

UNIVERSITE DE NANTES

ECOLE DOCTORALE

**SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'INFORMATION ET DES MATÉRIAUX**

Année 2006

Thèse de Doctorat

Spécialité Electronique

Présentée et soutenue publiquement par

Nicolas PINEL

*le 16 octobre 2006
à l'Ecole polytechnique de l'université de Nantes*

**Etude de modèles asymptotiques de la diffusion des ondes électromagnétiques
par des interfaces naturelles**

- Application à une mer recouverte de pétrole -

Jury

<i>Président et Rapporteur</i>	Richard DUSSEAUX , Professeur des universités, Université de Versailles, CETP, Vélizy
<i>Rapporteur</i>	Walid TABBARA , Professeur des universités, Université Paris VI, SUPELEC/DRE-LSS, Gif s/ Yvette
<i>Rapporteur</i>	Gérard BERGINC , Ingénieur Responsable Recherche, Thalès Optronique, Guyancourt
<i>Examineurs</i>	Christophe BOURLIER , CR CNRS, IREENA, Ecole polytechnique de l'université de Nantes
	Jin Au KONG , Professeur, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA
	Joseph SAILLARD , Professeur des universités, IREENA, Ecole polytechnique de l'université de Nantes

Directeur de thèse :

Joseph SAILLARD, Professeur des universités

Co-encadrant :

Christophe BOURLIER, Chargé de Recherche CNRS

Institut de Recherche en Electrotechnique et Electronique de Nantes Atlantique (IREENA EA 1770)

Ecole polytechnique de l'université de Nantes, La Chantrerie, Rue C. Pauc, BP 50609, 44306 NANTES CEDEX 3

N ° ED 366-276

“La mort, c’est la seule certitude que j’ai.”

Jacques Brel

“La seule certitude que j’ai, c’est d’être dans le doute.”

Pierre Desproges

“La véritable science enseigne, par-dessus tout, à douter et à être ignorant.”

Miguel de Unamuno

Remerciements

Je tiens par la présente à remercier en premier lieu les personnes qui m'ont fait confiance en acceptant de me prendre en thèse de doctorat, à savoir Joseph Saillard en tant que directeur de thèse, et Christophe Bourlier en tant qu'encadrant. Je les remercie vivement ainsi que Serge Toutain, directeur du laboratoire IREENA, pour avoir fait tout leur possible afin de me trouver un financement, sans quoi la thèse n'aurait pas été possible. Je remercie également à juste titre le Conseil Général de Loire-Atlantique pour la confiance et le soutien financier qu'il m'a accordés pour ces trois années de travaux de recherche.

J'aimerais remercier une nouvelle fois mes deux encadrants, pour la qualité de leur encadrement durant ces trois années. Joseph Saillard pour son approche concrète, son discernement et sa probité. Christophe Bourlier pour sa disponibilité, son aide scientifique très précieuse mais aussi morale. Aux discussions passionnées...

Je tiens également à remercier Richard Dusséaux pour avoir accepté de présider le jury de ma thèse, ainsi que Walid Tabbara, qui tous deux m'ont fait l'honneur d'accepter d'être rapporteurs. Un grand merci également à Gérard Berginc pour avoir bien voulu faire partie de ce jury, et pour l'intérêt porté à mon travail et son regard critique. Enfin, un grand merci à Jin Au Kong qui m'a fait l'honneur d'accepter de faire partie de ce jury, mais qui n'a malheureusement pas pu venir. J'espère pouvoir vous rencontrer bientôt.

Merci à tous ceux que j'ai côtoyé au laboratoire pour leur bonne humeur, leur franchise, leur simplicité. Aux discussions très enrichissantes entre collègues, notamment avec Arnaud, Pierre et Nicolas. A mes enseignants de prépa, grâce à qui tout a commencé ; à la rigueur mathématique et au sens physique. A ma famille, à mes amis, à Papy et à Pépé. A toi.

Table des matières

Table des figures	15
Glossaire	16
Introduction	17
1 Diffusion des ondes électromagnétiques par des interfaces naturelles	19
1.1 Généralités	20
1.1.1 Equations de Maxwell et conditions aux limites	20
1.1.1.1 Conditions aux limites	21
1.1.2 Propagation d'une onde plane (Equation de Helmholtz et onde plane) . .	22
1.1.2.1 Régime harmonique et onde plane progressive monochromatique	23
1.1.2.2 Densité de puissance électromagnétique	24
1.1.3 Propagation dans un milieu diélectrique	24
1.1.3.1 Epaisseur de peau	25
1.1.4 Onde incidente sur une interface : polarisation	25
1.1.5 Réflexion et transmission par une interface plane infinie	27
1.1.5.1 Optique géométrique et Principe de Fermat	27
1.1.5.2 Lois de Snell-Descartes et coefficients de Fresnel	27
1.1.5.3 Etude de différents cas de figure	29
1.1.5.4 Angle limite et angle de Brewster	29
1.1.5.5 Réflectance, transmittance et conservation d'énergie	29
1.1.5.6 Cas d'un milieu inférieur diélectrique à pertes	30
1.1.5.7 Remarque sur le cas d'une surface de dimensions finies	31
1.2 Caractérisation statistique d'une interface rugueuse stochastique	33
1.2.1 Processus aléatoires : équivalence des descriptions temporelle, spatiale et statistique	33
1.2.1.1 Rappels sur les processus aléatoires - Cas de surfaces rugueuses	33

1.2.1.2	Equivalence statistique des surfaces rugueuses dépendantes et indépendantes du temps	35
1.2.2	Description statistique d'une surface rugueuse	35
1.2.2.1	Densité de probabilité des hauteurs de la surface	36
1.2.2.2	Fonction d'auto-corrélation (spatiale) et spectre des hauteurs de la surface	36
1.2.2.3	Autres outils statistiques	39
1.2.2.4	Corrélation entre n variables aléatoires	40
1.2.3	Cas particulier de la surface de mer	41
1.2.4	Rugosité électromagnétique et critère de Rayleigh	44
1.2.4.1	Critère de Rayleigh en transmission	47
1.2.4.2	Comparaison des paramètres de Rayleigh en réflexion et transmission	48
1.2.4.3	Réflexion et transmission spéculaires et diffuses	50
1.3	Diffraction et diffusion d'ondes électromagnétiques par une interface rugueuse . .	51
1.3.1	Présentation du problème (2D/3D)	51
1.3.2	Principe de Huygens et théorème d'extinction	52
1.3.2.1	Expressions dans le cas scalaire	53
1.3.2.2	Expressions dans le cas vectoriel	53
1.3.2.3	Equations de Kirchhoff-Helmholtz	54
1.3.3	Fonctions de Green (2D/3D)	55
1.3.3.1	Représentation de Weyl de la fonction de Green	55
1.3.3.2	Approximation en champ lointain	56
1.3.4	Puissances diffusées et coefficients de diffusion	56
1.3.4.1	Puissance incidente, puissance réfléchie et conservation d'énergie	57
1.3.4.2	Coefficient de diffusion, SER et BRDF	58
2	Diffusion par une simple interface fortement rugueuse en réflexion et transmission	59
2.1	Bibliographie sur les méthodes existantes	60
2.1.1	Introduction	60
2.1.2	Modèles rigoureux	61
2.1.3	Modèles asymptotiques	62
2.1.3.1	Méthodes basse fréquence	62
2.1.3.2	Méthodes haute fréquence	63
2.1.3.3	Méthodes unifiées	64

2.1.3.4	Diffusions multiples et modèles non locaux	66
2.1.3.5	Résumé des domaines de validité qualitatifs	67
2.1.4	Propriétés générales du problème de diffusion	68
2.1.4.1	Propriétés importantes	68
2.1.4.2	Autres propriétés	69
2.1.5	Approximations de Kirchhoff et de l'optique géométrique : quelques pré- cisions	71
2.1.5.1	Précisions sur l'approximation de Kirchhoff	71
2.1.5.2	Précisions sur l'approximation de l'optique géométrique	72
2.2	Diffusion en réflexion et transmission par une interface rugueuse mono- dimensionnelle dans la limite haute fréquence	73
2.2.1	Approximation de Kirchhoff en réflexion et transmission avec effet d'ombre	73
2.2.2	Coefficients de diffusion sous l'approximation de l'optique géométrique avec effet d'ombre	76
2.2.2.1	Introduction	76
2.2.2.2	Coefficient de diffusion incohérent	77
2.2.3	Calcul des fonctions d'ombre bistatiques en réflexion et transmission . . .	79
2.2.3.1	Fonctions d'ombre monostatiques	80
2.2.3.2	Fonctions d'ombre bistatiques	83
2.2.3.3	Comparaison entre les fonctions d'ombre en réflexion et en trans- mission	85
2.3	Propriétés générales et conservation d'énergie du modèle bidimensionnel	89
2.3.1	Propriétés générales du modèle	89
2.3.2	Etude de la conservation d'énergie	90
2.3.2.1	Cas d'un milieu inférieur parfaitement conducteur	90
2.3.2.2	Cas d'un milieu inférieur diélectrique sans pertes	92
2.3.2.3	Conclusion	97
2.4	Extension du modèle à un problème tridimensionnel	99
2.4.1	Approximation de Kirchhoff en réflexion et transmission avec effet d'ombre	99
2.4.1.1	Approximation du plan tangent	100
2.4.1.2	Simplification des champs sous l'approximation de la phase sta- tionnaire	102
2.4.2	Coefficients de diffusion dans la limite haute fréquence avec effet d'ombre	103
2.4.3	Conservation d'énergie du modèle dans le cas tridimensionnel	105
2.4.3.1	Cas d'un milieu inférieur parfaitement conducteur	106
2.4.3.2	Cas d'un milieu inférieur diélectrique sans pertes	108

3	Diffusion par deux interfaces fortement rugueuses superposées	113
3.1	Bibliographie sur les méthodes existantes	113
3.1.1	Modèles rigoureux	114
3.1.2	Modèles asymptotiques	114
3.1.2.1	Méthodes perturbatives	115
3.1.2.2	Méthodes basées sur l'approximation de Kirchhoff	116
3.1.2.3	Méthodes "unifiées"	117
3.1.2.4	Bilan	118
3.2	Diffusion par deux interfaces rugueuses monodimensionnelles dans la limite haute fréquence	119
3.2.1	Principe général du modèle	120
3.2.1.1	Obtention des champs diffractés pour une surface inférieure rugueuse	121
3.2.1.2	Obtention des champs diffractés en réflexion pour une surface inférieure plane	123
3.2.2	Coefficients de diffusion dans la limite haute fréquence	124
3.2.2.1	Coefficients de diffusion en réflexion des premier et second ordres	125
3.2.2.2	Coefficient de diffusion en transmission du premier ordre	128
3.2.2.3	Coefficients de diffusion en réflexion et en transmission d'ordres supérieurs	128
3.2.2.4	Coefficients de diffusion en réflexion pour une interface inférieure plane	129
3.2.3	Propriétés physiques du modèle	130
3.2.4	Résumé et conclusion	130
3.3	Mise en oeuvre du modèle	132
3.3.1	Validation par comparaison avec une méthode numérique de référence	132
3.3.2	Comparaison entre une interface inférieure rugueuse et plane	135
3.3.3	Etude d'un milieu intermédiaire à pertes	137
3.3.3.1	Analyse théorique des pertes dues à un milieu intermédiaire à pertes	137
3.3.3.2	Estimation des pertes pour l'implémentation numérique	138
3.3.4	Application à la détection de pétrole sur la mer	141
3.3.5	Remarques de conclusion	143
3.4	Extension du modèle au cas de surfaces bidimensionnelles	145
3.4.1	Calcul des champs diffractés par la couche diélectrique rugueuse	146
3.4.2	Coefficients de diffusion dans la limite haute fréquence	148

3.4.2.1	Coefficients de diffusion en réflexion des premier et second ordres	149
3.4.3	Simulations numériques pour une surface inférieure plane	151
Conclusion et perspectives		155
Annexes		158
A	Diffraction en champ lointain et approximation de la phase stationnaire	159
B	Critère de Rayleigh en réflexion et transmission : calcul des composantes cohérentes	163
C	Calcul des coefficients de diffusion sous l'AOG en 3D	167
D	Calcul du coefficient de diffusion en réflexion du second ordre $\sigma_{r,2}$	171
E	Calcul du coefficient de diffusion en réflexion du second ordre $\sigma_{r,2}$: contribution anti-coïncidente pour une interface inférieure plane	175
Bibliographie		179

Table des figures

1.1	Interface entre deux milieux LHI semi-infinis Ω_1 (milieu incident) et Ω_2 .	21
1.2	Onde incidente sur une surface plane infinie : vue en coupe dans le plan d'incidence $(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{n}})$.	26
1.3	Onde incidente sur une interface rugueuse en polarisations H et V : vue en coupe dans le plan moyen $(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{z}})$.	26
1.4	Ondes réfléchie et transmise par un interface plane infinie ($\epsilon_{r1} < \epsilon_{r2}$ ici)	28
1.5	Processus aléatoire (surface invariante au cours du temps)	34
1.6	Surface rugueuse 1D de statistique gaussienne (à gauche) et sa distribution des hauteurs (à droite)	36
1.7	Surface rugueuse 1D (en haut) et sa fonction d'auto-corrélation des hauteurs (en bas), ici gaussienne	37
1.8	Contribution des deux régimes d'une surface de mer	42
1.9	Couche de pétrole sur la mer : lissage du régime de capillarité	42
1.10	Variations de l'écart type des pentes dans la direction du vent σ_{sx} en fonction de la vitesse du vent à 12.5 m au-dessus de la surface de la mer u_{12} : comparaison entre une mer propre et une mer recouverte de pétrole.	44
1.11	Rugosité d'une surface aléatoire 1D	44
1.12	Rugosité en transmission d'une surface aléatoire 1D	47
1.13	Comparaison des paramètres de Rayleigh normalisés pour $\epsilon_{r1} = 1$ et différentes valeurs de ϵ_{r2} , en fonction de l'angle d'incidence θ_i	49
1.14	Présentation du problème (vue dans le plan $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}})$)	51
2.1	Surface de type SPM1	62
2.2	Surface de type AK	63
2.3	Phénomène d'ombrage de la surface par l'onde incidente	64
2.4	Phénomène de double diffusion due à la forte rugosité de la surface	66
2.5	Domaines de validité qualitatifs de quelques méthodes asymptotiques simples (statistiques gaussiennes, angles modérés...)	67
2.6	Illustration du problème étudié	74

2.7	Influence de la hauteur du point A (figure de gauche) et de la pente du faisceau μ_1 (figure de droite) sur le phénomène d'ombrage (ombrage de propagation) de la surface rugueuse.	81
2.8	Phénomène d'ombrage angulaire de la surface rugueuse	81
2.9	Différence entre l'ombrage dans le milieu supérieur Ω_1 et le milieu inférieur Ω_2	82
2.10	Influence de la hauteur du point A sur le phénomène d'ombrage de la surface rugueuse : différence entre l'ombrage dans le milieu supérieur Ω_1 et le milieu inférieur Ω_2	82
2.11	Configurations de la fonction d'ombre bistatique en réflexion : à gauche $\theta_r \in [-\pi/2; \theta_i[$, au centre $\theta_r \in [\theta_i; 0[$, et à droite $\theta_r \in [0; +\pi/2]$	83
2.12	Comparaison entre la fonction d'ombre bistatique en réflexion S_{11} et en transmission S_{12} , pour un angle d'incidence $\theta_i = -80^\circ$ et un écart type des pentes $\sigma_s = 0.3$	85
2.13	Fonctions d'ombre moyennées : détail pour $\theta_s \in [-90^\circ; -60^\circ]$	87
2.14	Fonctions d'ombre moyennées : détail pour $\theta_s \in [+60^\circ; +90^\circ]$	87
2.15	Facteur de conservation d'énergie d'une surface PC caractérisée par $\sigma_s = 0.1$, sans ombre et avec ombre.	91
2.16	Facteur de conservation d'énergie d'une surface PC caractérisée par $\sigma_s = 0.3$, sans ombre et avec ombre.	92
2.17	Facteur de conservation d'énergie d'une surface caractérisée par $\sigma_s = 0.1$, avec un milieu inférieur de permittivité relative $\epsilon_{r2} = 4$, sans ombre et avec ombre.	93
2.18	Facteur de conservation d'énergie d'une surface caractérisée par $\sigma_s = 0.3$, avec un milieu inférieur de permittivité relative $\epsilon_{r2} = 4$, sans ombre et avec ombre.	94
2.19	Facteur de conservation d'énergie d'une surface caractérisée par $\sigma_s = 0.1$ à gauche et $\sigma_s = 0.3$ à droite, avec un milieu inférieur de permittivité relative $\epsilon_{r2} = 53$, sans ombre et avec ombre.	95
2.20	Phénomène de double diffusion de l'onde transmise dans le milieu inférieur Ω_2 : réflexion après transmission ainsi que double transmission.	96
2.21	Facteur de conservation d'énergie d'une surface caractérisée par $\sigma_s = 0.1$ à gauche et $\sigma_s = 0.3$ à droite, avec un milieu inférieur de permittivité relative $\epsilon_{r2} = 2$, sans ombre et avec ombre.	96
2.22	Illustration du problème tridimensionnel étudié (vue dans le plan $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}})$) pour $\hat{\mathbf{y}}$ fixé	99
2.23	Facteur de conservation d'énergie d'une surface PC caractérisée par $\sigma_{sx} = \sigma_{sy} = 0.1$, sans ombre et avec ombre.	107
2.24	Facteur de conservation d'énergie d'une surface PC caractérisée par $\sigma_{sx} = \sigma_{sy} = 0.3$, sans ombre et avec ombre.	108
2.25	Facteur de conservation d'énergie d'une surface de permittivité relative $\epsilon_{r2} = 4$ caractérisée par $\sigma_{sx} = \sigma_{sy} = 0.1$ sur la figure de gauche et $\sigma_{sx} = \sigma_{sy} = 0.3$ sur la figure de droite, sans ombre et avec ombre.	109

2.26	Facteur de conservation d'énergie d'une surface de permittivité relative $\epsilon_{r2} = 53$ caractérisée par $\sigma_{sx} = \sigma_{sy} = 0.3$, sans ombre et avec ombre.	111
3.1	Diffusion multiple par deux interfaces rugueuses Σ_A et Σ_B en 2D.	119
3.2	Cas coïncident à gauche et cas anticoïncident à droite	126
3.3	Simulations des contributions des coefficients de diffusion des premier et second ordres, $\sigma_{r,1}$ et $\sigma_{r,2}$ en dB, en fonction de l'angle d'observation θ_r en polarisation V , pour $\epsilon_{r2} = 3$ et $\epsilon_{r3} = i\infty$, avec $\theta_i = 0^\circ$	133
3.4	Mêmes simulations que sur la figure 3.3, mais avec $\theta_i = -20^\circ$	134
3.5	Simulations de la contribution du coefficient de diffusion du second ordre $\sigma_{r,2}$ en dB, en fonction de l'angle d'observation θ_r en polarisation V , pour $\epsilon_{r2} = 3$ et $\epsilon_{r3} = i\infty$, avec $\theta_i = 0^\circ$: comparaison entre une surface inférieure rugueuse et plane.	136
3.6	Même simulations que sur la figure 3.5, mais avec $\theta_i = -20^\circ$	136
3.7	Simulations de l'influence d'un intermédiaire milieu à pertes de permittivité relative égale à $3 + 0.1i$ sur la contribution du coefficient de diffusion du second ordre $\sigma_{r,2}$ en dB, en fonction de l'angle d'observation θ_r en polarisation V , pour $\epsilon_{r3} = i\infty$ et avec $\theta_i = 0^\circ$	140
3.8	Mêmes simulations que sur la figure 3.7, mais avec $\theta_i = -20^\circ$	140
3.9	Comparaison entre une mer propre avec $\sigma_s^{sea} = 0.126$ et une mer de pétrole d'épaisseur moyenne $\bar{H} = 6\lambda$ avec $\sigma_s^{oil+sea} = 0.094$: simulations des coefficients de diffusion en dB, en fonction de l'angle d'incidence θ_i en polarisation V , pour $\epsilon_{r2} = 2.0 + 0.04i$ et $\epsilon_{r3} = 16 + 25i$	142
3.10	Diffusion multiple par deux interfaces rugueuses Σ_A et Σ_B en 3D (vue en coupe dans le plan $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}})$).	145
3.11	Simulations des coefficients de diffusion totaux des premier et second ordres, $\sigma_{r,1}^{tot}$ et $\sigma_{r,2}^{tot}$ en dB, en fonction de l'angle d'observation θ_{obs} , pour $\epsilon_{r2} = 3$ et $\epsilon_{r3} = i\infty$, avec $\theta_i = 0^\circ$	152
3.12	Simulations des coefficients de diffusion totaux des premier et second ordres, $\sigma_{r,1}^{tot}$ et $\sigma_{r,2}^{tot}$ en dB, en fonction de l'angle d'observation θ_{obs} , pour $\epsilon_{r2} = 3$ et $\epsilon_{r3} = i\infty$, avec $\theta_i = 20^\circ$	153
A.1	Champ diffracté en réflexion par la surface rugueuse sous l'AK : la direction spéculaire de réflexion $\hat{\mathbf{K}}_{r,sp}$ est telle que l'angle $\theta_{r,sp}$ associé est supérieur à $\pi/2$	160
A.2	Champ diffracté en réflexion sous l'APS : convention d'angles orientés (avec le sens de rotation horaire défini comme le sens positif des angles) à gauche, et convention d'angles non orientés à droite. Sur la figure de gauche, l'angle local d'incidence vérifie la relation $2\chi_i = \theta_i - \theta_r$, tandis que sur la figure de droite, il vérifie la relation $2\chi_i = \theta_i + \theta_r$	162

Glossaire

AK Approximation de Kirchhoff

APS Approximation de la Phase Stationnaire

AOG Approximation de l'Optique Géométrique

BRDF Bidirectional Reflectance Distribution Function

FWM Full Wave Method

IEM Integral Equation Method (Méthode de l'Equation Intégrale)

LHI Linéaire Homogène Isotrope

MoM Method of Moments (Méthode des Moments)

OPP Onde Plane Progressive

OPPM Onde Plane Progressive Monochromatique

PC Parfaitement Conducteur(-trice)

RRE Reduced Rayleigh Equations method (Méthode des Equations Réduites de Rayleigh)

RTM Radiative Transfer Method (Méthode du Transfert Radiatif)

SER Surface Equivalente Radar

SPM Small Perturbation Method (Méthode des Petites Perturbations)

SSA Small Slope Approximation (Approximation des Faibles Pentes)

TSM Two-Scale Model (Modèle à Deux Echelles)

WCA Weighted Curvature Approximation

Introduction

Bien que l'on a pour habitude de considérer les interfaces séparant deux milieux comme planes, aucune surface ne l'est parfaitement à toutes les échelles spatiales. La notion de planarité dépend alors de la taille de la sonde utilisée pour l'observer. Ainsi, nous pouvons dire que les surfaces rugueuses sont abondantes dans la nature, et qu'au fur et à mesure des avancées technologiques et de la miniaturisation, les problèmes de rugosités des interfaces sont de plus en plus présents.

Le radar (radio detection and ranging), inventé en 1904 par l'allemand Christian Hülsmeier, permet de détecter la présence ou de déterminer la distance d'un objet (avion, auto, bateau, pluie...). Il peut être utilisé pour identifier une cible et en tirer des informations, telles que sa position et sa vitesse. La détection et l'identification d'une cible est cependant difficile si la cible recherchée est noyée dans un environnement dit hostile, tout particulièrement en présence d'une surface rugueuse : par exemple si l'on cherche à détecter une cible enfouie sous terre ou sur la mer. Alors, pour pouvoir détecter cette cible, il apparaît important de connaître le comportement électromagnétique du milieu environnant.

Parallèlement, dans le triste contexte actuel où les pollutions de pétrole sur la surface de la mer sont courantes, la méthode classique de détection consiste à utiliser des hélicoptères voire des petits avions qui sillonnent la mer, et d'essayer de localiser des nappes de pétrole à l'aide de jumelles. Cette méthode est très onéreuse, et relativement aléatoire quant aux résultats. Les radars actuels ne sont pas suffisamment performants, car ils ont tendance à confondre des nappes de pétrole avec d'autres objets diffusants, comme des films naturels. Alors, la connaissance de la réponse électromagnétique d'un système composé des deux interfaces rugueuses, dans le domaine de la télédétection, constitue un moyen de détecter des nappes de pétrole sur la mer peu onéreux et précis on l'espère, comparativement aux moyens actuels.

Nous voyons donc ici l'intérêt d'étudier le champ réfléchi par ces surfaces (ou interfaces) naturelles. Si l'on pouvait considérer ces interfaces comme planes, le calcul du champ réfléchi serait aisé, car il suffirait d'utiliser les coefficients de Fresnel. Ces interfaces naturelles ont au contraire la particularité d'être rugueuses, et c'est ceci qui pose difficulté. Le terme de *diffusion* est alors utilisé, quand les ondes électromagnétiques sont réfléchies par des interfaces rugueuses. De plus, il faut étudier la superposition de ces deux interfaces (séparées par des milieux homogènes ou non), ce qui complique encore un peu plus le problème. Ainsi, cette thèse s'intéresse à la diffusion des ondes électromagnétiques par des interfaces naturelles qualifiées de rugueuses, plus particulièrement au cas de la superposition de deux interfaces rugueuses, et supposera les milieux homogènes.

Pour réaliser ce travail, deux approches différentes sont possibles : des modèles soit exacts, soit asymptotiques peuvent être utilisés. Les modèles exacts sont résolus par des méthodes appelées numériques, nécessitant de disposer d'une réalisation numérique de la (des) surface(s) étudiée(s). Ils se basent sur la résolution des équations de Maxwell locales sur les interfaces, sans

approximation. La précision de la méthode dépend alors du pas d'échantillonnage de l'interface. L'inconvénient majeur de ces modèles numériques est qu'ils nécessitent un temps de calcul et un espace mémoire souvent conséquents.

Les modèles asymptotiques, par définition, sont approchés. Ils sont valides dans un domaine de validité restreint. Il existe, pour ces modèles, des méthodes numériques ainsi que des méthodes analytiques. Nous venons de parler des méthodes numériques. Les méthodes analytiques, quant à elles, ont l'avantage d'être bien plus rapides, mais elles nécessitent des hypothèses simplificatrices pour obtenir cette résolution rapide. Elles se basent sur la connaissance des propriétés statistiques de l'interface. La rapidité de ces méthodes est très intéressante, notamment pour l'exemple présenté plus haut de détection de pétrole sur la mer. En effet, il serait intéressant de pouvoir disposer d'un modèle rapide de simulation électromagnétique d'une nappe de pétrole sur la mer qui, comparé à des mesures en fonction des différents paramètres de terrain, permettrait de détecter une pollution de pétrole, et ceci en temps réel dans l'idéal. Ainsi, ce travail s'orientera sur les méthodes analytiques de la diffusion électromagnétiques par des interfaces rugueuses. Une autre justification de ce choix peut être donnée. Mon laboratoire d'accueil a développé depuis de nombreuses années des méthodes analytiques de diffusion électromagnétique par une simple interface rugueuse. Il a récemment étendu son champ de compétences à des méthodes numériques exactes, notamment à travers la thèse de N. Déchamps : en effet, une nouvelle méthode numérique exacte et performante a été développée pour le cas de deux interfaces rugueuses. Cette méthode constitue alors une méthode de référence, qui permettra de valider la méthode analytique rapide exposée dans ce document.

Ce manuscrit se décompose en trois chapitres. Le premier chapitre est consacré essentiellement aux notions importantes relatives à l'interaction des ondes électromagnétiques avec des interfaces, à la description statistique de surfaces rugueuses, et à la description du problème de la diffraction électromagnétique par de telles interfaces. Le deuxième chapitre permettra alors d'exposer dans un premier temps les différents modèles possibles de résolution de ce problème, en se focalisant plus particulièrement sur les méthodes analytiques. L'approximation dite de Kirchhoff, réduite à l'approximation dite de l'optique géométrique, sera étudiée en détail, à la fois en réflexion et en transmission. Le troisième et dernier chapitre sera consacré à la diffusion par deux interfaces rugueuses. Une étude bibliographique des méthodes existantes sera menée, et une nouvelle méthode sera développée. Celle-ci est basée sur l'extension de l'approximation dite de Kirchhoff à deux interfaces rugueuses séparant des milieux homogènes. Pour un problème bidimensionnel, la méthode sera validée par comparaison avec une méthode numérique de référence développée au laboratoire. Une application à la détection de nappes de pétrole sur la mer sera alors présentée. Enfin, pour un problème tridimensionnel, des simulations numériques seront présentées dans le cas d'une interface inférieure plane. Des conclusions à ce travail seront alors tirées, et des perspectives de recherche seront proposées.

Chapitre 1

Diffusion des ondes électromagnétiques par des interfaces naturelles

Dans cette thèse, l'onde incidente sur la surface (ou sur l'empilement de surfaces) sera considérée comme plane. Une onde peut être qualifiée de localement plane si elle est située dans la zone dite *zone de Fraunhofer*¹ de la source émettrice, ou zone de champ lointain de la source. Ceci suppose que la source est suffisamment éloignée de la surface pour que l'onde incidente apparaisse comme plane sur une longueur grande devant n'importe quelle dimension de la surface [1]. Les milieux sont supposés linéaires, homogènes et isotropes (LHI), stationnaires et non magnétiques. Le milieu incident est parfaitement diélectrique², et pourra en général être assimilé au vide (bien que nous nous efforcerons d'écrire les équations d'une manière générale, le milieu étant un diélectrique parfait quelconque).

Le problème de la diffusion des ondes électromagnétiques par des interfaces non planes, qualifiées de rugueuses, est étudié depuis de nombreuses décennies. Citons en particulier les travaux de Lord Rayleigh [2,3], qui le premier a permis de donner une définition rigoureuse de la rugosité électromagnétique d'une interface (caractérisée par le critère de Rayleigh, exposé par la suite). Parmi les surfaces rugueuses, nous pouvons distinguer deux grandes catégories de surfaces : les surfaces périodiques (par exemple, les surfaces en crêneaux, en dents de scie, sinusoïdales), et les surfaces aléatoires, dont seules certaines caractéristiques statistiques ou moyennes statistiques sont connues. C'est cette dernière catégorie qui est traitée dans ce document.

Ce chapitre a pour but principal d'introduire les notions nécessaires à la compréhension des outils utilisés dans les chapitres suivants. Dans un premier temps, nous rappellerons quelques généralités sur les ondes électromagnétiques et leur propagation dans des milieux LHI. Le cas de milieux diélectriques sera traité de façon générale, ces milieux pouvant être des diélectriques à pertes³. Puis leur interaction avec une interface plane, avec notamment l'étude de la réflexion et de la transmission d'une onde plane par une interface plane infinie (qu'elle soit parfaitement

¹La zone de Fraunhofer, ou champ lointain, correspond à une distance R de l'onde à la source supérieure à $2D^2/\lambda$, où D représente la plus grande dimension de la source, et λ la longueur de l'onde émise.

²Un milieu diélectrique est dit parfait (ou pur) si le milieu diélectrique considéré est dépourvu de sources de charge et de courant.

³Un milieu diélectrique est dit à pertes (ou réel) si le milieu diélectrique considéré est dépourvu de sources de charge, mais pourvu de sources de courant. Ceci par opposition avec un milieu diélectrique pur (ou parfait) qui est dépourvu à la fois de sources de charge et de courant.

conductrice, parfaitement diélectrique ou à pertes) sera étudiée. Dans une deuxième partie, nous caractériserons une interface rugueuse aléatoire, à variation spatio-temporelle ou à variation spatiale seulement. Cependant nous nous placerons toujours dans cette thèse dans le cas où les surfaces à variation spatio-temporelle sont équivalentes à des surfaces à variation spatiale seulement. Une application au domaine maritime sera abordée, ainsi que le critère de rugosité électromagnétique de Rayleigh, permettant de qualifier une surface de peu rugueuse, rugueuse, ou très rugueuse. Enfin, dans une troisième partie, nous présenterons le problème général de la diffraction et de la diffusion d'ondes électromagnétiques par des interfaces rugueuses aléatoires, dans le but de déterminer la puissance électromagnétique diffusée par de telles surfaces. Cette quantité est généralement quantifiée dans notre communauté par un paramètre appelé *coefficient de diffusion*, qui sera défini rigoureusement. Nous en verrons l'équivalent dans les communautés radar et optique.

1.1 Généralités

1.1.1 Equations de Maxwell et conditions aux limites

Le développement des sciences antérieurement au 19ème siècle avait conduit à l'édification de deux sciences distinctes : l'électricité d'une part (par Coulomb, Poisson, Gauss...) et le magnétisme d'autre part (par Oersted, Laplace, Biot et Savart...). Le physicien écossais James Clerk Maxwell (1831-1879) commence à traduire l'ensemble des connaissances relatives au champ électrique et au champ magnétique sous forme d'équations locales, et établit sous sa forme définitive en 1864 une théorie unifiée dans laquelle l'électricité et le magnétisme apparaissent comme deux manifestations particulières d'une réalité plus générale baptisée électromagnétisme. La forme vectorielle des équations de Maxwell a été établie par Olivier Heaviside et Josiah W. Gibbs (1884). Sous forme locale, les équations de Maxwell dans les milieux sont données par [4] :

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.1a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.1b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (1.1c)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (1.1d)$$

Classiquement, en coordonnées cartésiennes, l'opérateur div est remplacé par $\nabla \cdot$ et l'opérateur rot par $\nabla \wedge$. Les deux premières équations donnent les relations de structure des champs, et sont vraies quel que soit le milieu. Elles sont appelées respectivement équations du flux magnétique (qui traduit, sous sa forme intégrale, l'inexistence de charges magnétiques libres) et de Maxwell-Faraday (ou loi de Lenz sous sa forme intégrale). Les deux dernières équations dépendent du milieu considéré. Elles sont appelées respectivement équations de Maxwell-Gauss (du théorème de Gauss en électrostatique sous sa forme intégrale) et de Maxwell-Ampère (du théorème d'Ampère en magnétostatique sous sa forme intégrale). Ici, $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ désignent les vecteurs champ électrique et champ magnétique : les deux champs constituent le champ électromagnétique. Elles sont exprimées en unités SI respectivement en V/m et en A/m . *Par la suite, les vecteurs seront notés en gras, et les vecteurs unitaires en gras et surmontés d'un chapeau.* Les quantités $\mathbf{D}$ et $\mathbf{B}$ désignent respectivement le déplacement électrique et l'induction magnétique, et décrivent l'action du champ électromagnétique sur la matière. Elles sont exprimées en unités SI respectivement en C/m^2 et en *Tesla*. Enfin, ρ et $\mathbf{j}$ désignent les densités respectivement de charge et de courant. Elles sont exprimées en unités SI respectivement en C/m^3 et en A/m^2 . Ces

grandeurs agissent comme sources pour le champ électromagnétique. Elles vérifient l'équation de conservation de la charge $\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$. Pour un milieu linéaire homogène et isotrope (LHI)⁴, cas dans lequel nous nous placerons toujours par la suite, les quantités $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{j}$ sont liées à $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ par les équations (ou relations) constitutives suivantes :

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}, \quad (1.2a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}, \quad (1.2b)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (1.2c)$$

Ici ϵ , μ et σ sont la permittivité, la perméabilité et la conductivité du matériau considéré, avec ϵ_0 et μ_0 leurs constantes dans le vide, qui valent en unités SI

$$\epsilon_0 \simeq \frac{1}{36\pi \times 10^9} \text{ F/m}, \quad (1.3a)$$

$$\mu_0 \simeq 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}. \quad (1.3b)$$

Ces deux grandeurs vérifient la relation $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, avec c la célérité de la lumière dans le vide. ϵ_r et μ_r sont respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique relatives : elles valent 1 dans le vide. Rappelons que par la suite, seuls des milieux non magnétiques seront considérés, par conséquent la perméabilité magnétique relative $\mu_r = 1$. De plus, les milieux de propagation seront supposés dépourvus de charges, $\rho = 0$, et la plupart du temps également dépourvus de courants, $\mathbf{j} = \mathbf{0}$. Un milieu dépourvu de charges sera alors qualifié de milieu diélectrique ; une distinction sera faite entre un milieu diélectrique dépourvu de courants, que nous qualifierons de *milieu diélectrique parfait* ou pur, et un milieu diélectrique pourvu de courants, que nous qualifierons de *milieu diélectrique à pertes* ou *milieu diélectrique réel*.

1.1.1.1 Conditions aux limites

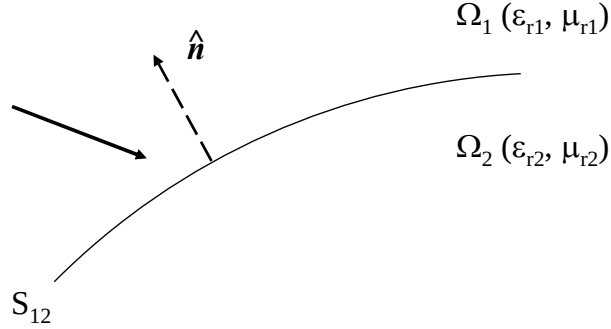


FIG. 1.1 – Interface entre deux milieux LHI semi-infinis Ω_1 (milieu incident) et Ω_2 .

Les équations de Maxwell sont applicables pour des milieux infinis, ce qui ne reflète pas la réalité puisque tout milieu possède des limites. Pour des applications pratiques de la théorie de l'électromagnétisme il est donc important de savoir traiter le problème de la limite entre deux milieux de propriétés électromagnétiques différentes. Supposons une interface arbitraire S_{12} séparant deux milieux (LHI) semi-infinis notés respectivement Ω_1 pour le milieu supérieur et Ω_2 pour le milieu inférieur, et $\hat{\mathbf{n}}$ un vecteur unitaire normal à l'interface, orienté par convention

⁴La linéarité caractérise le fait que les grandeurs ϵ et μ sont indépendantes de la puissance de $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$, l'homogénéité que ϵ et μ ne dépendent pas du point considéré, et l'isotropie que ϵ , μ et σ sont des scalaires.

vers le milieu supérieur Ω_1 . Les conditions aux limites [5, 6, 7] peuvent s'écrire alors sous la forme locale comme suit :

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0, \quad (1.4a)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \rho_s, \quad (1.4b)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}, \quad (1.4c)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{j}_s \wedge \hat{\mathbf{n}}, \quad (1.4d)$$

où ρ_s et $\mathbf{j}_s$ représentent respectivement la densité superficielle (ou surfacique) de charge et le vecteur densité superficielle (ou surfacique) de courant, qui peuvent exister à l'interface séparant les deux milieux ($\rho_s = 0$ pour des milieux diélectriques, $\rho_s = 0$ et $\mathbf{j}_s = \mathbf{0}$ pour des milieux diélectriques parfaits). Les équations (1.4a) et (1.4c), appelées *relations de continuité*, décrivent respectivement la continuité de la composante normale de $\mathbf{B}$ et de la composante tangentielle de $\mathbf{E}$ à l'interface. Les deux autres équations (1.4b) et (1.4d) traduisent respectivement la discontinuité de la composante normale de $\mathbf{D}$ en présence de charges superficielles de densité ρ_s et la discontinuité de la composante tangentielle de $\mathbf{H}$ sur une nappe de courant.

Pour le cas où le milieu inférieur est un métal parfaitement conducteur⁵, les équations peuvent s'écrire sous la forme

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_1 = 0, \quad (1.5a)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}_1 = -\rho_s/\epsilon_1, \quad (1.5b)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{E}_1 = \mathbf{0}, \quad (1.5c)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge \mathbf{H}_1 = -\mathbf{j}_s \wedge \hat{\mathbf{n}}. \quad (1.5d)$$

La condition (1.5c) est communément appelée la *condition de Dirichlet*, et la condition (1.5d), en absence de sources de courant, est appelée la *condition de Neumann*.

De même, pour le cas où les deux milieux LHI sont des diélectriques parfaits, les équations peuvent s'écrire sous la forme

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0, \quad (1.6a)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad (1.6b)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mathbf{0}, \quad (1.6c)$$

$$\hat{\mathbf{n}} \wedge (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{0}. \quad (1.6d)$$

1.1.2 Propagation d'une onde plane (Equation de Helmholtz et onde plane)

Les équations de propagation des champs s'obtiennent à partir des équations de Maxwell, en utilisant la propriété $\mathbf{rot} \mathbf{rot} = \mathbf{grad} \operatorname{div} - \nabla^2$, où ∇^2 est le laplacien vectoriel⁶. Nous obtenons alors, de manière générale

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{grad} \rho + \mu \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}, \quad (1.7a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = -\mathbf{rot} \mathbf{j}. \quad (1.7b)$$

⁵Un métal parfaitement conducteur est caractérisé par une conductivité $\sigma \rightarrow \infty$.

⁶En coordonnées cartésiennes, si on représente le laplacien scalaire par $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, le laplacien vectoriel de $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$, $\nabla^2 \mathbf{A}$, est défini par $\nabla^2 \mathbf{A} = \Delta A_x \hat{\mathbf{x}} + \Delta A_y \hat{\mathbf{y}} + \Delta A_z \hat{\mathbf{z}}$.

Pour un milieu diélectrique parfait ($\rho = 0$, $\mathbf{j} = \mathbf{0}$), l'équation se réduit à

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0}, \quad (1.8a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = \mathbf{0}. \quad (1.8b)$$

On obtient une équation d'onde de type d'Alembert, où $v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$ est la vitesse de propagation de l'onde. On peut écrire v sous la forme $v = c/n$, avec $n = \sqrt{\epsilon_r\mu_r}$ l'indice de réfraction du milieu considéré ($\mu_r = 1$ ici), et c la vitesse de propagation dans le vide, définie par $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \simeq 3 \times 10^8$ m/s.

De manière générale, la solution de l'équation de propagation dans un milieu diélectrique pur pour une onde plane progressive (OPP) se propageant dans la direction $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{R}/\|\mathbf{R}\|$ à la vitesse v s'écrit [8, 4, 6]

$$\Psi = \Psi_+ \left(t - \frac{\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{R}}{v} \right) + \Psi_- \left(t + \frac{\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{R}}{v} \right), \quad (1.9)$$

où, par définition d'une onde plane, les plans d'onde (ou surfaces d'onde plane) sont orthogonaux à $\hat{\mathbf{u}}$, définis par les plans $\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{R} = \text{Cste}$. La fonction Ψ_+ , parfois appelée OPP+, est une onde progressive se propageant à la vitesse v dans la direction $\mathbf{R}$ et selon les R croissants. De même, Ψ_- , parfois appelée OPP-, est une onde progressive se propageant à la vitesse v dans la direction $\mathbf{R}$ et selon les R décroissants. Cette fonction d'onde est vérifiée à la fois par $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$, et l'on peut montrer que

$$\mathbf{H} = Z \hat{\mathbf{u}} \wedge \mathbf{E}, \quad (1.10)$$

où $Z = \sqrt{\epsilon/\mu} = Z_0 \sqrt{\epsilon_r/\mu_r}$ est l'impédance d'onde du milieu considéré, avec Z_0 l'impédance d'onde du vide qui vaut $Z_0 = \sqrt{\epsilon_0/\mu_0} \simeq 120\pi \Omega$. Ainsi, $(\mathbf{E}, \mathbf{H}, \hat{\mathbf{u}})$ forment un trièdre direct. L'onde est alors qualifiée d'onde TEM (Transverse Electro-Magnétique), car les vecteurs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{H}$ sont orthogonaux à la direction de propagation portée par $\hat{\mathbf{u}}$. Rappelons que, comme il a été évoqué en introduction, une onde plane rigoureusement n'existe pas, mais elle peut être assimilée comme localement plane, notamment si elle est située en zone de champ lointain de la source.

1.1.2.1 Régime harmonique et onde plane progressive monochromatique

Une onde plane progressive *monochromatique* (OPPM) ou harmonique est une fonction spatio-temporelle d'expression réelle⁷ [8]

$$\Psi(\mathbf{R}, t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{\hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{R}}{v} \right) - \phi \right] = A \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - \phi), \quad (1.11)$$

où $\mathbf{k} = \omega/v \hat{\mathbf{u}}$ est le vecteur d'onde, ω la pulsation en rad/s, et ϕ un terme de phase constant. Par la suite, nous nous plaçons en régime harmonique, de sorte que pour toute grandeur électromagnétique $\mathbf{G}$ est une OPPM d'expression complexe de la forme

$$\underline{\Psi}(\mathbf{R}, t) = A \exp[\pm i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{R} - \phi)] = \underline{\psi}(\mathbf{R}) \exp(\pm i\omega t), \quad (1.12)$$

avec $\underline{\psi}(\mathbf{R}) = A \exp[\mp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{R} + \phi)]$. Par la suite, pour simplifier les notations, les champs complexes seront représentés en souligné.

⁷La solution de l'équation (1.9) généralement retenue pour l'OPPM étudiée est l'OPP+, car le plus souvent le repère choisi est tel que l'OPPM incidente étudiée se propage en s'éloignant de l'origine O choisie.

Selon que l'on choisit la convention avec le signe $+$ ou $-$ dans $\exp[\pm i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{R})]$, l'opérateur dérivée temporelle $\partial/\partial t$ équivaut à une multiplication par $\pm i\omega$, et l'opérateur de dérivée spatiale $\nabla \cdot$ équivaut à une multiplication par $\mp i\mathbf{k}$. Dans la suite, la convention retenue sera $\exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{R})]$ ⁸. Ainsi, l'équation d'onde (1.8a) du champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{R}) \exp(-i\omega t)$ dans un milieu dépourvu de charges et de courants devient

$$(\nabla^2 + k^2) \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (1.13)$$

avec $k^2 = \omega^2/v^2$ (relation de dispersion), où k représente le nombre d'onde dans le milieu diélectrique parfait considéré. Cette équation, appelée *équation de Helmholtz*, est aussi vérifiée par le champ magnétique $\mathbf{H}$.

En tenant compte des courants superficiels $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, le nombre d'onde $\underline{k}$ s'exprime par la relation de dispersion

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{v^2} (1 + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon}). \quad (1.14)$$

Dans ce cas, le nombre d'onde $\underline{k}$ est complexe, et l'onde est amortie le long de sa propagation dans le milieu dit à pertes. Elle est alors appelée "pseudo-OPPM".

1.1.2.2 Densité de puissance électromagnétique

Pour quantifier l'énergie électromagnétique véhiculée par l'OPP, on utilise classiquement le vecteur de Poynting $\mathbf{\Pi}$, représentant la densité de puissance électromagnétique de l'OPP. C'est une grandeur réelle définie par $\mathbf{\Pi} = \mathbf{E}_{\text{re}} \wedge \mathbf{H}_{\text{re}}$, où $\mathbf{E}_{\text{re}}$ et $\mathbf{H}_{\text{re}}$ sont les vecteurs champs électrique et magnétique exprimés en grandeurs réelles. Les détecteurs mesurant en général des grandeurs moyennes, ce qui nous intéresse est plutôt la moyenne temporelle $\langle \mathbf{\Pi} \rangle$ ou $\langle ||\mathbf{\Pi}|| \rangle$. On peut montrer que

$$\langle \mathbf{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \Re e (\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}^*). \quad (1.15)$$

1.1.3 Propagation dans un milieu diélectrique

Si l'on revient à la relation de dispersion (1.14), k représente le nombre d'onde dans le milieu diélectrique réel (ou parfois dit à pertes) non magnétique et dépourvu de charges, avec $\underline{k} = \sqrt{\epsilon_r} k_0$, où $k_0 = \omega/c$ est le nombre d'onde dans le vide et ϵ_r la permittivité relative du milieu. $\underline{k}$ étant ici complexe a priori, ϵ_r est aussi complexe et vaut [4] (selon la convention en $-i\omega t$)

$$\epsilon_r = \epsilon_r + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}. \quad (1.16)$$

Précisons que cette équation vaut pour des *milieux non dispersifs*, c'est-à-dire des milieux dont la permittivité et la conductivité (en toute rigueur également la perméabilité) ne dépendent pas de la pulsation ω . Des modèles exprimant la permittivité complexe pour des milieux dispersifs ont été développés. Par exemple, la permittivité relative de l'eau de mer est calculée à partir de l'équation de Debye modifiée [10]. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer à [11, 12].

⁸La convention utilisée diffère selon les auteurs : cette convention semble être la plus souvent choisie, mais rien n'empêche d'utiliser l'autre convention, voir par exemple [9]. Notons cependant que ce choix a des incidences dans toute la suite, notamment sur les écritures des permittivités et des indices de réfraction complexes. Avec notre choix de convention, elles seront de la forme $\underline{a} = a' + ia''$; dans le cas contraire, elles seront de la forme $\underline{a} = a' - ia''$.

En revanche, pour le cas du pétrole, relativement peu de données existent : voir principalement [13, 14, 15, 16].

En posant $\epsilon_r'' = \sigma/\omega\epsilon_0$ la partie imaginaire de ϵ_r et $\epsilon_r' = \epsilon_r$ sa partie réelle, la permittivité relative (complexe) s'écrit $\epsilon_r = \epsilon_r' + i\epsilon_r''$. L'indice de réfraction correspondant $\underline{n} = n' + in''$ est alors complexe, avec $n' = \Re(\sqrt{\epsilon_r' + i\epsilon_r''})$ et $n'' = \Im(\sqrt{\epsilon_r' + i\epsilon_r''})$. On peut montrer alors que [4, 17]

$$n' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\epsilon_r'^2 + \epsilon_r''^2} + \epsilon_r' \right]^{1/2}, \quad (1.17a)$$

$$n'' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{\epsilon_r'^2 + \epsilon_r''^2} - \epsilon_r' \right]^{1/2}. \quad (1.17b)$$

Le nombre d'onde k étant complexe, le champ électrique peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-k_0 n'' \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{R}) \exp[i(k_0 n' \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{R} - \omega t)], \quad (1.18)$$

où $\mathbf{k} = k_0 \underline{n} \hat{\mathbf{u}}$. L'impédance d'onde $\underline{Z} = Z_0 / \sqrt{\epsilon_r}$ dans ce cas est complexe, traduisant le fait que $\mathbf{H}$ va présenter un déphasage avec $\mathbf{E}$, donné par $\arg(\underline{Z})$.

D'après les expressions (1.15) et (1.18), la densité de puissance moyenne (réelle) associée à cette onde vaut

$$\langle \mathbf{\Pi} \rangle = \frac{n' |\mathbf{E}_0|^2}{2Z_0} \exp(-2k_0 n'' \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{R}) \hat{\mathbf{u}}. \quad (1.19)$$

Dans le vide ($n'' = 0$ et $n' = 1$), on retrouve l'expression classique $\langle \mathbf{\Pi} \rangle = |\mathbf{E}_0|^2 / (2Z_0) \hat{\mathbf{u}}$.

1.1.3.1 Epaisseur de peau

L'épaisseur de peau δ (ou longueur de pénétration) permet de quantifier l'atténuation de l'onde lors de sa propagation dans le milieu à pertes (représenté ici par le terme n''). Elle correspond à la distance de propagation au bout de laquelle le module du champ est atténué d'un facteur $\exp(-1) = 1/e \simeq 0.37$. Alors

$$\delta = \frac{1}{k_0 n''} = \frac{\lambda_0}{\pi \sqrt{2} \left[\sqrt{\epsilon_r'^2 + \epsilon_r''^2} - \epsilon_r' \right]^{1/2}}, \quad (1.20)$$

où λ_0 est la longueur d'onde dans le vide. Pour un milieu très conducteur comme le cuivre, aux fréquences micro-ondes $\epsilon_r'' \gg \epsilon_r' \Rightarrow n'' \approx \sqrt{\epsilon_r''/2}$ et $\delta = \sqrt{2/(\omega\mu_0\sigma)}$, d'où $\delta \ll \lambda_0$. Une eau de mer, à des fréquences de l'ordre de 10 GHz, est caractérisée par une permittivité relative de partie réelle $\epsilon_r' \simeq 53$ et de partie imaginaire ϵ_r'' de l'ordre de 38. La longueur de pénétration dans la mer est alors $\delta \approx 1.9$ mm à 10 GHz. Une nappe de pétrole, pour des fréquences de l'ordre de 10 GHz, est caractérisée par une permittivité relative de partie réelle $\epsilon_r' \simeq 2.2$ et de partie imaginaire ϵ_r'' de l'ordre de 0.01. La longueur de pénétration dans le pétrole est alors $\delta \approx 1.4$ m à 10 GHz.

