville 1809-1882 : Master of Pure and Applied Mathematics*, New-York, Springer-Verlag, 1990.

LÜTZEN Jesper, « The Foundation of Analysis in the 19th Century », dans Hans Niels JAHNKE (dir.), *A History of Analysis*, Providence, American Mathematical Society, 2003, p.155-195.

LÜTZEN Jesper, « Between Rigor and Applications: Developments in the Concept of Function in Mathematical Analysis », dans Mary Jo NYE (éd.), *The Cambridge History of Science*, Vol. 5, Cambridge, Cambridge University Press, 2003, p. 468-487.

MARTIN Thierry, « Cournot et les mathématiques », dans Évelyne BARBIN et Maurice CAVEING (dir.), *Les philosophes et les mathématiques*, Paris, Ellipses, 1996, p. 193-211.

MAYEUR Françoise, *Histoire de l'enseignement et de l'éducation*, tome III, 2e éd., Paris, Perrin 2004.

MAWHIN Jean, « Une brève histoire de l'Université catholique de Louvain », *Revue des questions scientifiques*, n° 163, 1992, p. 369-386.

MAZ'A Vladimir Gilelevič et SHAPOSHNIKOVA Tatyana, *Jacques Hadamard, un mathematicien universel,* traduction Gérard TRONEL, Les Ulis, EDP Sciences, 2005.

MÉROT Catherine, « La fréquentation des écoles centrales », *Bibliothèque de l'École des Chartes*, vol. 145, 1987, p. 407-426.

MINOT Jacques, *Histoire des universités françaises*, Paris, Presses Universitaires de France, 1991.

MOATTI Alexandre, *Gaspard-Gustave de Coriolis (1792-1843) : un mathématicien, théoricien de la mécanique appliquée*, Thèse de doctorat, Université Paris I – Sorbonne, Paris, 2011.

MOUSSARD Guillaume, *Les notions de problèmes et de méthodes dans les ouvrages d'enseignement de la géométrie en France (1794-1891),* Thèse de doctorat, LMJL, Université de Nantes, Nantes, 2015.

NOGUÈS Boris, « Élèves ou auditeurs? Le public des facultés de lettres et de sciences au XIXe siècle (1808-1878) », *Histoire de l'éducation*, N°. 120, Paris, INRP, 2008, p. 77-97.

NYE Mary Jo, « The Boutroux Circle and Poincaré's conventionalism », *Journal of the History of Ideas*, t. XL, 1979, p. 107-120.

PEIFER Jeanne, « Joseph Liouville (1809-1882) : ses contributions à la théorie des fonctions d'une variable complexe », *Revue d'Histoire des Sciences*, N° 36, 1983, p. 209-248.

PENSIVY Michel, « Jalons pour une épistémologie de la série infinie du binôme », *Sciences et Techniques en Perspective,* vol. 14, Université de Nantes, 1987

PLANTADE François, « Comment Jules Houël a rédigé la partie « Les fonctions elliptiques » de son cours de Calcul infinitésimal avec l'aide de Gösta Mittag-Leffler », dans Évelyne BARBIN et Marc MOYON (dir.), *Les ouvrages de mathématiques dans l'Histoire. Entre recherche, enseignement et culture*, Limoges, Presses Universitaires de Limoges, 2013, p. 173-185.

PALMER Robert R., « The Central Schools of the First French Republic: A Statistical survey », *Historical Reflexions*, Vol. 7, 1980, p. 223-247.

PEIFFER Jeanne, « Joseph Liouville : (1809-1882) : ses contributions à la théorie des fonctions d'une variable complexe », *Revue d'Histoire des Sciences*, Vol. 36, 1983, p. 209-24.

PICON Antoine, *L'invention de l'ingénieur moderne : l'École des Ponts et Chaussées, 1747-1851*, Paris, Presses de l'École nationale des Ponts et Chaussées, 1992.

PINEAU François, *Historiographie de Paul Tannery et réceptions de son œuvre : sur l'invention du métier d'historien des sciences*, thèse de Doctorat, Université de Nantes, 2010.

PRÉVERAUD Thomas, *Circulations mathématiques franco-américaines : transferts, réceptions, incorporations et sédimentations (1815-1876),* Thèse de doctorat, CRHIA, Université de Nantes, Nantes, 2014.

PROST Antoine, *Histoire de l'enseignement en France, 1800-1967*, Paris, Armand Colin, 1968.

PROST Antoine, « De l'enquête à la réforme. L'enseignement secondaire des garçons de 1898 à 1902 », Histoire de l'éducation, N° 119, Paris, INRP, 2008, p. 29-80.

RASMUSSEN Anne, « Critique du progrès, « crise de la science » : débats et représentations du tournant du siècle », *Mil neuf cent*, n° 14, 1996, p. 89-113.

RENAUD Hervé, *Jules Tannery : les nombres, objet d'étude et sujet d'un renouvellement de l'enseignement des mathématiques (1886-1903)*, Mémoire de Master 2 d'histoire des sciences et des techniques, Nantes, Université de Nantes, 2011.

RENAUD Hervé, « Les Leçons d'Arithmétique théorique et pratique de Jules Tannery (1894) : enseigner les nombres comme fondements des mathématiques », dans Évelyne BARBIN et Marc MOYON (dir.), *Les ouvrages de mathématiques dans l'Histoire. Entre recherche, enseignement et culture*, Limoges, Presses Universitaires de Limoges, 2013, p. 217-228.

RENAUD Hervé, « Academics, textbooks and reform of mathematics education in secondary French schools (1890-1905) », dans Kristin BJARNADOTTIR, Fulvia FURINGHETTI, Johan PRYTZ et Gert SCHUBRING (éditeurs), *Proceedings of the Third International Conference on the History of Mathematics Education*, Uppsala Universet, 2015, p. 327-343.

RENAUD Hervé, « Quand les mathématiques modernes questionnent les methodes pédagogiques dans l'enseignement secondaire (1904-1910) », dans Evelyne BARBIN, Uffe Thomas JANKVIST et Tinne Hoff KJELDSEN (éditeurs), *History ans Epistemology in Mathematics Education, Proceedings of the Seventh European Summer University*, Copenhague, 2015, p. 781-798.

ROBINET André, « Avant-Propos, Une vie », dans *Etudes pour le centenaire de la mort de A. Cournot*, Paris, Economica, 1978, p. 1-3.

ROCHET Claude, KERAMIDAS Olivier et BOUT Lugdivine, « La crise comme stratégie de changement dans les organisations publiques », *Revue Internationale des Sciences administratives,* n° 74, 2008, p. 71-85.

ROLLET Laurent, *Henri Poincaré des mathématiques à la philosophie,* thèse de Doctorat, Université de Nancy 2, 1999.

ROLLET Laurent et NABONNAND Philippe, « Un journal pour les mathématiques spéciales : les Nouvelles Annales de Mathématiques (1842-1927) », *Conferenze e seminari de l'Associazione Subalpina Mathesis,* 2010-2011, p. 217-230.

ROMERA-LEBRET Pauline, *La nouvelle géométrie du triangle : passage d'une mathématique d'amateurs à une mathématique d'enseignants (1873-1929*), Thèse de doctorat, Université de Nantes, 2009.

ROMERO Ricardo, *La philosophie naturelle mécaniste de Joseph Boussines (1842-1929*), Thèse de doctorat, Université de Lille, 1999.

SAINT-SERNIN Jane, «Portrait de Cournot » dans Thierry MARTIN (éd.), *Actualité de Cournot*, Paris, Vrin, 2005, p. 17-29.

SAVOIE Philippe, « Autonomie et personnalité des lycées : la réforme administrative de 1902 et ses origines », *Histoire de l'Éducation*, n° 90, 2001, p. 169-204.

SAVOIE Philippe, « Construire un système d'instruction publique : de la création des lycées au monopole renforcé (1802-1814) », dans Jacques-Olivier BOURDON (dir.), *Napoléon et les lycées*, Paris, Nouveau Monde Éditions, 2004, p. 39-55.

SAVOIE Philippe, « Préface », dans Pierre CASPARD, Jean-Noël LUC et Philippe SAVOIE (dir.), *Lycées, lycéens, lycéennes, deux siècles d'histoire*, Paris, INRP, 2005.

SAVOIE Philippe, *La construction de l'enseignement secondaire*, Lyon, ENS Éditions, 2013.

SHALLIT Jeffrey, « Origins of the Analysis of the Euclidean Algoritm », *Historia Mathematica*, vol. 21, 1994, p. 401-419.

SHINN Terry, *Savoir scientifique et pouvoir social. L'École polytechnique (1794-1914),* Paris, Presses de la Fondation Nationale des Sciences Politiques, 1980.

SCHUBRING Gert, « On the Methodology of Analyzing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author », *For the Learning of Mathematics*, Vol. 7, No. 3, 1987, p. 41-51.

SCHUBRING Gert, « Bernard Bolzano—Not as Unknown to His Contemporaries as it is Commonly Believed ? » *Historia Mathematica*, vol. 20, 1993, p. 45–53.

SCHUBRING Gert, « Changing cultural and epistemological views on mathematics and different institutional contexts in nineteenth-century Europe », dans Catherine GOLDSTEIN, Jeremy GRAY et Jim RITTER (dir.), *L'Europe mathématique: histoire, mythes, identités*, Paris, Maison des Sciences de l'Homme, 1996.