1.1.4 Onde incidente sur une interface : polarisation

Soit une onde électromagnétique supposée plane se propageant dans un milieu LHI non magnétique. Si le repère spatial est défini en coordonnées cartésiennes $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$, il est choisi classiquement (par commodité) tel que l'onde se propage dans le plan $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}})$ (voir figure 1.2).

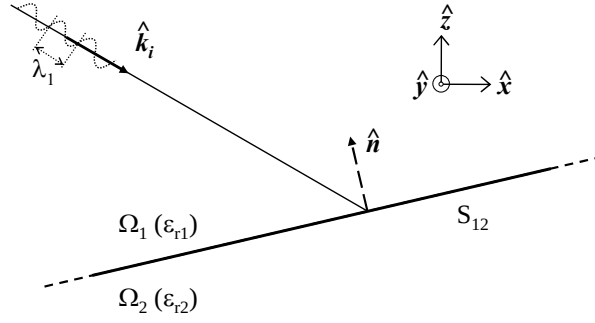


FIG. 1.2 – Onde incidente sur une surface plane infinie : vue en coupe dans le plan d'incidence $(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{n}})$.

La polarisation d'une onde électromagnétique est définie par les propriétés du vecteur champ électrique incident $\mathbf{E}_i$ de l'onde dans un plan donné. Lorsque l'onde est en interaction avec une interface, le plan choisi est classiquement le *plan d'incidence*. Ce dernier est défini par le plan formé par le vecteur d'onde incident sur la surface $\hat{\mathbf{k}}_i$ avec la normale à la surface $\hat{\mathbf{n}}$. Pour le cas où la surface étudiée est plane, $\hat{\mathbf{n}} \in (\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}})$, le plan d'incidence $(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{n}})$ est donc confondu avec le plan $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}})$ comme sur la figure 1.2. Pour le cas où la surface étudiée est rugueuse, la normale à la surface devient une normale locale, dépendant du point de la surface considéré. Si l'on considère une surface rugueuse quelconque, où la hauteur de la surface ζ dépend des deux paramètres x et y , $\zeta(x, y)$, la normale n'appartient pas a priori au plan $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}})$, ainsi le plan d'incidence dépend du point de la surface considéré. Par commodité, la polarisation de l'onde incidente est alors définie par rapport au plan moyen $(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{z}})$ comme sur la figure 1.3.

Pour étudier le problème de polarisation dans le cas général, il faut rigoureusement considérer une polarisation elliptique quelconque. Cependant, ayant choisi un repère cartésien, et sachant que tout état de polarisation d'une onde peut être représenté par la somme déphasée de deux composantes rectilignes horizontale et verticale, nous étudierons les composantes horizontale et verticale.

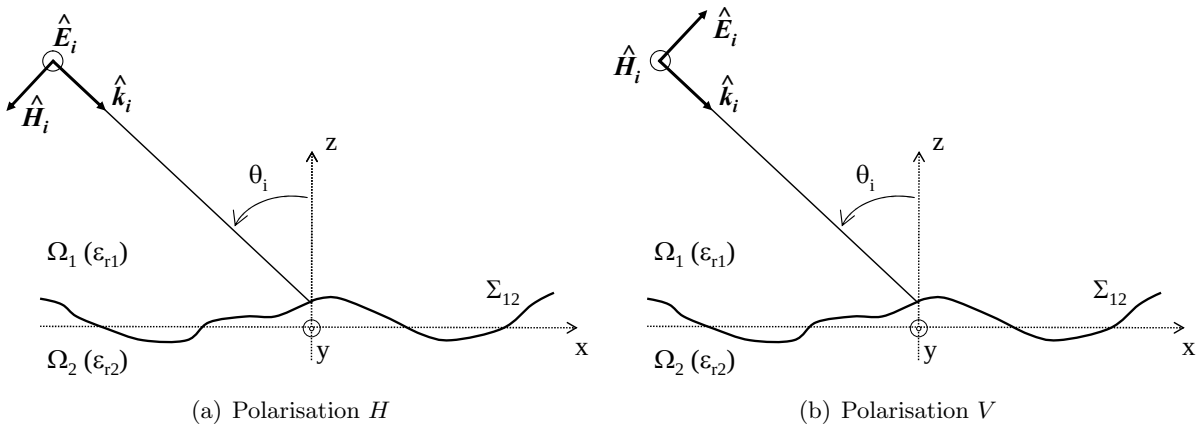


FIG. 1.3 – Onde incidente sur une interface rugueuse en polarisations H et V : vue en coupe dans le plan moyen $(\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{z}})$.

Une représentation possible des polarisations horizontale et verticale est donnée sur la figure 1.3. Notons que dans la littérature, on trouve différentes dénominations de ces polarisations : la

polarisation horizontale (notée H) est aussi appelée polarisation transverse électrique (notée TE) ou perpendiculaire (notée $\perp$, ou s pour *senkrecht*, qui signifie perpendiculaire en allemand, en optique). La polarisation verticale (notée V) est aussi appelée polarisation transverse magnétique (notée TM) ou parallèle (notée $//$ ou p pour *parallel* en optique).

1.1.5 Réflexion et transmission par une interface plane infinie

Tout d’abord étudions le cas simple où les deux milieux Ω_1 et Ω_2 sont deux diélectriques parfaits, c’est-à-dire de permittivités ϵ_{r1} et ϵ_{r2} réelles. La surface plane séparant les deux milieux est supposée infinie.

1.1.5.1 Optique géométrique et Principe de Fermat

Lors de l’étude de l’interaction d’une OPPM avec une interface plane infinie, on peut se contenter d’utiliser une approche qui ne tient pas compte de l’aspect ondulatoire de l’onde : c’est l’optique géométrique (parfois aussi appelée optique des rayons lumineux). L’optique géométrique fut la première méthode *asymptotique*⁹ mise au point pour décrire l’interaction d’une onde avec un objet. Cette méthode est applicable si les dimensions de l’objet sont très grandes devant la longueur d’onde électromagnétique, pour que la diffraction puisse être négligée (par diffraction, on entend que le phénomène est observé de façon macroscopique) par cet objet. *L’approximation de l’optique géométrique peut donc être considérée comme une méthode asymptotique hautes fréquences.*

Le principe de Fermat pose les bases de l’optique des rayons lumineux, dans les milieux isotropes, indépendante de la nature ondulatoire de la lumière. Il a été énoncé par P. de Fermat, en 1657, sous la forme suivante :

“La lumière se propage d’un point à un autre sur une trajectoire telle que la durée du parcours soit minimale¹⁰”.

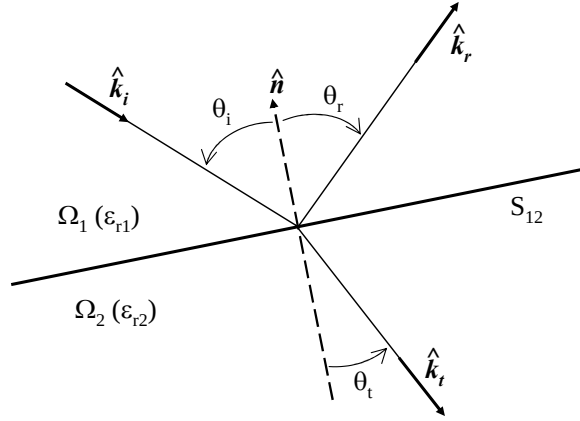
Ainsi, dans un milieu homogène, les ondes se propagent de manière rectiligne. Ce principe permet de retrouver les lois de Snell-Descartes, trouvées par W. Snell en 1621 et retrouvées par R. Descartes en 1637. Elles sont présentées ci-dessous.

1.1.5.2 Lois de Snell-Descartes et coefficients de Fresnel

Soit une OPPM de pulsation ω se propageant dans le milieu Ω_1 de permittivité ϵ_{r1} sur l’interface plane S_{12} supposée infinie selon une direction $\hat{\mathbf{k}}_i$. Cette onde donne naissance à une onde réfléchie selon une direction $\hat{\mathbf{k}}_r$, et (éventuellement) une onde transmise selon une direction $\hat{\mathbf{k}}_t$. Les relations de continuité (1.6a-1.6d) sur l’interface imposent que les pulsations des trois ondes soient égales (on parle d’invariance de phase), et que les plans d’incidence ($\hat{\mathbf{k}}_i, \hat{\mathbf{n}}$), de réflexion ($\hat{\mathbf{k}}_r, \hat{\mathbf{n}}$) et de transmission ($\hat{\mathbf{k}}_t, \hat{\mathbf{n}}$) sont confondus. Ainsi, la première loi de Snell-Descartes stipule que pour un rayon incident, il existe un seul rayon réfléchi et, au plus, un seul rayon réfracté, et les plans d’incidence, de réflexion et de réfraction sont confondus. De plus, ces relations de continuité permettent d’établir la deuxième loi de Snell-Descartes, pour laquelle les angles de

⁹ou approchée

¹⁰Actuellement, elle est énoncée en introduisant le concept de chemin optique, ce qui est une autre façon d’évaluer la durée du parcours, et le terme “minimale” est remplacé par “stationnaire”.


 FIG. 1.4 – Ondes réfléchie et transmise par un interface plane infinie ($\epsilon_{r1} < \epsilon_{r2}$ ici)

réflexion et de transmission vérifient

$$\theta_r = \pm \theta_i, \quad (1.21a)$$

$$\sqrt{\epsilon_{r2}} \sin \theta_t = \sqrt{\epsilon_{r1}} \sin \theta_i, \quad (1.21b)$$

où les angles sont définis par rapport à la normale à la surface, avec

$$\cos \theta_i = -\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}. \quad (1.22)$$

L'angle de réflexion θ_r vaut plus ou moins θ_i , selon que l'on choisit d'orienter les angles ou non. Dans ce paragraphe, ce n'est pas nécessaire, cependant par la suite, nous choisirons d'orienter les angles.

De même, à partir des conditions aux limites pour le champ électrique (1.6b,1.6c) et pour le champ magnétique (1.6a,1.6d) à l'interface S_{12} entre Ω_1 et Ω_2 , nous pouvons obtenir les expressions des coefficients de réflexion r_{12} et de transmission t_{12} dits de Fresnel, en polarisations horizontale (notée H) et verticale (notée V). Ils sont donnés par [17]

$$r_{12}^H(\theta_i) = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} = \frac{\sqrt{\epsilon_{r1}} \cos \theta_i - \sqrt{\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1} \sin^2 \theta_i}}{\sqrt{\epsilon_{r1}} \cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1} \sin^2 \theta_i}}, \quad (1.23a)$$

$$t_{12}^H(\theta_i) = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} = \frac{2\sqrt{\epsilon_{r1}} \cos \theta_i}{\sqrt{\epsilon_{r1}} \cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1} \sin^2 \theta_i}}, \quad (1.23b)$$

en polarisation H et

$$r_{12}^V(\theta_i) = \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} = -\frac{\epsilon_{r2} \cos \theta_i - \sqrt{\epsilon_{r1}} \sqrt{\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1} \sin^2 \theta_i}}{\epsilon_{r2} \cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_{r1}} \sqrt{\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1} \sin^2 \theta_i}}, \quad (1.24a)$$

$$t_{12}^V(\theta_i) = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} = \frac{2\sqrt{\epsilon_{r1}\epsilon_{r2}} \cos \theta_i}{\epsilon_{r2} \cos \theta_i + \sqrt{\epsilon_{r1}} \sqrt{\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1} \sin^2 \theta_i}}, \quad (1.24b)$$

en polarisation V , avec θ_i l'angle local d'incidence défini par $\cos \theta_i = -\hat{\mathbf{k}}_i \cdot \hat{\mathbf{n}}$. Le coefficient de transmission s'exprime en fonction du coefficient de réflexion respectivement en polarisation H et V par

$$t_{12}^H(\theta_i) = 1 + r_{12}^H(\theta_i), \quad (1.25a)$$

$$t_{12}^V(\theta_i) = \frac{n_1}{n_2} [1 - r_{12}^V(\theta_i)]. \quad (1.25b)$$

Très souvent dans la littérature sur les surfaces rugueuses, une définition un peu différente est utilisée, puisque r_{12}^V est remplacé par $-r_{12}^V$.

1.1.5.3 Etude de différents cas de figure

Pour un angle d'incidence nul, les expressions (1.23a-1.24b) deviennent

$$r_{12}^H(0) = r_{12}^V(0) = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad (1.26a)$$

$$t_{12}^H(0) = t_{12}^V(0) = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}, \quad (1.26b)$$

et pour une incidence rasante $\theta_i = \pm\pi/2$, elles deviennent

$$r_{12}^H(\pi/2) = -1, \quad (1.27a)$$

$$r_{12}^V(\pi/2) = +1, \quad (1.27b)$$

$$t_{12}^H(\pi/2) = t_{12}^V(\pi/2) = 0. \quad (1.27c)$$

Dans le cas d'un milieu inférieur parfaitement conducteur ($\sigma \rightarrow \infty$ ou $\epsilon_{r2} = i\infty$), nous obtenons $\forall \theta_i$

$$r_{12}^H(\theta_i) = r_{12}^V(\theta_i) = -1, \quad (1.28a)$$

$$t_{12}^H(\theta_i) = t_{12}^V(\theta_i) = 0. \quad (1.28b)$$

On dit alors que pour l'onde réfléchie, il y a retournement du champ.

1.1.5.4 Angle limite et angle de Brewster

Lorsque l'onde est incidente d'un milieu moins réfringent vers un milieu plus réfringent ($n_1 < n_2$), et que l'onde incidente atteint l'angle rasant $\theta_i = \pi/2$, il existe un *angle limite de transmission* θ_t^l défini par

$$\sin \theta_t^l = n_1/n_2. \quad (1.29)$$

Pour une interface air-verre ($n_2 = 1.5$), $\theta_t^l \simeq 41.8^\circ$. Pour une interface air-mer ($n_2 = \sqrt{53}$), $\theta_t^l \simeq 7.9^\circ$, pour une interface air-pétrole ($n_2 = \sqrt{2.2}$), $\theta_t^l \simeq 42.4^\circ$, et pour une interface pétrole-mer, $\theta_t^l \simeq 11.8^\circ$. Inversement, si $n_1 > n_2$, à l'angle limite d'incidence $\sin \theta_i^l = n_2/n_1$, l'angle de transmission vaut $\pi/2$. Alors, au-delà de cet angle, il n'y a pas d'onde transmise en champ lointain par rapport à la surface.

Le coefficient de réflexion s'annule en polarisation V uniquement, pour un angle d'incidence appelé *angle d'incidence de Brewster* θ_i^B défini par

$$\tan \theta_i^B = n_2/n_1. \quad (1.30)$$

Pour une interface air-verre, $\theta_i^B \simeq 56.8^\circ$. Pour une interface air-mer, $\theta_i^B \simeq 82.2^\circ$, pour une interface air-pétrole, $\theta_i^B \simeq 56.0^\circ$, et pour une interface pétrole-mer, $\theta_i^B \simeq 78.5^\circ$.

1.1.5.5 Réflectance, transmittance et conservation d'énergie

L'interprétation physique des phénomènes étant réalisée le plus souvent à partir des *puissances* réfléchie et transmise, il faut raisonner sur les coefficients de Fresnel en puissance, appelés

respectivement réflectance, pour la réflexion et transmittance pour la transmission. Ils sont définis comme le rapport des densités de puissance de Poynting moyennes respectivement réfléchie et transmise sur la densité de puissance (moyenne) incidente sur la surface. On montre alors que

$$\mathcal{R}_{12} = \frac{\langle \Pi_r \rangle}{\langle \Pi_i \rangle} = |r_{12}|^2, \quad (1.31a)$$

$$\mathcal{T}_{12} = \frac{\langle \Pi_t \rangle}{\langle \Pi_i \rangle} = \frac{n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i} |t_{12}|^2, \quad (1.31b)$$

quel que soit l'angle d'incidence θ_i , et que l'état de polarisation de l'onde soit horizontal ou vertical.

Ainsi, on peut montrer que la conservation d'énergie est bien vérifiée :

$$\frac{\langle \Pi_r \rangle + \langle \Pi_t \rangle}{\langle \Pi_i \rangle} = \mathcal{R}_{12} + \mathcal{T}_{12} = 1, \quad (1.32)$$

pour tout θ_i et en polarisation H ou V .

1.1.5.6 Cas d'un milieu inférieur diélectrique à pertes

Nous avons étudié précédemment la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu diélectrique à pertes. Cependant, quand une onde incidente dans un milieu diélectrique parfait arrive sur une interface séparant un milieu inférieur à pertes, quelques problèmes surgissent. En effet, si l'on cherche à déterminer la direction $\hat{\mathbf{k}}_t$ (ou l'angle associé θ_t) selon laquelle l'onde transmise se propage, on utilise pour ce faire la loi de Snell-Descartes en transmission. Pour un milieu inférieur diélectrique à pertes, elle s'exprime par

$$\sqrt{\epsilon_{r1}} \sin \theta_i = \sqrt{\epsilon_{r2}} \sin \underline{\theta}_t, \quad (1.33)$$

La permittivité diélectrique ϵ_{r2} étant complexe et le terme à gauche de l'équation étant réel, l'angle de transmission $\underline{\theta}_t$ est forcément complexe. Or, nous cherchons à déterminer l'angle *physique* θ_t^{phys} selon lequel l'onde transmise se propage dans le milieu à pertes. Cet angle physique de propagation correspond alors au plan des équi-phases de l'onde transmise. On peut alors montrer [4, 17, 18] que

$$\tan \theta_t^{phys} = \frac{\sin \theta_i}{p}, \quad (1.34)$$

où

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{(\epsilon'_{r2} - \sin^2 \theta_i)^2 + \epsilon''_{r2}{}^2} + (\epsilon'_{r2} - \sin^2 \theta_i) \right]^{1/2}, \quad (1.35)$$

où $p = \Re \left(\sqrt{\epsilon_{r2} - \sin^2 \underline{\theta}_t} \right)$ et $\epsilon_{r2} = \epsilon'_{r2} + i\epsilon''_{r2}$. Notons que l'angle physique de propagation correspond au plan des équi-phases de l'onde se propageant dans le milieu à pertes. Or, pour un angle d'incidence non nul, le plan des équi-phases n'est pas confondu avec le plan des équi-amplitudes, qui lui est parallèle à l'interface. Ainsi, l'onde se propageant obliquement dans le milieu inférieur à pertes après transmission à travers l'interface n'est plus plane. Cette onde est alors qualifiée d'onde plane dissociée, ou onde inhomogène.

Souvent, dans la littérature, pour estimer l'angle physique de propagation les auteurs se contentent d'utiliser la loi de Snell-Descartes en utilisant soit la partie réelle de la permittivité

relative, soit la partie réelle de l'indice optique (ou de la racine carrée de la permittivité relative)

$$\sqrt{\epsilon_{r2}} \sin \theta_t^{(1)} \simeq \sqrt{\epsilon_{r1}} \sin \theta_i, \quad (1.36a)$$

$$\Re(\sqrt{\epsilon_{r2}}) \sin \theta_t^{(2)} \simeq \sqrt{\epsilon_{r1}} \sin \theta_i. \quad (1.36b)$$

On peut constater que pour des milieux à faibles pertes, les deux approximations sont valides pour des angles d'incidence modérés, mais que la deuxième est beaucoup plus précise que la première. Par exemple, pour une interface air-pétrole de permittivité $\epsilon_{r2} = 2.2 + i0.01$ à 10 GHz, l'angle physique de propagation pour $\theta_i = 20^\circ$ vaut $\theta_t^{phys} \simeq 13.331769^\circ$. Avec les deux approximations, nous obtenons respectivement $\theta_t^{(1)} \simeq 13.331806^\circ$ et $\theta_t^{(1)} \simeq 13.331771^\circ$. Elles sont donc toutes deux valides et extrêmement précises. Pour une interface air-mer de permittivité $\epsilon_{r2} = 53 + i38$ à 10 GHz, l'angle physique de propagation pour $\theta_i = 20^\circ$ vaut $\theta_t^{phys} \simeq 2.5495^\circ$. Avec les deux approximations, nous obtenons respectivement $\theta_t^{(1)} \simeq 2.6928^\circ$ et $\theta_t^{(1)} \simeq 2.5497^\circ$. Elles sont toutes deux correctes, mais seule la deuxième est précise.

Remarquons que pour un milieu inférieur à pertes, les expressions des coefficients de Fresnel donnés plus haut sont inchangées, cependant ces coefficients ne sont plus réels, mais complexes. Ceci peut être interprété physiquement comme un déphasage de surface : l'onde, par réflexion ou transmission sur un milieu diélectrique à pertes subit un déphasage à l'interface¹¹. Constatons d'ailleurs que si la partie imaginaire ϵ''_{r2} de la permittivité augmente (avec la partie réelle ϵ'_{r2} qui reste fixe), à l'interface, la réflectance et donc la puissance réfléchie augmente, au détriment de la transmittance et donc de la puissance transmise. Pour un milieu à pertes de dimensions finies notamment, il est intéressant de calculer l'épaisseur de peau de ce milieu, dont l'expression est donnée plus haut, afin de connaître l'atténuation de l'onde dans ce milieu. Par exemple, pour une nappe de pétrole sur une surface de mer, à une fréquence de 10 GHz l'épaisseur de peau vaut 1.4 m. Alors, si l'on considère une épaisseur de la nappe de l'ordre de 5 mm, l'onde est faiblement atténuée lors de sa propagation dans la nappe de pétrole.

1.1.5.7 Remarque sur le cas d'une surface de dimensions finies

Dans tout ce qui a précédé, la surface étudiée était supposée infinie, impliquant que l'onde diffractée en réflexion (et transmission) par la surface est réfléchie (et transmise) dans la direction spéculaire donnée par la loi de Snell-Descartes en réflexion (et transmission). Or dans la pratique, une surface est toujours de dimensions finies. Cependant, si ses dimensions sont grandes devant la longueur d'onde électromagnétique, cette approximation est bonne¹². En revanche, pour des dimensions comparables à la longueur d'onde, le phénomène de diffraction par la surface plane ne peut pas être négligé. La diffraction (en réflexion comme en transmission) par un objet de dimensions de l'ordre de la longueur d'onde peut être modélisée par la transformée de Fourier spatiale du profil de l'objet : si la surface est rectangulaire, le terme de diffraction est modélisé par un produit de deux sinus cardinaux de la forme

$$\text{sinc}[k_1 L_x / 2 (\sin \theta_r - \sin \theta_i)] \times \text{sinc}[k_1 L_y / 2 (\sin \theta_r - \sin \theta_i)], \quad (1.37)$$

¹¹en plus du déphasage de π si $\epsilon_{r1} < \epsilon_{r2}$ pour tout angle d'incidence en polarisation H , et pour un angle d'incidence inférieur à l'angle de Brewster en polarisation V . Dans le cas contraire, i.e. si $\epsilon_{r1} > \epsilon_{r2}$, le déphasage est nul pour tout angle d'incidence en polarisation H , et pour un angle d'incidence inférieur à l'angle de Brewster en polarisation V ; il est égal à π sinon.

¹²Ceci correspond à l'approximation haute fréquence dite de l'optique géométrique, ou optique des rayons lumineux.

où L_x et L_y sont les dimensions de la surface rectangulaire ; si la surface est circulaire, la diffraction est modélisée par une fonction de Bessel de la forme

$$\frac{J_1[k_1 d/2(\sin \theta_r - \sin \theta_i)]}{k_1 d/2(\sin \theta_r - \sin \theta_i)}, \quad (1.38)$$

où J_1 est la première fonction de Bessel de première espèce, et d le diamètre de la surface. La diffraction par la surface finie forme alors un lobe réparti autour de la direction spéculaire. Ainsi, pour une interface que l'on peut considérer infinie, la diffraction est modélisée par une impulsion de Dirac : toute l'énergie est alors concentrée dans la direction spéculaire, donnée par la relation (1.21a).

1.2 Caractérisation statistique d'une interface rugueuse stochastique

Dans cette partie, nous présentons les notions essentielles sur les processus aléatoires stochastiques, et notamment les notions de stationnarité et d'ergodicité. Nous verrons que la propriété d'ergodicité permet une description statistique identique entre les surfaces rugueuses aléatoires à variation spatiale et les surfaces rugueuses aléatoires à variation spatio-temporelle. Ensuite, la description statistique d'une surface rugueuse sera présentée, à travers notamment la distribution des hauteurs et la fonction d'auto-corrélation des hauteurs de la surface. Une application au domaine maritime sera donnée. Enfin, la notion de rugosité *électromagnétique* d'une interface rugueuse sera exposée, à travers le(s) critère(s) de rugosité de Rayleigh.

1.2.1 Processus aléatoires : équivalence des descriptions temporelle, spatiale et statistique

Tout d'abord, il convient de faire la distinction entre les surfaces rugueuses périodiques et les surfaces rugueuses aléatoires. En effet, les premiers travaux sur la diffusion par des surfaces rugueuses concernaient des surfaces périodiques. Citons par exemple les surfaces en créneaux, les surfaces en dents de scie, et les surfaces sinusoïdales. Ce genre de problèmes est maintenant relativement bien connu¹³ et assez simple à résoudre puisque l'on connaît avec exactitude la surface étudiée.

Par opposition, une surface rugueuse aléatoire ne peut, par définition, être connue avec exactitude. En revanche, il est possible d'en connaître certaines caractéristiques statistiques (déterministes), appelées moyennes ou moments statistiques, permettant de décrire le comportement statistique de la surface rugueuse. Dans la nature, il existe de très nombreuses surfaces rugueuses aléatoires. Deux grands types peuvent se distinguer. Certaines surfaces rugueuses sont aléatoires spatialement (et invariantes au cours du temps), comme de nombreuses surfaces artificielles rencontrées en optique, ou des surfaces terrestres comme par exemple les surfaces de champs labourés. D'autres en revanche sont aléatoires à la fois spatialement et dans le temps : c'est le cas d'interfaces séparant l'air d'un fluide comme la mer, ou de la surface d'un désert de sable (si l'on regarde pendant un intervalle de temps suffisamment grand). Elles sont alors qualifiées de surfaces rugueuses stochastiques¹⁴.

Cependant, dans les applications classiques qui nous intéressent, on se trouve dans une configuration où le comportement spatio-temporel et le comportement spatial d'une interface rugueuse aléatoire sont équivalents. Ainsi, la description statistique de ces deux types d'interfaces est la même. Pour simplifier les notations et les dessins, considérons dans un premier temps une surface mono-dimensionnelle (noté 1D) pour laquelle la hauteur ζ de la surface ne dépend que de l'abscisse x , $\zeta(x)$ (le raisonnement est le même et reste valide pour le cas bidimensionnel, noté 2D).

1.2.1.1 Rappels sur les processus aléatoires - Cas de surfaces rugueuses

Une interface rugueuse à variations spatiales (invariante au cours du temps), est décrite par ses hauteurs ζ . Cette variable aléatoire dépend pour ce type d'interface d'un seul paramètre : le

¹³excepté peut-être les surfaces à courte périodicité spatiale, qui ont fait l'objet d'une communication récente pour le cas de surfaces sinusoïdales [19]

¹⁴Un processus stochastique est un processus aléatoire dépendant du temps.

paramètre spatial, noté x . Cette variable aléatoire $\zeta(x)$ peut être représentée par une famille de fonctions réelles que l'on écrit plus classiquement (voir par exemple [20]) sous la forme $\{\zeta(x, \omega)\}$, où ω représente une épreuve dans un espace de probabilité (Ω) . Il existe deux façons de décrire cette variable aléatoire (figure 1.5)(voir [21, 22]) :

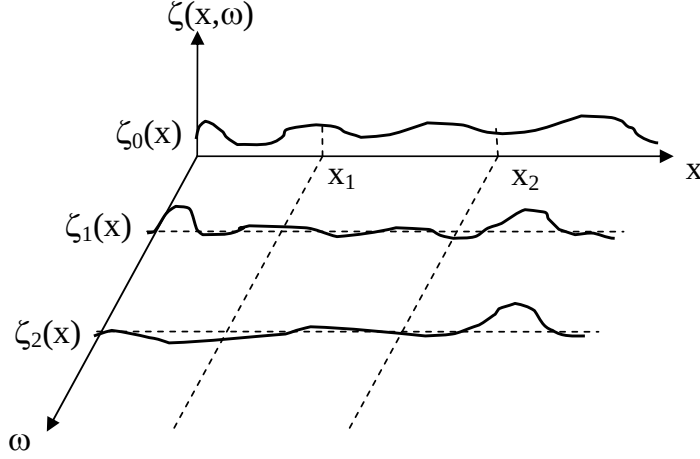


FIG. 1.5 – Processus aléatoire (surface invariante au cours du temps)

- à $x = x_i$ donné, $\zeta(x_i, \omega)$ est une variable aléatoire notée $\zeta_i(\omega)$. Son comportement statistique peut être décrit par sa densité de probabilité $p(\zeta_i)$ (ou par sa fonction de répartition $F(\zeta_i)$), et sa fonction d'auto-corrélation statistique W_i . La connaissance de cette fonction permet d'accéder aux principaux **moments statistiques** de la variable aléatoire (v.a.).
- pour une épreuve $\omega = \omega_k$ donnée, $\zeta(x, \omega_k)$ est une réalisation notée $\zeta_k(x)$ de la variable aléatoire. Cette variable réelle est elle aussi aléatoire : c'est une variable spatiale aléatoire, de puissance moyenne finie. L'observation des variations des hauteurs de la surface (par mesure) permet d'en déterminer certaines caractéristiques, appelées **moments spatiaux**. Ce sont sa valeur moyenne (ou hauteur moyenne), et les moments spatiaux centrés d'ordre deux et plus. On peut également utiliser la fonction d'auto-corrélation spatiale de deux points distincts de la surface.

Une interface rugueuse stochastique (variant au cours du temps), décrite par ses hauteurs ζ , possède quant à elle deux paramètres : le paramètre temporel t , et le paramètre spatial x .

Cette variable aléatoire $\zeta(x, t)$ peut être représentée par une famille de fonctions réelles $\{\zeta(x, t, \omega)\}$, où ω représente une épreuve dans un espace de probabilité (Ω) . Il existe trois façons de décrire cette variable aléatoire. Les deux premières sont décrites ci-dessus, en considérant un instant $t = t_j$ donné. Les variables aléatoires sont alors respectivement $\zeta_{ij}(\omega)$ et $\zeta_{jk}(x)$. La troisième façon de décrire cette variable aléatoire est la suivante :

- à $x = x_i$ donné, et pour une épreuve $\omega = \omega_k$ donnée, $\zeta(x_i, t, \omega_k)$ est une réalisation notée $\zeta_{ik}(t)$ de la variable aléatoire. Cette variable réelle est elle aussi aléatoire : c'est une variable temporelle aléatoire, de puissance moyenne finie. L'observation de ce signal (par analyse ou mesure), c'est-à-dire concrètement l'observation en un point $M = M_i$ d'abscisse $x = x_i$ de la surface des variations temporelles des hauteurs, permet d'en déterminer les **moments temporels**. Ce sont sa valeur moyenne (composante continue), et les moments temporels centrés d'ordre deux et plus. La fonction d'auto-corrélation temporelle, qui permet d'accéder aux moments temporels, peut également être utilisée.

L'écriture des différents moments de la variable aléatoire $\zeta(x, t, \omega)$ n'est pas présentée ici. Pour plus de détails, voir par exemple [23].

Voyons maintenant comment, pour des surfaces rugueuses stochastiques, il est possible de s'affranchir de la variable temporelle, et donc montrer l'équivalence de ces surfaces avec des surfaces rugueuses invariantes au cours du temps.

1.2.1.2 Equivalence statistique des surfaces rugueuses dépendantes et indépendantes du temps

Dans ce travail, nous nous intéressons plus particulièrement aux interfaces de pétrole et de mer. Ces interfaces seront toujours supposées suivre un processus (stationnaire et) ergodique du second ordre. Ces notions ne sont pas présentées en détail ici. Pour plus de détails, voir [20, 21, 23, 24, 25], et plus particulièrement [22, 26, 27, 28]. En fait, la notion d'ergodicité suffit puisque l'ergodicité entraîne la stationnarité. Rappelons simplement les notions de stationnarité et d'ergodicité. Un processus aléatoire est dit stationnaire d'ordre n si ses propriétés (ses moyennes ou ses moments) statistiques restent inchangées au cours du temps (ou ne varient pas avec la définition de l'origine du temps). Un processus aléatoire est ergodique d'ordre n si ses moments temporels existent, et sont indépendants de la réalisation : ils peuvent être obtenus à partir d'une seule réalisation.

Le théorème de Birkhoff (1931) affirme que si un processus aléatoire est ergodique d'ordre n , alors ses moments temporels et statistiques sont égaux. Généralement, les statistiques jusqu'à l'ordre 2 suffisent à décrire la surface, et une surface de mer peut être considérée comme ergodique d'ordre 2. Ainsi, si l'on s'intéresse à des interfaces rugueuses, la description statistique d'interfaces rugueuses variant dans le temps (comme une interface air / mer) est la même que pour des interfaces rugueuses invariantes au cours du temps (comme une interface air / granit). Ceci explique pourquoi, dans la littérature, pour décrire les hauteurs d'une interface rugueuse variant dans le temps, la variable temporelle n'est pas explicitée : $\zeta(x, t, \omega)$ est écrit $\zeta(x, \omega)$, ou plus classiquement $\zeta(x)$. Plus généralement, pour une surface 2D $\zeta(x, y)$, le raisonnement est le même. De plus, l'ergodicité implique que la moyenne spatiale sur une réalisation de la surface est la même que la moyenne statistique sur différentes réalisations de la surface (pourvu que les réalisations de la surface soient suffisamment grandes pour vérifier la propriété de stationnarité) [26].

Alors, par la même approche, des interfaces rugueuses qui sont invariantes dans le temps comme des interfaces rugueuses variant dans le temps peuvent être traitées indifféremment. Nous pourrions utiliser soit les moments statistiques, soit les moments spatiaux, sachant que les deux descriptions sont équivalentes.

1.2.2 Description statistique d'une surface rugueuse

Voyons ici plus en détail comment est décrite une surface rugueuse de hauteur ζ à fluctuations spatiales et/ou temporelles. Ces fluctuations sont caractérisées par le processus stochastique $\zeta(x, t)$ (pour une surface 1D), comme on l'a vu dans la section précédente. Pour une surface 2D, on a $\zeta(\mathbf{r}, t)$, avec $\mathbf{r} = (x, y)$. De plus, le processus est supposé (stationnaire et) ergodique du second ordre. Alors, sous certaines hypothèses, ce processus peut être décrit uniquement grâce à la densité de probabilité de ses hauteurs et la fonction d'auto-corrélation spatiale de ses hauteurs (ou son spectre).

1.2.2.1 Densité de probabilité des hauteurs de la surface

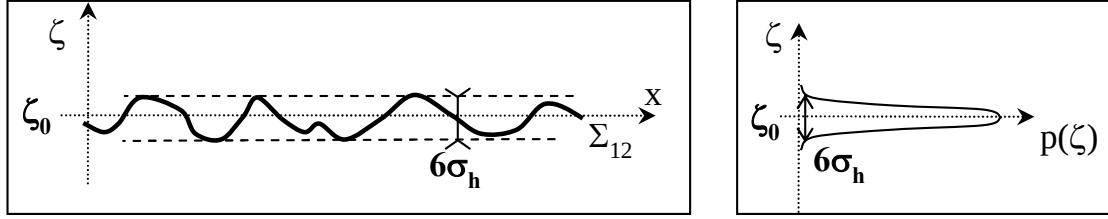


FIG. 1.6 – Surface rugueuse 1D de statistique gaussienne (à gauche) et sa distribution des hauteurs (à droite)

La densité de probabilité $p_h(\zeta)$ des hauteurs de la surface rugueuse représente la distribution statistique des hauteurs de la surface. Trois informations importantes sont contenues dans cette densité de probabilité :

- sa valeur moyenne : ici la hauteur moyenne de la surface, ζ_0 ,
- son écart type : ici l'écart type des hauteurs de la surface, σ_h ,
- le type de cette densité : gaussienne, lorentzienne, exponentielle, ...

Le plus souvent, une surface rugueuse est caractérisée par une densité de probabilité gaussienne (voir figure 1.6) :

$$p_h(\zeta) = \frac{1}{\sigma_h \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\zeta - \zeta_0}{\sigma_h} \right)^2 \right] \quad (1.39)$$

Ainsi, pour une densité de probabilité gaussienne, 99.73% des hauteurs de la surface sont comprises entre $-3\sigma_h$ et $+3\sigma_h$. La densité de probabilité vérifie

$$\langle 1 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p_h(\zeta) d\zeta = 1, \text{ et } \langle \zeta \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta p_h(\zeta) d\zeta = \zeta_0. \quad (1.40)$$

La hauteur moyenne ζ_0 sera prise nulle, pour plus de commodités. La moyenne statistique sur les hauteurs $\langle \zeta \rangle$ est appelée *moment statistique d'ordre un* (ou valeur moyenne). Le *moment statistique centré d'ordre deux* (ou variance), $\langle (\zeta - \zeta_0)^2 \rangle = \langle \zeta^2 \rangle$ (pour $\zeta_0 = 0$), correspond ici à la moyenne statistique sur le carré des hauteurs

$$\langle \zeta^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \zeta^2 p_h(\zeta) d\zeta = \sigma_h^2. \quad (1.41)$$

$\sigma_h = \sqrt{\langle \zeta^2 \rangle}$ est l'écart type des hauteurs de la surface.

1.2.2.2 Fonction d'auto-corrélation (spatiale) et spectre des hauteurs de la surface

La fonction d'auto-corrélation (spatiale) entre deux points M_1 et M_2 de la surface représente la corrélation statistique entre ces points, en fonction de leur distance horizontale $\mathbf{r}_d = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Elle est maximale lorsque $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1$. Deux informations importantes sont contenues dans cette fonction :

- ses longueurs de corrélation selon $\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{\mathbf{y}}$, $L_{c,x}$ et $L_{c,y}$,
- le type de cette fonction : gaussienne, lorentzienne, exponentielle, ...

Elle est définie par

$$W_h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \zeta(\mathbf{r}_1) \zeta(\mathbf{r}_2) \rangle = \lim_{X,Y \rightarrow +\infty} \frac{1}{XY} \int_{-X/2}^{+X/2} \int_{-Y/2}^{+Y/2} \zeta(\mathbf{r}_1) \zeta(\mathbf{r}_2) dx dy \quad (1.42)$$

où (X, Y) sont les longueurs respectivement selon $\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{\mathbf{y}}$ de la surface. Pour une surface stationnaire, $W_h(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \equiv W_h(\mathbf{r}_d) = \langle \zeta(\mathbf{r}_1) \zeta(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_d) \rangle$, avec la propriété $W_h(\mathbf{r}_d = \mathbf{0}) = \sigma_h^2$. Le coefficient d'auto-corrélation $C(\mathbf{r}_d)$ est égal à la fonction d'auto-corrélation normalisée, et s'écrit pour une surface stationnaire :

$$C_h(\mathbf{r}_d) = \frac{\langle \zeta(\mathbf{r}_1) \zeta(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_d) \rangle}{\sigma_h^2}. \quad (1.43)$$

Cette dernière fonction est égale à 1 lorsque $\mathbf{r}_d = \mathbf{0}$. La longueur de corrélation L_c est une valeur caractéristique de la fonction d'auto-corrélation. C'est elle qui détermine l'échelle de rugosité de la surface. Classiquement, elle correspond à la distance x_d pour $L_{c,x}$ (ou y_d pour $L_{c,y}$) entre deux points de la surface pour lesquels leur coefficient d'auto-corrélation vaut $1/e$ (voir figure 1.7).

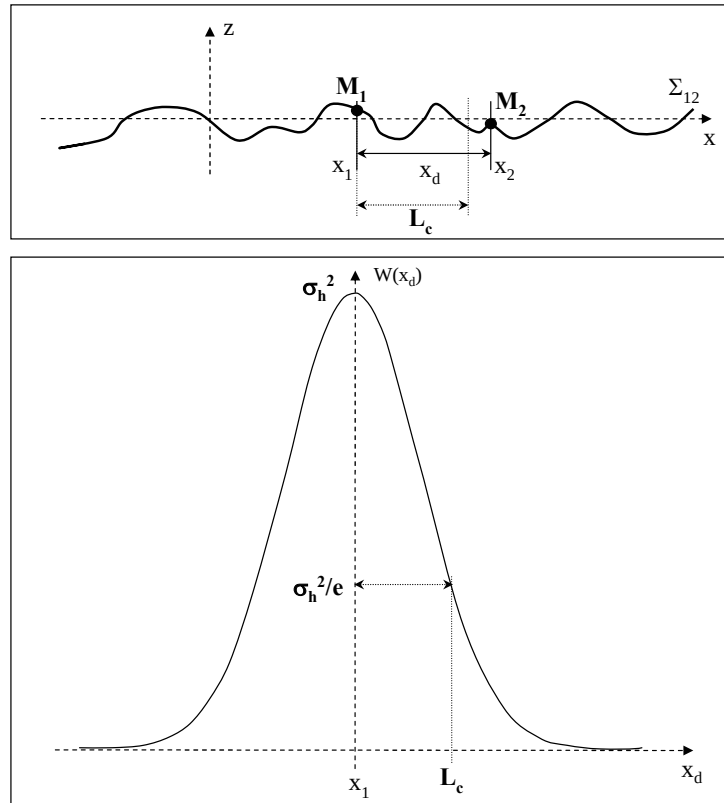


FIG. 1.7 – Surface rugueuse 1D (en haut) et sa fonction d'auto-corrélation des hauteurs (en bas), ici gaussienne

Finalement, la densité de probabilité des hauteurs et la fonction d'auto-corrélation des hauteurs permettent de décrire complètement la surface rugueuse : en effet, pour des statistiques gaussiennes, les surfaces de distribution gaussienne des hauteurs possèdent la propriété d'avoir tous leurs moments statistiques reliés aux deux premiers.

En général, au lieu de la fonction d'auto-corrélation des hauteurs, on utilise le *spectre des hauteurs de la surface*, qui n'est autre que la transformée de Fourier spatiale de la fonction d'auto-corrélation. Appelée aussi densité spectrale de puissance de la surface, elle est définie

pour une surface stationnaire supposée d'aire infinie par

$$S_h(\mathbf{k}) = \text{TF}[W_h(\mathbf{r}_d)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_h(\mathbf{r}_d) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_d) d\mathbf{r}_d, \quad (1.44)$$

où $\mathbf{k}$ représente le vecteur de fréquence spatiale par cycle¹⁵, qui est homogène à des rad/m. De même, la fonction d'auto-corrélation est définie à partir du spectre par transformée de Fourier inverse qui s'écrit

$$W_h(\mathbf{r}_d) = \text{TF}^{-1}[S_h(\mathbf{k})] = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_h(\mathbf{k}) \exp(+i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_d) d\mathbf{k}. \quad (1.45)$$

On utilise classiquement une fonction d'auto-corrélation des hauteurs de la surface gaussienne, lorentzienne ou exponentielle. Elles sont définies respectivement, pour une surface 1D, par

$$W_h(x_d) = \sigma_h^2 \exp\left(-\frac{x_d^2}{L_c^2}\right), \quad (1.46a)$$

$$W_h(x_d) = \frac{\sigma_h^2}{1 + x_d^2/L_c^2}, \quad (1.46b)$$

$$W_h(x_d) = \sigma_h^2 \exp\left(-\frac{|x_d|}{L_c}\right). \quad (1.46c)$$

Leurs spectres correspondant sont alors définis par

$$S_h(k) = \sqrt{\pi} \sigma_h^2 L_c \exp\left(-\frac{L_c^2 k^2}{4}\right), \quad (1.47a)$$

$$S_h(k) = \pi \sigma_h^2 L_c \exp(-L_c |k|), \quad (1.47b)$$

$$S_h(k) = \frac{2 \sigma_h^2 L_c}{1 + L_c^2 k^2}. \quad (1.47c)$$

On remarque que le spectre d'une fonction d'auto-corrélation gaussienne est gaussien (par transformée de Fourier), que le spectre d'une fonction d'auto-corrélation lorentzienne est exponentiel, et donc que le spectre d'une fonction d'auto-corrélation exponentielle est lorentzien.

En plus de l'écart type des hauteurs σ_h et de la longueur de corrélation L_c , d'autres paramètres statistiques importants permettent de caractériser une surface rugueuse. Le premier paramètre est l'écart type des pentes de la surface σ_s , défini par [26, 29, 30]

$$\sigma_s = \sqrt{\langle \zeta'(x)^2 \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{2\pi} k^2 S(k)} = \sqrt{-W_h''(0)}. \quad (1.48)$$

Pour une surface gaussienne (1.46a), l'écart type des pentes est lié à l'écart type des hauteurs et la longueur de corrélation par la relation

$$\sigma_s = \sqrt{2} \frac{\sigma_h}{L_c}. \quad (1.49)$$

Pour une surface 2D, les résultats sont les mêmes en décomposant selon les axes $\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{\mathbf{y}}$: $\sigma_{s,x}$ est exprimé en fonction de $L_{c,x}$, et $\sigma_{s,y}$ en fonction de $L_{c,y}$.

¹⁵A ne pas confondre avec le vecteur d'onde.

Le deuxième paramètre utilisé est le rayon de courbure moyen de la surface R_c , défini pour une surface 1D par [26, 29, 31]

$$R_c = - \frac{\left[1 + \langle \zeta'(x)^2 \rangle\right]^{3/2}}{\langle \zeta''(x) \rangle}. \quad (1.50)$$

Pour une surface gaussienne (1.46a), dans le régime des faibles pentes le rayon de courbure vérifie la relation approchée (au premier ordre) [31]

$$R_c \simeq \frac{1}{2.76} \frac{L_c^2}{\sigma_h} \left(1 + \frac{3}{2} \sigma_s^2\right), \quad (1.51)$$

et si l'écart type des pentes σ_s est faible devant 1, l'expression se simplifie en

$$R_c \approx 0.36 \frac{L_c^2}{\sigma_h}. \quad (1.52)$$

On utilise parfois également un autre paramètre : la distance moyenne D_m entre deux pics consécutifs de la surface. Elle peut être estimée par [30, 32]

$$D_m \simeq \pi \sqrt{\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dk k^2 S(k)}{\int_{-\infty}^{+\infty} dk k^4 S(k)}}. \quad (1.53)$$

Physiquement, on peut s'attendre à ce que la distance entre deux pics consécutifs de la surface D_m soit du même ordre de grandeur que la longueur de corrélation de la surface L_c . Pour une surface gaussienne, cette distance vérifie

$$D_m = \frac{\pi}{\sqrt{6}} L_c \simeq 1.28 L_c, \quad (1.54)$$

ce qui est cohérent avec nos considérations physiques. Par ailleurs, observons que (pour une surface de corrélation gaussienne tout du moins) la distance entre deux pics consécutifs est quelque peu supérieure à la longueur de corrélation.

1.2.2.3 Autres outils statistiques

En plus de la densité de probabilité des hauteurs et de la fonction d'auto-corrélation des hauteurs de la surface, dans certains cas d'autres outils statistiques permettant de décrire la surface rugueuse sont utilisés. En effet, selon les modèles analytiques utilisés décrivant la diffraction électromagnétique par des interfaces rugueuses, soit la fonction d'auto-corrélation des hauteurs (ou le spectre des hauteurs) est utilisée, soit un autre outil, comme par exemple, dans la méthode que nous étudierons en détail par la suite, la densité de probabilité des pentes $p_s(\gamma)$. Pour un processus gaussien, elle est définie pour une surface 1D par

$$p_s(\gamma) = \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\gamma - \gamma_0}{\sigma_s} \right)^2 \right], \quad (1.55)$$

avec σ_s l'écart type des pentes γ de la surface. En général, la valeur moyenne $\langle \gamma \rangle \equiv \gamma_0 = 0$. Pour une surface 2D, en supposant un processus gaussien 2D corrélé et centré ($\langle \gamma_x \rangle \equiv \gamma_{0x} = 0$ et $\langle \gamma_y \rangle \equiv \gamma_{0y} = 0$), elle est définie par

$$p_s(\gamma_x, \gamma_y) = \frac{1}{2\pi \sqrt{|[C_2]|}} \exp \left[-\frac{(\sigma_{sy}^2 \gamma_x^2 + \sigma_{sx}^2 \gamma_y^2 + 2W_2 \gamma_x \gamma_y)}{2 |[C_2]|} \right], \quad (1.56)$$

où $||[C_2]|| = \sigma_{sx}^2 \sigma_{sy}^2 - W_2^2$ est le déterminant de la matrice de covariance des pentes $\{\gamma_x, \gamma_y\}$, avec $W_2 = -W_h''$ la fonction d'auto-corrélation des pentes de la surface et $(\sigma_{sx}, \sigma_{sy})$ les écarts types des pentes de (γ_x, γ_y) , respectivement. Dans le cas décorrélé, la densité de probabilité d'un processus Gaussien 2D anisotrope s'écrit

$$p_s(\gamma_x, \gamma_y) = \frac{1}{2\pi \sigma_{sx} \sigma_{sy}} \exp \left(-\frac{\gamma_x^2}{2 \sigma_{sx}^2} - \frac{\gamma_y^2}{2 \sigma_{sy}^2} \right). \quad (1.57)$$

De même que le spectre des hauteurs, la fonction caractéristique des hauteurs, $\chi_h(q)$, qui est égale à la moyenne statistique sur l'exponentielle complexe $\exp(iq\zeta)$, est parfois utilisée. Pour un processus pair, elle est donc égale à la transformée de Fourier de la densité de probabilité des hauteurs, et définie par

$$\chi_h(q) = \langle \exp(iq\zeta) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} p_h(\zeta) \exp(iq\zeta) d\zeta. \quad (1.58)$$

Pour un processus gaussien centré, on montre que

$$\chi_h(q) = \exp \left(-\frac{1}{2} q^2 \sigma_h^2 \right). \quad (1.59)$$

La fonction caractéristique de deux points de la surface et séparés d'une distance x_{12} vaut alors pour une surface stationnaire

$$\chi_h(q_1, q_2; x_{12}) = \left\langle e^{i(q_1 \zeta_1 + q_2 \zeta_2)} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_h(\zeta_1, \zeta_2; x_{12}) e^{i(q_1 \zeta_1 + q_2 \zeta_2)} d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (1.60)$$

où $p_h(\zeta_1, \zeta_2; x_{12})$ peut être exprimée, pour un processus gaussien, par

$$p_h(\zeta_1, \zeta_2; x_{12}) = \frac{1}{2\pi \sqrt{||[C_2]||}} \exp \left[-\frac{\sigma_h^2 \zeta_1^2 + \sigma_h^2 \zeta_2^2 - 2W_0(x_{12})\zeta_1 \zeta_2}{2||[C_2]||} \right], \quad (1.61)$$

où $||[C_2]|| = \sigma_h^4 - W_0^2(x_{12})$ est le déterminant de la matrice de covariance des hauteurs $\{\zeta_1, \zeta_2\}$, avec $W_0 \equiv W_h$ la fonction d'auto-corrélation des hauteurs. Cette fonction peut se réécrire sous la forme

$$p_h(\zeta_1, \zeta_2; x_{12}) = \frac{1}{2\pi \sqrt{||[C_2]||}} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbf{V}_2^T [C_2]^{-1} \mathbf{V}_2 \right), \quad (1.62)$$

avec $\mathbf{V}_2 = [\zeta_1 \ \zeta_2]$. Alors, pour un processus gaussien centré, la fonction caractéristique peut s'écrire

$$\chi_h(q_1, q_2) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[(q_1^2 + q_2^2) \sigma_h^2 + 2q_1 q_2 W_0(x_{12}) \right] \right\}. \quad (1.63)$$

1.2.2.4 Corrélation entre n variables aléatoires

Afin de quantifier la corrélation de n variables aléatoires $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, on introduit une matrice de covariance $[C_n]$, dans laquelle sont représentées les fonctions d'inter-corrélations des différentes variables aléatoires. Ainsi, on peut écrire de manière générale

$$\forall (i, j) \in \{1..n\}, ([C_n])_{i,j} = \langle v_i v_j \rangle, \quad (1.64)$$

avec $([C_n])_{i,i} = \langle v_i v_i \rangle = \sigma_{v_i}^2$. En général, les processus sont supposés réels pairs, ainsi la matrice de covariance sera symétrique. Dans le calcul de la diffusion électromagnétique par une (plusieurs) surface(s) rugueuse(s), les variables aléatoires sont en général les hauteurs et les pentes.