SCHUBRING Gert, « Remarque sur la note de Bruno Belhoste, « Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques » parue dans la RHM 4 (1998), p. 289-304 »*, Revue d'Histoire des Mathématiques*, n° 7, 2001, p. 295-305. 298.

SCHUBRING Gert, *Conflicts between Generalization, Rigor, and Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17–19th Century, France and Germany*, New-York, Springer, 2005.

SCHUBRING Gert, « On Historiography of Teaching and Learning Mathematics » dans Alexander KARP et Get SCHIBRING (dir.*), Handbook on the History of Mathematics Education*, New York, Springer, 2014, p. 3-8.

SEBESTIK Jan, *Logique et mathématique chez Bernard Bolzano*, Paris, Vrin, 1992.

SICARD Monique, *L'année 1895, l'image écartelée entre voir et savoir*, Les empêcheurs de penser en rond, 1994.

SINACEUR Hourya, *Richard Dedekind et la création des nombres*, Paris, Vrin, 2008.

SIRINELLI Jean-François, *École normale supérieure: le livre du bicentenaire*, Paris, Presses Universitaires de France, 1994.

SMITH Robert J., *The École Normale Supérieure and the Third Republic*, Albany, Sate University of New York Press, 1982.

TAKEDA Chinatsu, « Deux origines du courant libéral en France », *Revue Française d'Histoire des Idées Politiques*, n° 18, 2003, p. 233-257.

TATON René, « Laplace et Sylvestre-François Lacroix », Revue d'Histoire des Sciences, tome 6, n°4, 1953, p. 350-360.

TATON René, « Condorcet et Sylvestre-François Lacroix », *Revue d'Histoire des Sciences et de leur applications*, tome 12, n° 2, 1959, p. 127-158.

TATON René, « L'École Royale du Génie de Mézières » dans id. dir, *Enseignement et diffusion des Sciences en France au XVIIIe siècle*, 2e éd., Paris, Hermann, 1986, p. 559-615.

TATON René, « Inventaire chronologique de l'œuvre de Lagrange », *Revue d'Histoire des Sciences*, Tome 27, 1974, p. 3-36.

THUILLIER Pierre, « Un débat de fin de siècle : la « faillite de la science » », *La Recherche*, n° 234, 1991,

TOURNÈS Dominique, « Notes & Débats. Pour une histoire du calcul graphique », *Revue d'Histoire des Mathématiques*, n° 6, 2000, p. 127-161.

VATIN François, « Comte et Cournot. Une mise en regard biographique et épistémologique. », *Revue d'Histoire des Sciences Humaines*, n° 8, 2003, p. 9-40.

VERDIER Norbert, « Les journaux de mathématiques dans la première moitié du XIX^{e} siècle en Europe », *Philosophia Scientae*, 13-2, 2009, p. 97-126.

VERDIER Norbert, « Entretien avec Jesper Lützen : une invitation à étudier ses travaux », *Bulletin de la Sabix*, N° 45, 2010, p. 23-26

VERDIER Norbert, « Le siècle de Liouville (1809-1882) », *Bulletin de la Sabix*, N° 45, 2010, p. 10-11.

VERDIER Norbert, « Le Journal de Liouville et la presse de son temps : une entreprise d'édition et de circulation des mathématiques au XIXème siècle (1836-1885), *Bulletin de la Sabix*, N° 45, 2010, p. 57-64.

VERGER Jacques, *Histoire des universités en France*, Toulouse, Privat, 1986.

VUILLEMIN Jules, *La Philosophie de l'Algèbre*, Paris, Presses Universitaires de France, 1962.

WALTER Scott A., NABONNAND Philippe, KRÖMER Ralf et SCHIVON Martina, *La correspondance entre Henri Poincaré, les astronomes, et les géodésiens (Publications des Archives Henri Poincaré)*, Birkhaüser, 2016, p. 144,
https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-7643-8293-3_20.pdf,
consulté le 29/08/2017.

YOUSCHKEVITCH Adolf P., « J.A. da Cunha et les fondements de l'analyse infinitésimale », *Revue d'Histoire des Sciences*, tome 26, 1973, p. 3-22.

YOUSCHKEVITCH Adolf P., « The concept of function up to the Middle of the 19th Century »*Archive for History of Exact Sciences*, t. 16, 1976, p. 37–85

YOUSCHKEVITCH Adolf P., « La contribution de Lazare Carnot à la théorie de l'infini mathématique » dans GILLIPSIE Charles C. et YOUSCHKEVITCH Adolf P., *Lazare Carnot savant et sa contribution à la théorie de l'infini mathématique*, Paris, Vrin, 1979, p. 228-248.