En règle générale, la corrélation entre la hauteur ζ_M et la pente γ_M d'un point M de la surface est nulle, $\langle \zeta_M \gamma_M \rangle = 0$. Ainsi, si l'on considère par exemple la moyenne statistique des hauteurs et des pentes sur deux points A_1 et A_2 d'une surface 1D, les variables aléatoires à considérer sont $\{\zeta_1, \zeta_2, \gamma_1, \gamma_2\}$. Alors, la matrice de covariance s'écrit [27, 21]

$$[C_4] = \begin{bmatrix} \sigma_h^2 & W_0 & 0 & W_1 \\ W_0 & \sigma_h^2 & -W_1 & 0 \\ 0 & -W_1 & \sigma_s^2 & -W_2 \\ W_1 & 0 & -W_2 & \sigma_s^2 \end{bmatrix}, \quad (1.65)$$

où $W_0 = \langle \zeta_1 \zeta_2 \rangle$ est la fonction d'auto-corrélation des hauteurs qui est supposée paire, W_1 sa dérivée première par rapport à la distance horizontale $x_{12} = x_2 - x_1$ (qui est donc impaire), et W_2 sa dérivée seconde (qui est donc paire). De plus, la fonction d'auto-corrélation des hauteurs et ses dérivées ont pour propriétés : $W_0(0) = \sigma_h^2$, $W_1(0) = 0$, et $W_2(0) = -\sigma_s^2$.

L'équation (1.62) est un cas particulier de la distribution conjointe de n variables aléatoires gaussiennes centrées $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. La densité de probabilité associée s'écrit alors

$$p_h(v_1, v_2, \dots, v_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{|[C_n]|}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{V}_n^T [C_n]^{-1} \mathbf{V}_n\right), \quad (1.66)$$

avec $\mathbf{V}_n = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$, et $([C_n])_{i,j} \equiv c_{i,j} = \langle v_i v_j \rangle$.

De même, l'équation (1.60) de la fonction caractéristique de 2 points de la surface est généralisable à n points. La fonction caractéristique associée s'écrit

$$\chi_h(q_1, q_2, \dots, q_n) = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n q_i q_j c_{i,j}\right), \quad (1.67)$$

1.2.3 Cas particulier de la surface de mer

Il est important de noter que pour le cas d'une surface de mer, la description statistique est plus complexe. En effet, une surface de mer possède deux régimes principaux : les régimes de capillarité et de gravité (voir figure 1.8). Le régime de capillarité correspond aux vagues de capillarité, appelées aussi vaguelettes. Elles sont créées par le vent sur une mer calme. Les vagues de capillarité caractérisent la rugosité à courte échelle de la surface de mer, avec pour longueur de corrélation L_{cs} . Le régime de gravité correspond aux vagues du même nom, appelées aussi vagues de houle. Les vagues de gravité caractérisent la rugosité à longue échelle de la surface de mer, avec pour longueur de corrélation L_{cl} . Les vagues de gravité ont un écart type des hauteurs et une longueur de corrélation grands devant ceux des vagues de capillarité.

En règle générale, ces deux régimes coexistent pour une surface de mer. Il faut donc les traiter conjointement. Notons pour que le cas qui nous intéressera plus particulièrement par la suite d'une fine couche de pétrole sur la mer (de l'ordre de quelques mm), la surface inférieure est une surface de mer, donc à deux échelles. Or la surface supérieure est une surface de pétrole (voir figure 1.9). Cette couche de pétrole va peser sur la surface de mer, de sorte que la capillarité de la surface de mer est atténuée (l'écart type des hauteurs et surtout des pentes du régime de capillarité diminue). Ainsi, comparativement à une surface de mer seule, une mer recouverte de pétrole voit son régime de capillarité lissé, comme ont pu l'observer Cox and Munk dans leurs expériences [33].

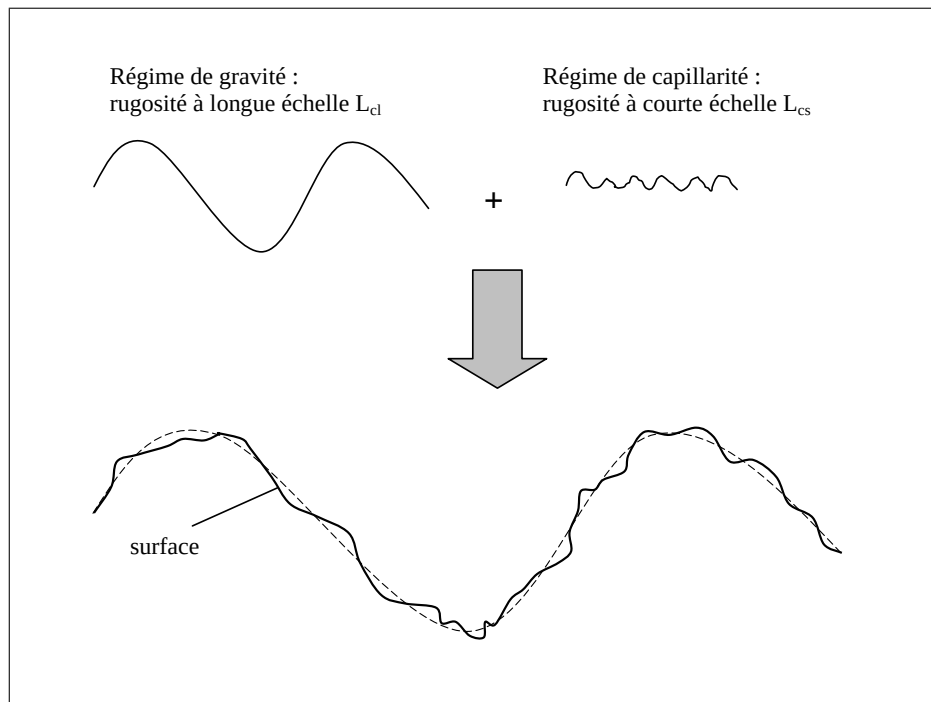


FIG. 1.8 – Contribution des deux régimes d’une surface de mer

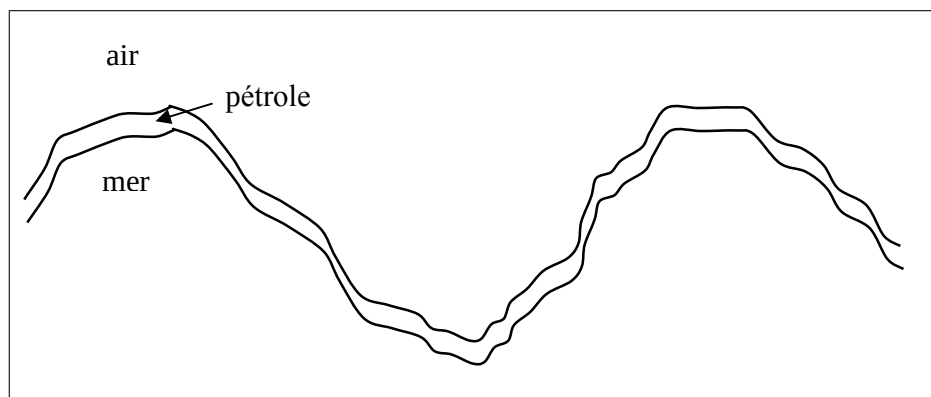


FIG. 1.9 – Couche de pétrole sur la mer : lissage du régime de capillarité

Les premiers travaux sur les modèles de spectre pour des surfaces de mer ont été développés dans les années 70, mais ce n'est que dans les années 80 et surtout 90 que des spectres globaux, prenant en compte à la fois la gravité et la capillarité, ont été développés [21]. Nous pouvons citer les 3 spectres suivants : les spectres de Pierson, de Apel, et de Elfouhaily [34]. Le spectre de Elfouhaily établi en 1997, contrairement aux deux précédents, a été validé par des mesures expérimentales. En effet, il a été construit à partir de faits à la fois expérimentaux et théoriques que les deux précédents modèles n'avaient pas pris en compte. Représentant une synthèse de l'ensemble des travaux sur le sujet depuis 1970, il est le spectre de référence pour décrire le comportement d'une surface de mer. Le spectre d'El fouhaily $S_E(k, \phi)$ est donné par [34]

$$S_E(k, \phi) = \frac{M(k)}{2\pi} [1 + \Delta(k) \cos 2\phi], \quad (1.68)$$

avec $M(k)$ la partie isotrope du spectre et $\Delta(k)$ la partie anisotrope, et ϕ la direction du vent. $\phi = 0$ correspond à la direction face au vent, et $\phi = \pi/2$ correspond à la direction transverse au vent.

A partir du spectre de Elfouhaily, il est possible d'accéder aux grandeurs statistiques classiques de la surface, à partir de la vitesse du vent au-dessus de la mer. Par exemple, on peut établir les relations suivantes [35]

$$L_c \simeq 3 \times 0.154 u_{10}^{2.04}, \quad (1.69)$$

$$\sigma_h = \sqrt{\int_0^{+\infty} M(k) dk} \simeq 6.29 \times 10^{-3} u_{10}^{2.02}, \quad (1.70)$$

avec u_{10} la vitesse du vent à 10 mètres au-dessus de la surface de la mer, exprimée en m/s . Par construction, le spectre de Elfouhaily est en accord avec le modèle expérimental de Cox and Munk [33], déterminé à partir de photographies aériennes. Dans ce modèle, l'écart type des pentes global σ_s est lié à l'écart type des pentes dans la direction du vent σ_{sx} et transverse du vent σ_{sy} par $\sigma_s^2 = (\sigma_{sx}^2 + \sigma_{sy}^2)/2$, où

$$\sigma_{sx}^2 \simeq 3.16 \times 10^{-3} u_{12}, \quad (1.71)$$

$$\sigma_{sy}^2 \simeq 1.92 \times 10^{-3} u_{12} + 3 \times 10^{-3}, \quad (1.72)$$

où u_{12} est la vitesse du vent à 12.5 m au-dessus de la surface de la mer. On pourra alors trouver dans les références [21, 36] un tableau donnant l'écart type des pentes, l'écart type des hauteurs, la longueur de corrélation en fonction de l'échelle de Beaufort et en fonction de u_{10} . Pour le cas d'une nappe de pétrole sur la mer, Cox and Munk [33] ont pu établir que

$$\sigma_{sx}^2 \simeq 0.78 \times 10^{-3} u_{12} + 5 \times 10^{-3}, \quad (1.73)$$

$$\sigma_{sy}^2 \simeq 0.84 \times 10^{-3} u_{12} + 3 \times 10^{-3}. \quad (1.74)$$

Remarquons que les écarts types d'une nappe de pétrole sur la mer sont significativement plus faibles que les écarts types d'une mer seule [37], pour toutes les vitesses de vent u_{12} dans la direction transverse au vent, et pour des vitesses de vent $u_{12} > 2.1$ m/s dans la direction du vent (ce qui correspond à une échelle de Beaufort 2 : légère brise). Les variations de l'écart type des pentes dans la direction du vent en fonction de u_{12} pour une surface de mer (dite mer propre) et une nappe de pétrole sur la mer est illustrée sur la figure 1.10. Notons que ces derniers résultats ne sont valables que pour une nappe de pétrole déterminée, puisque le type de pétrole (notamment sa viscosité) et l'épaisseur de la nappe de pétrole influent sur ces résultats [38]. Cependant ils sont applicables pour des nappes de l'ordre de quelques mm, et pour des pétroles typiques. Des modèles plus élaborés, qui prennent en compte ces paramètres de manière plus rigoureuses, existent : pour plus de détails, voir [37, 38, 39].

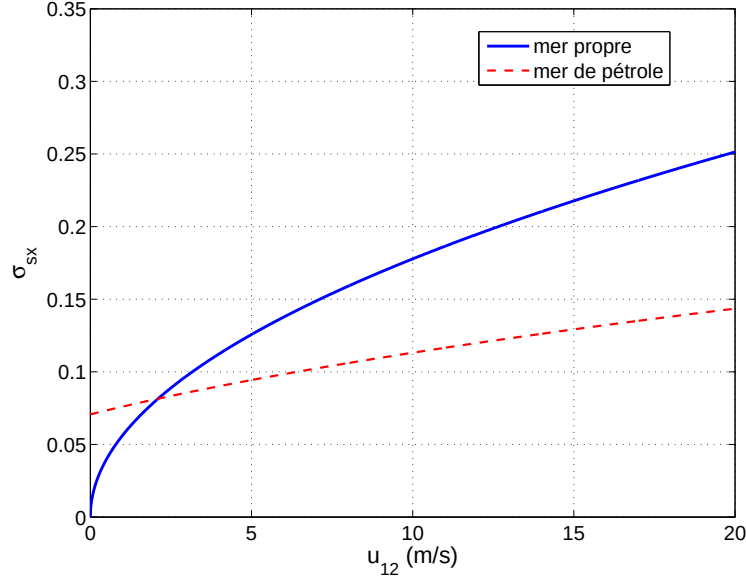


FIG. 1.10 – Variations de l'écart type des pentes dans la direction du vent σ_{sx} en fonction de la vitesse du vent à 12.5 m au-dessus de la surface de la mer u_{12} : comparaison entre une mer propre et une mer recouverte de pétrole.

1.2.4 Rugosité électromagnétique et critère de Rayleigh

Les premiers travaux sur la diffusion d'ondes par des surfaces rugueuses ont été réalisés par Rayleigh, qui considérait le problème d'une OPPM incidente sur une surface sinusoïdale, selon la direction normale à la surface [2]. Ce travail mena au critère de Rayleigh, permettant de déterminer le degré de rugosité d'une surface. La rugosité (d'un point de vue *électromagnétique*) d'une surface dépend des hauteurs de la surface, et elle est relative à la longueur d'onde incidente. En effet, la rugosité est quantifiée par le déphasage entre deux rayons incidents de même angle d'incidence θ_i sur la surface en deux points d'altitudes ζ_1 et ζ_2 .

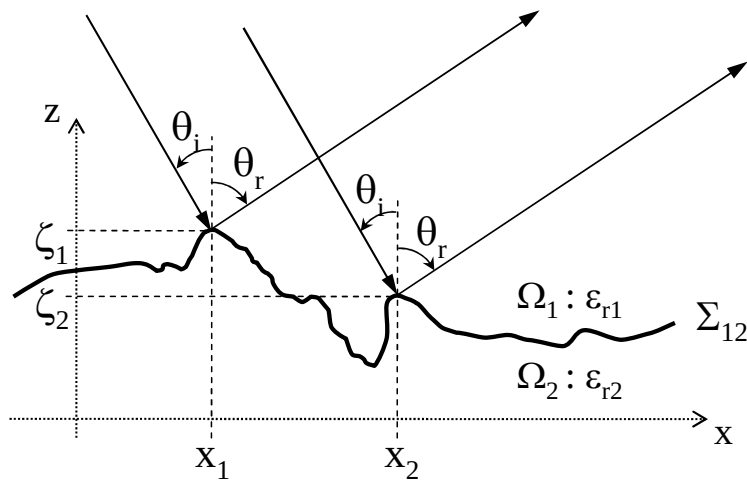


FIG. 1.11 – Rugosité d'une surface aléatoire 1D

On considère une OPPM incidente avec un angle θ_i sur une surface rugueuse 1D (voir figure

1.11). Le raisonnement qui suit est identique pour une surface 2D. Cette onde est diffusée par la surface rugueuse dans toutes les directions. En se plaçant selon un angle d'observation θ_r , on cherche à déterminer la rugosité de la surface à partir du déphasage des ondes par cette surface. La différence de phase entre deux rayons réfléchis par des points M_1 et M_2 de la surface, d'abscisses et d'ordonnées respectives (x_1, ζ_1) et (x_2, ζ_2) , est donnée par (pour des angles non orientés) :

$$\Delta\phi = k_1[(\zeta_1 - \zeta_2)(\cos\theta_i + \cos\theta_r) + (x_2 - x_1)(\sin\theta_i - \sin\theta_r)], \quad (1.75)$$

où k_1 est le nombre d'onde dans le milieu Ω_1 . Dans la direction spéculaire $\theta_r = \theta_i$, la différence de phase vaut

$$\Delta\phi = 2k_1 \Delta\zeta \cos\theta_i, \quad (1.76)$$

où $\Delta\zeta = \zeta_1 - \zeta_2$. L'interférence entre ces deux rayons dépend de la valeur de leur différence de phase comparativement à π .

Si les deux points M_1 et M_2 sont séparés d'une distance telle que $\Delta\phi \ll \pi$, les deux ondes sont presque en phase, et vont interférer de manière constructive. La surface est alors considérée comme très peu rugueuse : elle peut être apparentée à une surface lisse. En revanche, si M_1 et M_2 sont séparés d'une distance suffisante pour que $\Delta\phi \sim \pi$, ces dernières interfèrent de manière destructive. La contribution de l'énergie diffusée dans cette direction est nulle. La surface est alors considérée comme rugueuse. Plus précisément, on considère en général [26] que si $\Delta\phi < \pi/2$, les ondes interfèrent de manière constructive. Alors, la surface peut être considérée comme lisse. A l'inverse, si $\Delta\phi > \pi/2$, les ondes interfèrent de manière destructive, la surface peut être considérée comme rugueuse.

Le critère de Rayleigh [26, 40] suppose la condition suivante : si $\Delta\phi < \pi/2$, les ondes interfèrent de manière constructive. Alors, la surface peut être considérée comme très peu rugueuse voire **lisse** si $\Delta\phi \ll \pi/2$. A l'inverse, si $\Delta\phi > \pi/2$, les ondes interfèrent de manière destructive, et la surface peut être considérée comme **rugueuse**. Ici, si l'on fait ce raisonnement sur la surface entière, il faut considérer un phénomène moyen, donc quantifier ce phénomène par une moyenne statistique sur $\Delta\phi$. La valeur moyenne des hauteurs de la surface étant prise nulle, $\langle\zeta_1\rangle = \langle\zeta_2\rangle = 0$, le paramètre de Rayleigh est quantifié par la variance de la phase $\sigma_{\Delta\phi}^2$. Sachant que $\langle\zeta_1^2\rangle = \langle\zeta_2^2\rangle = \sigma_h^2$, elle est définie par

$$\begin{aligned} \sigma_{\Delta\phi}^2 &= \langle[\Delta\phi - \langle\Delta\phi\rangle]^2\rangle = \langle[k_1(\zeta_1 - \zeta_2)(\cos\theta_i + \cos\theta_r)]^2\rangle \\ &= 2k_1^2 [\sigma_h^2 - W_h(x_2 - x_1)] (\cos\theta_i + \cos\theta_r)^2, \end{aligned} \quad (1.77)$$

avec $W_h(x_2 - x_1)$ la fonction d'auto-corrélation des hauteurs ζ_1 et ζ_2 . Le paramètre de Rayleigh est alors défini dans la direction spéculaire $\theta_r = \theta_i$ à partir de l'écart type $\sigma_{\Delta\phi}$, dans le cas où les hauteurs sont décorréliées : $W_h(x_2 - x_1) \rightarrow 0$. Sa définition varie d'un facteur 2 selon les auteurs ; nous prendrons ici

$$R_a^{spec} = k_1 \sigma_h \cos\theta_i. \quad (1.78)$$

Le critère de Rayleigh est alors le suivant :

$$R_a < \pi/4. \quad (1.79)$$

Le paramètre de Rayleigh est en général défini dans la direction spéculaire, cependant il est possible de définir un paramètre de Rayleigh général (pour le cas d'une surface de longueur a priori finie)

$$R_a^{gal} = k_1 \sigma_h \frac{|\cos\theta_i + \cos\theta_r|}{2}. \quad (1.80)$$

Ainsi, la rugosité électromagnétique n'est pas un phénomène intrinsèque à la surface : elle dépend de la longueur d'onde incidente $\lambda_1 \equiv \lambda$. C'est le rapport σ_ζ/λ qui détermine le degré de rugosité d'une surface, pour un angle d'incidence et d'observation donnés. D'ailleurs, l'influence du terme en $\cos \theta_i$ est presque toujours négligée. Il est pourtant non négligeable lorsque l'angle d'incidence devient rasant, $\theta_i \rightarrow 90^\circ$: une surface peut être rugueuse pour des incidences modérées, et devenir peu rugueuse voire lisse pour des incidences rasantes.

Si l'on étudie ce critère de rugosité plus précisément, on constate que l'équation (1.78) peut se réécrire sous la forme

$$\sigma_h < \frac{1}{8} \frac{\lambda_1}{\cos \theta_i} = \frac{1}{8} \lambda_{app}, \quad (1.81)$$

où $\lambda_{app} = \lambda_1 / \cos \theta_i$ peut être définie comme une longueur d'onde apparente le long de la normale à la surface moyenne [41] (par analogie avec la longueur d'onde apparente dans un guide d'onde métallique).

En abordant un aspect plus quantitatif, le champ réfléchi par la surface $E_r(\mathbf{R})$ peut s'écrire sous certaines conditions

$$E_r(\mathbf{R}) = E_i(\mathbf{R}_S) r_{12} \exp[i\mathbf{k}_r \cdot (\mathbf{R} - \mathbf{R}_S)] \exp(i\Delta\phi), \quad (1.82)$$

où $\mathbf{R}_S$ est un point du plan moyen de la surface rugueuse, c'est-à-dire pour $z = 0$. Il peut se réécrire sous la forme

$$E_r(\mathbf{R}) = E_r^{plan}(\mathbf{R}) \exp(i\Delta\phi), \quad (1.83)$$

où $E_r^{plan}(\mathbf{R})$ correspond au champ réfléchi par une surface plane. Le critère de Rayleigh quantifie l'atténuation du champ moyen diffusé par la surface rugueuse. Ici, le champ moyen diffusé s'écrit

$$\langle E_r(\mathbf{R}) \rangle = E_r^{plan}(\mathbf{R}) \langle \exp(i\Delta\phi) \rangle, \quad (1.84)$$

avec, pour une surface de statistique gaussienne

$$\langle \exp(i\Delta\phi) \rangle = \exp(-2 R_a^2). \quad (1.85)$$

Plus précisément, comme c'est la puissance réfléchie par la surface rugueuse qui nous intéresse, l'atténuation de la puissance cohérente due à la rugosité de la surface vaut $\exp(-g)$, où g est donné par

$$g = 4 R_a^2. \quad (1.86)$$

Remarquons au passage que pour une surface de statistique non gaussienne, le terme d'atténuation prend une forme différente. Ainsi, le critère $R_a = \pi/4$ correspond à une atténuation en puissance de $\exp(-\pi^2/4) \simeq 0.085 \simeq -25$ dB, ce qui constitue une atténuation non négligeable : la surface est déjà d'une rugosité relativement importante. C'est pourquoi, pour qualifier une surface de *peu rugueuse*, un critère de rugosité plus restrictif est donné [29, 42]

$$R_a < \pi/16. \quad (1.87)$$

L'atténuation de la puissance cohérente vaut alors $\exp(-\pi^2/64) \simeq 0.86 \simeq -1.5$ dB. Cette condition correspond au critère appelé critère de Fraunhofer pour une incidence normale

$$\sigma_h/\lambda < 0.03. \quad (1.88)$$

A l'inverse, pour une surface qualifiée *très rugueuse* comparativement à la longueur d'onde, la puissance cohérente est négligeable. Or, le critère $R_a = \pi/4$ correspondant à une atténuation en puissance de $\exp(-\pi^2/4) \simeq 0.085 \simeq -25$ dB, ce qui n'est pas de manière générale une atténuation

suffisante pour que la puissance cohérente puisse être négligée. C'est pourquoi, pour qualifier une surface de *très rugueuse*, il est possible de définir un critère de rugosité plus restrictif

$$R_a > \pi/2. \quad (1.89)$$

L'atténuation de la puissance cohérente vaut alors $\exp(-\pi^2) \simeq 5.17 \times 10^{-5} \simeq -99$ dB : l'atténuation est dans ce cas très importante, et la puissance cohérente peut a priori être négligée devant la puissance incohérente. Ainsi, pour des angles d'incidence et de réflexion modérés, ceci correspond au critère sur les hauteurs

$$\sigma_h/\lambda > 1/2. \quad (1.90)$$

On peut ajouter un autre aspect de la rugosité de la surface : l'*échelle* de rugosité. On parle souvent dans la littérature de rugosité à courte ou longue échelle. Cette échelle de rugosité est caractérisée par la longueur de corrélation (notée L_c) de la surface. L_c est la longueur séparant deux points de la surface pour lesquels leur auto-corrélation vaut $1/e$. C'est donc la valeur pour laquelle la fonction d'auto-corrélation de la surface est égale à $1/e$. Il est à noter que cette échelle de rugosité est quantifiée par L_c comparativement à la longueur d'onde incidente λ .

1.2.4.1 Critère de Rayleigh en transmission

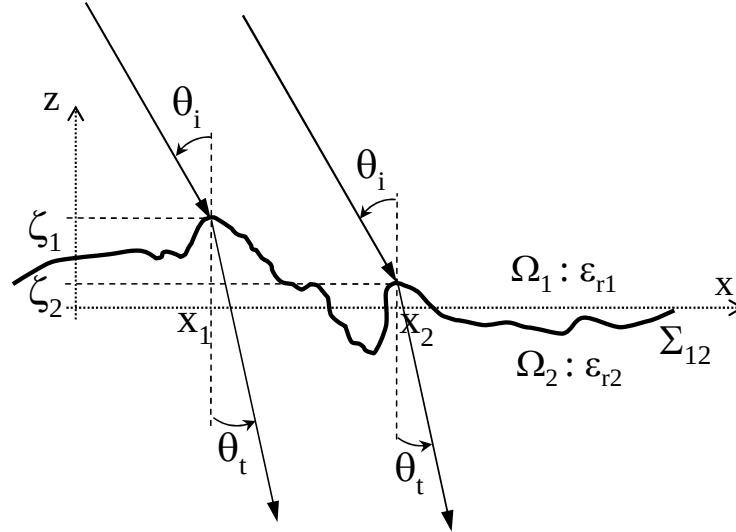


FIG. 1.12 – Rugosité en transmission d'une surface aléatoire 1D

Le critère de Rayleigh est, à notre connaissance, toujours défini uniquement dans le cas où l'onde est diffractée par la surface rugueuse dans le milieu incident. Ci-dessus ont donc été définis un paramètre et un *critère de Rayleigh en réflexion*. Or, dans de nombreux cas l'étude se porte sur une onde diffractée en transmission par une surface rugueuse (parfaitement diélectrique). Alors, il est intéressant de savoir dans quelle mesure la surface peut être considérée comme lisse ou rugueuse. La démarche est donc la même. Le déphasage $\Delta\phi_t$ entre deux rayons transmis à travers les points $M_1(x_1, \zeta_1)$ et $M_2(x_2, \zeta_2)$ de la surface (voir figure 1.12) est donné par

$$\Delta\phi_t = k_0[(\zeta_1 - \zeta_2)(n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t) + (x_2 - x_1)(n_1 \sin \theta_i - n_2 \sin \theta_t)], \quad (1.91)$$

où k_0 est le nombre d'onde dans le vide, et $n_1 = \sqrt{\epsilon_{r1}}$ et $n_2 = \sqrt{\epsilon_{r2}}$ sont les indices des milieux Ω_1 et Ω_2 , respectivement. Dans la direction spéculaire de transmission $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$, la différence de phase devient

$$\Delta\phi_t = 2k_0 \Delta\zeta (n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t), \quad (1.92)$$

où $\Delta\zeta = \zeta_1 - \zeta_2$. Définissons, de même que pour la réflexion, le critère de Rayleigh en transmission correspondant au critère sur le déphasage $\Delta\phi_t < \pi/2$. Alors le *paramètre de Rayleigh en transmission* $R_{a,t}$ est défini par

$$R_{a,t} = k_0 \sigma_h \frac{|n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t|}{2}, \quad (1.93)$$

avec le critère de Rayleigh en transmission

$$R_{a,t} < \pi/4. \quad (1.94)$$

Remarquons que le paramètre de Rayleigh en transmission est en règle générale (pour des indices des deux milieux proches) plus faible que le paramètre de Rayleigh en réflexion. La conséquence de ce résultat est importante, puisqu'une surface qui peut être considérée comme fortement rugueuse lorsque l'on s'intéresse à l'onde réfléchie, peut être considérée comme modérément rugueuse voire lisse si l'on s'intéresse à l'onde transmise. Il convient donc de bien faire attention à utiliser le paramètre de Rayleigh adéquat, en fonction du cas de figure.

1.2.4.2 Comparaison des paramètres de Rayleigh en réflexion et transmission

Une comparaison des paramètres de Rayleigh en réflexion et en transmission permet de comparer la rugosité électromagnétique entre le cas d'une onde réfléchie et le cas d'une onde transmise. Celle-ci est menée pour une surface de longueur supposée infinie : le paramètre de Rayleigh en réflexion est donné par l'équation (1.78), et le paramètre de Rayleigh en transmission est donné par l'équation (1.93) où θ_t est lié à θ_i par la loi de Snell-Descartes $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$. Sur la figure 1.13 est représenté le paramètre de Rayleigh normalisé, c'est-à-dire pour $k_0 \sigma_h = 1$, pour $\epsilon_{r1} = 1$ et différentes valeurs de ϵ_{r2} , en fonction de l'angle d'incidence θ_i . Le paramètre de Rayleigh normalisé en réflexion est tracé en ligne noire ; le paramètre de Rayleigh normalisé en transmission est tracé en pointillés bleus pour $\epsilon_{r2} = 2$, en traits-points rouges pour $\epsilon_{r2} = 4$, en pointillés verts pour $\epsilon_{r2} = 9$, et en ligne verte pour $\epsilon_{r2} = 53$.

Nous pouvons constater de manière générale que le paramètre de Rayleigh en réflexion diminue quand l'angle d'incidence augmente ; en revanche, le paramètre de Rayleigh en transmission augmente quand l'angle d'incidence augmente. De plus, ce dernier augmente avec la valeur de ϵ_{r2} (pour $\epsilon_{r1} = 1$). Nous pouvons remarquer que pour des permittivités relatives ϵ_{r2} proches de 1, pour des incidences faibles le paramètre de Rayleigh en transmission est inférieur à celui en réflexion ; en revanche, il devient supérieur pour des incidences plus élevées. Ainsi, nous pouvons montrer que l'angle d'incidence, pour lequel les paramètres de Rayleigh en transmission et en réflexion sont égaux, vaut de manière générale, pour $\epsilon_{r2} \geq \epsilon_{r1}$:

$$\theta_i^{rug} = \arccos \left(\sqrt{\frac{\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1}}{8 \epsilon_{r1}}} \right), \quad (1.95)$$

si $\epsilon_{r2} \leq 9\epsilon_{r1}$. Sur la figure 1.13 pour $\epsilon_{r1} = 1$, ceci donne $\theta_i^{rug} \simeq 69.3^\circ$ pour $\epsilon_{r2} = 2$ et $\theta_i^{rug} \simeq 52.3^\circ$ pour $\epsilon_{r2} = 4$. Ici $\epsilon_{r1} = 1$, donc pour des permittivités relatives ϵ_{r2} supérieures à 9, le paramètre de Rayleigh en transmission est toujours supérieur à celui en réflexion, comme nous pouvons le

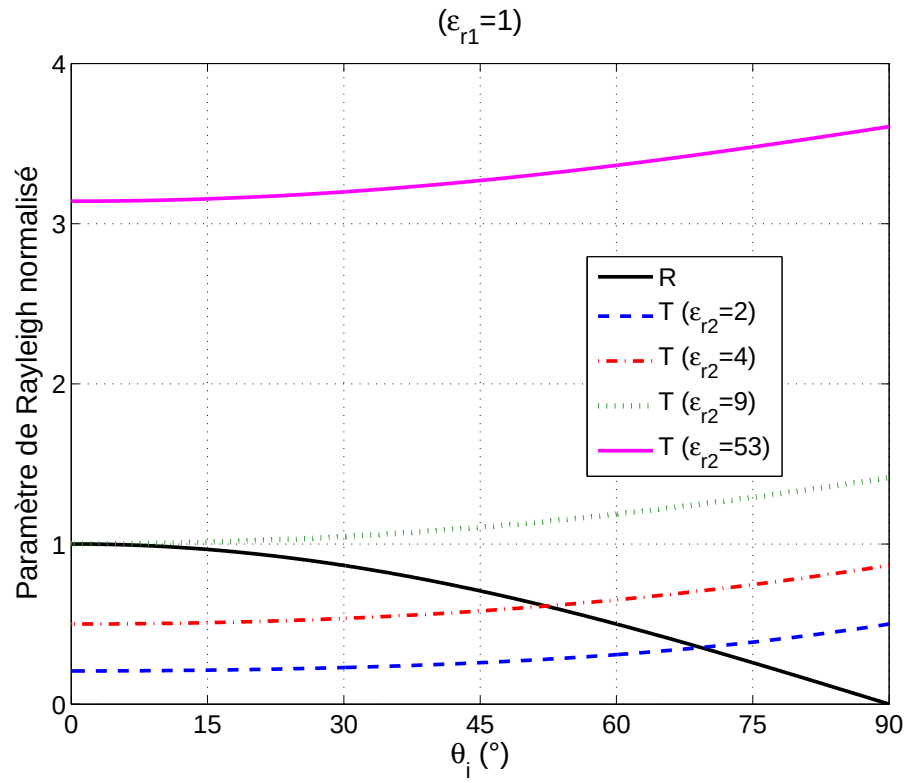


FIG. 1.13 – Comparaison des paramètres de Rayleigh normalisés pour $\epsilon_{r1} = 1$ et différentes valeurs de ϵ_{r2} , en fonction de l'angle d'incidence θ_i

voir sur la figure 1.13 pour $\epsilon_{r2} = 53$. Ainsi, pour $\epsilon_{r2} = 9$, l'égalité n'a lieu que pour une incidence nulle, $\theta_i = 0^\circ$.

En conclusion, pour $\epsilon_{r2} > 9\epsilon_{r1}$, le paramètre de Rayleigh en transmission est toujours supérieur à celui en réflexion. En revanche, pour des permittivités relatives ϵ_{r2} plus faibles, il ne l'est qu'à partir d'un certain angle d'incidence θ_i^{rug} , donné par l'équation (1.95). Ainsi, pour des permittivités relatives ϵ_{r2} proches de 1 (pour $\epsilon_{r1} = 1$) et des incidences modérées, le paramètre de Rayleigh en transmission est inférieur à celui en réflexion : la surface est donc dans ce cas de figure plus rugueuse si l'étude se porte sur l'onde réfléchie que sur l'onde transmise.

1.2.4.3 Réflexion et transmission spéculaires et diffuses

Pour une surface d'aire infinie, le champ diffusé en réflexion $\mathbf{E}_r(\mathbf{R})$ et en transmission $\mathbf{E}_t(\mathbf{R})$ par une surface rugueuse peut se décomposer en une composante moyenne et une composante variable comme suit [29, 43, 44]

$$\mathbf{E}_r(\mathbf{R}) = \langle \mathbf{E}_r(\mathbf{R}) \rangle + \delta \mathbf{E}_r(\mathbf{R}), \quad (1.96a)$$

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{R}) = \langle \mathbf{E}_t(\mathbf{R}) \rangle + \delta \mathbf{E}_t(\mathbf{R}), \quad (1.96b)$$

avec

$$\langle \delta \mathbf{E}_r(\mathbf{R}) \rangle = \langle \delta \mathbf{E}_t(\mathbf{R}) \rangle = 0, \quad (1.97)$$

où $\langle \dots \rangle$ représente la moyenne statistique et δ les variations du champ. Alors, l'intensité totale diffractée par la surface s'exprime comme la somme des intensités cohérente et incohérente

$$\langle |\mathbf{E}_r(\mathbf{R})|^2 \rangle = |\langle \mathbf{E}_r(\mathbf{R}) \rangle|^2 + \langle |\delta \mathbf{E}_r(\mathbf{R})|^2 \rangle, \quad (1.98a)$$

$$\langle |\mathbf{E}_t(\mathbf{R})|^2 \rangle = |\langle \mathbf{E}_t(\mathbf{R}) \rangle|^2 + \langle |\delta \mathbf{E}_t(\mathbf{R})|^2 \rangle. \quad (1.98b)$$

Le terme $|\langle \mathbf{E}_{r,t}(\mathbf{R}) \rangle|^2$ représente l'intensité cohérente, du fait de sa relation de phase bien déterminée, en relation avec l'onde incidente. Ce terme correspond à la réflexion ou transmission spéculaire par une surface plane. Le terme

$$\langle |\delta \mathbf{E}_{r,t}(\mathbf{R})|^2 \rangle = \langle |\mathbf{E}_{r,t}(\mathbf{R})|^2 \rangle - |\langle \mathbf{E}_{r,t}(\mathbf{R}) \rangle|^2 \quad (1.99)$$

représente l'intensité incohérente, à cause de son étalement angulaire et le peu de relation (la faible corrélation) avec l'onde incidente. Ce terme correspond à la réflexion ou transmission diffuse par une surface très rugueuse. Ainsi, lorsque la surface est plane, le terme cohérent est maximal et le terme incohérent nul, puisque toute l'énergie incidente est réfléchie ou transmise dans la direction spéculaire. Quand la rugosité électromagnétique de la surface augmente, le terme cohérent est atténué, de ce fait le terme incohérent augmente. Pour une surface qualifiée (via le critère de Rayleigh) de très peu rugueuse, le terme cohérent est prépondérant, alors que pour une surface qualifiée de rugueuse, le terme incohérent est prépondérant. Enfin, pour une surface très rugueuse, le terme cohérent peut être négligé.

1.3 Diffraction et diffusion d'ondes électromagnétiques par une interface rugueuse

1.3.1 Présentation du problème (2D/3D)

Nous nous intéressons de manière générale à un problème 3D, et étudions éventuellement dans un premier temps un problème 2D, c'est-à-dire où la surface rugueuse est invariante selon une direction. Le repère choisi est un repère cartésien orthonormé $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$, avec une origine O arbitraire sur le plan moyen $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ de la surface rugueuse.

Soit $\mathbf{E}_i(\mathbf{R})$ une onde électromagnétique supposée plane se propageant dans le milieu incident supérieur Ω_1 , vers une interface rugueuse Σ_{12} séparant le milieu inférieur Ω_2 . Les deux milieux sont supposés LHI, stationnaires, non magnétiques, et de permittivités relatives respectives ϵ_{r1} et ϵ_{r2} . La surface séparatrice Σ_{12} est supposée d'aire infinie. Elle est décrite par ses hauteurs $z = \zeta(x, y)$. Un point de l'espace, noté $\mathbf{R}$, s'exprime dans le repère cartésien par $\mathbf{R} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}} \equiv \mathbf{r} + z\hat{\mathbf{z}}$, et un point de la surface rugueuse, noté $\mathbf{R}_A$, s'exprime par $\mathbf{R}_A = x_A\hat{\mathbf{x}} + y_A\hat{\mathbf{y}} + \zeta_A\hat{\mathbf{z}} \equiv \mathbf{r}_A + \zeta_A\hat{\mathbf{z}}$.

L'onde incidente se propage selon la direction $\hat{\mathbf{K}}_i = (k_{ix}, k_{iy}, k_{iz})/|k_1| = (\hat{k}_{ix}, \hat{k}_{iy}, \hat{k}_{iz})$, faisant un angle θ_i avec l'axe vertical et un angle ϕ_i avec l'axe $\hat{\mathbf{x}}$ dans le plan $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$. L'onde incidente sur la surface rugueuse au point A s'écrit

$$\mathbf{E}_i(\mathbf{R}_A) = E_0 \exp(ik_1 \hat{\mathbf{K}}_i \cdot \mathbf{R}_A) \hat{\mathbf{e}}_i, \quad (1.100)$$

où $\hat{\mathbf{e}}_i$ est le vecteur de polarisation de $\mathbf{E}_i$. Le champ total sur la surface diélectrique dans le milieu incident Ω_1 est alors la somme du champ incident et du champ diffracté (en réflexion) dans Ω_1 :

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}_A) = \mathbf{E}_i(\mathbf{R}_A) + \mathbf{E}_r(\mathbf{R}_A), \quad (1.101)$$

où $\mathbf{E}_r(\mathbf{R}_A)$ est le champ réfléchi dans la direction $\hat{\mathbf{K}}_r$, d'angles associés (θ_r, ϕ_r) dans un repère sphérique. Le champ total sur la surface diélectrique dans le milieu de transmission Ω_2 est quant à lui égal au champ transmis $\mathbf{E}_t(\mathbf{R}_A)$ dans la direction $\hat{\mathbf{K}}_t$, d'angles associés (θ_t, ϕ_t) dans un repère sphérique. Les inconnues du problème sont donc les champs diffractés en réflexion $\mathbf{E}_r(\mathbf{R})$ et transmission $\mathbf{E}_t(\mathbf{R})$ par la surface rugueuse, en un point quelconque de l'espace $\mathbf{R}$.

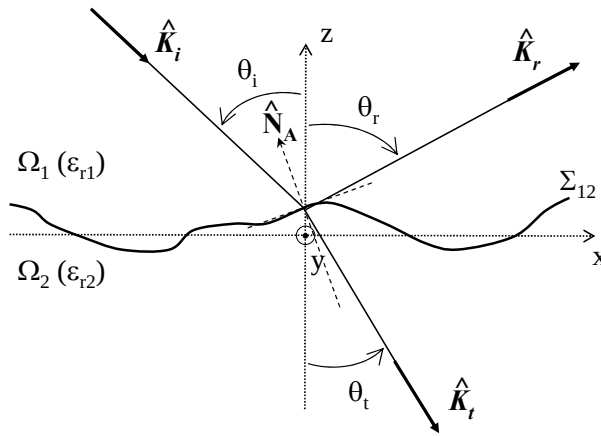


FIG. 1.14 – Présentation du problème (vue dans le plan $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}})$)

Pour exprimer les vecteurs d'onde normalisés $\hat{\mathbf{K}}$, ainsi que les bases de polarisation du champ électrique ($\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{h}}, \hat{\mathbf{K}}$) dans le plan $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$, on peut choisir d'orienter ou non les angles. En 3D, si on choisit de ne pas orienter les angles, en prenant $\theta_{i,r,t} \in [0; \pi/2]$ et $\phi_{i,r,t} \in [0; 2\pi]$, on obtient dans la base $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$ [43]

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{v}}_i &= (\ -\cos \theta_i \cos \phi_i \ , \ -\cos \theta_i \sin \phi_i \ , \ -\sin \theta_i \) \\ \hat{\mathbf{h}}_i &= (\ \ -\sin \phi_i \ , \ +\cos \phi_i \ , \ 0 \) \\ \hat{\mathbf{K}}_i &= (\ \ +\sin \theta_i \cos \phi_i \ , \ +\sin \theta_i \sin \phi_i \ , \ -\cos \theta_i \) \end{cases} \quad , \quad (1.102)$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{v}}_r &= (\ \ +\cos \theta_r \cos \phi_r \ , \ +\cos \theta_r \sin \phi_r \ , \ -\sin \theta_r \) \\ \hat{\mathbf{h}}_r &= (\ \ -\sin \phi_r \ , \ +\cos \phi_r \ , \ 0 \) \\ \hat{\mathbf{K}}_r &= (\ \ +\sin \theta_r \cos \phi_r \ , \ +\sin \theta_r \sin \phi_r \ , \ +\cos \theta_r \) \end{cases} \quad , \quad (1.103)$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{v}}_t &= (\ \ -\cos \theta_t \cos \phi_t \ , \ -\cos \theta_t \sin \phi_t \ , \ -\sin \theta_t \) \\ \hat{\mathbf{h}}_t &= (\ \ -\sin \phi_t \ , \ +\cos \phi_t \ , \ 0 \) \\ \hat{\mathbf{K}}_t &= (\ \ +\sin \theta_t \cos \phi_t \ , \ +\sin \theta_t \sin \phi_t \ , \ -\cos \theta_t \) \end{cases} \quad . \quad (1.104)$$

Les ondes incidente et diffractée en réflexion vérifient l'équation de Helmholtz (1.13) dans le milieu supérieur Ω_1 , et l'onde diffractée en transmission l'équation de Helmholtz dans le milieu inférieur Ω_2

$$(\nabla^2 + k_\alpha^2)\mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad (1.105)$$

où $\alpha = 1$ dans le milieu supérieur et $\alpha = 2$ dans le milieu inférieur. Les ondes diffractées en réflexion et en transmission sont liées à l'onde incidente, sur l'interface rugueuse Σ_{12} par les relations de passage ou conditions aux limites, exprimées de manière générale par les équations (1.4a-1.4d). Enfin, pour formuler le problème complètement il faut une condition de rayonnement à l'infini, $\mathbf{R} \rightarrow +\infty$ [36,45]. Condition vérifiée par les fonctions appelées fonctions de Green, que nous utiliserons dans la suite.

1.3.2 Principe de Huygens et théorème d'extinction

Le principe de Huygens [45, 8, 46] est un principe de base de la théorie ondulatoire de la lumière. Son énoncé est le suivant [46] : *Chaque point d'une surface d'onde¹⁶ S_0 atteinte par la lumière à l'instant t_0 peut être considéré comme une source secondaire qui émet des ondelettes sphériques. A l'instant t postérieur à t_0 , la surface d'onde S est l'enveloppe des surfaces d'ondes émises par les sources secondaires convenablement réparties sur S_0 .* Ce principe très intuitif qui permet de retrouver les lois de l'optique géométrique a été complété par le postulat de Fresnel en 1818 : *Chaque point M d'une surface S atteinte par la lumière peut être considéré comme une source secondaire émettant une onde sphérique dont l'amplitude et la phase sont celles de l'onde incidente au point M .* C'est pourquoi ce principe est parfois appelé principe de Huygens-Fresnel. Il peut se démontrer à partir des équations de propagation.

¹⁶Une surface d'onde est l'ensemble des points d'égale perturbation lumineuse. Si la surface d'onde est un plan, l'onde est dite plane (on l'appelle alors communément plan d'onde) ; si cette surface est sphérique, l'onde est dite sphérique.

1.3.2.1 Expressions dans le cas scalaire

Dans le cas scalaire (2D ou 3D), à partir de la fonction de Green appropriée (voir équations (1.116a) ou (1.116b) ci-après), on démontre que, dans le milieu Ω_1

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{R} \in \Omega_1, \\ \mathbf{R} \in \Omega_2, \end{array} \right\} \begin{array}{l} E_1(\mathbf{R}) \\ 0 \end{array} = E_i(\mathbf{R}) + \int_{\Sigma_A} d\Sigma_A \left(E_1(\mathbf{R}_A) \frac{\partial G_1(\mathbf{R}_A, \mathbf{R})}{\partial N_A} - G_1(\mathbf{R}_A, \mathbf{R}) \frac{\partial E_1(\mathbf{R}_A)}{\partial N_A} \right), \quad (1.106)$$

où $E_1(\mathbf{R}_A) = E_i(\mathbf{R}_A) + E_r(\mathbf{R}_A)$ est le champ total sur la surface Σ_A dans le milieu incident, avec $E_r(\mathbf{R}_A)$ le champ diffusé en réflexion. $\hat{\mathbf{N}}_A$ est la normale à la surface Σ_A au point A considéré, orienté vers le haut, c'est-à-dire, dans notre convention, vers les z positifs (voir figure 1.14). Dans les cas 2D et 3D, elle s'exprime respectivement par

$$\hat{\mathbf{N}}_A = \frac{-\gamma_{Ax}\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{1 + \gamma_{Ax}^2}} \quad (\text{cas 2D}), \quad (1.107a)$$

$$\hat{\mathbf{N}}_A = \frac{-\gamma_{Ax}\hat{\mathbf{x}} - \gamma_{Ay}\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{1 + \gamma_{Ax}^2 + \gamma_{Ay}^2}} \quad (\text{cas 3D}), \quad (1.107b)$$

où $\gamma_{Ax} = \partial\zeta_A/\partial x_A$ et $\gamma_{Ay} = \partial\zeta_A/\partial y_A$. Dans le cas 2D, $\zeta_A \equiv \zeta(x_A)$, et dans le cas 3D, $\zeta \equiv \zeta(x_A, y_A)$. La dérivée normale $\partial/\partial N_A$ est définie par

$$\frac{\partial F}{\partial N_A} = \mathbf{N}_A \cdot \nabla F. \quad (1.108)$$

L'équation pour $\mathbf{R} \in \Omega_1$ correspond au *principe de Huygens* puisque le champ en un point quelconque de Ω_1 peut se calculer à partir de la connaissance du champ sur la surface $E_1(\mathbf{R}_A)$ dans Ω_1 et de sa dérivée normale. Pour ce faire, il faut utiliser la fonction de Green $G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A)$ (et sa dérivée normale) appropriée. L'équation pour $\mathbf{R} \in \Omega_2$ correspond au *théorème d'extinction* puisque l'intégrale sur la surface rugueuse annule le champ incident.

Pour le cas diélectrique où il existe une onde transmise dans le milieu inférieur Ω_2 , le principe de Huygens et le théorème d'extinction sont obtenus de même

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{R} \in \Omega_1, \\ \mathbf{R} \in \Omega_2, \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 \\ E_2(\mathbf{R}) \end{array} = - \int_{\Sigma_A} d\Sigma_A \left(E_2(\mathbf{R}_A) \frac{\partial G_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A)}{\partial N_A} - G_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \frac{\partial E_2(\mathbf{R}_A)}{\partial N_A} \right), \quad (1.109)$$

où $E_2(\mathbf{R}_A) = E_t(\mathbf{R}_A)$ est le champ total sur la surface Σ_A dans le milieu de transmission, égal au champ diffracté en transmission $E_t(\mathbf{R}_A)$.

La détermination de ces équations, pour une fonction de Green connue, est liée à la connaissance du champ total sur la surface et de sa dérivée normale.

1.3.2.2 Expressions dans le cas vectoriel

Les expressions dans le cas scalaire ont été généralisées en 3D dans le cas vectoriel par Stratton et Chu [47, 5]. Appelées aussi équations de Stratton et Chu, elles décrivent le principe d'Huygens et le théorème d'extinction et peuvent s'écrire sous la forme

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{R} \in \Omega_1, \\ \mathbf{R} \in \Omega_2, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \mathbf{E}_1(\mathbf{R}) \\ \mathbf{0} \end{array} = \mathbf{E}_i(\mathbf{R}) + \int_{\Sigma_A} d\Sigma_A \left\{ i\omega\mu_0 \bar{G}_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \cdot [\mathbf{N}_A \wedge \mathbf{H}_1(\mathbf{R}_A)] \right. \\ \left. + \nabla \wedge \bar{G}_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \cdot [\mathbf{N}_A \wedge \mathbf{E}_1(\mathbf{R}_A)] \right\} \quad (1.110)$$

pour le champ $\mathbf{E}_1(\mathbf{R})$ dans Ω_1 , et

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{R} \in \Omega_1, \quad \mathbf{0} \\ \mathbf{R} \in \Omega_2, \quad \mathbf{E}_2(\mathbf{R}) \end{array} \right\} = - \int_{\Sigma_A} d\Sigma_A \left\{ i\omega\mu_0 \bar{G}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \cdot [\mathbf{N}_A \wedge \mathbf{H}_2(\mathbf{R}_A)] \right. \\ \left. + \nabla \wedge \bar{G}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \cdot [\mathbf{N}_A \wedge \mathbf{E}_2(\mathbf{R}_A)] \right\} \quad (1.111)$$

pour le champ $\mathbf{E}_2(\mathbf{R})$ dans Ω_2 , où $\bar{G}_\alpha$ représente la fonction de Green vectorielle, appelée communément dyade de Green définie par

$$\bar{G}_\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) = \left(\mathbf{I} + \frac{\nabla \nabla}{k_\alpha^2} \right) G_\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A), \quad (1.112)$$

où $\alpha = \{1, 2\}$, et $\mathbf{H}_\alpha(\mathbf{R}_A)$ est exprimé en fonction de $\mathbf{E}_\alpha(\mathbf{R}_A)$ à partir de l'équation de Maxwell (1.1b), que l'on peut réécrire, étant dans un repère cartésien et ayant supposé des milieux non magnétiques ($\mu_r = 1$), sous la forme

$$\mathbf{H}_\alpha(\mathbf{R}_A) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \nabla \wedge \mathbf{E}_\alpha(\mathbf{R}_A). \quad (1.113)$$

Dans le cas vectoriel, la détermination de ces équations, pour une fonction de Green connue, est liée à la connaissance des composantes tangentielles des champs électrique et magnétique, $\mathbf{N}_A \wedge \mathbf{E}_\alpha(\mathbf{R}_A)$ et $\mathbf{N}_A \wedge \mathbf{H}_\alpha(\mathbf{R}_A)$. Ces quantités interviennent dans les relations de passage sur la surface, écrites de manière générale respectivement par (1.4c) et (1.4d).

1.3.2.3 Equations de Kirchhoff-Helmholtz

Par la suite, les équations décrivant le principe de Huygens seront utilisées sous une forme légèrement différente, où seul est exprimé le champ diffracté (et non le champ total) en un point $\mathbf{R}$ quelconque en fonction du champ total sur la surface : ces équations sont alors appelées *équations de Kirchhoff-Helmholtz*. Pour un problème scalaire, elles sont donc exprimées respectivement en réflexion et en transmission par

$$\forall \mathbf{R} \in \Omega_1, \quad E_r(\mathbf{R}) = + \int_{\Sigma_A} d\Sigma_A \left(E_1(\mathbf{R}_A) \frac{\partial G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A)}{\partial N_A} - G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \frac{\partial E_1(\mathbf{R}_A)}{\partial N_A} \right), \quad (1.114a)$$

$$\forall \mathbf{R} \in \Omega_2, \quad E_t(\mathbf{R}) = - \int_{\Sigma_A} d\Sigma_A \left(E_2(\mathbf{R}_A) \frac{\partial G_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A)}{\partial N_A} - G_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \frac{\partial E_2(\mathbf{R}_A)}{\partial N_A} \right). \quad (1.114b)$$

Pour le cas vectoriel, elles sont exprimées respectivement en réflexion et transmission par [43]

$$\forall \mathbf{R} \in \Omega_1, \quad \mathbf{E}_r(\mathbf{R}) = + \int_{\Sigma_A} d\Sigma_A \left\{ i\omega\mu_0 \bar{G}_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \cdot [\mathbf{N}_A \wedge \mathbf{H}_1(\mathbf{R}_A)] \right. \\ \left. + \nabla \wedge \bar{G}_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \cdot [\mathbf{N}_A \wedge \mathbf{E}_1(\mathbf{R}_A)] \right\}, \quad (1.115a)$$

$$\forall \mathbf{R} \in \Omega_2, \quad \mathbf{E}_t(\mathbf{R}) = - \int_{\Sigma_A} d\Sigma_A \left\{ i\omega\mu_0 \bar{G}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \cdot [\mathbf{N}_A \wedge \mathbf{H}_2(\mathbf{R}_A)] \right. \\ \left. + \nabla \wedge \bar{G}_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \cdot [\mathbf{N}_A \wedge \mathbf{E}_2(\mathbf{R}_A)] \right\}. \quad (1.115b)$$

1.3.3 Fonctions de Green (2D/3D)

La fonction de Green est l'outil mathématique qui permet de relier l'onde diffractée sur la surface à l'onde diffractée en un point quelconque de l'espace, et qui vérifie la condition de rayonnement à l'infini. Son obtention n'est pas détaillée ici, pour plus de détails, voir par exemple [48, 29]. Son expression générale est donnée pour une onde se propageant d'un point $\mathbf{R}_1$ à un point $\mathbf{R}_2$ quelconques dans un milieu Ω_α (avec $\alpha = \{1, 2\}$), respectivement en 2D et 3D (dans le cas scalaire) par

$$G_\alpha(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_\alpha \|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1\|), \text{ où } \mathbf{R} = x\hat{\mathbf{x}} + z\hat{\mathbf{z}}, \quad (1.116a)$$

$$G_\alpha(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1) = \frac{\exp(ik_\alpha \|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1\|)}{4\pi \|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1\|}, \text{ où } \mathbf{R} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}, \quad (1.116b)$$

où $H_0^{(1)}$ est la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre zéro. L'expression en 3D dans le cas vectoriel est donnée par la dyade de Green, exprimée à partir de (1.116b) par

$$\bar{G}_\alpha(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1) = \left(\mathbf{I} + \frac{\nabla \nabla}{k_\alpha^2} \right) G_\alpha(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1), \text{ où } \mathbf{R} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}. \quad (1.117)$$

1.3.3.1 Représentation de Weyl de la fonction de Green

Une autre représentation possible équivalente est la représentation dans le domaine de Fourier sous la forme d'une somme (un spectre) d'ondes planes. Appelée aussi représentation de Weyl de la fonction de Green, elle s'exprime en 2D par

$$G_\alpha(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \frac{e^{ik_x(x_2-x_1)+if(k_x)|z_2-z_1|}}{f(k_x)}, \text{ où } \mathbf{R} = x\hat{\mathbf{x}} + z\hat{\mathbf{z}}, \quad (1.118)$$

avec

$$f(k_x) = \begin{cases} \sqrt{k_\alpha^2 - k_x^2} & \text{si } k_\alpha^2 \geq k_x^2 \\ i \sqrt{k_x^2 - k_\alpha^2} & \text{si } k_\alpha^2 < k_x^2 \end{cases}, \quad (1.119)$$

où k_α est le nombre d'onde dans le milieu Ω_α , et en 3D (dans le cas scalaire) par [49, 50, 51]

$$G_\alpha(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + if(\mathbf{k})|z_2 - z_1|}}{f(\mathbf{k})}, \text{ où } \mathbf{R} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}, \quad (1.120)$$

où $\mathbf{k} = k_x\hat{\mathbf{x}} + k_y\hat{\mathbf{y}}$ et $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}$, avec

$$f(\mathbf{k}) = \begin{cases} \sqrt{k_\alpha^2 - \|\mathbf{k}\|^2} & \text{si } k_\alpha^2 \geq \|\mathbf{k}\|^2 \\ i \sqrt{\|\mathbf{k}\|^2 - k_\alpha^2} & \text{si } k_\alpha^2 < \|\mathbf{k}\|^2 \end{cases}. \quad (1.121)$$

Notons que le cas $k_\alpha^2 < \|\mathbf{k}\|^2$ ($k_\alpha^2 < k_x^2$ en 2D) correspond aux ondes évanescentes. Cependant, nous étudions le champ diffracté en zone de champ lointain de la surface. Dans ce cas, les ondes évanescentes peuvent être négligées, et l'intégration de $k_{x,y}$ dans l'intervalle $]-\infty; +\infty[$ est réduite à l'intervalle $[-k_\alpha; +k_\alpha]$. Alors la variable $f(\mathbf{k})$ est toujours positive, et vaut $f(\mathbf{k}) = \sqrt{k_\alpha^2 - \|\mathbf{k}\|^2}$. De même dans le cas 2D, $f(k_x) = \sqrt{k_\alpha^2 - k_x^2} > 0$.

Les expressions des fonctions de Green ci-dessus peuvent alors s'écrire de manière simplifiée : le terme à l'intérieur de l'exponentiel peut se réécrire sous la forme d'un produit scalaire entre

le vecteur $\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$ et le vecteur d'onde de propagation $\mathbf{K}$ du point $\mathbf{R}_1$ au point $\mathbf{R}_2$. $\mathbf{K}$ peut donc s'écrire sous la forme

$$\mathbf{K} = k_\alpha \frac{\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1}{\|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1\|}. \quad (1.122)$$

Dans le cas 3D, $\mathbf{K}$ est également exprimé par

$$\mathbf{K} = \mathbf{k} + k_z \hat{\mathbf{z}}, \quad \text{avec } k_z = \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \text{sign}(\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{z}}) f(\mathbf{k}). \quad (1.123)$$

D'après l'équation (1.122), le vecteur $\mathbf{K}$ est dirigé dans la même direction que $\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1$, et est de même sens. Ainsi, $k_z = \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{z}}$ et $z_2 - z_1 = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1 \cdot \hat{\mathbf{z}}$ sont de même signe. Alors, le terme en exponentiel pourra être réécrit sous la forme [52, 53]

$$\exp[i \mathbf{K} \cdot (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)], \quad (1.124)$$

et la représentation de Weyl de la fonction de Green peut se réécrire en 2D sous la forme

$$G_\alpha(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1) = \frac{i}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta \exp[i \mathbf{K} \cdot (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)], \quad (1.125)$$

et en 3D sous la forme [52]

$$G_\alpha(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1) = \frac{ik_\alpha}{8\pi^2} \int \sin\theta d\theta \int d\phi \exp[i \mathbf{K} \cdot (\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1)], \quad (1.126)$$

avec (θ, ϕ) les directions angulaires correspondant au vecteur d'onde $\mathbf{K}$.

Il est également possible d'exprimer la fonction de Green représentant la propagation d'une onde d'un point $\mathbf{R}_1$ à un point $\mathbf{R}_2$ après réflexion sur une surface plane d'altitude z_S par [51, 54, 29]

$$G_{\alpha,r}(\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} r(\mathbf{k}) \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + if(\mathbf{k})(z_2 + z_1 - 2z_S)}}{f(\mathbf{k})}, \quad (1.127)$$

où $r(\mathbf{k})$ est le coefficient de réflexion de Fresnel.

1.3.3.2 Approximation en champ lointain

Dans le cas où le point $\mathbf{R}_2 \equiv \mathbf{P}$ est situé dans la zone de champ lointain relativement à $\mathbf{R}_1$, la fonction de Green peut s'exprimer de manière approchée, respectivement en 2D et 3D, sous la forme

$$G_\alpha(\mathbf{P}, \mathbf{R}_1) \simeq \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k_\alpha R}} \exp[i(k_\alpha R - \mathbf{K} \cdot \mathbf{R}_1 - \pi/4)], \quad (1.128a)$$

$$G_\alpha(\mathbf{P}, \mathbf{R}_1) \simeq \frac{\exp[i(k_\alpha R - \mathbf{K} \cdot \mathbf{R}_1)]}{4\pi R}, \quad (1.128b)$$

où $R = \|\mathbf{P}\|$ et $k_\alpha = \|\mathbf{K}\|$.

1.3.4 Puissances diffusées et coefficients de diffusion

Afin de connaître la puissance électromagnétique diffusée par une surface rugueuse, on utilise un coefficient liant la densité de puissance diffusée dans une direction donnée avec la puissance incidente. Ce coefficient diffère dans son appellation et sa définition selon les communautés (optique et radar). Voyons donc comment obtenir le coefficient de diffusion utilisé classiquement dans notre domaine, et les relations entre ces différents coefficients.

1.3.4.1 Puissance incidente, puissance réfléchie et conservation d'énergie

Il convient donc en premier lieu de connaître la puissance incidente sur la surface, ainsi que la puissance diffusée par cette même surface, en réflexion dans le milieu incident, mais aussi en transmission. Tout d'abord, la puissance incidente sur la surface est prise comme étant la puissance moyenne reçue par la surface rugueuse Σ_{12} , équivaut à la puissance reçue par le plan moyen correspondant à une surface plane S_{12} . Sachant que le flux élémentaire dF d'un vecteur $\mathbf{V}$ à travers un élément de surface (plane) $d\mathbf{S}$ vaut

$$dF = \mathbf{V} \cdot d\mathbf{S}, \quad (1.129)$$

le flux du vecteur de Poynting incident moyen $\langle \mathbf{\Pi}_i \rangle$ reçu par un élément de surface plane $dS_{12} = dx dy$ porté par la normale à la surface $\hat{\mathbf{N}} = \hat{\mathbf{z}}$ vaut alors $dP_i = -\langle \mathbf{\Pi}_i \cdot \hat{\mathbf{N}} \rangle dx dy = -(\langle \mathbf{\Pi}_i \rangle \cdot \hat{\mathbf{z}}) dx dy$. Alors, la puissance totale incidente P_i sur la surface moyenne vaut [55]

$$P_i = \int_{-L_x/2}^{+L_x/2} \int_{-L_y/2}^{+L_y/2} -(\langle \mathbf{\Pi}_i \rangle \cdot \hat{\mathbf{z}}) dx dy = L_x L_y \cos \theta_i \|\langle \mathbf{\Pi}_i \rangle\|, \quad (1.130)$$

où $\|\langle \mathbf{\Pi}_i \rangle\| = \frac{\langle |E_i|^2 \rangle}{2Z_1}$, avec $Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}}}$ pour une onde plane dans un milieu diélectrique pur et non magnétique.

Le flux du vecteur de Poynting diffusé moyen $\langle \mathbf{\Pi}_s \rangle$ (en réflexion $\langle \mathbf{\Pi}_r \rangle$ ou en transmission $\langle \mathbf{\Pi}_t \rangle$) par la surface rugueuse à travers un élément de surface dS porté par la normale $\hat{\mathbf{n}}$ vaut $dP_s = +(\langle \mathbf{\Pi}_s \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS$. L'onde diffusée étant sphérique, dans le repère sphérique (R, θ_s, ϕ_s) , l'élément de surface dS est exprimé dans l'hypothèse où l'onde diffusée est en champ lointain de la surface par

$$d\mathbf{S} = dS \hat{\mathbf{n}} = R^2 \sin \theta_s d\theta_s d\phi_s \hat{\mathbf{n}}, \quad (1.131)$$

où R est la distance du champ diffracté $\mathbf{E}_s$ à l'origine, θ_s l'angle de site de l'onde diffusée et ϕ_s l'angle azimutal de l'onde diffusée. Alors, la puissance totale diffusée P_s (en réflexion P_r ou en transmission P_t) par la surface rugueuse vaut [55]

$$P_s = \int \int (\langle \mathbf{\Pi}_s \rangle \cdot \hat{\mathbf{n}}) R^2 \sin \theta_s d\theta_s d\phi_s = \int \int \|\langle \mathbf{\Pi}_s \rangle\| R^2 \sin \theta_s d\theta_s d\phi_s, \quad (1.132)$$

où $\|\langle \mathbf{\Pi}_s \rangle\| = \frac{\langle |E_s|^2 \rangle}{2Z_\alpha}$, avec $Z_\alpha = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0 \epsilon_{r\alpha}}}$ pour une onde plane dans un milieu diélectrique pur et non magnétique. Pour une onde diffusée en réflexion, $s \equiv r \Rightarrow \alpha = 1$, et pour une onde diffusée en transmission, $s \equiv t \Rightarrow \alpha = 2$.

On peut alors étudier la conservation d'énergie, où l'on doit avoir en théorie $(P_r + P_t)/P_i = 1$. Par analogie avec une surface plane, on définit la réflectivité par P_r/P_i et la transmissivité par P_t/P_i . Ils sont alors définis par, pour deux milieux supposés parfaitement diélectriques

$$\frac{P_r}{P_i} = \int \int \frac{R^2 \|\langle \mathbf{\Pi}_r \rangle\|}{P_i} \sin \theta_r d\theta_r d\phi_r = \int \int \frac{R^2 \langle |E_r|^2 \rangle}{L_x L_y \cos \theta_i |E_i|^2} \sin \theta_r d\theta_r d\phi_r, \quad (1.133)$$

$$\frac{P_t}{P_i} = \int \int \frac{R^2 \|\langle \mathbf{\Pi}_t \rangle\|}{P_i} \sin \theta_t d\theta_t d\phi_t = \int \int \frac{R^2 \langle |E_t|^2 \rangle}{L_x L_y \cos \theta_i |E_i|^2} \frac{Z_1}{Z_2} \sin \theta_t d\theta_t d\phi_t. \quad (1.134)$$

Ainsi, par analogie avec le cas d'une surface plane, le principe de conservation d'énergie doit aboutir au résultat $(P_r + P_t)/P_i = 1$. En conséquence, l'étude de $(P_r + P_t)/P_i$ est un moyen d'étudier la validité du modèle utilisé, en fonction de différents paramètres, notamment l'angle d'incidence et les paramètres statistiques caractéristiques de la surface rugueuse relativement à la longueur d'onde incidente.

1.3.4.2 Coefficient de diffusion, SER et BRDF

Par définition, le coefficient de diffusion est égal à la proportion de la puissance diffusée par la surface (relativement à la puissance incidente) dans un angle solide défini par $\sin \theta_s d\theta_s d\phi_s$, autour de la direction d'observation $\hat{\mathbf{K}}_s$ donnée par (θ_s, ϕ_s) [55]¹⁷

$$\frac{P_s(\hat{\mathbf{K}}_i)}{P_i(\hat{\mathbf{K}}_i)} = \int_{\phi_s} \int_{\theta_s} \sigma_s(\hat{\mathbf{K}}_s, \hat{\mathbf{K}}_i) \sin \theta_s d\theta_s d\phi_s. \quad (1.135)$$

Il est défini dans la zone de champ lointain $R \rightarrow +\infty$. Ainsi, par identification, les coefficients de diffusion en réflexion et transmission sont définis par [43]

$$\sigma_r(\hat{\mathbf{K}}_r, \hat{\mathbf{K}}_i) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{R^2 \|\langle \mathbf{\Pi}_r \rangle\|}{P_i} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{R^2 \|\langle \mathbf{\Pi}_r \rangle\|}{L_x L_y \cos \theta_i \|\langle \mathbf{\Pi}_i \rangle\|}, \quad (1.136)$$

$$\sigma_t(\hat{\mathbf{K}}_t, \hat{\mathbf{K}}_i) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{R^2 \|\langle \mathbf{\Pi}_t \rangle\|}{P_i} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{R^2 \|\langle \mathbf{\Pi}_t \rangle\|}{L_x L_y \cos \theta_i \|\langle \mathbf{\Pi}_i \rangle\|}. \quad (1.137)$$

Pour un problème 2D, en utilisant la même démarche [36], les coefficients de diffusion en réflexion et transmission s'écrivent

$$\sigma_r(\theta_r, \theta_i) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{R \|\langle \mathbf{\Pi}_r \rangle\|}{P_i} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{R \|\langle \mathbf{\Pi}_r \rangle\|}{L_x \cos \theta_i \|\langle \mathbf{\Pi}_i \rangle\|}, \quad (1.138)$$

$$\sigma_t(\theta_t, \theta_i) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{R \|\langle \mathbf{\Pi}_t \rangle\|}{P_i} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{R \|\langle \mathbf{\Pi}_t \rangle\|}{L_x \cos \theta_i \|\langle \mathbf{\Pi}_i \rangle\|}. \quad (1.139)$$

La surface équivalente radar (SER), utilisée dans le domaine radar, a une définition similaire. Cependant, contrairement au coefficient de diffusion en réflexion qui est sans dimension, la SER comme son nom l'indique est proportionnelle à une surface, donc homogène à des m^2 . Elle est définie par

$$SER = 4\pi \lim_{R \rightarrow +\infty} R^2 \frac{\|\langle \mathbf{\Pi}_r \rangle\|}{\|\langle \mathbf{\Pi}_i \rangle\|}. \quad (1.140)$$

Ainsi, nous pouvons établir la relation suivante entre la SER et le coefficient de diffusion en réflexion

$$SER = 4\pi L_x L_y \cos \theta_i \sigma_r(\hat{\mathbf{K}}_r, \hat{\mathbf{K}}_i). \quad (1.141)$$

La différence entre ces deux définitions peut s'expliquer par le fait qu'en radar, souvent la cible (l'objet illuminé) n'est pas connue donc sa taille n'est pas connue, et donc la puissance totale incidente sur (ou reçue par) la cible n'est pas connue. C'est pour cela que la SER est définie à partir de la *densité* de puissance incidente.

Dans le domaine optique, la BRDF (Bidirectional Reflectance Distribution Function) a une définition légèrement différente du coefficient de diffusion en réflexion σ_r . On montre [44] que la BRDF s'exprime par

$$BRDF(\hat{\mathbf{K}}_r, \hat{\mathbf{K}}_i) = \frac{\sigma_r(\hat{\mathbf{K}}_r, \hat{\mathbf{K}}_i)}{\cos \theta_r}. \quad (1.142)$$

De même, la BTDF (Bidirectional Transmittance Distribution Function) est définie comme [44]

$$BTDF(\hat{\mathbf{K}}_t, \hat{\mathbf{K}}_i) = \frac{\sigma_t(\hat{\mathbf{K}}_t, \hat{\mathbf{K}}_i)}{\cos \theta_t}. \quad (1.143)$$

¹⁷On rencontre également -notamment dans la littérature anglo-saxonne- une définition légèrement différente, où un facteur multiplicatif $1/4\pi$ apparaît dans le terme de droite de l'équation 1.135. En conséquence, les coefficients de diffusion sont multipliés par 4π .

Chapitre 2

Diffusion par une simple interface fortement rugueuse en réflexion et transmission

Le chapitre précédent a été consacré à quelques rappels sur les notions nécessaires à la compréhension du problème de la diffraction des ondes électromagnétiques par des surfaces, et sur le cas spécifique de surfaces rugueuses. Dans ce chapitre, nous allons dans une première partie nous intéresser aux méthodes de résolution possibles de la diffraction des ondes électromagnétiques par des interfaces rugueuses, en concentrant notre étude sur les méthodes (asymptotiques) analytiques. Un panorama des principales méthodes existantes sera présenté, ainsi que le domaine de validité de quelques-unes d'entre elles.

Dans une deuxième partie, nous nous concentrerons sur l'étude détaillée d'une méthode spécifique appelée approximation de Kirchhoff pour calculer le champ diffracté par une surface rugueuse, à la fois en réflexion dans le milieu d'incidence et en transmission. Cette étude se fera tout d'abord dans le cas d'un problème bidimensionnel (2D). Afin d'obtenir une expression simple de la puissance diffusée par la surface, le modèle sera simplifié pour être appliqué à des surfaces fortement rugueuses comparativement à la longueur d'onde (approximation haute fréquence). Afin d'améliorer le modèle pour des angles d'incidence et de diffusion rasants, une fonction d'ombre en réflexion sera utilisée et étendue au cas de la transmission. Le domaine de validité du modèle, lié au paramètre de Rayleigh (à la fois en réflexion et en transmission) détaillé dans le premier chapitre, sera exposé.

Les propriétés physiques du modèle seront présentées, et une étude approfondie de la conservation d'énergie du modèle sera menée, permettant d'en donner un domaine de validité précis. Enfin, le modèle sera étendu au cas tridimensionnel (3D), pour lequel une étude de la conservation d'énergie sera également conduite.

2.1 Bibliographie sur les méthodes existantes

2.1.1 Introduction

Lors de l'étude de la diffraction d'ondes par des interfaces rugueuses¹, se pose le problème de la connaissance de la surface. Il est possible dans certains cas de connaître de manière exacte la surface rugueuse étudiée. Pour des surfaces rugueuses à variations spatiales mais non stochastiques, on utilise par exemple dans l'étude de surfaces optiques, un palpeur mécanique de précision, un micrographe électronique à balayage [56] ou plus récemment un microscope à force atomique [57]. Pour des surfaces rugueuses stochastiques, le problème est différent puisque la surface varie au cours du temps. Par exemple, pour une surface de mer, on utilise des capteurs placés sur des bouées flottantes à la surface de la mer. Alors, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, la connaissance de certaines grandeurs statistiques de la surface permettent de décrire la surface rugueuse stochastique : ce sont notamment la distribution des hauteurs et la fonction d'auto-corrélation des hauteurs².

La résolution du problème de la diffraction par de telles interfaces passe alors par la détermination du champ électromagnétique sur la surface rugueuse. Des modèles dits *modèles rigoureux* permettent de résoudre le problème sans approximation sur un paramètre de la surface. Pour le cas de la diffraction par des surfaces rugueuses, les *méthodes analytiques*³ ne permettent pas de résoudre le problème sans approximation. Seules des *méthodes numériques*, pour lesquelles la surface est échantillonnée, et dont le pas choisi pour la résolution influera sur la précision du résultat, permettent de résoudre le problème sans approximation. Elles se basent sur la résolution des équations de Maxwell locales sur la surface, sans approximation lors de la résolution. Ces modèles sont souvent qualifiés d'"exacts"; ceci n'est rigoureusement pas vrai, car ils sont résolus par des méthodes numériques dans lesquelles le pas d'échantillonnage conditionne la précision de la méthode.

Ces modèles rigoureux, résolus par des méthodes numériques, peuvent avoir l'avantage d'être "exacts", mais requièrent en contre-partie un temps de calcul et un espace mémoire importants pour leur mise en oeuvre. Ainsi, on voit l'intérêt d'utiliser des *modèles asymptotiques*⁴, qui ont pour avantage d'être plus rapides pour résoudre le même problème. Ainsi, de par leur complexité, les modèles rigoureux ne permettent de traiter que des surfaces de dimensions restreintes (typiquement $30\lambda \times 30\lambda$); tandis que les modèles asymptotiques permettent de traiter des surfaces de plus grandes dimensions. Mais, comme leur nom l'indique, les modèles asymptotiques ne sont applicables que dans un domaine de validité restreint. En effet, pour résoudre le problème de manière plus simple et/ou plus rapide, certaines hypothèses simplificatrices doivent être utilisées. Le plus souvent, ces hypothèses portent sur un paramètre de la surface rugueuse, qui doit être très petit ou très grand devant un paramètre de l'onde incidente (et/ou de l'onde diffusée). Cela peut être, comme souvent pour les modèles asymptotiques simples, l'écart type des hauteurs σ_h relativement à la longueur d'onde λ . Si $\sigma_h \ll \lambda$, le modèle est de type basse fréquence, et à l'inverse, si $\sigma_h \gg \lambda$, le modèle est de type haute fréquence. D'autres paramètres de la surface peuvent également entrer en jeu, comme le rayon de courbure moyen R_c de la surface relativement à la longueur d'onde, ou l'écart type des pentes σ_s relativement aux pentes des faisceaux

¹qu'il s'agisse d'ondes acoustiques, élastiques, ou électromagnétiques

²Ces deux grandeurs suffisent à caractériser la surface lorsque celle-ci est (stationnaire et) ergodique d'ordre 2 et gaussienne.

³Les méthodes analytiques sont des méthodes permettant de donner une équation mathématique, ou *analytique*, de l'inconnue recherchée en fonction de paramètres connus.

⁴ou approchés

incident et diffusé ; de plus, plusieurs de ces hypothèses peuvent se combiner.

Parmi les modèles asymptotiques, nous pouvons distinguer, comme pour les modèles rigoureux, deux grandes familles de méthodes de résolution. Les méthodes numériques peuvent être utilisées pour résoudre le problème, mais ce sont plus souvent les méthodes analytiques qui sont souvent utilisées, car elles permettent une résolution numérique rapide. Bien souvent, les méthodes numériques asymptotiques ont été développées pour accélérer le calcul de la diffusion par les surfaces rugueuses, car la résolution du problème exact est souvent lourde. Elles reposent souvent sur des méthodes ingénieuses de calcul numérique, notamment d'inversion de matrice. Globalement, ces hypothèses sont souvent moins restrictives, comparativement aux méthodes analytiques, mais demandent malgré les simplifications un temps de calcul assez important en comparaison. Les méthodes analytiques simples, comme les méthodes basse et haute fréquences, sont donc beaucoup plus restrictives, mais permettent une résolution beaucoup plus rapide avec un espace mémoire utilisé souvent très faible.

Ainsi, les méthodes numériques sont très utiles puisqu'elles permettent d'obtenir un résultat exact du problème recherché, et de valider une méthode analytique développée, en la comparant dans son domaine de validité supposé à la méthode numérique. De plus, elles permettent d'étudier plus précisément les limites de validité de la méthode analytique. Alors, cette dernière méthode, une fois validée, permet d'accélérer significativement le temps de calcul (ainsi que l'espace mémoire). Historiquement, après Lord Rayleigh [2, 3], les méthodes analytiques apparurent progressivement au XX^{ème} siècle, surtout après la Seconde Guerre Mondiale [58, 59, 60, 61]. Puis, avec le développement informatique, les méthodes analytiques ont été progressivement complétées par des méthodes numériques, permettant à la fois de valider et d'améliorer les méthodes analytiques, mais aussi et surtout d'aborder des domaines peu ou pas explorés, comme les surfaces à forte rugosité, et le problème des incidences rasantes.

Dans la suite, nous allons dresser un panorama non exhaustif des modèles rigoureux utilisés pour résoudre le problème de la diffusion d'ondes par des interfaces rugueuses, qui utilisent des méthodes numériques uniquement. Puis différents modèles asymptotiques seront présentés : ceux utilisés à travers des méthodes numériques seront évoqués dans un premier temps, et ceux utilisés à travers des méthodes analytiques seront exposés dans un second temps. Enfin, quelques méthodes analytiques classiques couramment utilisées seront présentées plus en détail.

2.1.2 Modèles rigoureux

Les modèles rigoureux dits “exacts” traitant de la diffusion d'ondes par des interfaces rugueuses ont tous recours à des méthodes numériques, qualifiées alors également d’“exactes”. Ces méthodes peuvent être classées en deux grandes catégories [36] : les méthodes différentielles et les méthodes intégrales.

Les méthodes différentielles (ou volumiques) se basent sur un problème d'équation aux dérivées partielles. Elles nécessitent un maillage (volumique si le problème est 3D, surfacique si le problème est 2D) du problème, dont la forme et la finesse doivent être choisies de façon pertinente, en fonction du problème étudié et de la précision voulue. Ces méthodes sont du type éléments finis comme la FEM⁵, où le problème est formulé dans le domaine fréquentiel, et les méthodes du type différences finies, comme la FDTD⁶, où le problème est formulé dans le domaine temporel. Elles permettent de prendre en compte des milieux hétérogènes.

⁵Finite Element Method

⁶Finite Difference Time Domain technique

Les méthodes intégrales partent comme son nom l'indique d'équations intégrales du champ sur la surface, qui peuvent être formulées dans le domaine fréquentiel comme celles vues au chapitre précédent (1.110) et (1.111), mais également dans le domaine temporel (dans ce cas la méthode est appelée *Marching-On-in-Time method*). Dans le domaine fréquentiel, les équations intégrales sont alors discrétisées pour résoudre le problème. Pour ce faire, la méthode des moments (MoM) est très souvent utilisée. Le problème devient alors matriciel, et l'enjeu de sa résolution est l'inversion de la matrice. L'inversion peut se faire de manière directe, cependant il est préférable au vu du temps de calcul et de l'espace mémoire nécessaires d'optimiser cette inversion. Des méthodes itératives sont alors utilisées. Citons parmi celles-ci la FMM (Fast Multipole Method), la BMIA/CAG (Banded Matrix Iterative Approach/CANonical Grid), la FB (Forward-Backward method), ou la MOMI (Method of Ordered Multiple Interactions).

Pour une description de ces méthodes, le lecteur pourra se référer aux travaux de N. Déchamps [36] ainsi qu'aux articles de références [62, 63, 64] pour un inventaire plus exhaustif des modèles rigoureux.

2.1.3 Modèles asymptotiques

Les modèles asymptotiques peuvent utiliser des méthodes de résolution numériques ou analytiques. L'attention se portera dans cette thèse sur les méthodes analytiques. Les méthodes numériques asymptotiques ont été développées notamment pour résoudre des problèmes complexes que les méthodes numériques "exactes" peuvent difficilement résoudre, ou moyennant un temps de calcul et un espace mémoire prohibitifs. C'est le cas des méthodes du lancer et du tracé de rayon [65, 66] notamment. De plus, des modèles asymptotiques classiques, résolus par des méthodes analytiques, ont également été résolus par des méthodes numériques. C'est le cas de méthodes basées sur l'approximation de Kirchhoff [67] et le modèle des petites perturbations [68, 69] par exemple.

Comme évoqué en introduction de cette section, les modèles asymptotiques simples peuvent être classés en deux grandes catégories : basse ou haute fréquence. Une troisième catégorie constitue les modèles asymptotiques ayant pour but de pouvoir s'appliquer à la fois en basse et haute fréquence : ces modèles sont alors qualifiés de modèles unifiés. Voyons un panorama de ces différentes catégories de modèles. Ensuite, les modèles prenant en compte le phénomène de diffusion multiple seront présentés, et un résumé des domaines de validité des modèles asymptotiques simples sera dressé.

2.1.3.1 Méthodes basse fréquence

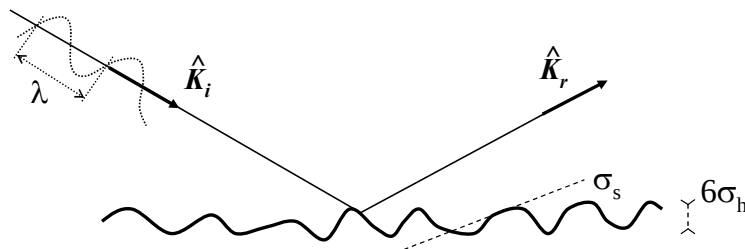


FIG. 2.1 – Surface de type SPM1

Historiquement, la première méthode développée est une méthode basse fréquence : la méthode des petites perturbations (SPM, Small Perturbation Method), appelée parfois aussi théorie de Bragg. Son précurseur fut Lord Rayleigh [2] qui traita le cas de surfaces sinusoïdales. La SPM peut être considérée comme un développement limité du champ diffusé en fonction des hauteurs de la surface. Elle fut développée aux ordres un et deux tout d'abord par Rice [58, 70], avant d'être complétée par Peake [71] et Valenzuela [72, 73]. Johnson et al. développèrent le modèle jusqu'aux ordres trois [74], puis quatre et plus [75]. Physiquement, l'ordre du développement limité correspond au nombre de réflexions par la surface : ainsi, les ordres deux et plus prennent en compte les réflexions multiples par la surface. Plus l'écart type des pentes de la surface est élevé, plus la contribution de ces ordres est importante. Pour l'ordre un de la SPM (noté alors SPM1), le coefficient de diffusion est proportionnel au spectre des hauteurs de la surface.

La SPM1 peut être considérée valide pour un écart type des hauteurs tel que $k_0\sigma_h < 0.3$, avec k_0 le nombre d'onde dans le vide, et pour un écart type des pentes $\sigma_s < 0.3$ [42, 68] (voir figure 2.1). Une méthode analogue à la SPM est la méthode des équations réduites de Rayleigh (RRE, Reduced Rayleigh Equations method), introduite par Toigo et al. [76], puis développée notamment par Soubret et al. [29, 77]. D'autres méthodes analogues ont été développées [78].

2.1.3.2 Méthodes haute fréquence

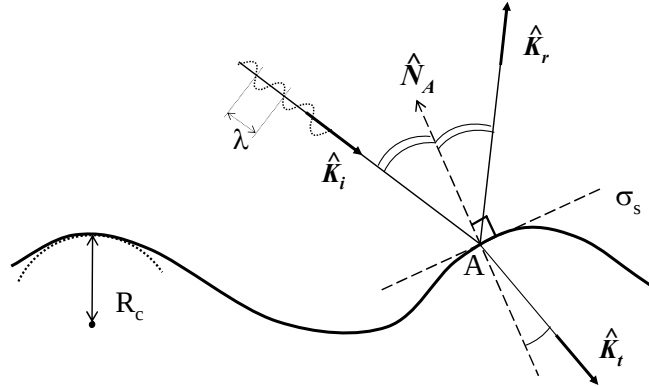


FIG. 2.2 – Surface de type AK

La méthode haute fréquence la plus utilisée et la plus connue est la méthode du plan tangent. Appelée plus classiquement approximation de Kirchhoff (AK) ou approximation de l'optique physique [26, 61, 79], elle suppose que la longueur d'onde est faible devant le rayon de courbure moyen R_c de la surface ($R_c > \lambda$) : la surface est localement lisse. Notons que Thorsos a pu montrer [68] qu'il faut également que la longueur d'onde soit inférieure à la longueur de corrélation de la surface, $L_c > \lambda$. Ainsi, localement et en chaque point de la surface, la surface peut être remplacée par un plan incliné, dont l'inclinaison est égale à la pente de la surface au point considéré. Alors, chaque rayon de l'onde incidente est réfléchi (ou transmis) spéculairement par le plan tangent en chaque point de la surface (voir figure 2.2), et cette méthode ne dépend que du coefficient de réflexion (ou de transmission) de Fresnel pour l'angle local d'incidence considéré. Le modèle diverge pour des incidences rasantes à cause du phénomène d'ombrage de la surface (voir figure 2.3), c'est pourquoi il faut introduire un paramètre correctif, appelé fonction d'ombre, pour pallier ce problème. Ce modèle sera présenté plus en détail par la suite.

L'approximation de l'optique géométrique (AOG) a été introduite par Eckart [59], qui le

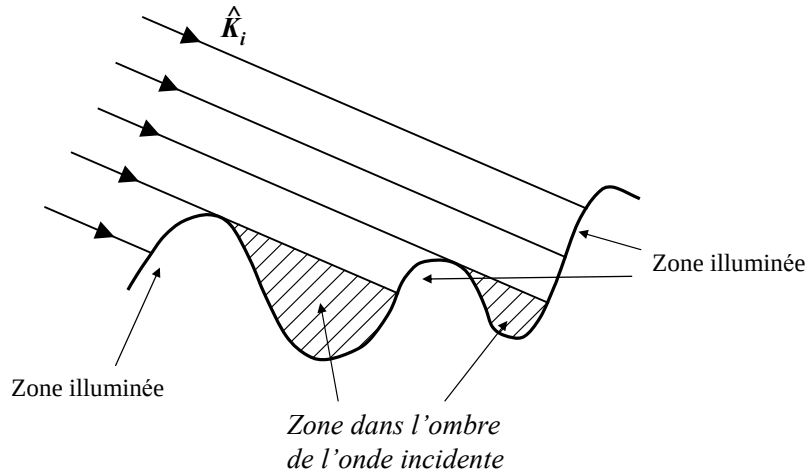


FIG. 2.3 – Phénomène d'ombrage de la surface par l'onde incidente

premier a pu démontrer qu'à l'aide de cette approximation haute fréquence où l'écart type des hauteurs $\sigma_h > \lambda$, le coefficient de diffusion est proportionnel à la probabilité des pentes de la surface. Plus précisément, comme évoqué au chapitre précédent, l'AOG est applicable si la longueur d'onde est très faible devant tout paramètre de la surface. Ainsi, pour une surface plane, les paramètres de la surface sont L_x et L_y sa longueur et sa largeur. Pour une surface rugueuse, il faut de plus tenir compte de la variation des hauteurs σ_h ⁷.

Souvent, l'AK n'est pas utilisée telle quelle : son expression mathématique est simplifiée afin d'obtenir des résultats numériques plus rapidement. Très souvent la méthode ou approximation de la phase stationnaire (APS) [80] est usitée : elle suppose que $\sigma_h > a\lambda$ (a constante). Dans ce cadre, la contribution majeure de la puissance diffusée a lieu localement dans la direction spéculaire. Ceci vient du fait que le terme de phase dans l'intégrale de surface à calculer varie très rapidement, et la contribution majeure de l'intégrale provient du terme où la phase est stationnaire. La pente de la surface ne dépend alors plus que des angles d'incidence et de diffusion : la dépendance sur les pentes dans l'intégrale est supprimée, ce qui permet de simplifier grandement le calcul des moments statistiques. De plus, afin de s'affranchir de la dépendance sur les hauteurs, qui apparaît dans le terme de phase, l'AOG est utilisée. Qualitativement la contrainte associée est la même que l'APS, mais elle est plus forte ($\sigma_h > b\lambda$, avec b constante supérieure à a) : elle est applicable seulement pour des surfaces encore plus rugueuses. En fait, $\sigma_h > 0.5\lambda$ est en général suffisant. Ceci sera précisé par la suite.

2.1.3.3 Méthodes unifiées

Les méthodes unifiées ont été créées afin de s'appliquer à la fois en basse et en haute fréquences, et ainsi posséder un domaine de validité indépendant de la longueur d'onde. Ceci ne peut être réalisé qu'au prix d'une complexité de la méthode plus importante et/ou d'hypothèses simplificatrices. Plusieurs théories ont été développées afin de relier les comportements des faibles perturbations et du plan tangent.

Le modèle à deux échelles (TSM, Two-Scale Model) [81,82,83,84] fut parmi les premiers créés,

⁷En toute rigueur, il faudrait également ne pas oublier de citer les autres distances caractéristiques d'une surface rugueuse : sa longueur de corrélation L_c notamment (et donc également son rayon de courbure R_c).

permettant de traiter des surfaces à deux échelles de rugosité. Il peut s'appliquer à une surface de mer, pour laquelle la surface est décomposée en vagues de courte échelle appelées vagues de capillarité, et en vagues de longue échelle appelées vagues de gravité (voir figure 1.8) [42]. Dans ce modèle, la diffusion est décomposée en deux termes : le premier utilise l'AK réduite à l'AOG pour modéliser la contribution de la grande échelle, et le deuxième (qui convolue le premier) utilise la SPM pour modéliser la contribution de la petite échelle. Ce modèle a l'avantage d'être simple à mettre en oeuvre, mais son inconvénient principal est qu'il est nécessaire de choisir judicieusement la longueur d'onde de coupure à partir de laquelle le spectre de la surface est modélisé par la petite (courte) échelle ou la grande (longue) échelle.

D'autres modèles ont ensuite été développés durant les années 80 et 90 : nous pouvons en citer trois majeurs. Le premier modèle est la *full wave method* (FWM) développée par Bahar et al. dès les années 70 [85,86] pour un problème 2D, puis pour un problème 3D avec de nombreuses évolutions [87,88,89,90,91]. Ce modèle, basé sur l'écriture des équations de Maxwell sous forme d'équations télégraphiques approximées au premier ordre, donne de bons résultats, à l'exception des incidence rasantes où il faut introduire des fonctions d'ombre (comme pour l'AK).

Le deuxième modèle est la méthode de l'équation intégrale (IEM, Integral Equation Method) développée par Fung et al. [50,92]. Il est basé sur l'itération des équations intégrales de Kirchhoff-Helmholtz (1.115a, 1.115b), et est essentiellement une itération de l'AK. Plus précisément, les expressions des champs tangentiels sur la surface se présentent comme la superposition de champs tangentiels obtenus sous l'approximation de Kirchhoff et de termes correctifs. Ce modèle a été amélioré par différents auteurs et a pris des noms un peu différents : l'IEMM (Integral Equation Method Modified) de Hsieh [93] prend en compte la valeur absolue sur les hauteurs dans la décomposition de Weyl de la fonction de Green (1.120). L'IEMM de Chen [94] est une version modifiée de celle de Hsieh, qui prend en compte la valeur absolue dans l'expression des pentes. Enfin, l'IEM2M (Integral Equation Method Modified, 2nd version) de Alvarez-Pérez [95] corrige certaines erreurs de la version précédente.

Le modèle de l'approximation des faibles pentes (SSA, Small Slope Approximation) a été développé par Voronovich [79,96,97,98], modèle dans lequel intervient un développement d'ordres zéro (SSA du premier ordre, noté SSA1) et un de la pente en chaque point de la surface. Applicable pour un écart type des pentes de la surface inférieur aux pentes des faisceaux incident et diffusé, c'est un modèle performant pour des angles modérés, et il est important de noter qu'il peut s'appliquer à des surfaces ayant plusieurs échelles de rugosité. Cependant il n'est pas aisé à mettre en oeuvre numériquement. En effet, pour une surface à deux échelles, l'ordre un de la pente, qui fait intervenir une fonction oscillant rapidement dans l'intégrale numérique à calculer, doit être pris en compte [99].

De nombreuses autres méthodes unifiées ont été développées. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer au Topical Review de Elfouhaily et Guérin [78]. Pour finir, citons un modèle récent développé par Elfouhaily et al. [100] : le WCA (Weighted Curvature Approximation), qui est une correction du SSA1. Basé sur la combinaison des noyaux SPM1 et AK, il converge par construction vers ces deux modèles. Des résultats numériques pour une surface de mer 1D [101] de statistique des hauteurs gaussienne et répondant au spectre de Elfouhaily, et pour une surface 2D isotrope de statistique des hauteurs et de spectre gaussiens [102] ont été effectués, montrant une amélioration par rapport au SSA1.

2.1.3.4 Diffusions multiples et modèles non locaux

La plupart des modèles asymptotiques ne prennent pas en compte le problème de multiples diffusions *successives* par la surface rugueuse. Si les diffusions d'ordre 3 et plus sont très souvent négligeables, la double diffusion par la surface est un phénomène relativement courant. Il contribue à la puissance diffusée par la surface lorsque l'écart type des pentes devient relativement important, de l'ordre de $\sigma_s \approx 0.5$. Pour des surfaces à fortes pentes, ce phénomène donne lieu à une interférence constructive entre deux ondes cohérentes, mais se propageant en sens inverse. Ainsi, dans la direction rétro-diffusée, cette interférence produit une augmentation de la puissance diffusée, appelée *pic de rétro-diffusion*. Ce phénomène peut avoir deux origines distinctes [29, 103] : les ondes de surface et la forte rugosité. Dans le premier cas, l'onde incidente induit des ondes de surface se propageant le long de la surface, qui sont rayonnées vers le milieu incident du fait de la rugosité. Dans le deuxième cas, pour des surfaces très rugueuses (relativement à la longueur d'onde) ayant des pentes relativement importantes, l'onde incidente de direction $\mathbf{K}_i$ peut être réfléchiée par la surface d'un point A_1 vers un autre point A_2 de la surface (et inversement), avant de rayonner dans la direction de réflexion $\mathbf{K}_r$ (voir figure 2.4).

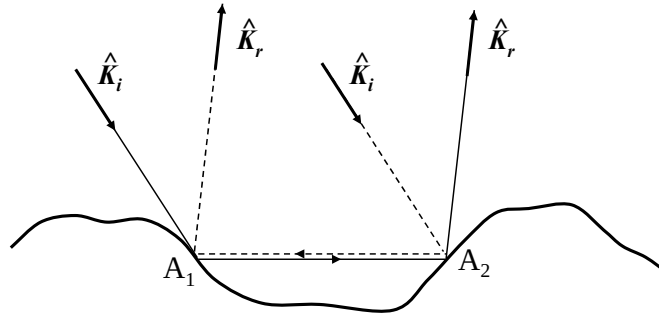


FIG. 2.4 – Phénomène de double diffusion due à la forte rugosité de la surface

Les modèles ne prenant pas en compte ce phénomène sont appelés modèles *locaux* ; dans le cas contraire, ils sont appelés modèles *non locaux*. Selon le modèle, afin de prendre en compte ce phénomène, il faut soit itérer le modèle si c'est un modèle local, soit calculer les ordres supérieurs dans le développement asymptotique (ou limité) du calcul du champ diffusé par la surface si c'est un modèle non local. Ceci complexifie beaucoup la résolution numérique du modèle considéré. Par exemple, la SPM est un modèle non local, pour laquelle il faut développer le calcul à l'ordre 2 pour prendre en compte la double diffusion (due à l'onde de surface) et mettre en évidence, par exemple, un pic de rétro-diffusion. En revanche, beaucoup d'autres modèles sont locaux, comme l'AK. Pour prendre en compte la double diffusion due à la rugosité, l'itération de l'AK au second ordre (AK2) a été développée par Jin et Lax [104], puis surtout par Ishimaru [52]. Elle a été récemment améliorée par Bourlier et al. [49, 105], notamment par l'incorporation d'une fonction d'ombre double réflexion [106]. Cette méthode à l'ordre 2 (AK2) est nécessaire pour des pentes $\sigma_s > 0.5$ quels que soient l'angle d'incidence et l'angle de diffraction [105] ; elle est aussi nécessaire pour des pentes plus faibles, de l'ordre de $0.35 < \sigma_s < 0.5$, si l'on considère la prise en compte de tous les angles de diffusion, ou des angles d'incidence rasants [67].

De nombreux modèles unifiés ont été améliorés afin de prendre en compte ce phénomène. La FWM de Bahar [107, 108, 53] et l'IEM [95], basés sur le même principe que l'AK, ont permis de mettre en évidence le phénomène de rétro-diffusion cohérente due à la forte rugosité. La NLSSA a été développée par Voronovich [97] pour prendre en compte le phénomène de diffusions multiples. Enfin, la NLWCA de Elfouhaily et al. [109] correspond à l'extension de la WCA au second ordre.

2.1.3.5 Résumé des domaines de validité qualitatifs

Il est intéressant, pour avoir un ordre d'idée des domaines de validité des méthodes asymptotiques simples, de représenter leur domaine respectif en fonction des produits nombre d'onde par longueur de corrélation, $k L_c$, et nombre d'onde par écart type des hauteurs $k \sigma_h$. Cependant, il est quelque peu délicat de vouloir donner un domaine de validité *précis* pour chaque méthode, d'une part car cela dépend de la précision voulue de la méthode (et c'est bien pour cela que ce sont des domaines de validité *qualitatifs*), et d'autre part et surtout car de nombreux autres paramètres interviennent. Ce sont notamment la distribution des hauteurs et la fonction d'auto-corrélation de la surface (gaussienne, lorentzienne, exponentielle, de mer...), les valeurs des angles d'incidence et/ou de diffusion (configuration mono- ou bi-statique); mais aussi la permittivité du milieu inférieur, et selon que l'on étudie l'onde diffusée dans le milieu incident ou éventuellement dans le milieu de transmission (notamment pour l'AK qui sera détaillée dans la suite de ce chapitre), etc.

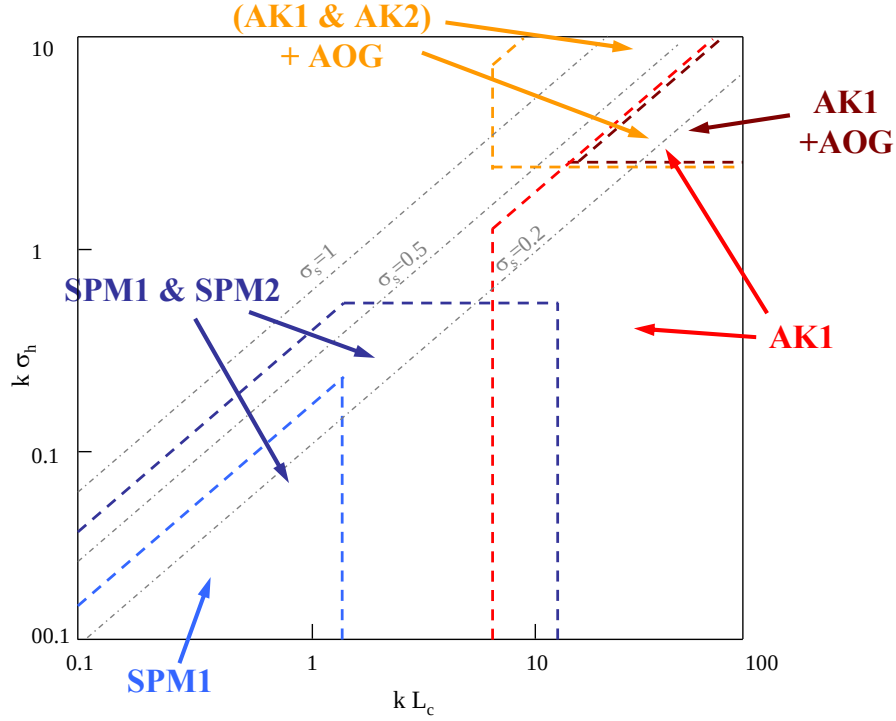


FIG. 2.5 – Domaines de validité qualitatifs de quelques méthodes asymptotiques simples (statistiques gaussiennes, angles modérés...)

Pour donner un domaine de validité qualitatif des méthodes asymptotiques simples, raisonnons sur des surfaces de statistiques gaussiennes, et prenons des angles d'incidence et de diffusion modérés. Comme il a été dit précédemment, la SPM au premier ordre (SPM1) est valide si $k \sigma_h < 0.3$ et $\sigma_s < 0.3$; conditions auxquelles il faut ajouter la condition sur la longueur de corrélation $k L_c < 1.3$ [42]. Pour résumer, la SPM1 est valide si

$$k \sigma_h < 0.3 \quad \text{et} \quad \sigma_s < 0.3 \quad \text{et} \quad k L_c < 1.3. \quad (2.1)$$

En prenant en compte le deuxième ordre (SPM2), cela permet d'étendre le domaine de validité de la SPM (SPM1&SPM2) pour des hauteurs et des pentes (et donc des longueurs de corrélations) un peu plus élevées.