YOUSCHKEVITCH Adolf P., « S.-D. Poisson et la théorie de l'intégration » dans Yvette KOSMANN-SCHWARZBACH (éd.), *Siméon-Denis Poisson, Les Mathématiques au service de la science*, Palaiseau, Éditions de l'École polytechnique, 2013, p. 89-112.

ZERNER Martin, « Sur l'analyse des traités de l'analyse: Les fondements du calcul différentiel dans les traités français, 1870–1914 », *Cahier de didactique des mathématiques*, N° 30, 1986.

ZERNER Martin, « La rectifiabilité des courbes dans les traités d'analyse français de la deuxième moitié du XIXème siècle », *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, t. 10, 1989, p. 267-281.

ZERNER Martin, « Le règne de Joseph Bertrand (1877-1900) », *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences*, N°34, 1991, p. 298-322.

ZERNER Martin, « La transformation des traités français d'analyse (1870-1914) », 1994, https://hal-unice.archives-ouvertes.fr/hal-00347740/fr/ , consulté le 31/08/2017.

ZWERLING Craig, « The emergence of the École Normale Supérieure», dans Robert FOX et George WEISZ, *The Organization of Science and Technology in France, 1808-1914*, Cambridge, Cambridge University Press, 1980.

UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

UNIVERSITÉ DE NANTES

Thèse de Doctorat

Hervé RENAUD

La fabrication d'un enseignement de l'analyse pour l'enseignement secondaire en France au XIX^{e} siècle : acteurs, institutions, programmes et manuels

Making a teaching of calculus for secondary education in France during the 19th century: actors, institutions, curricula and textbooks

Résumé

Le calcul différentiel et intégral est enseigné à l'École polytechnique dès sa création en 1794. Mais les différentes conceptions des principes du calcul conduisent à des changements de programmes et d'enseignements. Rapidement, des éléments de ce calcul sont enseignés dans les principales classes préparatoires au concours d'admission à cette École, et la notion de fonction dérivée apparaît au programme du concours en 1851, consacrant ainsi une pratique courante. Durant le demi-siècle suivant, la pression d'enseignements dans les classes préparatoires, dont nous trouvons trace dans des manuels, conduit à des changements de programme. Des auteurs, qui sont à la fois professeurs en classes préparatoires, examinateurs aux concours des Écoles polytechnique et normale supérieure, et enseignants dans ces Écoles, publient des manuels dont les contenus dépassent le programme officiel et suscitent débats. Ainsi, à la fin des années 1880, la construction des nombres irrationnels, la notion d'ensemble et l'intégrale de Riemann figurent dans des manuels destinés à la classe de mathématiques spéciales. Certains de ces contenus seront incorporés au programme d'admission de l'École polytechnique. Les fondements arithmétiques de l'analyse, jugés trop abstraits, provoqueront en 1896 la suppression de la notion d'intégrale définie introduite dans le programme en 1885. L'étude sur un demi-siècle des interactions entre programmes, manuels et enseignants des différents ordres d'enseignement permet de comprendre l'introduction de la notion de fonction dérivée en 1891 en classe terminale de l'enseignement moderne, considéré alors comme un enseignement de second ordre, puis en 1902 en classe de seconde.

Mots clés

Histoire des mathématiques-Analyse-Enseignement secondaire-Calcul différentiel et intégral-Ecole polytechnique-Classes préparatoires-Enseignement moderne-Ecole normale supérieure

Abstract

Differential and integral calculus has been taught at the École Polytechnique since its creation in 1794. But the different conceptions of the calculus principles led to changes in curriculum and teaching. Rapidly, the elements of calculus were taught in the main preparatory classes to the entrance examination to the École Polytechnique. The notion of derivative function appeared in the curriculum of this examination in 1851, consecrating then a common practice. During the following half century, pressure of teachings in the preparatory classes, whose tracks are found in textbooks, led to changes in the curriculum. Authors, who were simultaneously professors in preparatory classes, assessors at the entrance examination to the École Polytechnique and the École Normale Supérieure and teachers in these schools, published textbooks whose contents surpassed the official curriculum and initiated debates. Thus, at the end of the 1880's, irrational numbers construction, notions on set theory and Riemann's integral were present in textbooks dedicated to the preparatory classes. Some of those contents were integrated to the curriculum. The arithmetical foundations of Analysis considered too abstract caused in 1896 the suppression of the notion of definite integral introduced in the curriculum in 1885. The study over half a century of interactions between curricula, textbooks and teachers of the different orders of education allows to understand the introduction of the derivative function in 1891 in the last grade of modern education, considered at that time as a second-class teaching, then in 1902 in the classical education.

Key Words

History of mathematics-Calculus-History of education-French secondary education-Ecole polytechnique-French modern education-Ecole normale supérieure