Dans le vide, l'AK est valide si $R_c > \lambda$, et également $k L_c > 6$ [68]. De plus, le phénomène de double réflexion peut être négligé si $\sigma_s < 0.35$ [67], ce qui correspond au domaine de validité de l'AK du premier ordre (AK1) seul. L'AK1 réduite à l'approximation de l'optique géométrique (AK1+AOG) s'applique si $\sigma_h > 0.5\lambda$, c'est-à-dire $k \sigma_h > \pi$ (en négligeant l'influence des angles d'incidence et de diffusion) [12]. Pour résumer, l'AK1 est valide si

$$\sigma_s < 0.35 \quad \text{et} \quad k L_c > 6 \quad \text{et} \quad k R_c > 6, \quad (2.2)$$

conditions auxquelles il faut ajouter $k \sigma_h > \pi$ pour l'AK1+AOG. L'AK du second ordre (AK2) permet de prendre en compte le phénomène de double diffusion, et ainsi prédire le pic de rétro-diffusion observé expérimentalement [103, 110, 111]. En prenant en compte l'AK2, le domaine de validité de l'AK (AK1&AK2) est étendu pour des écarts types de pentes plus élevés. Ainsi, l'AK réduite à l'AOG voit son domaine de validité étendu pour le cas où le phénomène de double diffusion est pris en compte ((AK1&AK2)+AOG), typiquement jusqu'à un écart type des pentes de l'ordre de 1.5. Ainsi, ces différents critères peuvent être résumés sur la figure 2.5 [52, 112, 113]. Le lecteur pourra trouver un domaine de validité de la SSA dans les références [114, 115, 113].

2.1.4 Propriétés générales du problème de diffusion

2.1.4.1 Propriétés importantes

Le choix entre une méthode analytique et une autre se fait en fonction des différentes propriétés des méthodes, et du but recherché. Tout d'abord, la première propriété importante d'une méthode est son universalité : il faut qu'elle puisse s'appliquer pour des problèmes 2D ou 3D, dans les cas scalaire et vectoriel, pour des surfaces parfaitement conductrices mais aussi diélectriques, dans des configuration mono-statique mais aussi bistatique [116].

Une autre propriété importante est la propriété d'invariance de l'amplitude du champ diffracté par la surface. Il y a trois propriétés notables d'invariance : l'invariance de phase, l'invariance de tilt et la réciprocité. L'*invariance de phase* correspond au décalage de phase dû à une translation horizontale ou verticale de la surface [78]. L'*invariance de tilt* correspond au fait que l'amplitude du champ diffracté ne doit pas dépendre de l'origine O du repère, et du système de repère choisis [78].

La *réciprocité*, venant du principe de réciprocité de Lorentz [96, 117, 118, 119, 120, 121], correspond au principe du retour inverse de la lumière (propriété classique énoncée en optique). Notons $\hat{\mathbf{K}}_i$ et $\hat{\mathbf{K}}_r$ les vecteurs unitaires incident et diffracté en réflexion et $\mathbf{S}(\hat{\mathbf{K}}_r, \hat{\mathbf{K}}_i)$ la matrice représentant l'amplitude de diffraction. La réciprocité s'écrit alors

$$\mathbf{S}(\hat{\mathbf{K}}_r, \hat{\mathbf{K}}_i) = \mathbf{S}^T(-\hat{\mathbf{K}}_i, -\hat{\mathbf{K}}_r), \quad (2.3)$$

où l'exposant T représente le transposé de la matrice. Cette expression vaut également pour la fonction de Green. De plus, elle vaut a priori également pour le coefficient de diffusion (en réflexion), mais cela dépend de la définition du coefficient de diffusion choisie. Ici, nous avons choisi une définition rigoureuse (1.136) dans laquelle intervient le terme $\cos \theta_i$ au dénominateur. Il a été montré [43] que sous l'AK réduite à l'AOG, la réciprocité du coefficient de diffusion $\sigma_r(\hat{\mathbf{K}}_r, \hat{\mathbf{K}}_i)$ d'une onde incidente dans la direction $\hat{\mathbf{K}}_i$ vers une onde diffractée en réflexion dans la direction $\hat{\mathbf{K}}_r$ s'écrit

$$\cos \theta_i \sigma_r(\hat{\mathbf{K}}_r, \hat{\mathbf{K}}_i) = \cos \theta_r \sigma_r(-\hat{\mathbf{K}}_i, -\hat{\mathbf{K}}_r). \quad (2.4)$$

Notons cependant que ces définitions de la réciprocité ne valent que pour le cas de la diffraction dans le milieu d'incidence : pour le cas d'une onde transmise, les expressions prennent une forme

différente. Pour la fonction de Green, voir par exemple [122]. Ainsi, pour le coefficient de diffusion en transmission, sous l'AK réduite à l'AOG, la réciprocité s'écrit [43]

$$n_1^2 \cos \theta_1 \sigma_t(\hat{\mathbf{K}}_2, \hat{\mathbf{K}}_1) = n_2^2 \cos \theta_2 \sigma_t(-\hat{\mathbf{K}}_1, -\hat{\mathbf{K}}_2), \quad (2.5)$$

où $\sigma_t(\hat{\mathbf{K}}_2, \hat{\mathbf{K}}_1)$ représente la diffusion du milieu Ω_1 vers le milieu Ω_2 , et $\sigma_t(-\hat{\mathbf{K}}_1, -\hat{\mathbf{K}}_2)$ la diffusion du milieu Ω_2 vers le milieu Ω_1 . Pour plus de détails sur la réciprocité, le lecteur pourra se référer à [123].

De manière générale, il y a symétrie du coefficient de diffusion par rapport à $\theta_s = 0^\circ$, pour un angle d'incidence $\theta_i = 0^\circ$ (pour une surface de statistique paire). Cette propriété est une conséquence de la réciprocité, et s'applique alors non seulement aux coefficients de diffusion bistatistiques, mais aussi aux amplitudes de diffraction et aux fonctions de Green [40].

Une autre propriété générale est la conservation d'énergie de la méthode employée, pour des milieux sans pertes. La propriété de conservation d'énergie ne peut être vérifiée que dans le domaine de validité de la méthode. Son étude permet ainsi d'analyser en détail et de manière assez précise le domaine de validité par l'exactitude de la méthode. La conservation d'énergie s'exprime donc en théorie par

$$\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1, \quad (2.6)$$

où $\mathcal{R}$ représente la réflectivité et $\mathcal{T}$ la transmissivité. Dans le cas d'une surface parfaitement conductrice, $\mathcal{T} = 0$, et cette propriété est appelée *unitarité* [96]. Cette égalité ne vaut donc qu'en théorie, et l'étude de la différence permet d'étudier l'exactitude de la méthode plus en détail. Plusieurs travaux ont été menés dans ce sens, notamment concernant l'AK : voir par exemple [42] pages 974-977, mais aussi [124, 125, 126, 127, 43, 128].

2.1.4.2 Autres propriétés

L'idéal d'une méthode asymptotique serait de constituer une théorie unifiée, dans laquelle les limites AK/AOG et SPM sont atteintes par la méthode. Cependant, dans le même temps, l'intérêt initial d'une méthode analytique doit être son efficacité numérique, comparativement à une approche rigoureuse utilisant une méthode numérique lourde à mettre en oeuvre. Ainsi, la méthode doit rester relativement rapide, et le choix dépendra du but recherché (précision, rapidité, domaine de validité large, etc.). L'utilisation d'une théorie unifiée n'est donc pas forcément nécessaire ni judicieuse selon les applications visées.

Un intérêt majeur d'une méthode asymptotique est l'obtention d'une expression analytique (simple) de l'amplitude de diffraction, et des expressions statistiques du coefficient de diffusion. Ceci vaut surtout pour les méthodes basse ou haute fréquences. Son intérêt est alors la prédiction et l'interprétation des données de diffusion [116] : en effet, il est possible de tirer des propriétés du modèle au regard de l'expression du coefficient de diffusion. Par exemple, une fonction caractéristique du coefficient de diffusion pour la SPM est le spectre des hauteurs de la surface, et pour l'AK la densité de probabilité des pentes. Ainsi il est possible de prédire directement la forme du coefficient de diffusion et de tirer des propriétés générales, comme évoqué ci-dessus.

Quelques propriétés importantes, relatives à une surface rugueuse, peuvent être mises en évidence. Tout d'abord, si le phénomène de double diffusion est conséquent, pour une surface 2D anisotrope $\zeta(x, y)$ (correspondant au cas électromagnétique le plus général), il y a dépolarisation de l'onde dans le plan d'incidence. Ce phénomène, caractéristique des surfaces rugueuses, est observé notamment pour des surfaces anisotropes.

D'autres phénomènes propres aux surfaces rugueuses peuvent être mis en évidence : le "décalage" de l'angle de (pseudo-)brewstérien et de l'angle limite (ou critique), ainsi que la "déviations de Snell-Descartes". L'effet de Brewster en polarisation V , caractérisé par une amplitude nulle du champ réfléchi pour une surface plane à permittivité réelle (c'est-à-dire sans pertes diélectriques), disparaît pour le cas d'une surface rugueuse [120, 129]. En effet, sous l'AK la rugosité de la surface implique que l'angle *local* d'incidence prend un ensemble de valeurs autour de l'incidence brewstérienne. En conséquence, même si l'OPPM est incidente sur la surface avec un angle par rapport à l'axe des ordonnées égal à l'angle de Brewster, elle est réfléchie par tous les points de la surface ayant une pente non nulle. Ce phénomène s'accroît quand la rugosité de la surface σ_h augmente [129]. De plus, l'angle d'incidence pour lequel l'amplitude de l'onde réfléchie est minimale, appelé pseudo-angle de Brewster, est décalé par rapport à une surface plane. Des résultats obtenus par différentes approches [130, 131, 132, 133, 134, 135, 75] pour une onde incidente se propageant dans le vide sur une surface diélectrique 1D ont permis d'établir que le décalage a lieu vers les angles plus faibles. Ceci est en accord avec des résultats théoriques [136, 137] et expérimentaux [138, 139] postérieurs pour une surface 2D. Plus généralement, Leskova et al. [140] ont pu montrer pour une surface 1D que dans le domaine de validité de la RRE, le pseudo-angle de Brewster est décalé vers les angles plus faibles quand le milieu d'incidence Ω_1 est optiquement moins dense que le milieu de réfraction Ω_2 ($\epsilon_{r1} < \epsilon_{r2}$), et vers les angles plus élevés quand Ω_1 est optiquement plus dense que Ω_2 ($\epsilon_{r1} > \epsilon_{r2}$).

De plus, Leskova et al. [140] ont pu établir que l'angle limite (ou critique) d'incidence, au-delà duquel il y a réflexion interne totale (pour le cas $\epsilon_{r1} > \epsilon_{r2}$), est décalé vers les angles plus élevés par rapport à une surface plane : ceci pour un spectre des hauteurs gaussien, en polarisations verticale et horizontale. Dans le domaine de validité de l'AK pour lequel ce phénomène a été également mis en évidence [141], ceci peut s'expliquer simplement par le même argument que pour la disparition de l'effet de Brewster. En effet, à la valeur de l'angle critique pour une surface plane θ_c^{plan} , la rugosité de la surface implique que l'angle *local* d'incidence prend un ensemble de valeurs autour de l'incidence critique, dont des valeurs inférieures. Ainsi, il faut que l'angle d'incidence soit suffisamment supérieur à θ_c^{plan} pour que la probabilité d'avoir un angle *local* d'incidence inférieur à θ_c^{plan} devienne négligeable. Cette valeur dépend donc de l'écart type des pentes de la surface.

Un autre phénomène physique intéressant est la déviation du maximum de l'intensité diffusée par rapport à la direction spéculaire⁸. Ce phénomène pourra être appelé "déviations de Snell-Descartes". Il a été étudié expérimentalement et théoriquement (à partir de l'optique physique) en réflexion sur une surface métallique et diélectrique notamment par Gasvik [142, 143]. D'autres auteurs ont mis en évidence ce phénomène également en transmission [129, 141] et sous l'approximation de l'optique géométrique [144]. Comme pour les deux phénomènes précédents, ce phénomène a été attribué aux variations du coefficient de Fresnel (en réflexion ou transmission) avec l'angle d'incidence [143, 144]. Ainsi, sous l'AOG, si $|r_a|^2$ (avec $a \equiv V$ ou H la polarisation de l'onde incidente) est une fonction croissante de l'angle d'incidence, le maximum de l'intensité diffusée est décalé vers les angles croissants de diffusion [144]. Notons que ce phénomène, dû à la simple diffusion, n'est significatif en transmission que pour des surfaces très fortement rugueuses et de faibles permittivités relatives ϵ_r du milieu de transmission [129].

⁸direction spéculaire donnée par la loi de Snell-Descartes pour une surface plane

2.1.5 Approximations de Kirchhoff et de l'optique géométrique : quelques précisions

2.1.5.1 Précisions sur l'approximation de Kirchhoff

L'approximation de Kirchhoff est généralement assimilée à l'approximation du plan tangent, pour laquelle la surface en chacun de ses points peut être assimilée à un plan infini, correspondant à la tangente de la surface au point considéré. La surface est alors qualifiée de localement lisse. Sous cette hypothèse, le champ réfléchi par la surface peut s'exprimer très simplement à partir du champ incident sur la surface à l'aide des lois de l'optique géométrique, comme au chapitre précédent. Le coefficient de réflexion de Fresnel permet de connaître son amplitude, et la loi de Snell-Descartes sa direction. Ainsi, le champ total sur la surface en un point A , égal à la somme du champ incident et du champ réfléchi, peut s'écrire dans le cas scalaire [26, 51, 61]

$$E(\mathbf{R}_A) = [1 + r(\chi_i)]E_i(\mathbf{R}_A), \quad (2.7)$$

où r est le coefficient de réflexion de Fresnel et χ_i l'angle local d'incidence. L'onde incidente est une OPPM de la forme $E_i(\mathbf{R}) = E_0 \exp(i\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{R})$, avec $\mathbf{K}_i$ le vecteur d'onde incident. Ainsi, la dérivée normale du champ total s'écrit [26, 51]

$$\frac{\partial E(\mathbf{R}_A)}{\partial n} = i(\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{N}_A)[1 - r(\chi_i)]E_i(\mathbf{R}_A), \quad (2.8)$$

où $\mathbf{N}_A$ est la normale à la surface au point A considéré. Ainsi, χ_i est l'angle entre le vecteur d'onde incident $\mathbf{K}_i$ et la normale $\mathbf{N}_A$ donné par l'équation (1.22) (voir figure 2.2). Ces deux équations permettent alors de calculer le champ réfléchi en un point quelconque du milieu incident, à l'aide de l'équation intégrale (1.110). Ces hypothèses correspondent à l'approximation du plan tangent, que la plupart des auteurs considèrent comme équivalent à l'approximation de Kirchhoff. Cependant, l'approximation de Kirchhoff telle que décrite par Voronovich [79] et quelques autres auteurs [29, 26] diffère pour une surface diélectrique, notamment lors de l'étude de l'onde transmise. Cette dernière approche étant plus complexe à mettre en oeuvre, c'est l'approximation du plan tangent qui sera utilisée dans la suite, et dénommée (par abus de langage) comme la grande majorité des auteurs approximation de Kirchhoff.

Nous avons vu dans la sous-section précédente que l'AK est valide si le rayon de courbure moyen de la surface est supérieur à la longueur d'onde, $R_c > \lambda$. Ceci n'est pas tout à fait juste. Plus rigoureusement, l'angle local d'incidence intervient dans l'inégalité. A partir de considérations géométriques, Brekhovskikh [145] a émis le critère suivant

$$k p \cos \chi_i \gg 1, \quad (2.9)$$

où p est le rayon de courbure local au point considéré, et χ_i l'angle local d'incidence, qui traduit le fait que la surface peut être assimilée, localement, à un plan infini. On peut alors montrer qu'une autre restriction associée à celle-ci conduit au critère global suivant [1, 26, 51, 61]

$$k p \cos^3 \chi_i \gg 1. \quad (2.10)$$

Ceci correspond donc au domaine de validité de l'approximation du plan tangent. Cette condition plus rigoureuse que celle donnée classiquement ($R_c > \lambda$) peut être violée pour des angles d'incidence rasants contrairement à l'autre. Ceci constitue une restriction importante qu'il convient de garder à l'esprit lors de l'utilisation d'une telle méthode.

Notons que cette condition doit être vérifiée pour une surface 1D ou 2D, ainsi pour une surface 2D ayant deux rayons de courbure principaux a priori, c'est le plus petit des deux qui doit être

considéré dans le critère. De plus, l'équation (2.10) est appliquée en un point de la surface ; or pour une surface rugueuse aléatoire, le rayon de courbure p et l'angle local d'incidence χ_i sont des variables aléatoires. Ce critère est alors remplacé par un critère équivalent

$$k R_c \cos^3 \theta_i \gg 1, \quad (2.11)$$

où R_c est le rayon de courbure moyen et θ_i l'angle d'incidence par rapport à l'axe des ordonnées. On pourrait discuter de ce dernier critère, et prendre un critère plus restrictif dans lequel intervient l'écart type des pentes et l'écart type des courbures. Cependant ce n'est pas forcément nécessaire car ce critère est *qualitatif* : l'important est ensuite d'avoir à l'esprit que quantitativement, cela dépend du cas de figure étudié, pour lequel de nombreux autres paramètres interviennent. Pour une étude plus approfondie, le lecteur pourra se référer à [31, 146].

2.1.5.2 Précisions sur l'approximation de l'optique géométrique

L'approximation de l'optique géométrique (AOG) est dite en général valide si l'écart type des hauteurs de la surface est supérieur à la longueur d'onde, $\sigma_h > \lambda$. Ceci n'est pas tout à fait juste également.

Comme il a été évoqué dans le chapitre précédent (première section), l'AOG peut être utilisée si les grandeurs caractéristiques de la surface sont grandes devant la longueur d'onde incidente. Ainsi, pour une surface rugueuse, en plus des dimensions horizontales de la surface, intervient la rugosité σ_h , qui est une dimension verticale de la surface. Cette approximation correspond à l'*approximation de l'optique des rayons* (ray-optics approximation)⁹, c'est-à-dire que le phénomène ondulatoire de l'onde peut être négligé : la phase de l'onde diffractée par la surface rugueuse n'a pas de relation bien déterminée avec l'onde incidente. Ceci correspond au fait que seule la composante incohérente de l'intensité diffractée par la surface rugueuse contribue (1.99). Or, négliger la composante cohérente équivaut à considérer le paramètre de Rayleigh R_a "grand", c'est-à-dire à partir de l'équation (1.89), $R_a > \pi/2$. La surface est alors qualifiée de *très rugueuse*.

L'AOG est valide lorsque la puissance cohérente est négligeable, or l'atténuation de la puissance cohérente (comparativement au cas plan) vaut, pour une surface de statistique gaussienne avec $R_a = \pi/2$, $\mathcal{A} \simeq -99$ dB. L'atténuation est très importante, et est suffisante pour que la puissance cohérente puisse être négligée. Pour une surface de dimensions finies, dans le cas de la réflexion, R_a est donné par $R_a = k_1 \sigma_h |\cos \theta_i + \cos \theta_r|/2$. La condition devient alors

$$\sigma_h |\cos \theta_i + \cos \theta_r| > \lambda/2. \quad (2.12)$$

On peut donc constater que les angles d'incidence et de réflexion sont des paramètres importants qu'il convient de prendre en compte. Comme pour l'AK, l'AOG n'est pas valide pour des angles d'incidence et/ou de diffusion très rasants (c'est-à-dire tendant vers $\pi/2$ en valeur absolue). Pour des angles modérés, la condition peut se réécrire de manière approchée

$$\sigma_h > \lambda/2. \quad (2.13)$$

Cette condition laisse donc supposer que l'AOG peut donner des résultats satisfaisants, pour des angles modérés (et des permittivités relatives ϵ_r proches de 1), pour des rugosités σ_h entre $\lambda/2$ et λ . Cette prédiction théorique sera confirmée par la suite par comparaison de l'AOG avec une méthode exacte.

⁹D'autres appellations sont également utilisées, comme la théorie des points brillants, ou la théorie du point spéculaire (specular point theory, SPT) [61, 51, 78].

2.2 Diffusion en réflexion et transmission par une interface rugueuse mono-dimensionnelle dans la limite haute fréquence

Cette partie est consacrée à l'étude de l'approximation de Kirchhoff¹⁰ du premier ordre (les réflexions multiples sont négligées) en réflexion et transmission par une interface rugueuse. Dans un premier temps, l'étude se portera sur un problème 2D $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}})$, où la surface 1D est caractérisée par ses hauteurs en fonction de l'abscisse x , $\zeta(x)$. Le phénomène d'*ombrage* de la surface par l'ombre incidente, et de *masquage* par l'onde diffusée en réflexion mais aussi en transmission est pris en compte dans le modèle. Ainsi, le champ diffusé en réflexion et transmission par la surface est calculé sous l'AK1, avec prise en compte de l'effet d'ombre.

Ensuite, afin de déterminer la puissance diffusée en réflexion et transmission de façon simple et rapide, l'approximation de la phase stationnaire (APS) est utilisée, ce qui permet de réduire le nombre d'intégrations à calculer. Afin de réduire le temps de calcul, l'approximation de l'optique géométrique (AOG) est appliquée au modèle, réduisant l'application de celui-ci au cas de surfaces fortement rugueuses (comparativement à la longueur d'onde). Sous cette hypothèse, la contribution cohérente peut être négligée, et une expression simple des coefficients de diffusion en réflexion et transmission est obtenue, avec prise en compte de l'effet d'ombre. La fonction d'ombre en réflexion est classique et bien connue [147, 148] ; en revanche, pour le cas de la transmission, à notre connaissance aucune fonction d'ombre n'a été clairement établie. L'originalité de ce travail réside donc dans l'établissement d'une nouvelle fonction d'ombre bistatique en transmission [149].

Par le calcul des composantes cohérentes, un critère de validité rigoureux de la méthode est donné en réflexion et en transmission. Enfin, dans le domaine de validité (présumé) de la méthode qui est basée sur l'AK1 réduite à l'AOG, une étude de la conservation d'énergie est menée. Ceci permet de connaître plus précisément les configurations où le phénomène de diffusion multiple peut être négligé. L'attention est portée sur la prise en compte de l'effet d'ombre, pour le cas d'une surface parfaitement conductrice ainsi que pour une surface diélectrique parfaite (ou sans pertes).

2.2.1 Approximation de Kirchhoff en réflexion et transmission avec effet d'ombre

L'approximation de Kirchhoff en réflexion est classique et bien connue [26, 61, 79] ; en revanche, l'approximation de Kirchhoff en transmission est relativement peu connue : seuls quelques articles ont développé ce cas de figure, essentiellement [5, 43, 125, 50, 44, 128]. L'étude s'intéresse à la diffraction électromagnétique par une surface rugueuse stationnaire¹¹, en prenant en compte le phénomène d'ombrage de la surface.

Comme illustré sur la figure 2.6, $E_i(\mathbf{R}) = E_0 \exp(i\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{R})$ (la dépendance temporelle est omise) désigne le champ électrique incident de direction $\hat{\mathbf{K}}_i = (\hat{k}_{ix}, \hat{k}_{iz}) = (k_{ix}, k_{iz})/|k_1|$, avec un angle d'incidence θ_i sur la surface Σ_A . De même, $E_{r,t}$ dénote le champ diffracté respectivement en réflexion et transmission dans la direction $\hat{\mathbf{K}}_{r,t} = (\hat{k}_{rx,t}, \hat{k}_{rz,tz}) = (k_{rx,t}, k_{rz,tz})/|k_{1,2}|$, avec un angle de diffraction $\theta_{r,t}$ dans le milieu d'indice $\alpha = \{1, 2\}$ considéré. Un point hors de la surface

¹⁰D'après ce qui a été dit précédemment, on devrait rigoureusement parler d'approximation du plan tangent ; cette appellation sera malgré tout conservée dans la suite.

¹¹On utilise le terme stationnaire, mais plus rigoureusement, il faut en général que la surface soit (stationnaire et) ergodique d'ordre 2 [150]. L'hypothèse d'ergodicité est nécessaire, par exemple, pour pouvoir utiliser rigoureusement la fonction d'ombre telle que définie par la suite.

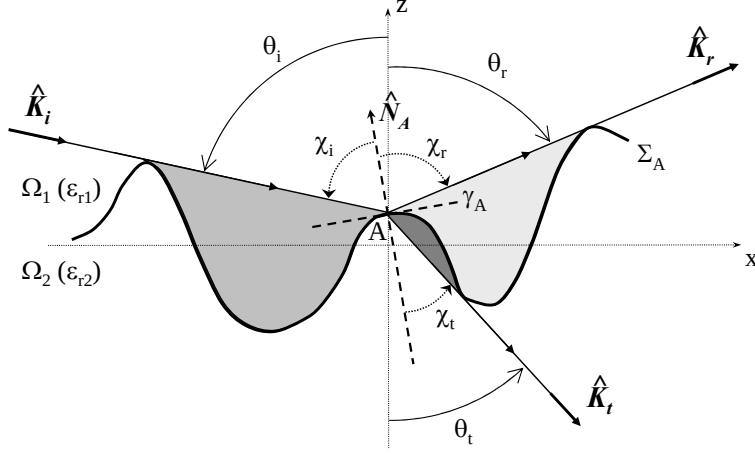


FIG. 2.6 – Illustration du problème étudié

est noté $\mathbf{R} = (x, z)$, et un point de la surface Σ_A est noté $\mathbf{R}_A = (x_A, \zeta_A)$, avec $\zeta_A \equiv \zeta(x_A)$. La pente locale de la surface au point A considéré est notée $\gamma(x_A) = \zeta'(x_A)$, et le vecteur normal unitaire associé $\hat{\mathbf{N}}_A$, avec

$$\hat{\mathbf{N}}_A = \frac{-\gamma(x_A)\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{1 + \gamma^2(x_A)}}. \quad (2.14)$$

Cette définition suppose que la convention d'orientation de la normale est choisie vers le haut, c'est-à-dire dans le sens des z croissants. On pourra noter plus simplement $\zeta_A = \zeta(x_A)$ et $\gamma_A = \gamma(x_A)$.

Le modèle se base sur les équations intégrales de la surface. Plus précisément, il se base sur les équations dites de Kirchhoff-Helmholtz (K-H) où le champ diffracté respectivement en réflexion et transmission est donné avec la convention (2.14) par (1.114a, 1.114b)

$$\forall \mathbf{R} \in \Omega_1, E_r(\mathbf{R}) = + \int_{\Sigma_A} d\Sigma_A \left(E_1(\mathbf{R}_A) \frac{\partial G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A)}{\partial N_A} - G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \frac{\partial E_1(\mathbf{R}_A)}{\partial N_A} \right), \quad (2.15a)$$

$$\forall \mathbf{R} \in \Omega_2, E_t(\mathbf{R}) = - \int_{\Sigma_A} d\Sigma_A \left(E_2(\mathbf{R}_A) \frac{\partial G_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A)}{\partial N_A} - G_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \frac{\partial E_2(\mathbf{R}_A)}{\partial N_A} \right), \quad (2.15b)$$

avec $E_1(\mathbf{R}_A) = E_i(\mathbf{R}_A) + E_r(\mathbf{R}_A)$ et $E_2(\mathbf{R}_A) = E_t(\mathbf{R}_A)$. $G_{1,2}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A)$ est la fonction de Green 2D, définie de manière générale par

$$G_{1,2}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_{1,2} ||R - R_A||), \quad (2.16)$$

où $k_{1,2}$ est le nombre d'onde du milieu d'indice α considéré ($\alpha \equiv 1$ dans le milieu supérieur Ω_1 et $\alpha \equiv 2$ dans le milieu inférieur Ω_2) défini pour un milieu non magnétique par $k_\alpha = k_0 \sqrt{\epsilon_{r\alpha}}$, avec k_0 le nombre d'onde dans le vide. Dans la zone de champ lointain de la surface, l'expression (2.16) peut s'écrire de manière approchée sous la forme

$$G_\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \simeq \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k_\alpha R}} \exp(-i\pi/4) \exp[i(k_\alpha R - \mathbf{K}_s \cdot \mathbf{R}_A)], \quad (2.17)$$

avec $s \equiv r$ et $\alpha \equiv 1$ pour le cas de la réflexion, et $s \equiv t$ et $\alpha \equiv 2$ pour le cas de la transmission.

Alors, l'application de l'AK (voir figure 2.2) à la fois en réflexion et en transmission permet d'obtenir les expressions des champs totaux sur la surface au point $\mathbf{R}_A$ considéré, dans les

milieux Ω_1 et Ω_2 . L'AK correspond à l'approximation du plan tangent, valide pour un rayon de courbure moyen R_c vérifiant la condition (2.11)

$$k R_c \cos^3 \theta_i \gg 1. \quad (2.18)$$

Elle permet de considérer la surface comme localement lisse en tout point A de la surface. Ceci implique qu'en tout point A , la surface peut être remplacée de manière équivalente par son plan tangent infini, c'est-à-dire la tangente locale au point A considéré, de pente γ_A et de normale unitaire $\hat{\mathbf{N}}_A$. En conséquence, les champs réfléchis et transmis au point A peuvent s'exprimer de manière simple en fonction du champ incident par les relations

$$E_r(\mathbf{R}_A) = r_{12}(\chi_i) E_i(\mathbf{R}_A), \quad (2.19a)$$

$$E_t(\mathbf{R}_A) = t_{12}(\chi_i) E_i(\mathbf{R}_A), \quad (2.19b)$$

où r_{12} et t_{12} sont respectivement les coefficients de réflexion et de transmission de Fresnel au point A définis par (1.23a) et (1.23b) en polarisation H et (1.24a) et (1.24b) en polarisation V , ayant pour argument l'angle local d'incidence χ_i défini par le vecteur d'onde incident $\hat{\mathbf{K}}_i$ et la normale locale $\hat{\mathbf{N}}_A$, tel que

$$\cos \chi_i = -\hat{\mathbf{K}}_i \cdot \hat{\mathbf{N}}_A. \quad (2.20)$$

D'après les équations (2.19a, 2.19b), les champs totaux dans les milieux Ω_1 et Ω_2 s'expriment respectivement par

$$E_1(\mathbf{R}_A) = [1 + r_{12}(\chi_i)] E_i(\mathbf{R}_A), \quad (2.21a)$$

$$E_2(\mathbf{R}_A) = t_{12}(\chi_i) E_i(\mathbf{R}_A). \quad (2.21b)$$

Afin de déterminer les champs diffractés, il faut également calculer leurs dérivées normales. Sachant que

$$\frac{\partial U}{\partial N_A} = \nabla U \cdot \hat{\mathbf{N}}_A, \quad (2.22)$$

les dérivées normales s'expriment par [29]

$$\frac{\partial E_1(\mathbf{R}_A)}{\partial N_A} = [\mathbf{K}_i \cdot \hat{\mathbf{N}}_A + \mathbf{K}_{r,sp} \cdot \hat{\mathbf{N}}_A r_{12}(\chi_i)] E_i(\mathbf{R}_A), \quad (2.23a)$$

$$\frac{\partial E_2(\mathbf{R}_A)}{\partial N_A} = \mathbf{K}_{t,sp} \cdot \hat{\mathbf{N}}_A t_{12}(\chi_i) E_i(\mathbf{R}_A), \quad (2.23b)$$

où $\mathbf{K}_{t,sp}$ et $\mathbf{K}_{r,sp}$ sont les vecteurs d'ondes respectivement réfléchis et transmis dans la direction spéculaire. En effet, la surface étant localement assimilable à un plan *infini*, l'onde incidente induit des ondes réfléchies et transmises par la surface plane de pente γ_A dans la direction donnée par la loi de Snell-Descartes, respectivement en réflexion (1.21a) et transmission (1.21b) (voir figure 2.6). Ainsi, nous obtenons les relations suivantes :

$$\mathbf{K}_{r,sp} \cdot \hat{\mathbf{N}}_A = -\mathbf{K}_i \cdot \hat{\mathbf{N}}_A, \quad (2.24a)$$

$$n_2 \mathbf{K}_{t,sp} \wedge \hat{\mathbf{N}}_A = n_1 \mathbf{K}_i \wedge \hat{\mathbf{N}}_A. \quad (2.24b)$$

Les dérivées normales s'expriment alors par

$$E_1(\mathbf{R}_A) = \mathbf{K}_i \cdot \hat{\mathbf{N}}_A [1 - r_{12}(\chi_i)] E_i(\mathbf{R}_A), \quad (2.25a)$$

$$E_2(\mathbf{R}_A) = \mathbf{K}_{t,sp} \cdot \hat{\mathbf{N}}_A t_{12}(\chi_i) E_i(\mathbf{R}_A). \quad (2.25b)$$

De même, il faut calculer la dérivée normale de la fonction de Green. Dans la zone de champ lointain, elle s'écrit

$$\frac{\partial G_{1,2}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A)}{\partial N_A} = -i \mathbf{K}_{s,sp} \cdot \hat{\mathbf{N}}_A G_{1,2}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A). \quad (2.26)$$

Avec ces expressions, les équations de K-H sous l'AK se simplifient comme suit

$$E_r(\mathbf{R}) = +i \int_{\Sigma_A} d\Sigma_A (+2\mathbf{K}_i \cdot \hat{\mathbf{N}}_A) r_{12}(\chi_i) E_i(\mathbf{R}_A) G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \Xi(\mathbf{R}_A), \quad (2.27a)$$

$$E_t(\mathbf{R}) = -i \int_{\Sigma_A} d\Sigma_A (-2\mathbf{K}_{t,sp} \cdot \hat{\mathbf{N}}_A) t_{12}(\chi_i) E_i(\mathbf{R}_A) G_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \Xi(\mathbf{R}_A), \quad (2.27b)$$

où $\Xi(\mathbf{R}_A)$ est la fonction d'illumination de la surface rugueuse. Elle vaut 1 quand le point A de la surface est illuminé par l'onde incidente et vu par l'onde diffractée ; elle vaut 0 dans le cas contraire. En d'autres termes, elle vaut 1 si le rayon incident de direction $\hat{\mathbf{K}}_i$ ne traverse pas la surface Σ_A avant de la rencontrer au point A considéré, et si l'onde diffractée dans la direction d'observation de direction $\hat{\mathbf{K}}_s$ ne rencontre pas la surface (voir figure 2.6). Ainsi, l'intégration peut se faire non pas sur la surface entière, mais uniquement sur les points A en dehors de l'ombre.

Afin de déterminer le champ diffracté dans la zone de champ lointain de la surface, la fonction de Green 2D donnée par l'expression (2.17) est utilisée. Le détail du calcul est mené dans l'annexe A, dans lequel l'approximation de la phase stationnaire est utilisée afin de simplifier les expressions des champs diffractés, donnés alors par

$$\frac{E_r^\infty(\mathbf{R})}{E_0} = \frac{-e^{i(k_1 R - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{8\pi k_1 R}} 2k_1 f_r(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r) \int_{-L_A/2}^{+L_A/2} dx_A e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_r) \cdot \mathbf{R}_A} \Xi(\mathbf{R}_A), \quad (2.28a)$$

$$\frac{E_t^\infty(\mathbf{R})}{E_0} = \frac{+e^{i(k_2 R - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{8\pi k_2 R}} 2k_2 f_t(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t) \int_{-L_A/2}^{+L_A/2} dx_A e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_t) \cdot \mathbf{R}_A} \Xi(\mathbf{R}_A), \quad (2.28b)$$

avec f_r et f_t donnés respectivement par l'équation (A.15a) et (A.15b). Ceci permet de calculer plus simplement les puissances diffractées par la surface, dont le détail des calculs est présenté ci-dessous.

2.2.2 Coefficients de diffusion sous l'approximation de l'optique géométrique avec effet d'ombre

2.2.2.1 Introduction

Les expressions précédentes du champ diffracté en champ lointain par la surface permettent de calculer la puissance diffractée par la surface, par l'intermédiaire du coefficient de diffusion (en réflexion et transmission) σ_s défini par (1.138, 1.139)

$$\sigma_s(\mathbf{K}_s, \mathbf{K}_i) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{R \|\langle \mathbf{\Pi}_s \rangle\|}{L_A \cos \theta_i \|\langle \mathbf{\Pi}_i \rangle\|} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\eta_1}{\eta_\alpha} \frac{R}{L_A \cos \theta_i} \frac{\langle |E_s^\infty(\mathbf{R})|^2 \rangle}{|E_i|^2}, \quad (2.29)$$

avec $\|\langle \mathbf{\Pi}_s \rangle\| = \langle |E_s^\infty(\mathbf{R})|^2 \rangle / (2\eta_\alpha)$ la puissance diffractée (qui sera notée ici $p_s(\mathbf{K}_s, \mathbf{K}_i)$), et η_α l'impédance d'onde, où $s \equiv r$ et $\alpha \equiv 1$ en réflexion, et $s \equiv t$ et $\alpha \equiv 2$ en transmission. Cette puissance diffusée peut se décomposer en une composante cohérente p_s^{coh} et une composante incohérente p_s^{inc} telles que

$$p_s = p_s^{coh} + p_s^{inc}, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_s^{coh} &= \frac{1}{2\eta_\alpha} \left| \langle E_s^\infty(\mathbf{R}) \rangle \right|^2, \\ p_s^{inc} &= \frac{1}{2\eta_\alpha} \left[\langle |E_s^\infty(\mathbf{R})|^2 \rangle - \left| \langle E_s^\infty(\mathbf{R}) \rangle \right|^2 \right]. \end{cases} \quad (2.30)$$

Ainsi, le coefficient de diffusion peut également se décomposer en une composante cohérente σ_s^{coh} et une composante incohérente σ_s^{inc} telles que

$$\sigma_s^{coh}(\mathbf{K}_s, \mathbf{K}_i) = 2\eta_1 \frac{R p_s^{coh}(\mathbf{K}_s, \mathbf{K}_i)}{L_A \cos \theta_i |E_i|^2}, \quad \text{et} \quad \sigma_s^{inc}(\mathbf{K}_s, \mathbf{K}_i) = 2\eta_1 \frac{R p_s^{inc}(\mathbf{K}_s, \mathbf{K}_i)}{L_A \cos \theta_i |E_i|^2}. \quad (2.31)$$

Afin de simplifier le calcul du coefficient de diffusion, le modèle sera réduit à l'approximation de l'optique géométrique (AOG), aussi appelée approximation de la limite haute fréquence. Comme il a été dit précédemment, cette méthode s'applique si la composante cohérente de la puissance diffractée (ou du coefficient de diffusion) par la surface peut être négligée, $\sigma_s^{coh} \rightarrow 0$. Valable pour des surfaces fortement rugueuses comparativement à la longueur d'onde, son domaine de validité est donné a priori par la relation $\sigma_h > \lambda/2$, c'est-à-dire $k\sigma_h > \pi$ (2.13).

Le calcul de la composante cohérente, mené dans l'annexe B, permet donc d'étudier en détail le domaine de validité de l'AOG. En effet, la comparaison entre les puissances cohérente et incohérente permet de définir un critère de rugosité de Rayleigh *quantitatif*, à la fois pour l'onde réfléchie et pour l'onde transmise, en fonction du cas de figure étudié et de la précision exigée de la méthode. Sous l'AOG, en supposant que la composante peut être négligée, intéressons-nous au calcul du coefficient de diffusion, qui est donc égal au coefficient de diffusion incohérent sous cette approximation.

2.2.2.2 Coefficient de diffusion incohérent

Le calcul du coefficient de diffusion (égal au coefficient de diffusion incohérent) en réflexion et transmission sous l'AOG part de l'expression de la puissance (incohérente) diffractée¹² p_s par la surface. Elle est proportionnelle à la corrélation statistique du champ diffracté $p_s = \langle |E_s^\infty(\mathbf{R})|^2 \rangle / (2\eta_\alpha)$, puisque la puissance cohérente $p_s^{coh} = |\langle E_s^\infty(\mathbf{R}) \rangle|^2 / (2\eta_\alpha)$ est nulle sous l'AOG. En utilisant respectivement l'équation (2.28a) et (2.28b), la puissance diffractée (diffusée) s'exprime respectivement en réflexion et en transmission par :

$$\frac{2\eta_1 p_r}{|E_0|^2} = \frac{k_1 |f_r(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r)|^2}{2\pi R} \left\langle \int_{-\frac{L_A}{2}}^{+\frac{L_A}{2}} \int_{-\frac{L_A}{2}}^{+\frac{L_A}{2}} dx_A dx_{A'} e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_r) \cdot (\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_{A'})} \Xi(\mathbf{R}_A) \Xi(\mathbf{R}_{A'}) \right\rangle, \quad (2.32a)$$

$$\frac{2\eta_1 p_t}{|E_0|^2} = \frac{k_2 |f_t(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t)|^2}{2\pi R} \left\langle \int_{-\frac{L_A}{2}}^{+\frac{L_A}{2}} \int_{-\frac{L_A}{2}}^{+\frac{L_A}{2}} dx_A dx_{A'} e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_t) \cdot (\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_{A'})} \Xi(\mathbf{R}_A) \Xi(\mathbf{R}_{A'}) \right\rangle, \quad (2.32b)$$

avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ car les puissances sont calculées en champ lointain de la surface. Le terme de phase à l'intérieur de l'exponentielle peut se décomposer comme suit

$$(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_s) \cdot (\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_{A'}) = (k_{ix} - k_{sx})(x_A - x_{A'}) + (k_{iz} - k_{sz})(\zeta_A - \zeta_{A'}), \quad (2.33)$$

où $s \equiv r$ pour le cas de la réflexion, et $s \equiv t$ pour le cas de la transmission. La moyenne statistique $\langle \dots \rangle$ est une moyenne sur les fonctions d'illumination $\Xi(\mathbf{R}_A)$ et $\Xi(\mathbf{R}_{A'})$, et également sur les hauteurs ζ_A et $\zeta_{A'}$.

L'AOG suppose que la puissance diffusée par la surface ne contribue que pour des points de la surface A et A' fortement corrélés comparativement à la longueur de corrélation L_c de la surface : $x_A - x_{A'} \ll L_c$. Les hauteurs $\zeta_A = \zeta(x_A)$ et $\zeta_{A'} = \zeta(x_{A'})$ sont alors deux variables

¹²La puissance diffractée étant égale à la puissance incohérente, le terme diffracté pourra être remplacé par le terme diffusé.

aléatoires fortement corrélées : la différence des abscisses $x_A - x_{A'} \simeq dx_A$ est suffisamment faible pour que la différence des hauteurs $\zeta(x_A) - \zeta(x_{A'}) \simeq d\zeta(x_A)$ vérifie la relation

$$\frac{\zeta(x_A) - \zeta(x_{A'})}{x_A - x_{A'}} \simeq \frac{d\zeta(x_A)}{dx_A} = \gamma(x_A), \quad (2.34)$$

où $\gamma(x_A) \equiv \gamma_A$ est la pente de la surface au point A considéré. De manière générale, la pente est une variable aléatoire. Ainsi, le terme de phase peut se réécrire comme

$$(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_s) \cdot (\mathbf{R}_A - \mathbf{R}_{A'}) = [(k_{ix} - k_{sx}) + \gamma_A(k_{iz} - k_{sz})](x_A - x_{A'}). \quad (2.35)$$

La surface étudiée étant supposée stationnaire, les changements de variables $\{x_A, x_{A'}\} \rightarrow \{x_m = x_A - x_{A'}, x_p = x_A + x_{A'}\}$ (le jacobien de la transformation est égal à 1/2) peuvent être réalisés, et les puissances diffusées respectivement en réflexion et transmission s'expriment par

$$\frac{p_r}{p_i} = \frac{k_1 |f_r(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r)|^2}{4\pi R} \left\langle \int_{-L_A}^{+L_A} \int_{-L_A}^{+L_A} dx_m dx_p e^{i[(k_{ix} - k_{rx}) + \gamma_A(k_{iz} - k_{rz})]x_m} \Xi(\mathbf{R}_A) \Xi(\mathbf{R}_{A'}) \right\rangle, \quad (2.36a)$$

$$\frac{p_t}{p_i} = \frac{\eta_1 k_2 |f_t(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t)|^2}{\eta_2 4\pi R} \left\langle \int_{-L_A}^{+L_A} \int_{-L_A}^{+L_A} dx_m dx_p e^{i[(k_{ix} - k_{tx}) + \gamma_A(k_{iz} - k_{tz})]x_m} \Xi(\mathbf{R}_A) \Xi(\mathbf{R}_{A'}) \right\rangle, \quad (2.36b)$$

avec $p_i = |E_0|^2 / (2\eta_1)$. La moyenne statistique a alors lieu sur les fonctions d'illumination $\Xi(\mathbf{R}_A)$ et $\Xi(\mathbf{R}_{A'})$, et sur la pente γ_A . En utilisant le théorème de Bayes, la densité de probabilité conjointe des trois variables aléatoires $\{\Xi(\mathbf{R}_A), \Xi(\mathbf{R}_{A'}), \gamma_A\}$ peut s'écrire sous la forme [147]

$$p[\Xi(\mathbf{R}_A), \Xi(\mathbf{R}_{A'}), \gamma_A] = p_s(\gamma_A) \times p[\Xi(\mathbf{R}_A), \Xi(\mathbf{R}_{A'}) | \gamma_A], \quad (2.37)$$

avec $p_s(\gamma_A)$ la probabilité des pentes de la surface et $p[\Xi(\mathbf{R}_A), \Xi(\mathbf{R}_{A'}) | \gamma_A]$ la probabilité conditionnelle des fonctions d'illumination sachant la pente γ_A . Cette dernière vérifie, respectivement en réflexion et transmission, la relation

$$p[\Xi(\mathbf{R}_A), \Xi(\mathbf{R}_{A'}) | \gamma_A] = S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r | \gamma_A) \delta(\Xi - \mathbf{1}) + [1 - S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r | \gamma_A)] \delta(\Xi), \quad (2.38a)$$

$$p[\Xi(\mathbf{R}_A), \Xi(\mathbf{R}_{A'}) | \gamma_A] = S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t | \gamma_A) \delta(\Xi - \mathbf{1}) + [1 - S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t | \gamma_A)] \delta(\Xi), \quad (2.38b)$$

avec $S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r | \gamma_A)$ (respectivement $S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t | \gamma_A)$) la probabilité conjointe qu'un point de la surface soit à la fois illuminé par l'onde incidente de direction $\mathbf{K}_i$ et vu par l'onde réfléchie de direction $\mathbf{K}_r$ (respectivement transmise de direction $\mathbf{K}_t$), connaissant la pente γ_A . Cette fonction est alors appelée fonction d'ombre. $\delta(u)$ est la fonction de Dirac, qui vaut 1 lorsque $u = 0$; 0 autrement. Ξ et $\mathbf{1}$ sont des vecteurs de dimension deux définis par $\Xi = [\Xi(\mathbf{R}_A) \ \Xi(\mathbf{R}_{A'})]$ et $\mathbf{1} = [1 \ 1]$.

La surface étant stationnaire, la fonction d'ombre est indépendante de la variable d'intégration x_p . L'intégration sur la variable $x_p \in [-L_A; +L_A]$ vaut alors $2L_A$. Bourlier et al. [148] ont montré que la corrélation peut être négligée dans le calcul de la fonction d'ombre. Ainsi, l'intégration sur la variable $x_m \in [-L_A; +L_A]$ peut être réalisée simplement : elle correspond de manière générale à la transformée de Fourier d'un signal rectangulaire, et vaut

$$\int_{-L_A}^{+L_A} dx_m e^{i[(k_{ix} - k_{sx}) + \gamma_A(k_{iz} - k_{sz})]x_m} = 2L_A \text{sinc} \{[(k_{ix} - k_{sx}) + \gamma_A(k_{iz} - k_{sz})]L_A\}, \quad (2.39)$$

où sinc représente la fonction sinus cardinal. La longueur de la surface peut être considérée grande devant sa longueur de corrélation¹³, $L_A \gg L_c$, ainsi les bornes d'intégration sur la

¹³Cette condition est généralement vraie pour une surface stationnaire. En effet, pour qu'une surface puisse être considérée comme stationnaire, elle doit être de longueur suffisamment grande devant la longueur de corrélation pour qu'il y ait équivalence entre les descriptions spatiale et statistique.

variable x_m peut être considérées infinies, $x_m \in]-\infty; +\infty[$. Alors, l'intégration devient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_m e^{i[(k_{ix}-k_{sx})+\gamma_A(k_{iz}-k_{sz})]x_m} = 2\pi \delta[(k_{ix}-k_{sx})+\gamma_A(k_{iz}-k_{sz})], \quad (2.40)$$

où δ représente la fonction de Dirac, et γ_A la pente de la surface au point A . La puissance diffusée par la surface s'écrit alors respectivement en réflexion et transmission par

$$\frac{p_r}{|E_0|^2} = \frac{L_A |f_r(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r)|^2}{R} \left\langle S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r | \gamma_r) \delta[(\hat{k}_{ix} - \hat{k}_{rx}) + \gamma_A(\hat{k}_{iz} - \hat{k}_{rz})] \right\rangle_{\gamma_A}, \quad (2.41a)$$

$$\frac{p_t}{|E_0|^2} = \frac{L_A |f_t(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t)|^2}{R} \left\langle S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t | \gamma_t) \delta[(k_{ix}/k_2 - \hat{k}_{tx}) + \gamma_A(k_{iz}/k_2 - \hat{k}_{tz})] \right\rangle_{\gamma_A}, \quad (2.41b)$$

car $\delta(ax) = 1/|a|\delta(x)$, avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. La fonction δ peut encore se simplifier en utilisant, respectivement en réflexion et transmission, la relation

$$\delta[(\hat{k}_{ix} - \hat{k}_{rx}) + \gamma_A^{(r)}(\hat{k}_{iz} - \hat{k}_{rz})] = \frac{1}{|\hat{k}_{rz} - \hat{k}_{iz}|} \delta\left(\gamma_A^{(r)} + \frac{k_{rx} - k_{ix}}{k_{rz} - k_{iz}}\right), \quad (2.42a)$$

$$\delta[(k_{ix}/k_2 - \hat{k}_{tx}) + \gamma_A^{(t)}(k_{iz}/k_2 - \hat{k}_{tz})] = \frac{1}{|\hat{k}_{tz} - \frac{k_1}{k_2}\hat{k}_{iz}|} \delta\left(\gamma_A^{(t)} + \frac{k_{tx} - k_{ix}}{k_{tz} - \hat{k}_{iz}}\right). \quad (2.42b)$$

On retrouve alors les expressions des pentes sous l'APS

$$\gamma_A^{(r)} \equiv \gamma^{0(r)} = -\frac{k_{rx} - k_{ix}}{k_{rz} - k_{iz}}, \quad (2.43a)$$

$$\gamma_A^{(t)} \equiv \gamma^{0(t)} = -\frac{k_{tx} - k_{ix}}{k_{tz} - k_{iz}}. \quad (2.43b)$$

La pente $\gamma \equiv \gamma^0$ intervenant dans le calcul est fixée par les vecteurs d'ondes incident et diffracté : elle n'est donc plus une variable aléatoire, et la moyenne statistique, qui a lieu sur le terme de pente dans les équations (2.41a, 2.41b), est égale à la densité de probabilité des pentes $p_s(\gamma^0)$. Alors, en utilisant la relation (2.29), le coefficient de diffusion respectivement en réflexion et en transmission s'exprime par

$$\sigma_r(\mathbf{K}_r, \mathbf{K}_i) = \frac{1}{\cos \theta_i} |f_r(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r)|^2 \frac{p_s(\gamma^{0(r)})}{|\hat{k}_{rz} - \hat{k}_{iz}|} S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r | \gamma^{0(r)}), \quad (2.44a)$$

$$\sigma_t(\mathbf{K}_t, \mathbf{K}_i) = \frac{\eta_1}{\eta_2} \frac{1}{\cos \theta_i} |f_t(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t)|^2 \frac{p_s(\gamma^{0(t)})}{|\hat{k}_{tz} - \frac{k_1}{k_2}\hat{k}_{iz}|} S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t | \gamma^{0(t)}). \quad (2.44b)$$

Les milieux Ω_1 et Ω_2 étant des milieux diélectriques non magnétiques et sans pertes, le rapport des impédances d'onde vaut $\eta_1/\eta_2 = \sqrt{\epsilon_{r2}/\epsilon_{r1}}$. Reste à déterminer les probabilités S_{11} et S_{12} , appelées plus communément fonctions d'ombre statistiques bistatiques, respectivement en réflexion et en transmission.

2.2.3 Calcul des fonctions d'ombre bistatiques en réflexion et transmission

Avant de s'intéresser à la fonction d'ombre bistatique, rappelons l'obtention de la fonction d'ombre monostatique, dans un milieu situé au-dessus ou en-dessous de la surface. Ensuite, nous exposerons la fonction d'ombre bistatique en réflexion et en transmission. L'expression de la fonction d'ombre bistatique en transmission n'a, à notre connaissance, jamais été établie de manière rigoureuse. Une expression a été donnée par quelques rares auteurs [43] sans aucune justification. Ceci constitue l'originalité de ce travail, dans lequel nous nous efforçons d'établir cette fonction d'ombre de manière rigoureuse, à partir de considérations physiques.

2.2.3.1 Fonctions d'ombre monostatiques

Différents auteurs ont établi des formulations différentes de la fonction d'ombre statistique monostatique S_1 dans le milieu incident Ω_1 en un point A de la surface pour une direction d'incidence ou de diffusion $\hat{\mathbf{K}}_1$. Citons principalement Wagner [150] et Smith [151, 152]. Bourlier et al. ont montré [148] que l'approche de Smith est la plus exacte. C'est elle qui sera utilisée dans toute la suite. La fonction d'ombre statistique monostatique représente la probabilité que le rayon incident ou diffusé de direction $\hat{\mathbf{K}}_1$ (et d'angle associé θ_1) dans le milieu Ω_1 n'intercepte pas la surface avant de l'atteindre au point A (de coordonnées $\mathbf{R}_A = (x_A, \zeta_A)$) considéré. Cette probabilité est conditionnée à la hauteur et à la pente de la surface au point A considéré, et définie pour une surface de statistique paire¹⁴ comme suit :

$$S_1(\mathbf{K}_1|\zeta_A, \gamma_A) = \Upsilon(\mu_1 - \gamma_A) [P_h(\zeta_A) - P_h(-\infty)]^{\Lambda(\mu_1)}, \quad (2.45)$$

où

$$P_h = \int p_h(\zeta) d\zeta, \quad (2.46a)$$

$$\Lambda(\mu_1) = \frac{1}{\mu_1} \int_{\mu_1}^{+\infty} (\gamma - \mu_1) p_s(\gamma) d\gamma, \quad \text{avec } \mu_1 = |\cot \theta_1|, \quad (2.46b)$$

$$\Upsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (2.46c)$$

θ_1 est l'angle d'incidence (θ_i tel que $\theta_i \in [-\pi/2; 0]$ pour des angles orientés) ou de diffusion ($\theta_d \in [-\pi/2; +\pi/2]$), avec $\mu_1 = |\cot \theta_1|$ la valeur absolue de la pente associée. P_h est une primitive de la distribution des hauteurs p_h , p_s la distribution des pentes, et Υ la fonction de Heaviside.

Dans l'équation (2.45), le terme $[P_h(\zeta_A) - P_h(-\infty)]^{\Lambda(\mu_1)}$ ¹⁵ opère une restriction sur la hauteur de la surface ζ_A . Le terme $[P_h(\zeta_A) - P_h(-\infty)]$ tend vers 1 lorsque le point A est situé à une altitude ζ_A élevée ($\zeta_A \rightarrow +\infty$), et la fonction d'ombre est alors maximale c'est-à-dire que le phénomène d'ombrage est faible. En effet, plus le point A est élevé, moins la probabilité qu'une onde incidente ou diffusée dans le milieu supérieur Ω_1 traverse la surface avant de l'atteindre en A est importante. A l'inverse, ce terme tend vers 0 lorsque le point A est situé à une altitude ζ_A basse ($\zeta_A \rightarrow -\infty$), et la fonction d'ombre tend vers 0 également c'est-à-dire que le phénomène d'ombrage est maximal. En effet, plus le point A est bas, plus la probabilité qu'une onde incidente ou diffusée dans le milieu supérieur Ω_1 traverse la surface avant de l'atteindre en A est importante. Ceci est illustré sur la figure de gauche 2.7, dans laquelle le point A' d'altitude plus basse que celle de A , est dans l'ombre du faisceau de pente μ_1 .

De plus, la fonction de répartition $[P_h(\zeta_A) - P_h(-\infty)]$ est pondérée par le terme $\Lambda(\mu_1)$ qui prend en compte les pentes γ de la surface supérieures à la pente absolue μ_1 de l'onde de direction $\hat{\mathbf{K}}_1$. Lorsque $\mu_1 \rightarrow 0$ (correspondant à un angle rasant), la fonction $\Lambda(\mu_1) \rightarrow +\infty$, donc $S_1 \rightarrow 0$ (car $0 \leq P_h(\zeta_A) - P_h(-\infty) \leq 1$) : l'ombrage est maximal. A l'inverse, lorsque $\mu_1 \rightarrow +\infty$ (correspondant à un angle nul), la fonction $\Lambda(\mu_1) \rightarrow 0$, donc $S_1 \rightarrow 1$: l'ombrage est nul. Ainsi, cette fonction traduit le fait que pour un point donné A de la surface, plus la pente absolue du faisceau de l'onde considérée est faible, plus il y a, statistiquement, de l'ombre. Ceci est illustré sur la figure de droite de (2.7), dans laquelle le faisceau de pente μ'_1 plus faible que le faisceau de pente μ_1 induit un ombrage plus important.

¹⁴c'est-à-dire de densité de probabilité paire

¹⁵qui traduit une modification de la distribution des hauteurs illuminées $p_h^{ill}(\zeta_A)$ telle que $p_h^{ill}(\zeta_A) = p_h(\zeta_A) [P_h(\zeta_A) - P_h(-\infty)]^{\Lambda(\mu_1)}$

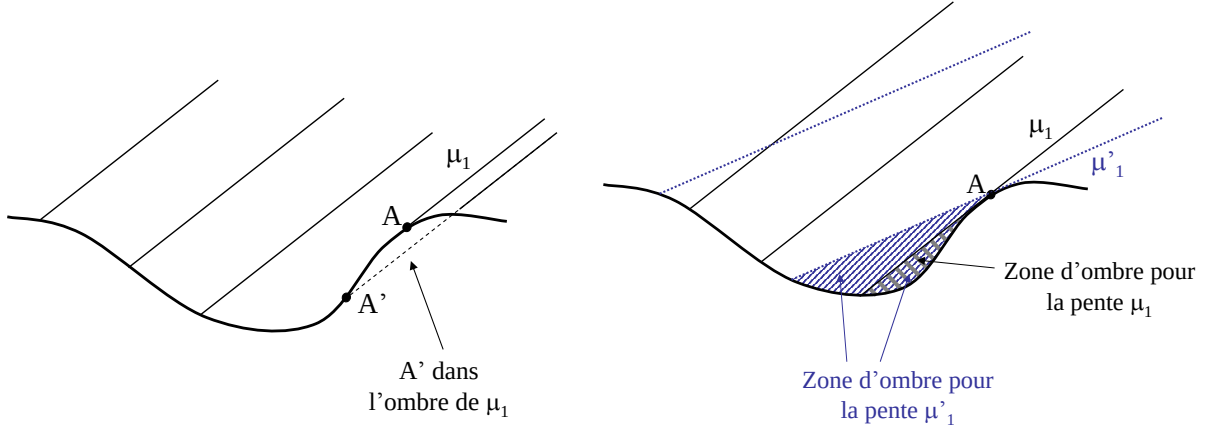


FIG. 2.7 – Influence de la hauteur du point A (figure de gauche) et de la pente du faisceau μ_1 (figure de droite) sur le phénomène d'ombrage (ombrage de propagation) de la surface rugueuse.

Globalement, le terme $[P_h(\zeta_A) - P_h(-\infty)]^{\Lambda(\mu_1)}$ traduit le phénomène d'ombrage dit *ombrage de propagation* [153, 52]. Il est dû au fait que, pour un angle d'incidence ou de diffusion non nul, comme la surface est rugueuse, certains points de cette surface peuvent ne pas être illuminés directement par l'onde incidente ou vus directement par l'onde diffusée. C'est-à-dire directement, sans avoir traversé la surface préalablement.

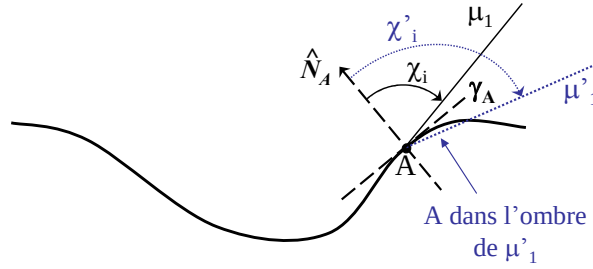
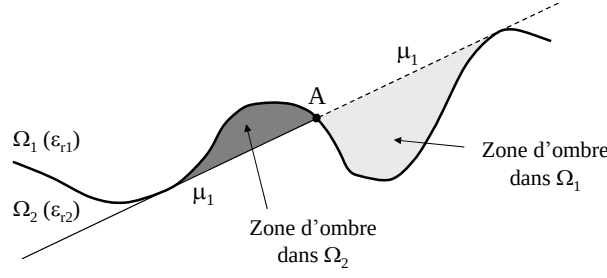
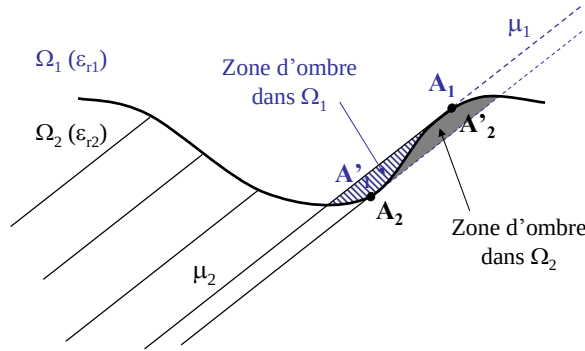


FIG. 2.8 – Phénomène d'ombrage angulaire de la surface rugueuse

Le terme $\Upsilon(\mu_1 - \gamma_A)$ traduit la condition que la valeur absolue μ_1 de la pente de l'onde incidente ou diffusée doit être supérieure à la pente de la surface γ_A , pour que l'onde puisse contribuer aux champ diffusé. Cette fonction opère donc une restriction sur la pente de la surface γ_A . Elle traduit le phénomène d'ombrage dit *ombrage angulaire* [153, 52]. Ceci est illustré sur la figure 2.8, dans laquelle le faisceau de pente μ'_1 inférieure à la pente γ_A de la surface au point A traverse la surface avant d'atteindre le point A . Ce point est donc dans l'ombre du faisceau de pente $\mu'_1 < \gamma_A$. En d'autres termes, il est dû au fait qu'en un point donné de la surface, compte tenu de la pente locale de la surface au point considéré (plan tangent) et de l'angle d'incidence ou de diffusion, l'angle local d'incidence ou de diffusion peut être supérieur à $\pi/2$ en valeur absolue. Ceci étant physiquement impossible, il est donc nécessaire de ne pas prendre en compte ces points.

La fonction d'ombre statistique monostatique $S_2(\mathbf{K}_2|\zeta_A, \gamma_A)$ à l'intérieur du milieu Ω_2 en un point A de la surface résulte de l'interaction d'une onde de direction $\hat{\mathbf{K}}_2$ avec la surface Σ_A , qui sépare les milieux supérieur Ω_1 et inférieur Ω_2 . Ainsi, comme la fonction d'ombre est basée sur


 FIG. 2.9 – Différence entre l’ombrage dans le milieu supérieur Ω_1 et le milieu inférieur Ω_2 .

 FIG. 2.10 – Influence de la hauteur du point A sur le phénomène d’ombrage de la surface rugueuse : différence entre l’ombrage dans le milieu supérieur Ω_1 et le milieu inférieur Ω_2 .

des considérations géométriques, on peut observer que la différence majeure entre S_2 et S_1 est que la surface est “vue” de l’onde de direction $\hat{\mathbf{K}}_2$ par en-dessous, et non plus par au-dessus. Cela revient à opérer une symétrie axiale autour de l’axe $z = 0$ de la surface rugueuse. En d’autres termes, les points de la surface qui sont concernés dans la fonction d’ombre ne sont plus $\zeta \in]-\infty; \zeta_A]$, mais $\zeta \in [\zeta_A; +\infty[$. Ceci est illustré sur la figure 2.9 : dans le milieu Ω_1 , le point A'_1 d’altitude plus **basse** que celle de A_1 est dans l’ombre du faisceau μ_1 ; tandis que dans le milieu Ω_2 , le point A'_2 (égal à A_1) d’altitude plus **élevée** que celle de A_1 (égal à A'_1) est dans l’ombre du faisceau μ_2 (égal à μ_1). On pourra remarquer que les conditions sur les pentes de la surface sont les mêmes pour une surface de statistique paire. Alors, la fonction d’ombre statistique monostatique S_2 dans le milieu inférieur s’écrit

$$S_2(\mathbf{K}_2|\zeta_A, \gamma_A) = \Upsilon(\mu_2 - \gamma_A) \left\{ 1 - [P_h(\zeta_A) - P_h(-\infty)] \right\}^{\Lambda(\mu_2)}, \quad (2.47)$$

où $\mu_2 = |\cot \theta_2|$ est la pente absolue de l’onde de direction $\hat{\mathbf{K}}_2$ et d’angle associé θ_2 ($\theta_2 \in [-\pi/2; +\pi/2]$).

De manière générale, on peut trouver dans la littérature une dénomination différente de la fonction d’ombre monostatique selon que l’onde associée est l’onde incidente, ou alors l’onde réfléchie ou transmise. Afin de faire cette distinction, cette fonction peut être appelée *fonction d’ombrage* pour le cas de l’ombrage de la surface par l’onde incidente de direction $\hat{\mathbf{K}}_i$, et *fonction de masquage* pour le cas de l’ombrage (ou masquage) de la surface par l’onde réfléchie de direction $\hat{\mathbf{K}}_r$ ou transmise de direction $\hat{\mathbf{K}}_t$ [154]. Sur la figure 2.6, l’ombrage par l’onde incidente est en gris, le masquage par l’onde réfléchie en gris clair, et le masquage par l’onde transmise en gris foncé.

2.2.3.2 Fonctions d'ombre bistatiques

- Fonction d'ombre en réflexion S_{11}

La fonction d'ombre statistique bistatique dans le cas de la réflexion d'une onde de direction $\hat{\mathbf{K}}_i$ par un milieu Ω_1 sur un milieu Ω_2 dans la direction de réflexion $\hat{\mathbf{K}}_r$ a été exprimée par Bourlier et al. [148]. Pour le cas d'une réflexion simple dans le milieu Ω_1 , l'expression de S_{11} est donnée dans la convention d'angles orientés ($\theta_i \in [-\pi/2; 0]$, voir figure 2.11) par

$$S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r | \zeta_A, \gamma_A) = \begin{cases} S_1(\mathbf{K}_r | \zeta_A, \gamma_A) & \text{si } \theta_r \in [-\pi/2; \theta_i[\\ S_1(\mathbf{K}_i | \zeta_A, \gamma_A) & \text{si } \theta_r \in [\theta_i; 0[\\ S_1(\mathbf{K}_i | \zeta_A, \gamma_A) S_1(\mathbf{K}_r | \zeta_A, \gamma_A) & \text{si } \theta_r \in [0; +\pi/2] \end{cases}, \quad (2.48)$$

où $\mathbf{K}_{i,r}$ sont les vecteurs d'ondes incident et réfléchi, avec $\mu_{i,r} = |\cot \theta_{i,r}|$ les pentes absolues des angles d'incidence ($\theta_i \in [-\pi/2; 0]$) et de réflexion ($\theta_r \in [-\pi/2; +\pi/2]$). S_1 dénote la fonction d'ombre statistique monostatique (définie précédemment) dans le milieu Ω_1 , qui est situé au-dessus de la surface rugueuse Σ_A .

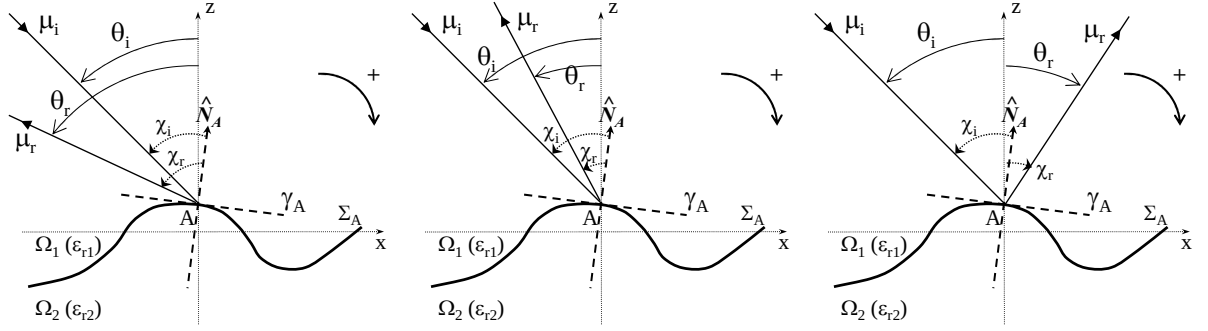


FIG. 2.11 – Configurations de la fonction d'ombre bistatique en réflexion : à gauche $\theta_r \in [-\pi/2; \theta_i[$, au centre $\theta_r \in [\theta_i; 0[$, et à droite $\theta_r \in [0; +\pi/2]$.

Ainsi, l'expression de la fonction d'ombre statistique bistatique S_{11} d'une onde réfléchie sur Σ_A est

$$S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r | \zeta_A, \gamma_A) = \begin{cases} \Upsilon(\mu_r - \gamma_A) [P_h(\zeta_A) - P_h(-\infty)]^{\Lambda(\mu_r)} & \text{si } \theta_r \in [-\pi/2; \theta_i[\\ \Upsilon(\mu_i - \gamma_A) [P_h(\zeta_A) - P_h(-\infty)]^{\Lambda(\mu_i)} & \text{si } \theta_r \in [\theta_i; 0[\\ \Pi(\gamma_A) [P_h(\zeta_A) - P_h(-\infty)]^{\Lambda(\mu_i) + \Lambda(\mu_r)} & \text{si } \theta_r \in [0; +\pi/2] \end{cases}, \quad (2.49)$$

où

$$\Pi(\gamma_A) = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma_A \in [-\mu_i; +\mu_r] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (2.50)$$

A partir de l'équation (2.49), la restriction sur la pente γ_A implique respectivement que $\gamma_A \in [-\mu_r; +\infty[$, $\gamma_A \in [-\mu_i; +\infty[$, et $\gamma_A \in [-\mu_i; +\mu_r]$. Ceci est similaire dans la figure 2.11 à avoir la condition suivante sur l'angle local d'incidence χ_i : $|\chi_i| < \pi/2$, où $\chi_i = \theta_i - \chi_A (= \chi_A - \theta_r)$, dans laquelle $\chi_A = -\arctan \gamma_A$ dénote l'angle selon l'axe $\hat{\mathbf{z}}$ correspondant à la pente de la surface au point A .

Alors, en utilisant l'approximation de la phase stationnaire (APS), le plan tangent local à la surface au point A est obtenu à partir des vecteurs d'onde incident $\mathbf{K}_i$ et réfléchi $\mathbf{K}_r$ en utilisant l'équation de la pente locale de la surface $\gamma_A \equiv \gamma^{0(r)}$ (2.43a). Cette équation est équivalente, pour une convention d'angles orientés, à $\chi^{0(r)} \equiv -\arctan \gamma^{0(r)} = (\theta_i + \theta_r)/2$ (A.10), ce qui donne

$\chi_i^{0(r)} = (\theta_i - \theta_r)/2$. Ainsi, $\chi_i^{0(r)}$ est sous l'APS toujours compris entre $-\pi/2$ et $+\pi/2$, puisque $\theta_i \in]-\pi/2; 0]$ et $\theta_r \in]-\pi/2; +\pi/2]$ (remarquons que plus précisément, $\chi_i^{0(r)} \in]-\pi/2; +\pi/4]$). Avec cette approximation, la fonction d'ombre bistatique en réflexion S_{11} est indépendante du plan tangent local (ou de la pente locale), et devient alors

$$S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r | \zeta_A, \gamma^{0(r)}) = \begin{cases} [P_h(\zeta_A) - P_h(-\infty)]^{\Lambda(\mu_r)} & \text{si } \theta_r \in [-\pi/2; \theta_i[\\ [P_h(\zeta_A) - P_h(-\infty)]^{\Lambda(\mu_i)} & \text{si } \theta_r \in [\theta_i; 0[\\ [P_h(\zeta_A) - P_h(-\infty)]^{\Lambda(\mu_i) + \Lambda(\mu_r)} & \text{si } \theta_r \in [0; +\pi/2] \end{cases}, \quad (2.51)$$

Ainsi, la seule variable aléatoire dans l'équation de la fonction d'ombre statistique en réflexion (2.51) est ζ_A , et la fonction d'ombre *moyennée* $S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r | \gamma^{0(r)})$ est donnée par

$$S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r | \gamma^{0(r)}) = \left\langle S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r | \zeta_A, \gamma^{0(r)}) \right\rangle_{\zeta_A}, \quad (2.52)$$

ce qui donne pour un processus *quelconque* [148]

$$S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r | \gamma^{0(r)}) = \begin{cases} 1/[1 + \Lambda(\mu_r)] & \text{si } \theta_r \in [-\pi/2; \theta_i[\\ 1/[1 + \Lambda(\mu_i)] & \text{si } \theta_r \in [\theta_i; 0[\\ 1/[1 + \Lambda(\mu_i) + \Lambda(\mu_r)] & \text{si } \theta_r \in [0; +\pi/2] \end{cases}, \quad (2.53)$$

où Λ est donné par l'équation (2.46b).

• Fonction d'ombre en transmission S_{12}

De la même manière pour la fonction d'ombre bistatique en transmission S_{12} que pour celle en réflexion S_{11} , la fonction d'ombre bistatique correspondant à la transmission d'une onde du milieu Ω_1 dans la direction d'incidence $\hat{\mathbf{K}}_i$ vers le milieu Ω_2 dans la direction de transmission $\hat{\mathbf{K}}_t$ est obtenue par

$$S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t | \zeta_A, \gamma_A) = S_1(\mathbf{K}_i | \zeta_A, \gamma_A) S_2(\mathbf{K}_t | \zeta_A, \gamma_A) \quad \forall \theta_i \in [-\pi/2; 0], \forall \theta_t \in [-\pi/2; +\pi/2]. \quad (2.54)$$

Ainsi, l'expression de la fonction d'ombre statistique bistatique S_{12} d'une onde transmise du milieu Ω_1 vers le milieu Ω_2 à travers Σ_A est donnée par

$$S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t | \zeta_A, \gamma_A) = \begin{cases} \Upsilon(\mu_t - \gamma_A) [P_h(\zeta_A) - P_h(-\infty)]^{\Lambda(\mu_i)} \{1 - [P_h(\zeta_A) - P_h(-\infty)]\}^{\Lambda(\mu_t)} & \text{si } \theta_t \in [-\pi/2; \theta_i[\\ \Upsilon(\mu_i - \gamma_A) [P_h(\zeta_A) - P_h(-\infty)]^{\Lambda(\mu_i)} \{1 - [P_h(\zeta_A) - P_h(-\infty)]\}^{\Lambda(\mu_t)} & \text{si } \theta_t \in [\theta_i; 0[\\ \Pi(\gamma_A) [P_h(\zeta_A) - P_h(-\infty)]^{\Lambda(\mu_i)} \{1 - [P_h(\zeta_A) - P_h(-\infty)]\}^{\Lambda(\mu_t)} & \text{si } \theta_t \in [0; +\pi/2] \end{cases}. \quad (2.55)$$

De même que pour S_{11} , sous l'APS, la fonction d'ombre en transmission S_{12} est indépendante de la pente locale γ_A de la surface. Cette pente $\gamma_A \equiv \gamma^{0(t)}$ est donnée par l'équation (2.43b). L'expression de S_{12} devient alors

$$S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t | \zeta_A, \gamma^{0(t)}) = [P_h(\zeta_A) - P_h(-\infty)]^{\Lambda(\mu_i)} \{1 - [P_h(\zeta_A) - P_h(-\infty)]\}^{\Lambda(\mu_t)} \quad \forall \theta_t \in [-\pi/2; +\pi/2]. \quad (2.56)$$

Ainsi, la seule variable aléatoire dans l'équation de la fonction d'ombre statistique en transmission (2.56) est ζ_A , et la fonction d'ombre *moyennée* $S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t | \gamma^{0(t)})$ est donnée par

$$S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t | \gamma^{0(t)}) = \left\langle S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t | \zeta_A, \gamma^{0(t)}) \right\rangle_{\zeta_A}, \quad (2.57)$$

ce qui donne pour un processus *quelconque* [149]

$$S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t | \gamma^{0(t)}) = B[1 + \Lambda(\mu_i), 1 + \Lambda(\mu_t)], \quad (2.58)$$

où $B(p, q)$ est la fonction Bêta, appelée aussi intégrale eulérienne de première espèce.

2.2.3.3 Comparaison entre les fonctions d'ombre en réflexion et en transmission

Afin d'illustrer les différences entre la fonction d'ombre en réflexion et celle en transmission, considérons un processus gaussien. Dans ce cas, la fonction Λ est définie par

$$\begin{aligned} \Lambda(\mu_a) &= \frac{1}{2v_a\sqrt{\pi}} [\exp(-v_a^2) - v_a\sqrt{\pi} \operatorname{erfc}(v_a)] \\ &= \frac{\exp(-v_a^2)}{2v_a\sqrt{\pi}} - \frac{\operatorname{erfc}(v_a)}{2}, \end{aligned} \quad (2.59)$$

avec erfc la fonction erreur complémentaire définie par

$$\operatorname{erfc}(v_a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{v_a}^{+\infty} e^{-u^2} du, \quad (2.60)$$

où $v_a = \mu_a/(\sigma_s\sqrt{2})$, avec σ_s l'écart type des pentes de la surface, et $a \equiv \{i, r, t\}$ respectivement pour une onde incidente, réfléchie, ou transmise. La figure 2.12 illustre une comparaison entre S_{11} , donnée par l'équation (2.53), et S_{12} , donnée par l'équation (2.58), pour $\theta_i = -80^\circ$ et $\sigma_s = 0.3$. Nous pouvons remarquer une différence faible en diffusion avant ($\theta_s > 0$), mais une différence significative en diffusion arrière ($\theta_s < 0$) pour des angles rasants.

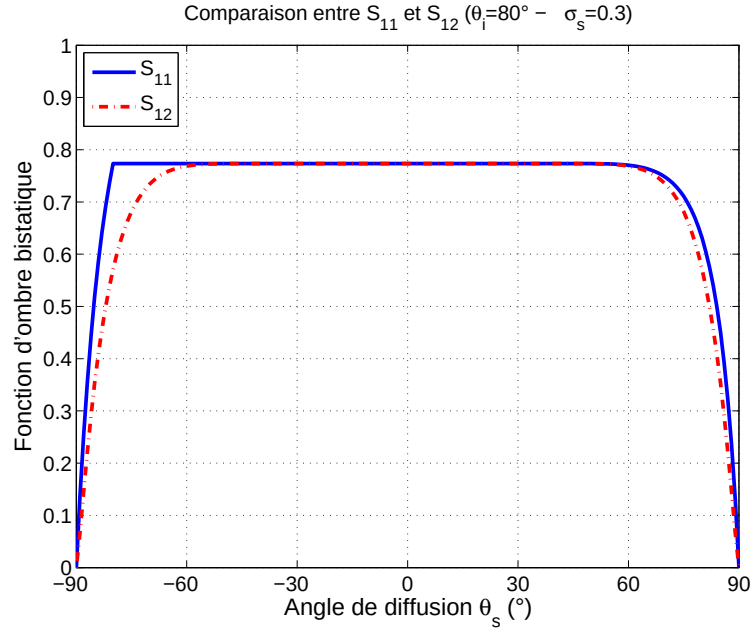


FIG. 2.12 – Comparaison entre la fonction d'ombre bistatique en réflexion S_{11} et en transmission S_{12} , pour un angle d'incidence $\theta_i = -80^\circ$ et un écart type des pentes $\sigma_s = 0.3$.

Dans la littérature, nous avons trouvé très peu d'articles traitant de la fonction d'ombre en transmission S_{12} . A notre connaissance, seuls Fung et al. [125] et surtout Tsang et al. [43] ont

très succinctement évoqué ce cas de figure. Ces derniers donnent sans justification l'expression de S_{12}^T suivante

$$S_{12}^T(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t | \gamma^{0(t)}) = 1 / [1 + \Lambda(\mu_i) + \Lambda(\mu_t)]. \quad (2.61)$$

Cette expression est différente de celle proposée ici. Une comparaison avec un calcul exact de la fonction d'ombre en transmission par un processus de Monte-Carlo permettra de voir si l'une ou l'autre expression est acceptable ou non.

Des simulations ont été effectuées sur la fonction d'ombre moyennée sur les hauteurs et les pentes, en réflexion $S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r)$ et en transmission $S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t)$. La fonction d'ombre monostatique moyennée sur les hauteurs et les pentes (l'APS n'est pas appliquée) en réflexion $S_1(\mathbf{K}_i)$ est exprimée par [148]

$$S_1(\mathbf{K}_i) = \frac{1}{[1 + \Lambda(\mu_i)]} \frac{1 + \operatorname{erf}(v_i)}{2}, \quad (2.62)$$

avec erf la fonction erreur définie par

$$\operatorname{erf}(v_a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{v_a} e^{-u^2} du. \quad (2.63)$$

De même, la fonction d'ombre bistatique moyennée sur les hauteurs et les pentes (l'APS n'est pas appliquée) en réflexion $S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r)$ est exprimée par

$$S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r) = \begin{cases} \frac{1}{[1 + \Lambda(\mu_r)]} \frac{1 + \operatorname{erf}(v_r)}{2} & \text{si } \theta_r \in [-\pi/2; \theta_i[\\ \frac{1}{[1 + \Lambda(\mu_i)]} \frac{1 + \operatorname{erf}(v_i)}{2} & \text{si } \theta_r \in [\theta_i; 0[\\ \frac{1}{[1 + \Lambda(\mu_i) + \Lambda(\mu_r)]} \frac{\operatorname{erf}(v_i) + \operatorname{erf}(v_r)}{2} & \text{si } \theta_r \in [0; +\pi/2] \end{cases} \quad (2.64)$$

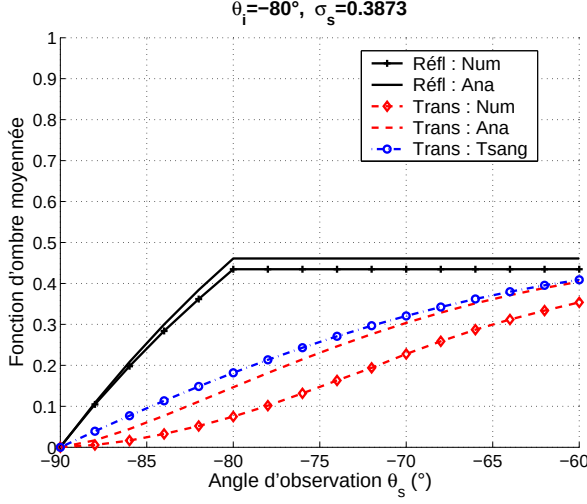
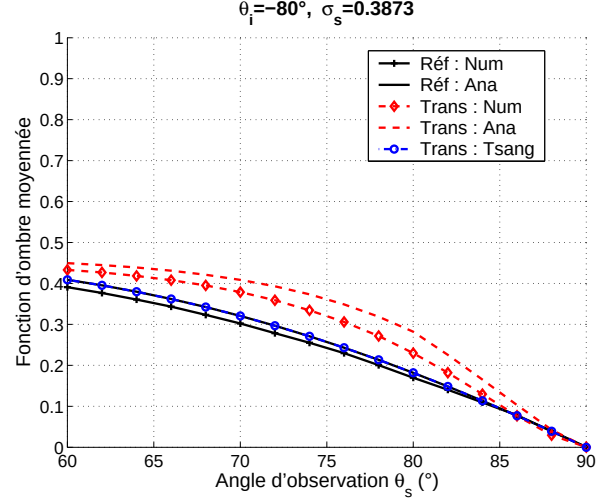
Ainsi, la restriction sur les pentes étant la même en réflexion qu'en transmission, la fonction d'ombre bistatique moyennée sur les hauteurs et les pentes (l'APS n'est pas appliquée) en transmission $S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t)$ est exprimée par

$$S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t) = \begin{cases} B[1 + \Lambda(\mu_i), 1 + \Lambda(\mu_t)] \frac{1 + \operatorname{erf}(v_t)}{2} & \text{si } \theta_t \in [-\pi/2; \theta_i[\\ B[1 + \Lambda(\mu_i), 1 + \Lambda(\mu_t)] \frac{1 + \operatorname{erf}(v_i)}{2} & \text{si } \theta_t \in [\theta_i; 0[\\ B[1 + \Lambda(\mu_i), 1 + \Lambda(\mu_t)] \frac{\operatorname{erf}(v_i) + \operatorname{erf}(v_t)}{2} & \text{si } \theta_t \in [0; +\pi/2] \end{cases}, \quad (2.65)$$

et en suivant l'expression de Tsang, cette fonction d'ombre S_{12}^T s'exprime alors par

$$S_{12}^T(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t) = \begin{cases} \frac{1}{[1 + \Lambda(\mu_i) + \Lambda(\mu_t)]} \frac{1 + \operatorname{erf}(v_t)}{2} & \text{si } \theta_t \in [-\pi/2; \theta_i[\\ \frac{1}{[1 + \Lambda(\mu_i) + \Lambda(\mu_t)]} \frac{1 + \operatorname{erf}(v_i)}{2} & \text{si } \theta_t \in [\theta_i; 0[\\ \frac{1}{[1 + \Lambda(\mu_i) + \Lambda(\mu_t)]} \frac{\operatorname{erf}(v_i) + \operatorname{erf}(v_t)}{2} & \text{si } \theta_t \in [0; +\pi/2] \end{cases} \quad (2.66)$$

Les résultats de simulation permettent de comparer d'une part la fonction d'ombre bistatique en réflexion utilisant l'approche de Smith [152] avec une méthode de référence basée sur un


 FIG. 2.13 – Fonctions d'ombre moyennées : détail pour $\theta_s \in [-90^\circ; -60^\circ]$

 FIG. 2.14 – Fonctions d'ombre moyennées : détail pour $\theta_s \in [+60^\circ; +90^\circ]$

processus de Monte-Carlo. D'autre part, la fonction d'ombre bistatique en transmission exposée ici [149] et celle exposée par Tsang et al. [43] sont étudiées par comparaison avec un méthode de référence basée sur un processus de Monte-Carlo.

Les figures 2.13 et 2.14 montrent les fonctions d'ombre bistatiques moyennées (en réflexion et transmission) en fonction de l'angle d'observation θ_s ($\theta_s \equiv \theta_r$ en réflexion, et $\theta_s \equiv \theta_t$ en transmission), pour un angle d'incidence $\theta_i = -80^\circ$ et un écart type des pentes de la surface $\sigma_s = \sqrt{0.15} \simeq 0.3873$. La fonction d'ombre en réflexion calculée par un processus de Monte-Carlo (dite numérique) est représentée par une ligne continue associée à une croix noire, et celle analytique donnée par l'équation (2.64) est représentée par une ligne continue noire. La fonction d'ombre en transmission dite numérique est représentée par une ligne discontinue associée à des losanges rouge; celle analytique exposée ici et donnée par l'équation (2.65) par une ligne discontinue rouge, et celle analytique développée par Tsang et donnée par l'équation (2.66) par une ligne en traits-points cerclée bleue.

La figure 2.13 montre un détail des fonctions d'ombre en diffusion arrière ($\theta_s < 0$), pour les angles d'observation $\theta_s \in [-90^\circ; -60^\circ]$. Pour le cas de la réflexion, nous pouvons remarquer que la fonction d'ombre analytique (utilisant l'approche de Smith) surévalue légèrement la fonction d'ombre numérique. Ceci concorde avec des résultats de la littérature qui ont montré que la formulation de la fonction d'ombre utilisant l'approche de Smith surévalue la fonction d'ombre numérique [148]. De même, pour le cas de la transmission, les deux fonctions d'ombre analytiques (utilisant toutes deux l'approche de Smith mais ayant une formulation différente) surévaluent la fonction d'ombre numérique. Ceci semble cohérent avec le cas de la réflexion. De plus, la fonction d'ombre analytique exposée ici donne de meilleurs résultats que celle exposée par Tsang et al.

La figure 2.14 montre un détail des fonctions d'ombre en diffusion avant ($\theta_s > 0$), pour les angles d'observations $\theta_s \in [+60^\circ; +90^\circ]$. Pour le cas de la réflexion, les mêmes conclusions que pour la figure 2.13 peuvent être tirées. Pour le cas de la transmission, la fonction d'ombre analytique exposée ici surévalue la fonction d'ombre numérique comme en diffusion arrière, ce qui semble cohérent puisque l'approche de Smith est utilisée. En revanche, la fonction d'ombre analytique exposée par Tsang et al. sous-évalue la fonction d'ombre numérique. Elle est égale à la fonction d'ombre en réflexion analytique, puisque les deux formulations sont identiques en

diffusion avant.

Ajoutons que malgré ces différences non négligeables pour des écarts types des pentes élevés et des angles d'incidence rasants, les fonctions d'ombre analytiques donnent, dans le domaine de validité de l'AK du premier ordre réduite à l'AOG, de très bons résultats comparativement aux fonctions d'ombre numériques. De plus, les différences entre la fonction d'ombre en transmission exposée ici et celle exposée par Tsang et al. sont négligeables dans ce cas de figure.

2.3 Propriétés générales et conservation d'énergie du modèle bidimensionnel

2.3.1 Propriétés générales du modèle

En référence à la section sur les propriétés générales du problème de diffusion, voyons quelles propriétés vérifie l'AK réduite à l'AOG en réflexion et transmission.

Ce modèle vérifie, par construction, l'invariance de phase et l'invariance de tilt. De plus, l'amplitude de l'onde diffractée en réflexion, donnée par l'équation (2.28a), vérifie la réciprocité, puisque

$$f_r(\mathbf{K}_r, \mathbf{K}_i) = f_r(-\mathbf{K}_i, -\mathbf{K}_r). \quad (2.67)$$

De même, elle vaut a priori pour le coefficient de diffusion. Cependant, cela dépend de la définition choisie. Ici, la réciprocité du coefficient de diffusion en réflexion donné par l'équation (2.44a), s'écrit

$$\cos \theta_i \sigma_r(\mathbf{K}_r, \mathbf{K}_i) = \cos \theta_r \sigma_r(-\mathbf{K}_i, -\mathbf{K}_r). \quad (2.68)$$

Une conséquence de la réciprocité est la symétrie, pour une incidence normale $\theta_i = 0^\circ$, de l'amplitude de l'onde diffractée et du coefficient de diffusion par rapport à l'angle de diffraction $\theta_s = 0^\circ$ (pour une surface de statistique paire). Cette propriété de l'onde diffractée en réflexion est aussi vérifiée par l'onde diffractée en transmission.

D'autres propriétés du modèle peuvent être mises en évidence : ce modèle asymptotique a l'avantage d'être rapide à calculer numériquement. En effet, les expressions de l'amplitude de l'onde diffractée (2.28a) et (2.28b) font intervenir une seule intégration numérique. Le calcul est donc très rapide. Il est également stable numériquement et facile à implémenter. De plus, sous l'AOG, les formules statistiques se simplifient grandement, puisque les expressions du coefficient de diffusion (2.44a) et (2.44b), ne font intervenir aucune intégration numérique. Le calcul est donc presque immédiat ; il est stable numériquement et facile à implémenter.

Une propriété importante de ce modèle est qu'il soit indépendant de la statistique des hauteurs de la surface¹⁶. La seule condition sur les hauteurs est donnée par le critère de Rayleigh : il s'applique qualitativement à des surfaces fortement rugueuses comparativement à la longueur d'onde, mais les angles des ondes incidente et diffusée interviennent également dans la relation. De plus, le modèle est applicable pour une distribution (paire) quelconque des pentes de la surface, et est indépendant de la fréquence (dans le domaine de validité du modèle). Il est applicable pour des surfaces parfaitement conductrices ou diélectriques. Enfin, il est limité à de faibles écarts types des pentes, car le phénomène de diffusions multiples en est négligé.

Dans le domaine de validité de l'AOG, c'est-à-dire qualitativement pour des surfaces fortement rugueuses comparativement à la longueur d'onde, il peut être intéressant d'étudier plus en détail l'exactitude de la méthode. Pour ce faire, une étude de la conservation d'énergie de la méthode permet d'en cerner ses limites : elle permet de connaître les configurations pour lesquelles le phénomène de diffusion multiple peut être négligé. D'après les analyses qualitatives précédentes, l'approximation de Kirchhoff (AK) du premier ordre réduite à l'AOG, est valide pour des écarts types des pentes σ_s faibles, de l'ordre de $\sigma_s < 0.35$. Cependant, ce critère peut dépendre de différents paramètres : de l'angle d'incidence, mais aussi, pour des surfaces diélectriques, de la permittivité du milieu inférieur et de la polarisation de l'onde. Ainsi, l'étude de la conservation d'énergie de la méthode, présentée ci-dessous, permet de le préciser.

¹⁶Rappelons que ce travail repose sur l'hypothèse de statistique paire.

L'expression du coefficient de diffusion, respectivement en réflexion $\sigma_r(\mathbf{K}_r, \mathbf{K}_i)$ et transmission $\sigma_t(\mathbf{K}_t, \mathbf{K}_i)$, sous l'AK réduite à l'AOG, est donnée respectivement par l'équation (2.44a) et (2.44b). Alors, la proportion de la puissance totale diffusée respectivement en réflexion ou transmission $P_{r,t}$ (relativement à la puissance totale incidente P_i), et appelée respectivement réflectivité $\mathcal{R}$ et transmissivité $\mathcal{T}$, est donnée par

$$\mathcal{R}(\theta_i) = \frac{P_r(\mathbf{K}_i)}{P_i(\mathbf{K}_i)} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sigma_r(\mathbf{K}_r, \mathbf{K}_i) d\theta_r, \quad (2.69a)$$

$$\mathcal{T}(\theta_i) = \frac{P_t(\mathbf{K}_i)}{P_i(\mathbf{K}_i)} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \sigma_t(\mathbf{K}_t, \mathbf{K}_i) d\theta_t. \quad (2.69b)$$

Ainsi, l'étude de la conservation d'énergie consiste à comparer la quantité $\eta(\theta_i) = \mathcal{R}(\theta_i) + \mathcal{T}(\theta_i)$ avec 1.

2.3.2 Etude de la conservation d'énergie

Tout d'abord, une étude de la conservation d'énergie est menée pour le cas d'un milieu inférieur parfaitement conducteur. Ensuite, nous nous intéressons au cas d'un milieu inférieur diélectrique sans pertes, permettant de quantifier l'influence de la diffusion en transmission.

2.3.2.1 Cas d'un milieu inférieur parfaitement conducteur

Pour une surface parfaitement conductrice (PC), $\eta(\theta_i) = \mathcal{R}(\theta_i)$, et il est possible d'obtenir une expression analytique simple de $\eta(\theta_i)$. Pour un angle d'incidence nul $\theta_i = 0^\circ$, on peut montrer pour une statistique gaussienne et en négligeant l'effet d'ombre que

$$\eta(\theta_i = 0^\circ; \sigma_s) = \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sigma_s \sqrt{2}}\right), \quad (2.70)$$

avec erf la fonction erreur définie par

$$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-t^2} dt. \quad (2.71)$$

En incidence normale $\theta_i = 0^\circ$, pour un facteur de conservation d'énergie $\eta(0^\circ) > 0.99$, il faut que l'écart type des pentes $\sigma_s < 0.388$, et pour $\eta(0^\circ) > 0.999$, il faut $\sigma_s < 0.304$. Ainsi, le facteur de conservation d'énergie est d'autant meilleur que l'écart type des pentes est faible, puisque le phénomène de réflexions multiples contribue à la puissance diffusée pour un écart type des pentes élevé. Ce calcul est intéressant puisqu'il permet de donner, en fonction de la précision voulue donnée par η , l'écart type des pentes σ_s au-delà duquel le phénomène de réflexions multiples doit être pris en compte.

Sur la figure 2.15 est représenté le facteur de conservation d'énergie $\eta(\theta_i)$ d'une surface PC (dans ce cas, les polarisations H et V sont égales) de statistique gaussienne, avec un écart type des pentes $\sigma_s = 0.1$. Nous pouvons observer un bon facteur de conservation d'énergie du modèle pour des angles d'incidence modérés, sans ou avec prise en compte de l'effet d'ombre. Cependant, pour le modèle sans ombre η diverge pour des incidences rasantes $\theta_i \rightarrow 90^\circ$, tandis que pour le modèle avec ombre η tend vers 1 quand $\theta_i \rightarrow 90^\circ$. Ceci met en évidence l'importance de la prise en compte de l'effet d'ombre dans le modèle développé, basé sur l'AK et réduit à l'AOG, pour des angles rasants. Si ce phénomène n'est pas pris en compte, la puissance diffusée par la surface

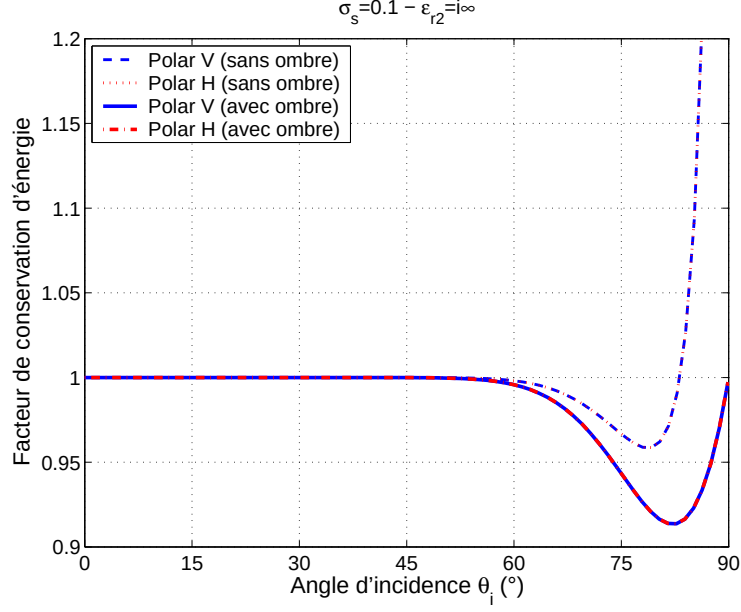


FIG. 2.15 – Facteur de conservation d'énergie d'une surface PC caractérisée par $\sigma_s = 0.1$, sans ombre et avec ombre.

est surévaluée, et le facteur de conservation d'énergie diverge pour des incidences rasantes. Ainsi, pour le modèle avec ombre, η est toujours inférieur à 1.

Pour des incidences élevées, pour le modèle avec ombre η diminue lorsque θ_i augmente pour atteindre un minimum à $\theta_{i,m} \simeq 82.2^\circ$ pour $\sigma_s = 0.1$, puis augmente et tend vers 1 pour $\theta_i \rightarrow 90^\circ$. Ceci est dû au phénomène de réflexions multiples par la surface rugueuse, qui contribue pour des angles de diffusion rasants [124, 126]. Pour une surface possédant un écart type des pentes faible, comme c'est le cas ici ($\sigma_s = 0.1$), ce phénomène ne contribue également que pour des angles d'incidence θ_i rasants. Quand θ_i augmente, la contribution des réflexions multiples augmente. Cependant, après un certain angle θ_i , cette contribution diminue : l'incidence est tellement élevée que la probabilité que l'onde soit réfléchi plusieurs fois successivement par la surface diminue. Ainsi, cette contribution s'annule lorsque $\theta_i \rightarrow 90^\circ$. Ceci a été confirmé par l'étude de la conservation d'énergie du modèle prenant en compte le phénomène de double réflexion, présenté dans la littérature [124, 126], qui donne pour cette configuration un facteur de conservation d'énergie très proche de 1 pour tous les angles d'incidence.

Sur la figure 2.16 est représenté le facteur de conservation d'énergie η d'une surface PC, avec un écart type des pentes $\sigma_s = 0.3$. Les mêmes conclusions qualitatives que pour $\sigma_s = 0.1$ peuvent être tirées. Ici, l'écart type des pentes est plus élevé, et η est nettement plus faible, même pour des angles d'incidence θ_i faibles. En effet, le phénomène de réflexions multiples contribue pour tous les angles d'incidences à partir d'un écart type des pentes σ_s de l'ordre de 0.35 : le modèle de l'AOG, ne prenant pas en compte ce phénomène, atteint alors les limites de son domaine de validité. Comme pour $\sigma_s = 0.1$, la contribution des réflexions multiples augmente (η diminue) lorsque θ_i augmente, pour être maximale (η minimale) lorsque $\theta_{i,m} \simeq 64.1^\circ$. Puis, sa contribution diminue pour s'annuler ($\eta \rightarrow 1$) lorsque $\theta_i \rightarrow 90^\circ$. Remarquons que la position $\theta_{i,m}$ du minimum du facteur de conservation d'énergie η diminue lorsque l'écart type des pentes σ_s augmente. Lynch et Wagner [124] ont constaté que la position $\theta_{i,m}$ du minimum est de l'ordre de

$$\theta_{i,m}^{LW} \approx \frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{2}\sigma_s). \quad (2.72)$$

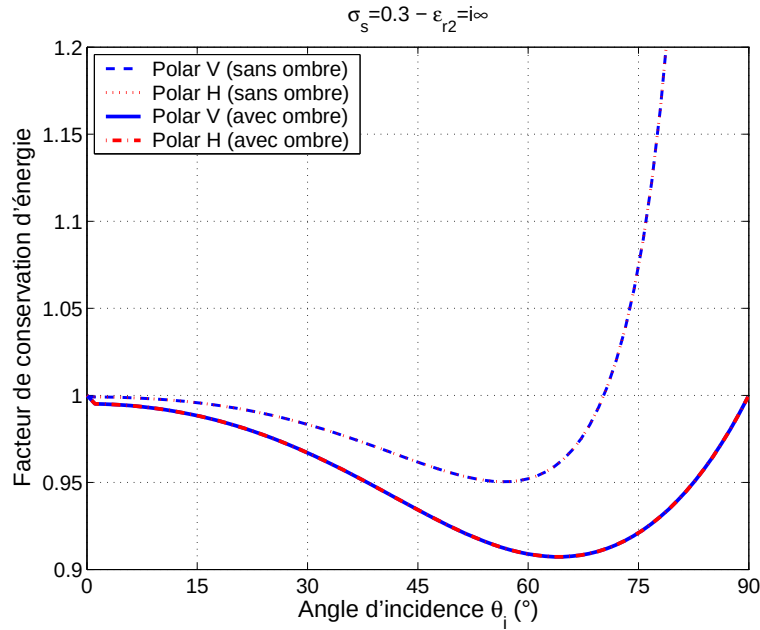


FIG. 2.16 – Facteur de conservation d'énergie d'une surface PC caractérisée par $\sigma_s = 0.3$, sans ombre et avec ombre.

Ainsi, pour $\sigma_s = 0.1$, $\theta_{i,m}^{LW} \simeq 82.0^\circ$, et pour $\sigma_s = 0.3$, $\theta_{i,m}^{LW} \simeq 67.0^\circ$: pour des écarts types des pentes faibles, les valeurs sont concordantes avec les résultats numériques.

TAB. 2.1 – Valeurs caractéristiques pour un milieu inférieur parfaitement conducteur

σ_s	0.05	0.1	0.2	0.3	0.35
$\theta_{i,l}$	77.0°	63.9°	38.2°	13.1°	0°
$\theta_{i,m} (\eta_m)$	$86.1^\circ (0.914)$	$82.2^\circ (0.914)$	$73.8^\circ (0.911)$	$64.1^\circ (0.907)$	$58.6^\circ (0.904)$
$\theta_{i,m}^{LW}$	86.0°	82.0°	74.2°	67.0°	63.7°

D'autres simulations effectuées et non présentées aboutissent aux mêmes conclusions. Le tableau 2.1 regroupe, pour différentes valeurs de σ_s , la valeur de l'angle d'incidence limite $\theta_{i,l}$ au-delà de laquelle le facteur de conservation d'énergie $\eta < 0.99$ pour le modèle avec effet d'ombre. Il contient aussi la valeur de l'angle d'incidence $\theta_{i,m}$ pour lequel $\eta \equiv \eta_m$ atteint sa valeur minimale, avec la valeur de η_m associée. La valeur empirique $\theta_{i,m}^{LW}$ donnée par Lynch et Wagner est donnée en dernière ligne pour comparaison. Cette formule théorique concorde avec les valeurs numériques pour $\sigma_s < 0.3$. Le facteur de conservation d'énergie $\eta < 0.99$ quel que soit l'angle d'incidence pour $\sigma_s = 0.35$. Ceci est en accord qualitatif avec le domaine de validité de l'AK donné par l'équation (2.2). Quantitativement, cela dépend ensuite de la précision désirée sur la méthode.

2.3.2.2 Cas d'un milieu inférieur diélectrique sans pertes

Considérons maintenant le cas d'un milieu inférieur diélectrique sans pertes, tel que $\epsilon_{r2} \in \mathbb{R}$. Une étude de la conservation d'énergie dans ce cas permet alors d'étudier l'influence de la valeur de la permittivité relative ϵ_{r2} , mais aussi de la polarisation, sur le domaine de validité du modèle.

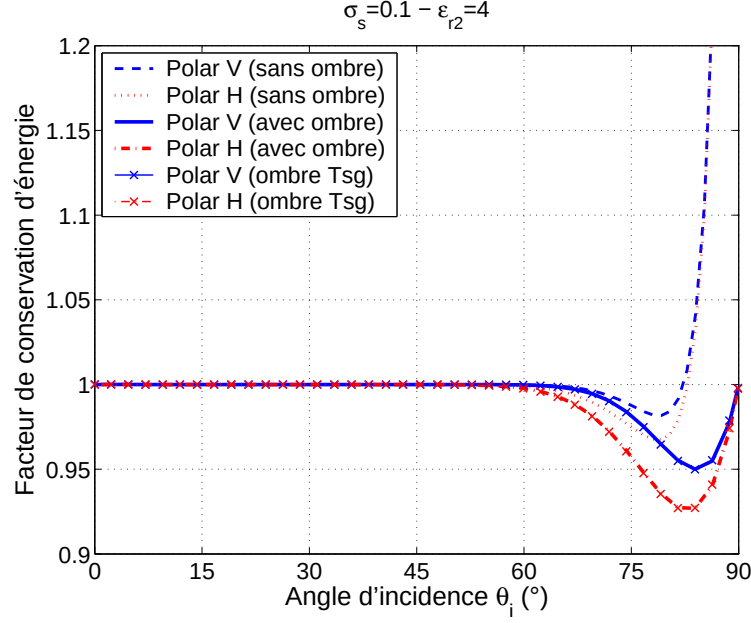


FIG. 2.17 – Facteur de conservation d'énergie d'une surface caractérisée par $\sigma_s = 0.1$, avec un milieu inférieur de permittivité relative $\epsilon_{r2} = 4$, sans ombre et avec ombre.

La figure 2.17 montre le facteur de conservation d'énergie pour un milieu inférieur diélectrique de permittivité relative $\epsilon_{r2} = 4$, et pour une surface d'écart type des pentes $\sigma_s = 0.1$. Le cas sans ombre est tracé en ligne bleue discontinue pour la polarisation V et en pointillés rouges pour la polarisation H . Le cas avec ombre utilisant la fonction d'ombre en transmission exposée ici est tracé en ligne bleue continue pour la polarisation verticale (V) et en traits-points rouges pour la polarisation horizontale (H); celui utilisant la fonction d'ombre de Tsang et al. contient en plus des croix. Nous pouvons observer, comme pour le cas PC, un bon facteur de conservation d'énergie $\eta(\theta_i)$ pour des angles d'incidence modérés, sans ou avec prise en compte de l'effet d'ombre. De même, le modèle sans ombre diverge pour des incidences rasantes, d'où l'importance de prendre en compte ce phénomène pour prédire correctement la puissance diffusée par la surface.

Pour des incidences élevées, pour le modèle avec ombre, le même phénomène apparaît que pour le cas PC : $\eta(\theta_i)$ diminue lorsque θ_i augmente pour atteindre un minimum à $\theta_{i,m} \simeq 84.2^\circ$ en polarisation V et $\theta_{i,m} \simeq 82.8^\circ$ en polarisation H , puis augmente et tend vers 1 pour $\theta_i \rightarrow 90^\circ$. Ceci est dû au phénomène de réflexions multiples pour des angles rasants. Ainsi, pour cette configuration la prise en compte de la double réflexion permet d'obtenir un facteur de conservation d'énergie très proche de 1 [125,126]. On observe deux différences majeures avec le cas PC : tout d'abord la polarisation de l'onde incidente joue un rôle important sur η . En effet, le facteur de conservation d'énergie est sensiblement meilleur pour la polarisation V . De plus, pour les deux polarisations, η est sensiblement meilleur que pour le cas PC. Enfin, il n'y a pas de différence significative entre le modèle utilisant la fonction d'ombre en transmission exposée ici et celle utilisée par Tsang et al.

Sur la figure 2.18 est représenté η d'une surface diélectrique de permittivité relative $\epsilon_{r2} = 4$, avec un écart type des pentes $\sigma_s = 0.3$. Les mêmes conclusions qualitatives que pour $\sigma_s = 0.1$ peuvent être tirées. La différence principale réside dans la baisse du facteur de conservation d'énergie η pour des incidences faibles. Notons cependant une légère différence, pour des inci-

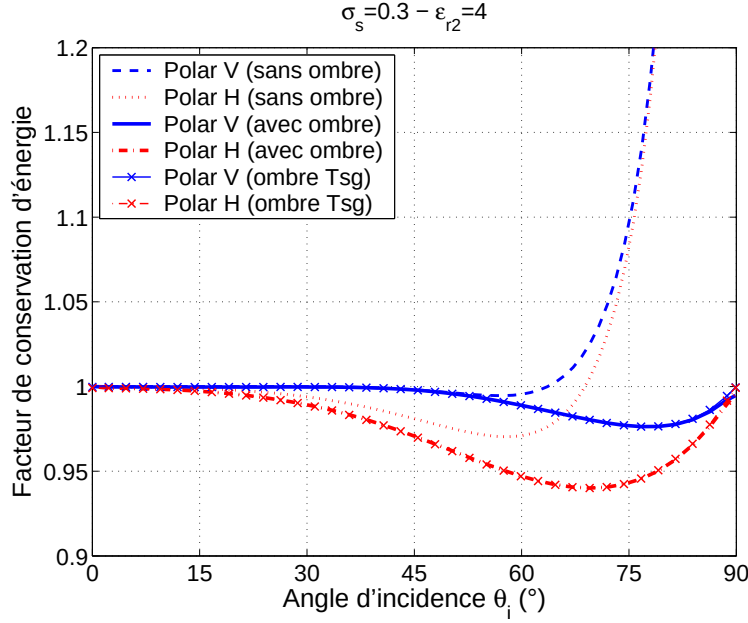


FIG. 2.18 – Facteur de conservation d'énergie d'une surface caractérisée par $\sigma_s = 0.3$, avec un milieu inférieur de permittivité relative $\epsilon_{r2} = 4$, sans ombre et avec ombre.

dences très rasantes $\theta_i \rightarrow 90^\circ$, entre le modèle avec la fonction d'ombre en transmission exposée ici et celle exposée par Tsang et al. La dernière tend vers 1, tandis que la première tend vers une valeur finie inférieure.

TAB. 2.2 – Valeurs caractéristiques pour un milieu inférieur de permittivité relative $\epsilon_{r2} = 4$

σ_s	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4
$\theta_{i,l}(V)$	79.3°	72.1°	63.5°	58.7°	53.9°
$\theta_{i,l}(H)$	77.6°	66.4°	46.5°	29.1°	0°
$\theta_{i,m}(\eta_m)(V)$	86.7° (0.936)	84.2° (0.950)	80.5° (0.967)	77.8° (0.976)	—° (—)
$\theta_{i,m}(\eta_m)(H)$	86.3° (0.920)	82.8° (0.926)	76.2° (0.934)	69.6° (0.940)	63.0° (0.943)

D'autres simulations effectuées et non présentées, aboutissent aux mêmes conclusions. Comme dans le cas PC, le tableau 2.2 regroupe, pour différentes valeurs de l'écart type des pentes, la valeur de $\theta_{i,l}$ (en polarisations V et H) à partir de laquelle $\eta < 0.99$, ainsi que la valeur de $\theta_{i,m}$ (en polarisations V et H) pour laquelle η est minimal, avec la valeur de η associée. Comme pour le cas PC, la position $\theta_{i,m}$ du minimum de $\eta \equiv \eta_m$ diminue lorsque σ_s augmente. Elle est sensiblement plus grande, pour les deux polarisations, que pour le cas PC. La valeur η_m associée l'est également : la contribution des réflexions multiples est plus faible car il n'y a plus réflexion totale comme dans le cas PC. Nous pouvons remarquer que dans tous les cas, η est nettement meilleur pour les deux polarisations que pour le cas PC. Ainsi, l'AK réduite à l'AOG (ne prenant pas en compte le phénomène de diffusions multiples) est applicable pour des écarts types des pentes plus élevés pour le cas diélectrique que pour le cas PC. De plus, η est sensiblement meilleur en polarisation V qu'en polarisation H , ce qui permet d'appliquer le modèle en polarisation V pour des écarts types des pentes sensiblement plus élevés qu'en polarisation H .

Il est alors intéressant d'étudier l'influence de la valeur de la permittivité relative ϵ_{r2} sur le facteur de conservation d'énergie. Pour $\epsilon_{r2} = 53$, le facteur de conservation d'énergie est

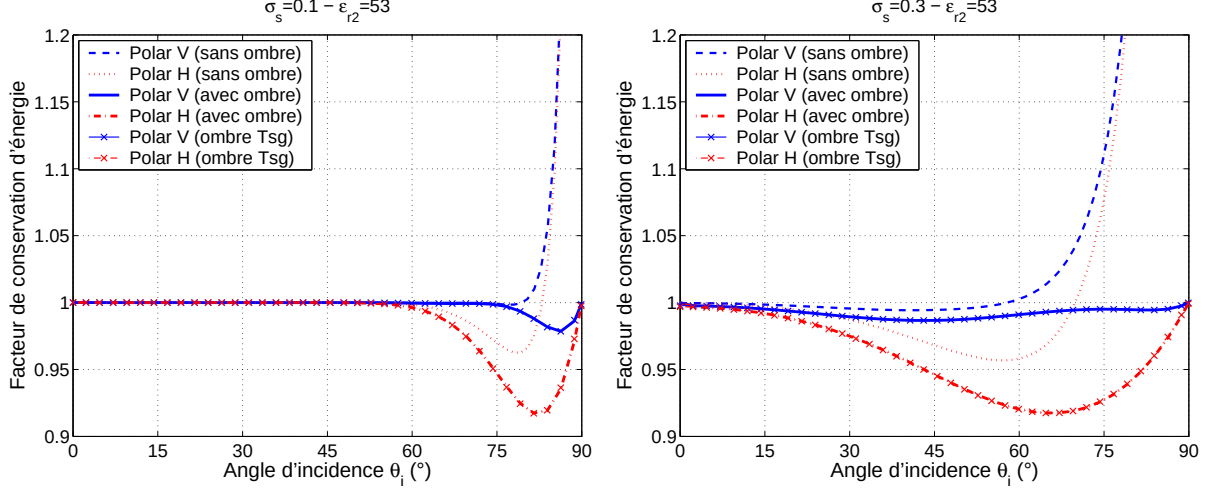


FIG. 2.19 – Facteur de conservation d’énergie d’une surface caractérisée par $\sigma_s = 0.1$ à gauche et $\sigma_s = 0.3$ à droite, avec un milieu inférieur de permittivité relative $\epsilon_{r2} = 53$, sans ombre et avec ombre.

TAB. 2.3 – Valeurs caractéristiques pour un milieu inférieur de permittivité relative $\epsilon_{r2} = 53$

σ_s	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4
$\theta_{i,l} (V)$	82.8°	80.8°	—	28.6°	0°
$\theta_{i,l} (H)$	77.1°	64.6°	40.3°	17.4°	0°
$\theta_{i,m} (\eta_m) (V)$	87.5° (0.962)	86.2° (0.979)	84.7° (0.991)	43.2° (0.987)	29.5° (0.977)
$\theta_{i,m} (\eta_m) (H)$	86.2° (0.916)	82.4° (0.917)	74.5° (0.918)	65.7° (0.917)	55.4° (0.915)

représenté dans la figure 2.19 pour $\sigma_s = 0.1$ à gauche et $\sigma_s = 0.3$ à droite. Par rapport à $\epsilon_{r2} = 4$, pour les deux écarts types de pente et pour des incidences élevées, le facteur de conservation d’énergie est meilleur en polarisation V , mais moins bon en polarisation H . Ce facteur reste meilleur que pour le cas PC, mais en polarisation H il est proche des valeurs obtenues pour le cas PC. Comme pour $\epsilon_{r2} = 4$, le tableau 2.3 regroupe les valeurs caractéristiques de la courbe de η , pour différentes valeurs de l’écart type des pentes. Les observations pour $\sigma_s = 0.1$ et $\sigma_s = 0.3$ peuvent également être faites pour les autres valeurs de σ_s . Remarquons que sur la figure 2.19 pour $\sigma_s = 0.3$, le facteur de conservation d’énergie en polarisation V remonte autour de $\theta_i \simeq (70 - 75^\circ)$, contrairement à la polarisation H . Ceci peut être attribué à l’incidence de Brewster, ou plutôt à l’incidence pseudo-brewstérienne. Pour une surface plane, cet angle est égal à $\theta_i^B \simeq 82.2^\circ$. Autour de $\theta_i \simeq 80^\circ$, l’onde est presque entièrement transmise par la surface en polarisation V vers le milieu inférieur. Ainsi, le phénomène de réflexions multiples contribue peu autour de cette incidence. De plus, le phénomène de réflexion¹⁷ après transmission de l’onde dans le milieu inférieur étant très peu probable¹⁸ (voir figure 2.20) pour ces incidences, le facteur de conservation d’énergie devient très proche de 1.

Ceci est confirmé par les résultats de la figure 2.21 obtenus pour une permittivité relative $\epsilon_{r2} = 2$ pour $\sigma_s = 0.1$ et $\sigma_s = 0.3$. Le tableau 2.4 regroupe les valeurs caractéristiques de la courbe de η , pour différentes valeurs de l’écart type des pentes. On retrouve le fait que la polarisation

¹⁷ou de re-transmission de l’onde dans le milieu incident

¹⁸Pour un milieu supérieur assimilé au vide ($\epsilon_{r1} = 1$), ce phénomène n’est significatif que pour des incidences rasantes, des écarts types des pentes élevés et des permittivités relatives du milieu inférieur ϵ_{r2} proches de 1.

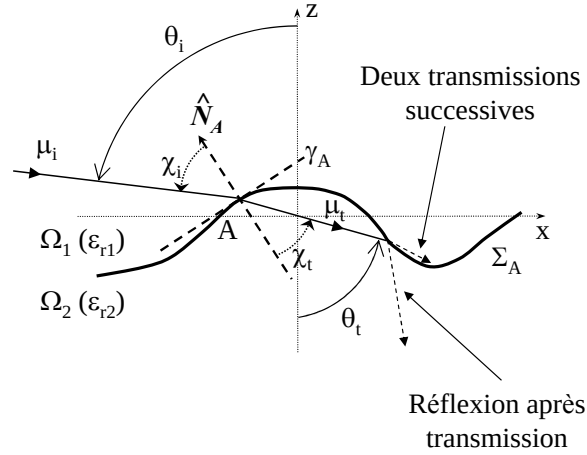


FIG. 2.20 – Phénomène de double diffusion de l'onde transmise dans le milieu inférieur Ω_2 : réflexion après transmission ainsi que double transmission.

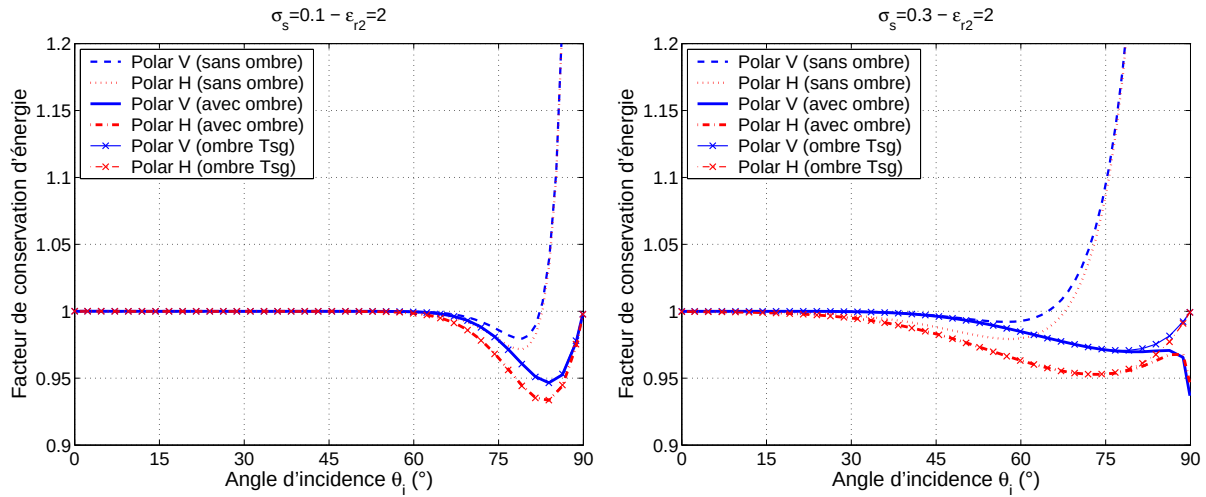


FIG. 2.21 – Facteur de conservation d'énergie d'une surface caractérisée par $\sigma_s = 0.1$ à gauche et $\sigma_s = 0.3$ à droite, avec un milieu inférieur de permittivité relative $\epsilon_{r2} = 2$, sans ombre et avec ombre.

TAB. 2.4 – Valeurs caractéristiques pour un milieu inférieur de permittivité relative $\epsilon_{r2} = 2$

σ_s	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4
$\theta_{i,l}(V)$	79.0°	71.2°	61.0°	54.5°	49.6°
$\theta_{i,l}(H)$	78.1°	67.9°	51.4°	37.9°	26.5°
$\theta_{i,m}(\eta_m)(V)$	86.6° (0.933)	84.0° (0.947)	79.9° (0.963)	78.0° (0.971)	—° (—)
$\theta_{i,m}(\eta_m)(H)$	86.4° (0.925)	83.2° (0.933)	77.6° (0.945)	73.0° (0.953)	—° (—)

V est meilleure que la polarisation H , et que la différence entre les deux polarisations augmente, pour des incidences élevées, avec la valeur de la permittivité relative, du fait de l'incidence pseudo-brewstérienne. Pour $\epsilon_{r2} = 2$, l'angle de Brewster $\theta_i^B \simeq 54.7^\circ$, pour $\epsilon_{r2} = 4$, $\theta_i^B \simeq 63.4^\circ$, et pour $\epsilon_{r2} = 53$, $\theta_i^B \simeq 82.2^\circ$. En polarisation H , le facteur de conservation d'énergie diminue lorsque la permittivité relative augmente, et tend vers celui du cas PC. Ceci est dû au fait que la partie de la puissance diffusée en réflexion augmente, donc la contribution des réflexions multiples sur la puissance totale augmente.

Sur la figure 2.21, pour $\sigma_s = 0.3$ il y a une différence cette fois significative, pour des angles d'incidence très rasants ($\theta_i > 85^\circ$), entre le modèle utilisant la fonction d'ombre en transmission exposée ici et celle exposée par Tsang et al. Cette différence n'apparaissait pas clairement pour des permittivités relatives ϵ_{r2} plus élevées car la majeure partie de l'énergie diffusée était réfléchie dans le milieu incident. La fonction d'ombre en transmission exposée par Tsang et al. tend vers 1, tandis que celle exposée ici tend vers une valeur finie inférieure. Cependant, il n'y a pas de différence significative entre les deux dans le domaine de validité de l'AOG.

2.3.2.3 Conclusion

En conclusion, de manière générale l'effet d'ombre est très significatif pour des incidences rasantes, et il est très important de prendre ce phénomène en compte dans ces configurations pour ne pas que le modèle diverge. Dans ce cas, le facteur de conservation d'énergie η est toujours inférieur à 1, car le phénomène de diffusion multiple est négligé dans le modèle. De plus, la valeur de la différence $1 - \eta$ permet de quantifier ce phénomène.

Pour un milieu inférieur parfaitement conducteur, le facteur de conservation d'énergie η est bon (c'est-à-dire proche de 1) pour des incidences θ_i modérées et des écarts types des pentes σ_s faibles : le phénomène de diffusions multiples peut être négligé. Par exemple, $\eta > 0.99$ pour $\theta_i < 40^\circ$ et $\sigma_s < 0.2$.

Pour un milieu inférieur diélectrique sans pertes, ce facteur est meilleur pour les deux polarisations V et H . En effet, la contribution du phénomène de diffusion multiple, pour une onde incidence d'un milieu moins réfringent vers un milieu plus réfringent ($\epsilon_{r1} < \epsilon_{r2}$), est due au phénomène de réflexion multiple dans le milieu d'incidence. Alors, pour un milieu inférieur diélectrique, une partie de l'énergie incidente est transmise dans le milieu inférieur, et la contribution du phénomène de réflexion multiple diminue. Ceci est d'autant plus vrai que la valeur de la permittivité relative du milieu inférieur ϵ_{r2} diminue.

Cependant, cette dernière affirmation n'est rigoureusement vraie qu'en polarisation H . En effet, en polarisation V , plus ϵ_{r2} est important, plus l'écart du facteur de conservation d'énergie η entre les deux polarisations est important, et meilleur est η en polarisation V pour des incidences rasantes. Ceci peut être attribué à l'incidence de Brewster pour laquelle toute l'énergie incidente est transmise dans le milieu inférieur. Ainsi, pour un milieu inférieur diélectrique sans pertes,

le modèle peut être appliqué pour les deux polarisations pour des incidences et des écarts types des pentes plus élevés : par exemple, pour $\epsilon_{r2} = 2$, $\eta > 0.99$ pour $\theta_i < 55^\circ$ en polarisation V (40° en polarisation H) et $\sigma_s < 0.3$. De plus, pour des permittivités élevées et des écarts types des pentes faibles, il peut être appliqué en polarisation V pour des incidences élevées : par exemple, pour $\epsilon_{r2} = 53$ et $\sigma_s = 0.2$, $\eta > 0.99$ pour tous les angles d'incidence en polarisation V .

Alors, concernant l'application de ce modèle (qui néglige le phénomène de multiple diffusion) à une mer propre ainsi qu'à son extension à une mer recouverte de pétrole, il peut être utilisé pour des incidences modérées ($\theta_i < 60^\circ$) et des écarts types des pentes modérés ($\sigma_s < 0.35$) en configuration bistatique, c'est-à-dire quel que soit l'angle de diffusion. En configuration monostatique, il peut alors être utilisé pour des écarts types des pentes plus élevés : jusqu'à des valeurs de l'ordre de 0.5 pour des incidences faibles ($\theta_i < 20^\circ$).

2.4 Extension du modèle à un problème tridimensionnel

Après une étude approfondie du cas 2D $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}})$, intéressons-nous maintenant à l'extension de l'approximation de Kirchhoff au cas vectoriel pour un problème 3D $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$, où la surface est décrite par ses hauteurs en fonction de x et y , $\zeta(x, y)$. L'approximation de Kirchhoff (AK) applique l'approximation du plan tangent pour calculer les champs sur la surface rugueuse. Le phénomène d'ombrage par l'onde incidente et celui de masquage par l'onde diffractée (en réflexion et transmission) est pris en compte dans le modèle, afin de corriger les défauts de la méthode pour des angles rasants.

De même que pour le cas 2D, l'approximation de la phase stationnaire (APS) est appliquée au modèle afin de simplifier le calcul du champ diffracté par la surface. Puis, l'approximation de l'optique géométrique (AOG), valide pour des surfaces fortement rugueuses comparativement à la longueur d'onde, est appliquée lors du calcul de la puissance diffractée. Sous cette approximation, la puissance cohérente peut être négligée, ce qui permet d'obtenir une expression analytique simple de la puissance diffusée en réflexion et en transmission. L'effet d'ombre est pris en compte dans le modèle, pour lequel la fonction d'ombre en transmission, exposée en détail pour le cas 2D, est étendue au cas 3D.

Le modèle ayant été présenté en détail pour le cas 2D, seules les étapes principales du calcul sont présentées. Les expressions des puissances cohérentes, permettant de donner un critère de validité rigoureux de la méthode, sont exposées. Enfin, une étude de la conservation d'énergie est menée, permettant une comparaison avec le cas 2D.

2.4.1 Approximation de Kirchhoff en réflexion et transmission avec effet d'ombre

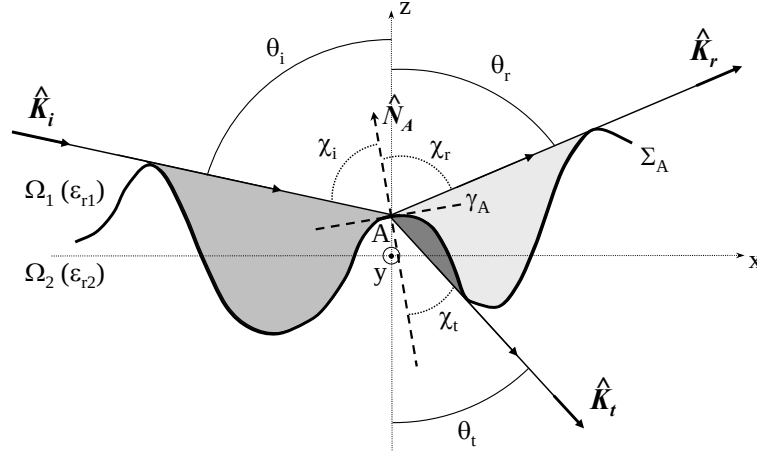


FIG. 2.22 – Illustration du problème tridimensionnel étudié (vue dans le plan $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}})$) pour $\hat{\mathbf{y}}$ fixé

Comme illustré sur la figure (2.22), $\mathbf{E}_i(\mathbf{R}) = E_0 \exp(i\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{R}) \hat{\mathbf{e}}_i$ désigne le champ électrique incident de direction $\hat{\mathbf{K}}_i = (\hat{k}_{ix}, \hat{k}_{iy}, \hat{k}_{iz}) = (k_{ix}, k_{iy}, k_{iz})/|k_1|$ sur la surface Σ_A , avec un angle d'incidence θ_i par rapport à la direction $\hat{\mathbf{z}}$ et un angle ϕ_i par rapport à la direction $\hat{\mathbf{x}}$. De même, $\mathbf{E}_s$ dénote le champ diffracté respectivement en réflexion et transmission dans la direction $\hat{\mathbf{K}}_s = (\hat{k}_{sx}, \hat{k}_{sy}, \hat{k}_{sz}) = (k_{sx}, k_{sy}, k_{sz})/|k_\alpha|$ avec un angle de diffraction θ_s avec la direction $\hat{\mathbf{z}}$ et

un angle ϕ_s avec la direction $\hat{\mathbf{x}}$. Pour le cas de la réflexion dans le milieu d'incidence Ω_1 , $s \equiv r$ et $\alpha \equiv 1$, et pour le cas de la transmission dans le milieu Ω_2 , $s \equiv t$ et $\alpha \equiv 2$. Un point hors de la surface est noté $\mathbf{R} = (x, y, z)$, et un point de la surface Σ_A est noté $\mathbf{R}_A = (x_A, y_A, \zeta_A)$, avec $\zeta_A \equiv \zeta(x_A, y_A)$. Le vecteur normal unitaire associé est noté $\hat{\mathbf{N}}_A$, avec

$$\hat{\mathbf{N}}_A = \frac{-\gamma_{A,x}\hat{\mathbf{x}} - \gamma_{A,y}\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}}{\sqrt{1 + \gamma_{A,x}^2 + \gamma_{A,y}^2}}, \quad (2.73)$$

où $\gamma_{A,x} = \partial\zeta_A/\partial x_A$ et $\gamma_{A,y} = \partial\zeta_A/\partial y_A$ les pentes locales selon $\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{\mathbf{y}}$ de la surface au point A . Cette définition suppose que la convention d'orientation de la normale soit choisie vers le haut, c'est-à-dire dans le sens des z croissants.

Le modèle est décrit à partir des équations de Kirchhoff-Helmholtz pour lesquelles le champ diffracté respectivement en réflexion et transmission est donné avec la convention (2.73) par (1.115a) et (1.115b), avec $\mathbf{E}_1(\mathbf{R}_A) = \mathbf{E}_i(\mathbf{R}_A) + \mathbf{E}_r(\mathbf{R}_A)$ et $\mathbf{E}_2(\mathbf{R}_A) = \mathbf{E}_t(\mathbf{R}_A)$. $G_\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A)$ est la fonction de Green 3D, définie de manière générale par

$$\bar{G}_\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) = (\bar{\mathbf{I}} + \frac{\nabla\nabla}{k_\alpha^2}) G_\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A), \quad \text{avec} \quad G_\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) = \frac{e^{ik_\alpha\|\mathbf{R}-\mathbf{R}_A\|}}{4\pi\|\mathbf{R}-\mathbf{R}_A\|}. \quad (2.74)$$

Dans la zone de champ lointain de la surface, l'équation (2.74) peut s'écrire de manière approchée sous la forme

$$\bar{G}_\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \simeq (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{K}}_s \hat{\mathbf{K}}_s) \frac{e^{ik_\alpha(R - \hat{\mathbf{K}}_s \cdot \mathbf{R}_A)}}{4\pi R}. \quad (2.75)$$

De plus, dans la zone de champ lointain, le produit vectoriel s'écrit

$$\nabla \wedge \bar{G}_\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A) \simeq -ik_\alpha \hat{\mathbf{K}}_s \wedge \bar{G}_\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{R}_A), \quad (2.76)$$

ce qui permet d'obtenir les équations suivantes [43] des champs diffractés en champ lointain

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r^\infty(\mathbf{R}) = & + \frac{ik_1 e^{ik_1 R}}{4\pi R} (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{K}}_r \hat{\mathbf{K}}_r) \cdot \int \int_{\Sigma_A} d\Sigma_A \left\{ \eta_1 [\hat{\mathbf{N}}_A \wedge \mathbf{H}(R_A)] \right. \\ & \left. + \hat{\mathbf{K}}_r \wedge [\hat{\mathbf{N}}_A \wedge \mathbf{E}(R_A)] \right\} e^{-i\mathbf{K}_r \cdot \mathbf{R}_A}, \end{aligned} \quad (2.77a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t^\infty(\mathbf{R}) = & - \frac{ik_2 e^{ik_2 R}}{4\pi R} (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{K}}_t \hat{\mathbf{K}}_t) \cdot \int \int_{\Sigma_A} d\Sigma_A \left\{ \eta_2 [\hat{\mathbf{N}}_A \wedge \mathbf{H}(R_A)] \right. \\ & \left. + \hat{\mathbf{K}}_t \wedge [\hat{\mathbf{N}}_A \wedge \mathbf{E}(R_A)] \right\} e^{-i\mathbf{K}_t \cdot \mathbf{R}_A}. \end{aligned} \quad (2.77b)$$

Ces dernières équations sont les équations sur lesquelles s'appuie la démarche décrite ci-dessous.

2.4.1.1 Approximation du plan tangent

L'approximation du plan tangent suppose que les champs en tout point de la surface peuvent être approximés par les champs qui seraient présents sur le plan tangent en ce point. Ainsi, cette approximation requiert un grand rayon de courbure de la surface relativement à la longueur d'onde incidente, en chaque point de la surface.

Soient $\hat{\mathbf{Q}}_i$, $\hat{\mathbf{P}}_i$ les vecteurs (unitaires) de polarisation de l'onde incidente au point $\mathbf{R}_A$ tels que

$$\hat{\mathbf{Q}}_i = \frac{\hat{\mathbf{K}}_i \wedge \hat{\mathbf{N}}_A}{\|\hat{\mathbf{K}}_i \wedge \hat{\mathbf{N}}_A\|}, \quad (2.78)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_i = \hat{\mathbf{Q}}_i \wedge \hat{\mathbf{K}}_i, \quad (2.79)$$

avec $\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{i}}$ le vecteur de polarisation orthogonale (ou horizontale) et $\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{i}}$ le vecteur de polarisation parallèle (ou verticale). Avec la définition ci-dessus, $(\hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{i}})$ forme un système orthonormé direct, défini au point $\mathbf{R}_{\mathbf{A}}$. L'onde incidente au point $\mathbf{R}_{\mathbf{A}}$, de polarisation a priori quelconque, est alors décomposée en la somme d'une composante d'état de polarisation horizontal $\mathbf{E}_{\mathbf{i},\mathbf{H}}(\mathbf{R}_{\mathbf{A}})$ et d'une composante d'état de polarisation vertical $\mathbf{E}_{\mathbf{i},\mathbf{V}}(\mathbf{R}_{\mathbf{A}})$ telles que

$$\mathbf{E}_{\mathbf{i},\mathbf{H}}(\mathbf{R}_{\mathbf{A}}) = E_0 e^{i\mathbf{K}_{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{A}}} (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{i}}) \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{i}}, \quad (2.80)$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{i},\mathbf{V}}(\mathbf{R}_{\mathbf{A}}) = E_0 e^{i\mathbf{K}_{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{A}}} (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{i}}) \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{i}} \wedge \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{i}}. \quad (2.81)$$

Alors, l'approximation du plan tangent permet d'obtenir le champ électrique réfléchi $\mathbf{E}_{\mathbf{r}}(\mathbf{R}_{\mathbf{A}})$ au point $\mathbf{R}_{\mathbf{A}}$ en polarisations horizontale (H) et verticale (V) telles que

$$\mathbf{E}_{\mathbf{r},\mathbf{H}}(\mathbf{R}_{\mathbf{A}}) = r_H(\chi_i) E_0 e^{i\mathbf{K}_{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{A}}} (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{i}}) \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{i}}, \quad (2.82)$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{r},\mathbf{V}}(\mathbf{R}_{\mathbf{A}}) = r_V(\chi_i) E_0 e^{i\mathbf{K}_{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{A}}} (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{i}}) \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{i}} \wedge \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{r}}, \quad (2.83)$$

avec $r_{H,V}$ le coefficient de réflexion de Fresnel respectivement en polarisation H et V donné par l'équation (1.23a) et (1.24a)¹⁹, et χ_i l'angle local d'incidence associé au point $\mathbf{R}_{\mathbf{A}}$ donné par

$$\cos \chi_i = -\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{A}}. \quad (2.84)$$

De même, le champ magnétique incident au point $\mathbf{R}_{\mathbf{A}}$ se décompose en la somme d'une composante d'état de polarisation horizontal $\mathbf{H}_{\mathbf{i},\mathbf{H}}(\mathbf{R}_{\mathbf{A}})$ et d'une composante d'état de polarisation vertical $\mathbf{H}_{\mathbf{i},\mathbf{V}}(\mathbf{R}_{\mathbf{A}})$ telle que

$$\mathbf{H}_{\mathbf{i},\mathbf{H}}(\mathbf{R}_{\mathbf{A}}) = -\frac{1}{\eta_1} E_0 e^{i\mathbf{K}_{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{A}}} (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{i}}) \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{i}} \wedge \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{i}}, \quad (2.85)$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{i},\mathbf{V}}(\mathbf{R}_{\mathbf{A}}) = +\frac{1}{\eta_1} E_0 e^{i\mathbf{K}_{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{A}}} (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{i}}) \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{i}}, \quad (2.86)$$

et de même pour le champ magnétique réfléchi en $\mathbf{R}_{\mathbf{A}}$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{r},\mathbf{H}}(\mathbf{R}_{\mathbf{A}}) = -\frac{1}{\eta_1} r_H(\chi_i) E_0 e^{i\mathbf{K}_{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{A}}} (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{i}}) \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{i}} \wedge \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{r}}, \quad (2.87)$$

$$\mathbf{H}_{\mathbf{r},\mathbf{V}}(\mathbf{R}_{\mathbf{A}}) = +\frac{1}{\eta_1} r_V(\chi_i) E_0 e^{i\mathbf{K}_{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{A}}} (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{i}}) \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{i}}. \quad (2.88)$$

Ainsi, en utilisant la propriété du double produit vectoriel $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{B} \wedge \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$, les champs électrique et magnétique tangentiels sur la surface $\Sigma_{\mathbf{A}}$ au point $\mathbf{R}_{\mathbf{A}}$ dans le milieu d'incidence Ω_1 s'écrivent

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{A}} \wedge \mathbf{E}(\mathbf{R}_{\mathbf{A}}) &= E_0 e^{i\mathbf{K}_{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{A}}} \left[+ (1 + r_H) (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{i}}) \hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{A}} \wedge \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{i}} \right. \\ &\quad \left. + (1 - r_V) (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{i}}) (\hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{i}}) \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{i}} \right], \end{aligned} \quad (2.89a)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{A}} \wedge \mathbf{H}(\mathbf{R}_{\mathbf{A}}) &= \frac{E_0}{\eta_1} e^{i\mathbf{K}_{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{A}}} \left[- (1 - r_H) (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{i}}) (\hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{i}}) \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{i}} \right. \\ &\quad \left. + (1 + r_V) (\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{P}}_{\mathbf{i}}) \hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{A}} \wedge \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{i}} \right]. \end{aligned} \quad (2.89b)$$

¹⁹Dans la littérature sur les surfaces rugueuses, la définition utilisée pour la polarisation V est légèrement différente : il faut remplacer r_V par $-r_V$. C'est cette dernière définition qui sera utilisée par la suite pour plus de commodité.

En reportant les expressions (2.89a,2.89b) dans les équations (2.77a,2.77b), nous obtenons

$$\mathbf{E}_r^\infty(\mathbf{R}) = +\frac{ik_1 E_0 e^{ik_1 R}}{2\pi R} (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{K}}_r \hat{\mathbf{K}}_r) \cdot \iint dx_A dy_A \mathbf{F}_r(\gamma_{A,x}, \gamma_{A,y}) e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_r) \cdot \mathbf{R}_A}, \quad (2.90a)$$

$$\mathbf{E}_t^\infty(\mathbf{R}) = -\frac{ik_2 E_0 e^{ik_2 R}}{2\pi R} (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{K}}_t \hat{\mathbf{K}}_t) \cdot \iint dx_A dy_A \mathbf{F}_t(\gamma_{A,x}, \gamma_{A,y}) e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_t) \cdot \mathbf{R}_A}, \quad (2.90b)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_r(\gamma_{A,x}, \gamma_{A,y}) = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \gamma_{A,x}^2 + \gamma_{A,y}^2} \bigg[& -(1 - r_H) (\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{Q}}_i) (\hat{\mathbf{N}}_A \cdot \hat{\mathbf{K}}_i) \hat{\mathbf{Q}}_i \\ & + (1 + r_V) (\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{P}}_i) \hat{\mathbf{N}}_A \wedge \hat{\mathbf{Q}}_i \\ & + (1 + r_H) (\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{Q}}_i) \hat{\mathbf{K}}_r \wedge (\hat{\mathbf{N}}_A \wedge \hat{\mathbf{Q}}_i) \\ & + (1 - r_V) (\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{P}}_i) (\hat{\mathbf{N}}_A \cdot \hat{\mathbf{K}}_i) \hat{\mathbf{K}}_r \wedge \hat{\mathbf{Q}}_i \bigg], \end{aligned} \quad (2.91a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_t(\gamma_{A,x}, \gamma_{A,y}) = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \gamma_{A,x}^2 + \gamma_{A,y}^2} \bigg[& -\frac{\eta_2}{\eta_1} (1 - r_H) (\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{Q}}_i) (\hat{\mathbf{N}}_A \cdot \hat{\mathbf{K}}_i) \hat{\mathbf{Q}}_i \\ & + \frac{\eta_2}{\eta_1} (1 + r_V) (\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{P}}_i) \hat{\mathbf{N}}_A \wedge \hat{\mathbf{Q}}_i \\ & + (1 + r_H) (\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{Q}}_i) \hat{\mathbf{K}}_t \wedge (\hat{\mathbf{N}}_A \wedge \hat{\mathbf{Q}}_i) \\ & + (1 - r_V) (\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{P}}_i) (\hat{\mathbf{N}}_A \cdot \hat{\mathbf{K}}_i) \hat{\mathbf{K}}_t \wedge \hat{\mathbf{Q}}_i \bigg]. \end{aligned} \quad (2.91b)$$

Les variables d'intégration x_A, y_A décrivent respectivement le domaine $[-L_{A,x}/2; +L_{A,x}/2]$ et $[-L_{A,y}/2; +L_{A,y}/2]$, avec $L_{A,x}$ et $L_{A,y}$ la longueur de la surface respectivement selon $\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{\mathbf{y}}$. Pour exprimer les vecteurs d'onde normalisés $\hat{\mathbf{K}}$, ainsi que les bases de polarisation du champ électrique ($\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{h}}, \hat{\mathbf{K}}$) dans la base $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$, on peut choisir d'orienter ou non les angles. En 3D, en choisissant de ne pas orienter les angles, en prenant $\theta_{i,r,t} \in [0; \pi/2]$ et $\phi_{i,r,t} \in [0; 2\pi]$, on obtient dans la base $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$, respectivement pour l'onde incidente, diffractée en réflexion et diffractée en transmission (1.102,1.103,1.104)

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{v}}_i = & (-\cos \theta_i \cos \phi_i, & -\cos \theta_i \sin \phi_i, & -\sin \theta_i) \\ \hat{\mathbf{h}}_i = & (-\sin \phi_i, & +\cos \phi_i, & 0) \\ \hat{\mathbf{K}}_i = & (+\sin \theta_i \cos \phi_i, & +\sin \theta_i \sin \phi_i, & -\cos \theta_i) \end{cases}, \quad (2.92)$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{v}}_r = & (+\cos \theta_r \cos \phi_r, & +\cos \theta_r \sin \phi_r, & -\sin \theta_r) \\ \hat{\mathbf{h}}_r = & (-\sin \phi_r, & +\cos \phi_r, & 0) \\ \hat{\mathbf{K}}_r = & (+\sin \theta_r \cos \phi_r, & +\sin \theta_r \sin \phi_r, & +\cos \theta_r) \end{cases}, \quad (2.93)$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{v}}_t = & (-\cos \theta_t \cos \phi_t, & -\cos \theta_t \sin \phi_t, & -\sin \theta_t) \\ \hat{\mathbf{h}}_t = & (-\sin \phi_t, & +\cos \phi_t, & 0) \\ \hat{\mathbf{K}}_t = & (+\sin \theta_t \cos \phi_t, & +\sin \theta_t \sin \phi_t, & -\cos \theta_t) \end{cases}. \quad (2.94)$$

L'approximation du plan tangent permet donc de calculer simplement le champ diffracté par la surface. Cependant, une expression plus simple peut être obtenue en utilisant l'approximation de la phase stationnaire, permettant d'éliminer la dépendance sur les pentes dans l'intégration à calculer.

2.4.1.2 Simplification des champs sous l'approximation de la phase stationnaire

L'approximation de la phase stationnaire (APS) peut être utilisée dans le calcul du champ diffracté [155] afin d'obtenir une expression simplifiée du champ diffracté par la surface. Cette

méthode consiste à ne considérer, dans le terme de phase $\psi_{r,t}$ à l'intérieur de l'intégrande, que les points de phase dits stationnaires, c'est-à-dire tels que $\partial\psi_{r,t}/\partial x_A = \partial\psi_{r,t}/\partial y_A = 0$. Dans les équations (2.90a) et (2.90b), le terme de phase s'exprime par $\psi_{r,t} = (\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_{r,t}) \cdot \mathbf{R}_A$. Alors, le point de phase stationnaire est caractérisé par

$$\gamma_{A,x}^{0(r)} = -\frac{k_{rx} - k_{ix}}{k_{rz} - k_{iz}}, \text{ et } \gamma_{A,y}^{0(r)} = -\frac{k_{ry} - k_{iy}}{k_{rz} - k_{iz}}, \quad (2.95a)$$

pour l'onde réfléchie, et par

$$\gamma_{A,x}^{0(t)} = -\frac{k_{tx} - k_{ix}}{k_{tz} - k_{iz}}, \text{ et } \gamma_{A,y}^{0(t)} = -\frac{k_{ty} - k_{iy}}{k_{tz} - k_{iz}}, \quad (2.96a)$$

pour l'onde transmise.

Physiquement, les pentes $\gamma_{A,x}^0$ et $\gamma_{A,y}^0$ sont telles que les directions des ondes incidente et diffusée (en réflexion / transmission) donnent une réflexion / transmission spéculaire. En conséquence, la normale unitaire vérifie respectivement pour l'onde réfléchie et l'onde transmise (avec la convention d'orientation vers le haut, c'est-à-dire vers les $\hat{\mathbf{z}}$ croissants)

$$\hat{\mathbf{N}}_A^{(r)}(\gamma_{A,x}^0, \gamma_{A,y}^0) = \frac{\mathbf{K}_r - \mathbf{K}_i}{\|\mathbf{K}_r - \mathbf{K}_i\|}, \quad (2.97a)$$

$$\hat{\mathbf{N}}_A^{(t)}(\gamma_{A,x}^0, \gamma_{A,y}^0) = \text{sign}(k_{tz} - k_{iz}) \frac{\mathbf{K}_t - \mathbf{K}_i}{\|\mathbf{K}_t - \mathbf{K}_i\|}, \quad (2.97b)$$

où sign représente la fonction signe. Ainsi, l'angle local d'incidence χ_i , défini par l'équation (2.84), vérifie respectivement pour l'onde réfléchie et l'onde transmise la relation

$$\cos \chi_i^{0(r)} = \sqrt{\frac{1 - (\hat{k}_{rx}\hat{k}_{ix} + \hat{k}_{ry}\hat{k}_{iy} + \hat{k}_{rz}\hat{k}_{iz})}{2}}, \quad (2.98a)$$

$$\cos \chi_i^{0(t)} = \text{sign}[-k_{iz}(k_{tz} - k_{iz})] \frac{k_1 - k_2(\hat{k}_{tx}\hat{k}_{ix} + \hat{k}_{ty}\hat{k}_{iy} + \hat{k}_{tz}\hat{k}_{iz})}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_2(\hat{k}_{tx}\hat{k}_{ix} + \hat{k}_{ty}\hat{k}_{iy} + \hat{k}_{tz}\hat{k}_{iz})}}. \quad (2.98b)$$

Sous l'APS, le terme de polarisation $\mathbf{F}_{r,t}(\gamma_{A,x}^0, \gamma_{A,y}^0)$ devient indépendant des variables d'intégration x_A et y_A , et le champ diffracté s'écrit respectivement en réflexion et transmission

$$\mathbf{E}_r^\infty(\mathbf{R}) = +\frac{ik_1 E_0 e^{ik_1 R}}{2\pi R} (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{K}}_r \hat{\mathbf{K}}_r) \cdot \mathbf{F}_r(\gamma_{A,x}^0, \gamma_{A,y}^0) \iint dx_A dy_A e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_r) \cdot \mathbf{R}_A} \Xi(\mathbf{R}_A), \quad (2.99a)$$

$$\mathbf{E}_t^\infty(\mathbf{R}) = -\frac{ik_2 E_0 e^{ik_2 R}}{2\pi R} (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{K}}_t \hat{\mathbf{K}}_t) \cdot \mathbf{F}_t(\gamma_{A,x}^0, \gamma_{A,y}^0) \iint dx_A dy_A e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_t) \cdot \mathbf{R}_A} \Xi(\mathbf{R}_A), \quad (2.99b)$$

avec $\Xi(\mathbf{R}_A)$ la fonction d'illumination de la surface au point $\mathbf{R}_A$.

L'approximation de la phase stationnaire permet alors d'obtenir une expression très simple des champs diffractés. Ces équations servent de base pour le calcul des puissances diffractées par la surface rugueuse ; calcul qui est décrit ci-dessous.

2.4.2 Coefficients de diffusion dans la limite haute fréquence avec effet d'ombre

Afin de calculer la puissance diffractée en réflexion et transmission $p_{r,t} = \langle |\mathbf{E}_{r,t}^\infty|^2 \rangle / 2\eta_{1,2}$ par la surface rugueuse, l'approximation de l'optique géométrique (AOG) est utilisée. Cette

approximation haute fréquence suppose que la surface soit fortement rugueuse comparativement à la longueur d'onde. Dans ce cas, la composante cohérente $|\langle \mathbf{E}_{\mathbf{r},\mathbf{t}}^\infty \rangle|^2$ de la puissance diffractée peut être considérée comme nulle : seule la composante incohérente $\langle |\mathbf{E}_{\mathbf{r},\mathbf{t}}^\infty|^2 \rangle - |\langle \mathbf{E}_{\mathbf{r},\mathbf{t}}^\infty \rangle|^2$ subsiste.

Le calcul des puissances diffusées cohérentes, permettant la détermination d'un critère de Rayleigh *quantitatif*, se mène exactement de la même manière que dans le cas 2D. Il est aisé de constater que le paramètre d'atténuation $\mathcal{A}$ est le même en 3D qu'en 2D. Le calcul n'est donc pas présenté ici en détail par soucis de concision. Il part des équations des puissances cohérentes diffractées respectivement en réflexion et transmission

$$|\langle \mathbf{E}_{\mathbf{r}}^\infty(\mathbf{R}) \rangle|^2 = \frac{k_1^2 |E_0|^2}{4\pi^2 R^2} |(\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{F}_{\mathbf{r}}(\gamma_{A,x}^0, \gamma_{A,y}^0)|^2 |\langle I_r \rangle|^2, \quad (2.100a)$$

$$|\langle \mathbf{E}_{\mathbf{t}}^\infty(\mathbf{R}) \rangle|^2 = \frac{k_2^2 |E_0|^2}{4\pi^2 R^2} |(\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{t}} \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{t}}) \cdot \mathbf{F}_{\mathbf{t}}(\gamma_{A,x}^0, \gamma_{A,y}^0)|^2 |\langle I_t \rangle|^2, \quad (2.100b)$$

avec

$$I_{r,t} = \iint dx_A dy_A e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_{r,t}) \cdot \mathbf{R}_A} \Xi(\mathbf{R}_A), \quad (2.101)$$

pour aboutir aux équations finales

$$\sigma_{ab}^{r,coh}(\mathbf{K}_r, \mathbf{K}_i) = \frac{1}{\cos \theta_i} \frac{4\pi^2}{k_1^2 L_{A,x} L_{A,y}} |\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F}_{\mathbf{b}}(\gamma^{\mathbf{0}(\mathbf{r})})|^2 \quad (2.102a)$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_r \delta(\hat{k}_{rx} - \hat{k}_{ix}) \delta(\hat{k}_{ry} - \hat{k}_{iy}) S_{11}^2(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r), \\ \sigma_{ab}^{t,coh}(\mathbf{K}_t, \mathbf{K}_i) &= \frac{\eta_1}{\eta_2} \frac{1}{\cos \theta_i} \frac{4\pi^2}{k_2^2 L_{A,x} L_{A,y}} |\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{F}_{\mathbf{b}}(\gamma^{\mathbf{0}(\mathbf{t})})|^2 \quad (2.102b) \\ & \mathcal{A}_t \delta\left(\hat{k}_{tx} - \frac{k_1}{k_2} \hat{k}_{ix}\right) \delta\left(\hat{k}_{ty} - \frac{k_1}{k_2} \hat{k}_{iy}\right) S_{12}^2(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t), \end{aligned}$$

avec $\gamma^{\mathbf{0}(\mathbf{r},\mathbf{t})}$ le vecteur de coordonnées $(\gamma_x^{0(r,t)}, \gamma_y^{0(r,t)})$.

Sous l'AOG, en négligeant la puissance cohérente, la puissance diffusée s'écrit alors

$$\langle |\mathbf{E}_{\mathbf{r}}^\infty(\mathbf{R})|^2 \rangle = \frac{k_1^2 |E_0|^2}{4\pi^2 R^2} |(\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{F}_{\mathbf{r}}(\gamma_{A,x}^0, \gamma_{A,y}^0)|^2 \langle I_r I_r^* \rangle, \quad (2.103a)$$

$$\langle |\mathbf{E}_{\mathbf{t}}^\infty(\mathbf{R})|^2 \rangle = \frac{k_2^2 |E_0|^2}{4\pi^2 R^2} |(\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{t}} \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{t}}) \cdot \mathbf{F}_{\mathbf{t}}(\gamma_{A,x}^0, \gamma_{A,y}^0)|^2 \langle I_t I_t^* \rangle, \quad (2.103b)$$

avec

$$\langle I_{r,t} I_{r,t}^* \rangle = \left\langle \iiint d\mathbf{r}_A d\mathbf{r}'_A e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_{r,t}) \cdot (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}'_A)} e^{i(k_{iz} - k_{rz,tz})(\zeta_A - \zeta'_A)} \Xi(\mathbf{R}_A) \Xi(\mathbf{R}'_A) \right\rangle, \quad (2.104)$$

où $\mathbf{R}_A = (\mathbf{r}_A, \zeta_A)$ avec $\mathbf{r}_A = (x_A, y_A)$, et $\mathbf{k}_{i,r,t} = (k_{ix,rx,tx}, k_{iy,ry,ty})$.

Le calcul du coefficient de diffusion en réflexion et en transmission sous l'AOG est mené dans l'annexe C. Il permet de montrer que le coefficient de diffusion pour une onde incidente de polarisation $\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{i}}$, et une onde diffusée de polarisation $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{s}}$, s'écrit respectivement en réflexion et transmission

$$\sigma_{ab}^r(\mathbf{K}_r, \mathbf{K}_i) = \frac{1}{\cos \theta_i} |\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F}_{\mathbf{b}}(\gamma^{\mathbf{0}(\mathbf{r})})|^2 \frac{p_s(\gamma^{\mathbf{0}(\mathbf{r})})}{|\hat{k}_{rdz}|^2} S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r | \gamma^{\mathbf{0}(\mathbf{r})}), \quad (2.105a)$$

$$\sigma_{ab}^t(\mathbf{K}_t, \mathbf{K}_i) = \frac{\eta_1}{\eta_2} \frac{1}{\cos \theta_i} |\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{F}_{\mathbf{b}}(\gamma^{\mathbf{0}(\mathbf{t})})|^2 \frac{p_s(\gamma^{\mathbf{0}(\mathbf{t})})}{|\hat{k}_{tdz}|^2} S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t | \gamma^{\mathbf{0}(\mathbf{t})}). \quad (2.105b)$$

Reste à déterminer les probabilités $S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r | \gamma^{0(r)})$ et $S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r | \gamma^{0(t)})$, appelées plus communément fonctions d'ombre statistiques bistatiques, respectivement en réflexion et en transmission. Elles représentent l'extension au cas 3D des fonctions d'ombre bistatiques déterminées dans le cas 2D, et données respectivement par l'équation (2.53) et (2.58) comme suit

$$S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r | \gamma^{0(r)}) = \begin{cases} 1/[1 + \Lambda(\mu_r)] & \text{si } \theta_r \in [-\pi/2; \theta_i[\\ 1/[1 + \Lambda(\mu_i)] & \text{si } \theta_r \in [\theta_i; 0[\\ 1/[1 + \Lambda(\mu_i) + \Lambda(\mu_r)] & \text{si } \theta_r \in [0; +\pi/2] \end{cases}, \quad (2.106a)$$

$$S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t | \gamma^{0(t)}) = B[1 + \Lambda(\mu_i), 1 + \Lambda(\mu_t)]. \quad (2.106b)$$

En 3D, des calculs similaires à ceux présentés dans le cas 2D permettent d'obtenir les équations suivantes $\forall \phi \in [0; 2\pi]$ et $\forall \theta \in [0; \pi/2]$ [49, 156]

$$S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r | \gamma^{0(r)}) = \begin{cases} 1/[1 + \Lambda(\hat{\mathbf{K}}_r)] & \text{si } \{\phi_r = \phi_i + \pi, \theta_r \geq \theta_i\} \\ 1/[1 + \Lambda(\hat{\mathbf{K}}_i)] & \text{si } \{\phi_r = \phi_i + \pi, \theta_r < \theta_i\} \\ 1/[1 + \Lambda(\hat{\mathbf{K}}_i) + \Lambda(\hat{\mathbf{K}}_r)] & \text{si } \{\phi_r \neq \phi_i + \pi\} \end{cases}, \quad (2.107a)$$

$$S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t | \gamma^{0(t)}) = B[1 + \Lambda(\hat{\mathbf{K}}_i), 1 + \Lambda(\hat{\mathbf{K}}_t)], \quad (2.107b)$$

avec

$$\Lambda(\hat{\mathbf{K}}) \equiv \Lambda(\theta, \phi) = \frac{1}{\mu} \int_{\mu}^{+\infty} (\gamma_{0X} - \mu) p_s(\gamma_{0X}) d\gamma_{0X}, \quad (2.108)$$

où

$$\begin{cases} \mu = \cot \theta \\ \gamma_{0X} = \gamma_x^0 \cos \phi - \gamma_y^0 \sin \phi \\ \gamma_{0Y} = \gamma_x^0 \sin \phi + \gamma_y^0 \cos \phi \end{cases}, \quad (2.109)$$

et

$$p_s(\gamma_{0X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\gamma_{0X}, \gamma_{0Y}) d\gamma_{0Y}. \quad (2.110)$$

De même, l'expression de la fonction d'ombre en transmission exposée par Tsang dans l'équation (2.61) dans le cas 2D

$$S_{12}^T(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t | \gamma^{0(t)}) = 1/[1 + \Lambda(\mu_i) + \Lambda(\mu_t)], \quad (2.111)$$

se généralise au cas 3D sous la forme

$$S_{12}^T(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t | \gamma^{0(t)}) = 1/[1 + \Lambda(\hat{\mathbf{K}}_i) + \Lambda(\hat{\mathbf{K}}_t)]. \quad (2.112)$$

Les propriétés générales du modèle, présentées également dans le Topical Review de Elfouhaily et al. [78], tableau 3, sont identiques dans le cas 3D que dans le cas 2D. En revanche, il peut être intéressant d'étudier la conservation d'énergie dans le cas 3D et de la comparer avec le cas 2D.

2.4.3 Conservation d'énergie du modèle dans le cas tridimensionnel

Dans le domaine de validité de l'AOG, c'est-à-dire qualitativement pour des surfaces fortement rugueuses comparativement à la longueur d'onde, il peut être intéressant d'étudier plus en détail l'exactitude de la méthode. Pour ce faire, une étude de la conservation d'énergie de la méthode permet d'en étudier ses limites. Cette étude a été menée, dans la section précédente, pour un problème 2D. Il est donc intéressant de voir son extension à un problème 3D et d'en voir les différences.

Rappelons que pour faire cette étude, il faut se placer dans le domaine de validité de l'AOG à la fois pour l'onde diffusée en réflexion et pour l'onde diffusée en transmission. Le critère de Rayleigh en transmission étant de manière générale plus restrictif que celui en réflexion, l'étude de la conservation d'énergie du modèle peut se faire si la surface peut être considérée comme rugueuse du point de vue de l'onde transmise.

L'expression du coefficient de diffusion (pour une onde incidente de polarisation $\hat{\mathbf{b}}_i$ et une onde diffusée de polarisation $\hat{\mathbf{a}}_s$), respectivement en réflexion $\sigma_{ab}^r(\mathbf{K}_r, \mathbf{K}_i)$ et en transmission $\sigma_{ab}^t(\mathbf{K}_t, \mathbf{K}_i)$, sous l'AK réduite à l'AOG, est donnée respectivement par l'équation (2.105a) et (2.105b). La réflectivité $\mathcal{R}$ (respectivement la transmissivité $\mathcal{T}$) est définie comme le rapport entre la puissance totale diffusée en réflexion (respectivement en transmission) et la puissance totale incidente. La réflectivité et la transmissivité sont données par

$$\mathcal{R}_b(\hat{\mathbf{K}}_i) \equiv \mathcal{R}_b(\theta_i, \phi_i) = \sum_a \int_0^{\pi/2} \sin \theta_r d\theta_r \int_0^{2\pi} \sigma_{ab}^r(\mathbf{K}_r, \mathbf{K}_i) d\phi_r, \quad (2.113a)$$

$$\mathcal{T}_b(\hat{\mathbf{K}}_i) \equiv \mathcal{T}_b(\theta_i, \phi_i) = \sum_a \int_0^{\pi/2} \sin \theta_t d\theta_t \int_0^{2\pi} \sigma_{ab}^t(\mathbf{K}_t, \mathbf{K}_i) d\phi_t. \quad (2.113b)$$

Ces deux grandeurs dépendent de la polarisation de l'onde incidente, notée par l'indice b , et de la direction d'incidence, notée par $\hat{\mathbf{K}}_i$ ou par le couple (θ_i, ϕ_i) . L'étude de la conservation d'énergie consiste alors à comparer le facteur de conservation d'énergie η , défini par

$$\eta \equiv \eta_b(\theta_i, \phi_i) = \mathcal{R}_b(\theta_i, \phi_i) + \mathcal{T}_b(\theta_i, \phi_i) \quad (2.114)$$

avec 1.

2.4.3.1 Cas d'un milieu inférieur parfaitement conducteur

Pour une surface parfaitement conductrice (PC), le facteur de conservation d'énergie $\eta_b(\theta_i, \phi_i) = \mathcal{R}_b(\theta_i, \phi_i)$, et il est possible d'obtenir une expression analytique simple de η . Pour un angle d'incidence nul $\theta_i = 0^\circ$, on peut montrer pour une statistique gaussienne isotrope et en négligeant l'effet d'ombre que

$$\eta_b(\theta_i = 0^\circ, \phi_i; \sigma_s) = 1 - \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_s^2}\right), \quad (2.115)$$

ce qui implique

$$\sigma_s = \frac{1}{\sqrt{-2 \ln [1 - \eta_b(\theta_i = 0^\circ, \phi_i)]}}. \quad (2.116)$$

En incidence normale, pour un facteur de conservation d'énergie $\eta(0^\circ, \phi_i) > 0.99$, il faut que l'écart type des pentes $\sigma_s < 0.330$ ($\sigma_s < 0.388$ pour le cas 2D), et pour $\eta(0^\circ, \phi_i) > 0.999$, il faut $\sigma_s < 0.269$ ($\sigma_s < 0.304$ pour le cas 2D). Ainsi, le facteur de conservation d'énergie est d'autant meilleur que l'écart type des pentes est faible, puisque le phénomène de réflexions multiples contribue à la puissance diffusée pour un écart type des pentes élevé. Ce calcul est intéressant puisqu'il permet de donner, en fonction de la précision exigée sur η , l'écart type des pentes au-delà duquel le phénomène de réflexions multiples doit être pris en compte. De plus, par comparaison avec le cas 2D, il est intéressant de constater que le domaine de validité est plus restreint.

Sur la figure 2.23 est représenté le facteur de conservation d'énergie η en fonction de θ_i (ϕ_i est fixe et égal à 0°) d'une surface PC (dans ce cas, les polarisations H et V sont égales) de

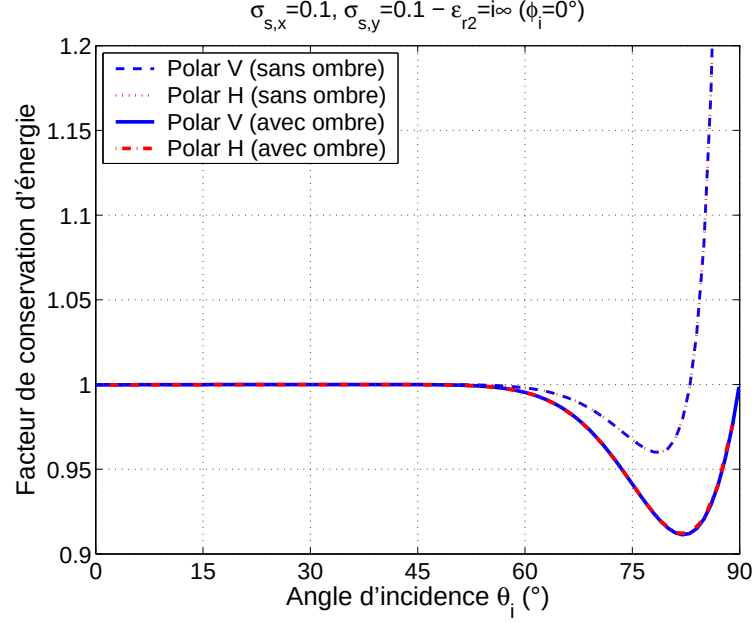


FIG. 2.23 – Facteur de conservation d'énergie d'une surface PC caractérisée par $\sigma_{sx} = \sigma_{sy} = 0.1$, sans ombre et avec ombre.

statistique gaussienne et isotrope, avec un écart type des pentes $\sigma_{sx} = \sigma_{sy} \equiv \sigma_s = 0.1$. Comme pour le cas 2D, nous pouvons observer un bon facteur de conservation d'énergie du modèle pour des angles d'incidence modérés, sans ou avec prise en compte de l'effet d'ombre. Cependant, pour le modèle sans ombre, η diverge pour des incidences rasantes $\theta_i \rightarrow 90^\circ$, tandis que pour le modèle avec ombre, η tend vers 1 quand $\theta_i \rightarrow 90^\circ$. Ceci met en évidence l'importance de la prise en compte de l'effet d'ombre dans le modèle développé, basé sur l'AK et réduit à l'AOG, pour des angles rasants. Si ce phénomène n'est pas pris en compte, la puissance diffusée par la surface est surévaluée, et le facteur de conservation d'énergie diverge pour des incidences rasantes. Ainsi, pour le modèle avec ombre, η est toujours inférieur à 1.

Pour des incidences élevées, pour le modèle avec ombre η diminue lorsque θ_i augmente pour atteindre un minimum à $\theta_{i,m} \approx 82^\circ$, puis augmente et tend vers 1 pour $\theta_i \rightarrow 90^\circ$. Ceci est dû au phénomène de réflexions multiples par la surface rugueuse, qui contribue pour des angles de diffusion rasants [43, 124, 125, 126, 127]. En effet, pour le modèle avec ombre, qui ne prend pas en compte les réflexions multiples, η est toujours inférieur à 1. Quand θ_i augmente, la contribution des réflexions multiples augmente. Cependant, après un certain angle θ_i , cette contribution diminue : l'incidence est tellement élevée que la probabilité que l'onde soit réfléchi plusieurs fois successivement par la surface est faible. Ainsi, cette contribution s'annule lorsque $\theta_i \rightarrow 90^\circ$. Ceci a été confirmé par l'étude de la conservation d'énergie du modèle prenant en compte le phénomène de double réflexion, présenté dans la littérature en 2D [124] et en 3D [125, 126], qui donne pour cette configuration un facteur de conservation d'énergie très proche de 1 pour tous les angles d'incidence.

Pour résumer, les mêmes conclusions que pour le cas 2D peuvent être tirées, et les valeurs typiques de la courbe avec ombre sont similaires pour cette valeur de l'écart type des pentes. Sur la figure 2.24 est représentée la configuration où $\sigma_{sx} = \sigma_{sy} \equiv \sigma_s = 0.3$. Les mêmes remarques que pour le cas 2D peuvent être faites. Cette fois cependant, la différence des niveaux des courbes est significative : l'angle d'incidence limite $\theta_{i,l}$ au-delà duquel le facteur de conservation d'énergie

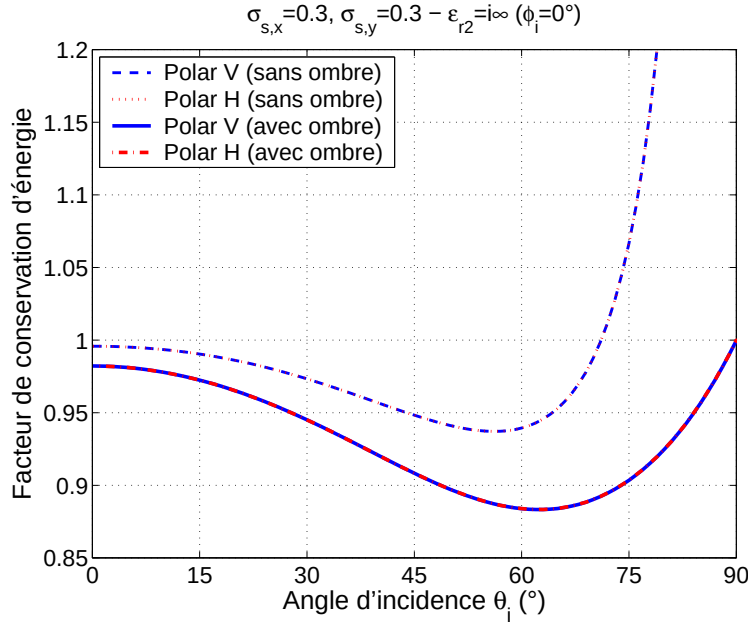


FIG. 2.24 – Facteur de conservation d'énergie d'une surface PC caractérisée par $\sigma_{sx} = \sigma_{sy} = 0.3$, sans ombre et avec ombre.

$\eta > 0.99$ vaut $\theta_{i,l} \simeq 13.1^\circ$ en 2D et $\theta_{i,l} = 0^\circ$ en 3D. De même, si la valeur de l'angle pour lequel η est minimal est sensiblement le même ($\theta_{i,m} \approx 82^\circ$), la valeur associée du minimum est $\eta_m \simeq 0.907$ en 2D et $\eta_m \simeq 0.88$ en 3D.

TAB. 2.5 – Valeurs caractéristiques pour un milieu inférieur parfaitement conducteur

$\sigma_{sx,sy}$	0.05	0.1	0.2	0.3	0.35
$\theta_{i,l}$	77°	64°	35°	0°	0°
$\theta_{i,m} (\eta_m)$	$86^\circ (0.91)$	$82^\circ (0.91)$	$73^\circ (0.90)$	$62^\circ (0.88)$	$56^\circ (0.87)$

D'autres simulations aboutissent aux mêmes conclusions. Le tableau 2.5 regroupe les valeurs typiques de la courbe avec ombre pour différents valeurs des écarts types des pentes, pour le cas isotrope ($\sigma_{sx} = \sigma_{sy}$). Ainsi, pour une surface PC, la différence entre le cas 2D et le cas 3D est faible pour des écarts types des pentes faibles, de l'ordre de $\sigma_s < 0.2$, mais elle augmente ensuite de manière exponentielle.

2.4.3.2 Cas d'un milieu inférieur diélectrique sans pertes

Considérons maintenant le cas d'un milieu inférieur diélectrique sans pertes, tel que $\epsilon_{r2} \in \mathbb{R}$. Une étude de la conservation d'énergie dans ce cas permet alors d'étudier l'influence de la valeur de la permittivité ϵ_{r2} , mais aussi de la polarisation, sur le domaine de validité du modèle, et par comparaison avec le cas 2D.

La figure 2.25 montre le facteur de conservation d'énergie pour un milieu inférieur diélectrique de permittivité relative $\epsilon_{r2} = 4$, et pour une surface d'écart type des pentes $\sigma_{sx} = \sigma_{sy} = 0.1$ sur la figure de gauche et $\sigma_{sx} = \sigma_{sy} = 0.3$ sur la figure de droite. Le cas sans ombre est tracé en ligne bleue discontinue pour la polarisation V et en pointillés rouges pour la polarisation H.

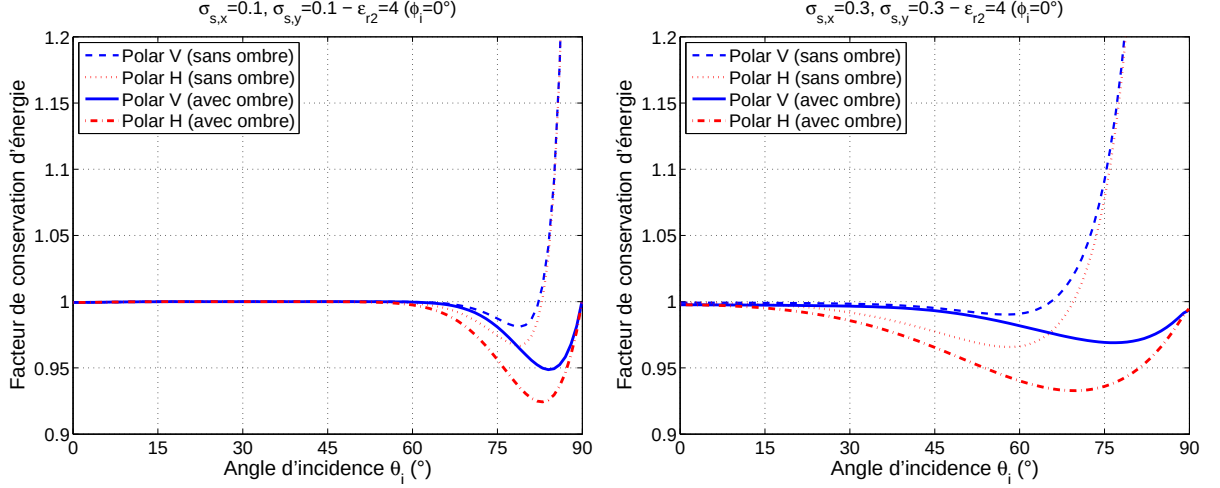


FIG. 2.25 – Facteur de conservation d'énergie d'une surface de permittivité relative $\epsilon_{r2} = 4$ caractérisée par $\sigma_{sx} = \sigma_{sy} = 0.1$ sur la figure de gauche et $\sigma_{sx} = \sigma_{sy} = 0.3$ sur la figure de droite, sans ombre et avec ombre.

TAB. 2.6 – Valeurs caractéristiques pour un milieu inférieur de permittivité relative $\epsilon_{r2} = 4$

$\sigma_{sx,sy}$	0.05	0.1	0.2	0.3	0.35
$\theta_{i,l} (V)$	80°	72°	62°	51°	40°
$\theta_{i,l} (H)$	78°	67°	45°	24°	6°
$\theta_{i,m} (\eta_m) (V)$	86° (0.94)	84° (0.95)	80° (0.96)	77° (0.97)	76° (0.97)
$\theta_{i,m} (\eta_m) (H)$	86° (0.92)	83° (0.92)	76° (0.93)	70° (0.93)	67° (0.93)

Le cas avec ombre utilisant la fonction d'ombre en transmission exposée ici est tracé en ligne bleue continue pour la polarisation V et en traits-points rouges pour la polarisation H . Les mêmes observations que pour le cas 2D peuvent être faites, et les courbes sont similaires pour $\sigma_{sx} = \sigma_{sy} = 0.1$, tandis que pour $\sigma_{sx} = \sigma_{sy} = 0.3$, les courbes diffèrent quelque peu. En 3D, les niveaux sont un peu plus faibles du fait du phénomène de réflexions multiples qui est plus important, puisque l'énergie incidente est dispersée par la surface dans l'espace, et non dans le plan comme en 2D. Notons que cette différence est moindre que pour le cas PC, puisque le phénomène de réflexions multiples est moindre pour $\epsilon_{r2} = 4$ que pour le cas PC. Les mêmes conclusions peuvent être faites pour différentes valeurs des écarts types des pentes.

Le tableau 2.6 regroupe les valeurs typiques de la courbe avec ombre, en polarisations V et H , pour différentes valeurs des écarts types des pentes, pour le cas isotrope ($\sigma_{sx} = \sigma_{sy}$). Ainsi, pour une surface de permittivité relative $\epsilon_{r2} = 4$, la différence entre le cas 2D et le cas 3D est faible pour des écarts types des pentes faibles, de l'ordre de $\sigma_s < 0.2$ à 0.3, mais elle augmente ensuite de manière exponentielle.

De même, les tableaux 2.7 et 2.8 regroupent les valeurs typiques de la courbe avec ombre, respectivement pour $\epsilon_{r2} = 2$ et $\epsilon_{r2} = 53$. Les mêmes remarques que pour le cas 2D peuvent être formulées, et les courbes donnent des résultats similaires pour des faibles écarts types des pentes; l'écart entre les courbes augmente ensuite fortement avec l'accroissement des écarts types des pentes. Remarquons que pour $\epsilon_{r2} = 53$, en polarisation V le facteur de conservation d'énergie η reste proche de 1, même pour des écarts types des pentes relativement élevés (de

TAB. 2.7 – Valeurs caractéristiques pour un milieu inférieur de permittivité relative $\epsilon_{r2} = 2$

$\sigma_{sx,sy}$	0.05	0.1	0.2	0.3	0.35
$\theta_{i,l}(V)$	79°	71°	60°	50°	45°
$\theta_{i,l}(H)$	78°	68°	51°	36°	28°
$\theta_{i,m}(\eta_m)(V)$	85° (0.95)	84° (0.94)	80° (0.96)	79° (0.96)	—° (—)
$\theta_{i,m}(\eta_m)(H)$	85° (0.94)	83° (0.93)	78° (0.94)	74° (0.95)	—° (—)

 TAB. 2.8 – Valeurs caractéristiques pour un milieu inférieur de permittivité relative $\epsilon_{r2} = 53$

$\sigma_{sx,sy}$	0.05	0.1	0.2	0.3	0.35	0.4
$\theta_{i,l}(V)$	83°	81°	51°	0°	0°	0°
$\theta_{i,l}(H)$	77°	64°	37°	0°	0°	0°
$\theta_{i,m}(\eta_m)(V)$	86° (0.97)	86° (0.98)	84° (0.99)	44° (0.97)	36° (0.96)	18° (0.94)
$\theta_{i,m}(\eta_m)(H)$	84° (0.93)	82° (0.91)	74° (0.91)	64° (0.91)	58° (0.90)	51° (0.89)

l'ordre de $\sigma_{sx,sy} = 0.4$). Nous pouvons d'ailleurs constater que le minimum de η est plus élevé pour $\sigma_{sx,sy} = 0.2$ que pour $\sigma_{sx,sy} = 0.05$ et 0.1 , du fait de l'angle d'incidence de Brewster (voir figure 2.26). Cette propriété physique a un intérêt pratique : elle permet d'utiliser l'AK réduite à l'AOG, en polarisation V et pour des permittivités relatives élevées (de l'ordre de 50), pour des incidences élevées et des écarts types des pentes relativement élevés (de l'ordre de $\sigma_{sx,sy} = 0.4$), avec une bonne approximation du modèle. En effet, pour ces configurations, le phénomène des réflexions multiples est relativement faible.

Ce chapitre a été consacré à l'étude de la diffraction électromagnétique par une simple interface rugueuse. Une bibliographie (non exhaustive) sur les méthodes existantes a été présentée. Puis l'étude s'est concentrée sur une de ces méthodes : l'approximation de Kirchhoff en 2D puis en 3D. Cette méthode, valide pour un rayon de courbure moyen de la surface supérieur à la longueur d'onde (pour des incidences modérées), consiste à remplacer le champ sur la surface par celui qui serait présent sur son plan tangent. Le modèle a ensuite été réduit à l'approximation de l'optique géométrique, valide pour des interfaces fortement rugueuses comparativement à la longueur d'onde, permettant de négliger la phase de l'onde. Sous cette approximation, la contribution de la puissance cohérente peut être négligée. Son calcul permet alors de donner un domaine de validité quantitatif du modèle développé. L'effet d'ombre, à la fois en réflexion et en transmission (pour lequel une nouvelle fonction d'ombre en transmission a été développée), a été pris en compte dans le modèle afin d'en corriger ses défauts pour des angles rasants. Enfin, une étude de la conservation d'énergie a permis de cerner plus précisément les configurations où le phénomène de diffusion multiple peut être négligé.

Ainsi, une étude approfondie de l'approximation de Kirchhoff réduite à l'approximation de l'optique géométrique a été menée. Dans le chapitre suivant, après une présentation bibliographique sur le cas d'empilement de surfaces rugueuses, et une nouvelle méthode est développée. Celle-ci est basée sur l'extension de l'approximation de Kirchhoff au cas de deux surfaces rugueuses, méthode qui est réduite à l'approximation de l'optique géométrique pour obtenir des résultats numériques rapides.

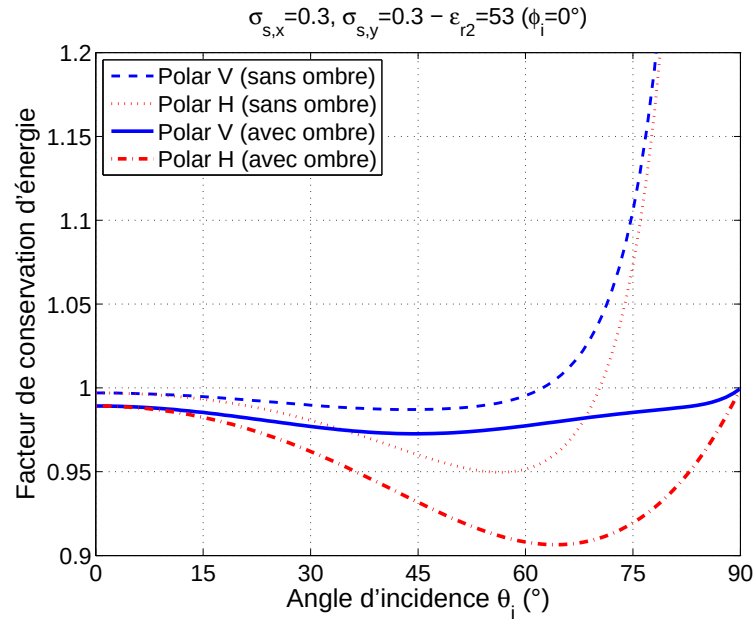


FIG. 2.26 – Facteur de conservation d'énergie d'une surface de permittivité relative $\epsilon_{r2} = 53$ caractérisée par $\sigma_{sx} = \sigma_{sy} = 0.3$, sans ombre et avec ombre.

Chapitre 3

Diffusion par deux interfaces fortement rugueuses superposées

Ce chapitre est consacré à l'étude de la diffraction électromagnétique par des *couches* rugueuses homogènes, c'est-à-dire des empilements de surfaces séparant des milieux homogènes, dont l'une au moins est rugueuse. Un état de l'art des méthodes existantes est présenté, tout d'abord en abordant les méthodes numériques, puis surtout en se concentrant sur les méthodes analytiques. Ceci permet de constater qu'à notre connaissance, aucun modèle basé sur l'extension de l'AK au cas de plusieurs interfaces rugueuses n'a été développé.

Ensuite, l'étude se concentre sur l'extension de l'AK au cas de deux interfaces rugueuses monodimensionnelles (pour un problème 2D), afin de calculer le champ diffracté. Puis, le nouveau modèle développé est simplifié en utilisant l'AOG sur chacune des deux interfaces rugueuses, réduisant le domaine de validité du modèle à des interfaces fortement rugueuses comparativement à la longueur d'onde. Le cas d'une surface inférieure plane est également traité. Des simulations numériques par comparaison avec une méthode numérique de référence permettent de valider le modèle dans la limite haute fréquence, et une application à la détection de nappe de pétrole sur la mer est présentée. Enfin, le modèle est étendu au cas 3D, pour lequel des simulations numériques sont mises en oeuvre pour le cas d'une interface inférieure plane.

3.1 Bibliographie sur les méthodes existantes

L'étude de la diffraction électromagnétique par des couches rugueuses a de nombreuses applications, dans des domaines divers : notamment en télédétection, en optique, en tomographie, et dans les industries du papier, des peintures et des vernis ; mais aussi potentiellement dans l'évaluation non destructive et du contrôle de qualité des MMIC (Microwave Monolithic Integrated Circuits) multi-couches, dans la propagation (guidée ou non) et la communication micro-ondes, etc. [157, 158, 159].

En télédétection, elle permet de manière générale l'étude de la structure géologique des surfaces sondées [157, 160, 13]. Elle s'applique par exemple à la détection de sable sur du granit [118], de nappes de pétrole sur la mer [161, 15, 162, 163, 164, 165, 166, 39], ainsi que d'émulsions de pétrole sur la mer [167, 168, 169]. Pour des milieux inhomogènes, elle s'applique à la détection micro-ondes de glace sur la mer (ou de glace recouverte de neige sur la mer) [170, 171, 172, 173, 174, 175, 176] et de glace et/ou de neige [177, 50, 178, 158] sur d'autres surfaces naturelles. En

optique, elle s'applique par exemple pour le traitement de surfaces anti-reflets [179, 180, 181, 182], la caractérisation de matériaux optiques [56, 183, 184] par l'étude de sa structure [185, 186, 57], la détermination de l'indice optique ou de l'épaisseur de couches minces [184, 187] ainsi que de l'écart type des hauteurs des rugosités [186], ou l'étude de défauts superficiels et internes des couches minces [41, 188]. En tomographie [189, 190, 191], elle permet par exemple de détecter une tumeur (notamment pour le cancer du sein). En industrie du papier [192], des peintures et des vernis [193, 194, 195, 196], dans le domaine optique (pour lequel le milieu est alors inhomogène), elle permet d'étudier les caractéristiques du matériau fabriqué, afin d'en détecter d'éventuels défauts par exemple.

L'étude de tels systèmes peut se faire au moyen soit de modèles rigoureux, dits "exactes", soit de modèles approchés ou *asymptotiques*. Les modèles rigoureux permettent de valider les modèles approchés dans leur domaine de validité supposé. Ainsi, l'utilisation de modèles asymptotiques permet de réduire considérablement le temps de calcul par rapport aux modèles rigoureux, qui de plus nécessitent un espace mémoire important¹. Les modèles rigoureux sont d'abord présentés succinctement, avant une présentation plus détaillée des modèles asymptotiques.

3.1.1 Modèles rigoureux

Les modèles rigoureux dits "exactes" traitant de la diffusion par des couches rugueuses ont recours à des méthodes de résolution numériques, dites elles aussi "exactes". Pour plus de détails le lecteur pourra se référer à [36]. Assez peu de méthodes existent pour ce cas de figure. La grande majorité des méthodes développées sont des méthodes intégrales, dont le champ d'application est limité à des milieux homogènes². L'inconvénient majeur de ces méthodes est le nombre d'inconnues à traiter lors de la résolution numérique du problème étudié, impliquant un temps de calcul prohibitif. C'est la raison pour laquelle seules quelques méthodes numériques exactes ont été développées [197, 111, 198, 118], mais n'ont pas beaucoup été réutilisées [32, 69, 199]. Elles ont permis de mettre en évidence certains phénomènes cohérents [32], comme les pics de rétro-diffusion, en réflexion [197, 198, 199] mais aussi en transmission [200, 201, 202, 111], et les "pics satellitaires" [32, 69, 203, 204, 199].

Afin de s'affranchir de cet inconvénient, une méthode numérique exacte et performante a récemment été développée [36, 205], permettant de résoudre des problèmes à grand nombre d'inconnues de manière rapide. Cette méthode, appelée méthode PILE par ses auteurs³, a pour intérêt d'être de formulation simple, et a une interprétation physique simple. De plus, elle permet d'employer les méthodes rapides existant pour le cas d'une simple interface rugueuse. Validée par comparaison avec des méthodes numériques de la littérature, elle constitue alors une méthode de référence performante pour traiter le cas de couches rugueuses.

3.1.2 Modèles asymptotiques

Les modèles asymptotiques traitant de la diffusion par des couches (ou des empilements de couches) rugueuses peuvent utiliser des méthodes numériques ou analytiques. L'attention est portée ici sur les méthodes analytiques. Quelques méthodes numériques asymptotiques ont été

¹Ceci était vrai pour le cas simple interface ; ceci est d'autant plus vrai pour le cas double interface, pour lequel les méthodes numériques impliquent bien souvent un temps de calcul prohibitif.

²Quelques méthodes numériques développées permettent de prendre en compte des milieux hétérogènes : voir principalement [178] et les références associées.

³pour Propagation-Inside-Layer Expansion method

développées pour ce cas de figure. Citons notamment des méthodes basées sur la théorie du transfert radiatif [164, 165, 168], sur l'approximation de Kirchhoff [206, 207, 36], et des méthodes de tracé de rayon [66].

De même que pour le cas simple interface, parmi les méthodes analytiques peuvent se distinguer les méthodes basse fréquence, haute fréquence, et unifiées (sensées pouvoir s'appliquer à la fois en basse et haute fréquences). Cependant, pour le cas de couches rugueuses, les modèles développés sont complexes. Leur domaine de validité présumé, sensé correspondre a priori à celui du cas simple interface, n'est pas toujours clairement établi ou même étudié. Ceci peut être attribué d'une part à la difficulté d'utilisation de méthodes numériques exactes pour ce type de configurations, permettant de valider le modèle, et d'autre part à la complexité et la diversité des phénomènes physiques mis en jeu pour le cas de couches rugueuses. En effet, pour le cas d'une couche rugueuse composée d'une ou deux interfaces faiblement rugueuses, de nombreux phénomènes d'interférences ont pu être mis en évidence. Ce sont des phénomènes analogues à ceux liés aux interféromètres à division d'amplitude rencontrés en optique [8, 208], ou différents : les franges de Selényi, les franges de Quételet [209, 210, 211], un pic de rétro-diffusion [210, 211, 212, 213, 214], et des "pics satellitaires" [77, 214]. Ce domaine de recherche offre donc de nombreuses perspectives d'avenir : par exemple, le cas de la transmission de l'onde à travers la (ou les) couche(s) a très peu été étudié [215, 216].

Voyons donc un panorama des méthodes analytiques s'appliquant au cas de couches rugueuses : tout d'abord les méthodes perturbatives, puis les méthodes basées sur l'approximation de Kirchhoff, et enfin les méthodes dites "unifiées". Dans chacun des cas, nous évoquons tout d'abord les méthodes où une seule interface est rugueuse, avant de développer les méthodes où toutes les surfaces sont rugueuses. L'étude se focalise principalement sur les milieux homogènes, puisque c'est le cas qui nous intéresse ici.

3.1.2.1 Méthodes perturbatives

Les méthodes perturbatives ont été développées à partir des années 70. Des travaux, initiés par Krishen [217], se sont intéressés au cas où une seule des deux surfaces est rugueuse, parmi lesquels [209, 158]. Ils ont permis de mettre en évidence différents phénomènes cohérents [218, 209], comme évoqué précédemment.

Les méthodes perturbatives décrivant la diffraction par un empilement de surfaces rugueuses ont débuté avec Elson [219] pour le cas d'une simple couche de surfaces rugueuses, à partir de travaux pour le cas simple interface [73, 220]. Il étendit le modèle au cas de multicouches à interfaces rugueuses [221, 222]. Ce modèle ne prend pas en compte les réflexions multiples à l'intérieur des différentes couches, puisque ce modèle est basé sur une théorie des petites perturbations au premier ordre. Elson a pris en compte la corrélation entre les surfaces rugueuses [223]. Ces travaux ont été poursuivis par d'autres auteurs, dont [224, 157, 225, 226, 227, 228, 229, 230]. Cette configuration a été très étudiée pour des applications optiques [231, 180, 185, 232, 233].

Une approche similaire à l'extension de la SPM au cas d'empilements de surfaces rugueuses est l'extension des équations réduites de Rayleigh (RRE) [76, 234] à une couche rugueuse composée d'une interface rugueuse [199, 77], puis de deux interfaces rugueuses décorrélées [235, 214, 29]. Soubret [29] a également traité le cas de milieux inhomogènes.

Une alternative à ces deux approches est la généralisation de la théorie du champ moyen (MFT, Mean Field Theory) [236] à une couche rugueuse où seule l'interface supérieure est rugueuse [237, 238]. Ce modèle est performant pour des faibles longueurs de corrélation et écarts

types des hauteurs de la surface (typiquement de l'ordre du tiers de la longueur d'onde) [78]. Il est basé sur le principe que des modèles dits du “milieu effectif” développés antérieurement [239, 240].

D'autres modèles ont été développés pour une couche rugueuse composée de deux surfaces rugueuses : la surface supérieure est faiblement rugueuse de rugosité à courte échelle, modélisée par la SPM, et la surface inférieure est de rugosité à longue échelle, pouvant être faiblement voire modérément rugueuse [241, 242, 212, 213, 23]. Ainsi, la surface inférieure modifie fortement les phénomènes d'interférences observés pour une interface inférieure plane [218, 209, 210, 211].

3.1.2.2 Méthodes basées sur l'approximation de Kirchhoff

Les méthodes basées sur l'approximation de Kirchhoff (du plan tangent) et appliquées à des couches rugueuses ont été développées à partir des années 70. Quelques modèles ont été développés pour le cas où une seule des deux interfaces est rugueuse et modélisée par l'AK : Krishen [243] a développé un modèle où l'interface supérieure est plane et l'interface inférieure rugueuse, et supposée en champ lointain de l'interface supérieure. Les phénomènes d'ombrage et de diffusion multiple par l'interface rugueuse sont négligés. Le modèle est simplifié en supposant la composante cohérente de la puissance diffractée négligeable, réduisant la validité du modèle au cas où l'interface inférieure est fortement rugueuse comparativement à la longueur d'onde. Cependant, aucun résultat numérique n'est présenté. Yin et al. ont étudié la puissance cohérente diffractée (en réflexion et transmission) en incidence normale par une couche rugueuse, où seule la surface supérieure est rugueuse et peut être modélisée par l'AK [186, 57]. Aziz [244] a utilisé une démarche similaire, mais plus élaborée, pour les cas où la surface rugueuse est la surface supérieure ou la surface inférieure, permettant d'étendre la validité du modèle à des rugosités plus élevées. A noter également les travaux purement théoriques de Pimenov et al. [245].

Quelques modèles ont également été développés pour le cas de couches rugueuses, où toutes les interfaces sont rugueuses, et modélisées en utilisant l'AK. Ohlidal et al. [215] a développé un modèle pour une couche rugueuse appliqué à des films minces. Basé sur l'AK, ce modèle néglige les phénomènes d'ombrage et de diffusion multiple par une même interface, réduisant son domaine de validité à de faibles écarts types des pentes. Deux cas de figures sont étudiés : le cas de deux surfaces identiques, puis de deux surfaces indépendantes (géométriquement et donc) statistiquement. L'épaisseur de la couche étant mince, le modèle n'est applicable que pour des faibles rugosités des surfaces relativement à la longueur d'onde. L'étude est menée en incidence normale par rapport au plan moyen, en approximant les coefficients de réflexion et de transmission par ceux d'interfaces parfaitement lisses. Sous cette approximation, les puissances cohérente et incohérente sont calculées⁴. Ohlidal et al. [240] ont étendu ce modèle au cas de la transmission et pour le cas de surfaces corrélées. Notons également les travaux de Pimenov et al. [246], qui semblent avoir un domaine de validité plus large, avec une corrélation quelconque entre les surfaces ; cependant ces travaux restent purement théoriques.

Pour le cas multicouche, Eastman [216] a publié le premier des résultats sous l'approximation scalaire, en utilisant un formalisme matriciel. Ces travaux ont traité les cas de surfaces identiques ou décorréliées ; Carniglia [247] a étendu ce formalisme au cas de surfaces corrélées. Cependant cette méthode est complexe à exploiter pour des résultats numériques. Ohlidal [248, 240, 249] a développé un modèle beaucoup plus simple, permettant d'obtenir aisément des résultats nu-

⁴Cette approximation permet de simplifier le calcul de la puissance incohérente, mais réduit le domaine de validité du modèle à de très faibles rugosités et écarts types des types. De plus, elle implique que le modèle ne prend pas en compte la polarisation de l'onde : cette approximation est alors communément appelée *approximation scalaire* [29, 128]

mériques. D'autres modèles similaires ont également été publiés pour les cas mono- et multicouches [240].

Bourlier a développé un modèle d'émission et de réflexion par un film fin composé de surfaces rugueuses 2D anisotropes pour des applications optiques, basé sur l'AK [39]. Les interfaces sont supposées identiques, réduisant la validité du modèle pour des épaisseurs inférieures au millimètre. Les réflexions à l'intérieur de la couche sont modélisées par un coefficient de réflexion équivalent, comme pour le cas de l'approximation scalaire. Ce modèle est développé pour des applications à des nappes de pétrole sur la mer, et est réduit à l'approximation de l'optique géométrique, valide pour des surfaces fortement rugueuses comparativement à la longueur d'onde.

3.1.2.3 Méthodes “unifiées”

Bahar et al. ont développé pendant plus de 30 ans une méthode unifiée appelée full wave model (FWM) pour le cas d'une simple interface rugueuse. Il a ensuite étendu ce modèle à une couche rugueuse où seule la surface supérieure [250, 251] ou inférieure [252] est rugueuse, puis au cas de deux interfaces rugueuses [253] (des travaux antérieurs, purement théoriques, se sont même intéressés au cas multicouche avec des milieux inhomogènes [254]). Des simulations ont été présentées en configuration monostatique, et pour des surfaces dont l'écart type des hauteurs est inférieur à la longueur d'onde [255], mais sans validation avec une méthode numérique de référence.

D'autres méthodes au domaine de validité large ont également été développées pour des milieux homogènes : citons notamment [256, 257, 258, 259]. Cependant, ces méthodes sont complexes à mettre en oeuvre : soit aucune simulation n'est présentée [256, 257], soit le problème se concentre sur des cas simples, comme par exemple des surfaces périodiques [258, 259].

Voyons maintenant un aperçu des méthodes unifiées pour des milieux inhomogènes. Le modèle le plus connu, couramment utilisé en télédétection [13, 50, 260], est basé sur l'integral equation method (IEM) développé par Fung et al. [261, 50]. Ce modèle n'est pas à proprement parler une extension de l'IEM au cas de couches rugueuses. En effet, le modèle utilise la théorie du transfert radiatif pour décrire la propagation de l'énergie d'une surface à l'autre (ou une autre) dans le milieu inhomogène, et la diffraction par chaque interface est calculée par l'IEM : ce modèle peut donc être appelé la méthode du transfert radiatif (radiative transfer method, RTM) [13]. Tjuatja et al. [172] ont présenté des résultats numériques du coefficient de diffusion monostatique d'une couche de deux interfaces rugueuses séparées par un milieu inhomogène, modélisé par un ensemble de sphères distribuées de manière aléatoire. Ses auteurs ont apporté par la suite des améliorations au modèle [262, 260]. Cependant, cette approche semble être difficile à implémenter numériquement, et demande un temps de calcul très important.

Un inconvénient de la RTM est qu'elle décrit la propagation de l'énergie, donc ne conserve pas l'information de phase du champ électrique. Ainsi, elle n'est pas adaptée en tant que telle pour étudier les phénomènes ondulatoires comme par exemple les interférences [263, 264, 265, 266, 267]. C'est pourquoi Mudaliar a développé une approche unifiée (unified approach, UA) dans laquelle les diffractions de surface et de volume sont décrites de manière conjointe et unifiée [265, 266, 267, 268]. Cependant, elle est en conséquence complexe à mettre en oeuvre.

D'autres méthodes au domaine de validité large ont également été développées pour des milieux inhomogènes : voir par exemple les références des articles [269, 265]. Cependant, elles sont également complexes à mettre en oeuvre.

3.1.2.4 Bilan

Cette étude bibliographique toutefois non exhaustive permet de jauger la diversité des modèles existants, et la relativement grande quantité de la littérature existant sur le sujet. Après de nombreux travaux s'intéressant à des couches rugueuses où seule une interface est rugueuse, divers modèles ont été développés pour le cas où toutes les interfaces sont rugueuses. Les divers modèles ont été établis tout d'abord pour le cas d'une seule couche, et leur formulation a souvent été étendue au cas de plusieurs couches. La plupart traite des milieux homogènes (c'est le cadre de ce travail), mais certains autres (notamment la RTM) traitent le cas de milieux hétérogènes.

Nous pouvons constater que malgré cette diversité, à notre connaissance le cas de couches rugueuses séparant des milieux homogènes où les surfaces sont très rugueuses comparativement à la longueur d'onde est très rarement abordé. A part Bourlier [39] qui a développé un modèle valide pour un film fin composé de surfaces identiques, seuls des modèles unifiés ont présenté des résultats dans ce cas de figure [255], sans validation numérique pour cet article. Il est donc intéressant de développer une méthode analytique simple et rapide à mettre en oeuvre numériquement, valide pour des surfaces fortement rugueuses. Une comparaison avec une méthode numérique de référence [36, 205] permettra alors de valider cette méthode.

Une solution possible est d'étendre l'approximation de Kirchhoff (ou du plan tangent), qui est une méthode intuitive et simple à mettre en oeuvre, au cas de deux (ou plusieurs) interfaces rugueuses. C'est ce modèle qui est présenté ici, pour le cas d'un problème 2D dans un premier temps, puis pour le cas d'un problème 3D. Le modèle est réduit à l'approximation de l'optique géométrique, valide pour des surfaces fortement rugueuses, afin d'obtenir un modèle simple et rapide à mettre en oeuvre numériquement.

Dans un premier temps, le modèle est détaillé pour un problème 2D. Ensuite, des simulations numériques sont présentées par comparaison avec une méthode numérique de référence, permettant de valider le modèle. Une application à la détection de nappes de pétrole sur la mer est donnée. Enfin, le modèle est étendu à un problème 3D, pour lequel des simulations sont présentées pour le cas d'une interface inférieure plane.

3.2 Diffusion par deux interfaces rugueuses monodimensionnelles dans la limite haute fréquence

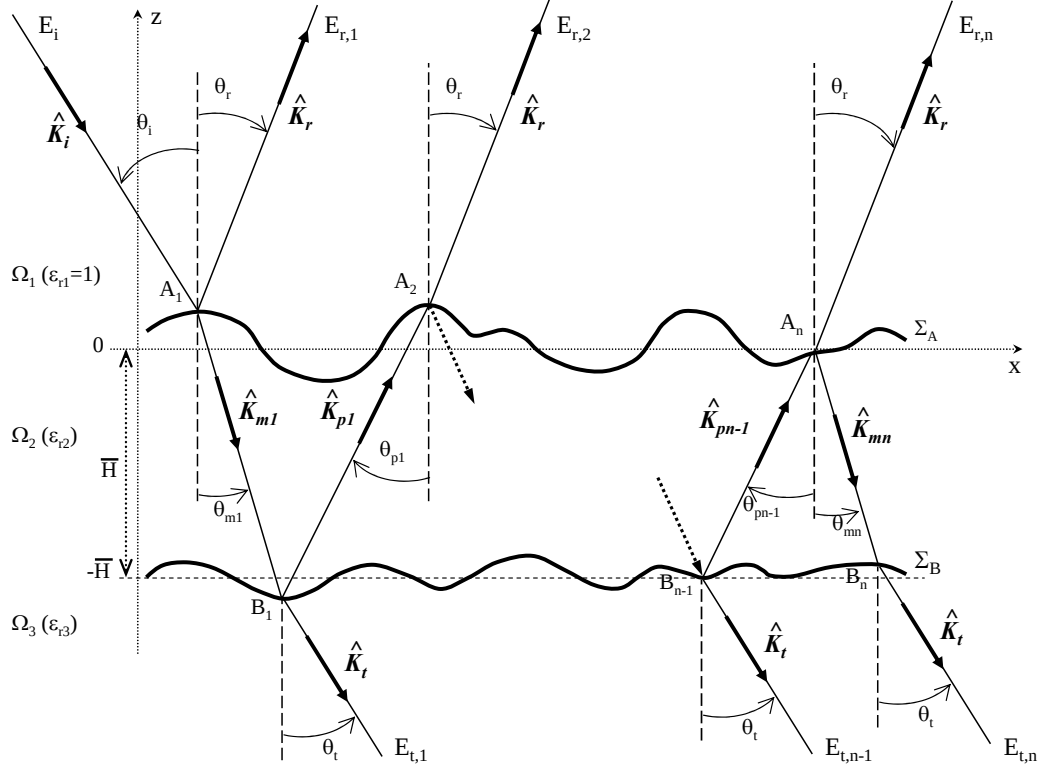


FIG. 3.1 – Diffusion multiple par deux interfaces rugueuses Σ_A et Σ_B en 2D.

Le système étudié (voir figure 3.1) est composé d'un empilement de deux interfaces rugueuses (Σ_A pour l'interface supérieure, Σ_B pour l'interface inférieure), séparées par un milieu intermédiaire homogène Ω_2 . Les trois milieux Ω_α (avec $\alpha = \{1, 2, 3\}$), de permittivité relative $\epsilon_{r\alpha}$, sont supposés non magnétiques (la perméabilité relative est égale à un, $\mu_{r\alpha} = 1$). k_α représente le nombre d'onde dans le milieu Ω_α ($k_\alpha = k_0 \sqrt{\epsilon_{r\alpha}}$, avec k_0 le nombre d'onde dans le vide). Soit E_i le champ incident dans le milieu Ω_1 , de direction $\hat{\mathbf{K}}_i = (k_{ix}, k_{iz})/|k_i| = (\hat{k}_{ix}, \hat{k}_{iz})$, et d'angle d'incidence θ_i . Le champ incident sur la surface supérieure au point A_1 est donné par $E_i(\mathbf{R}_{A_1}) = E_0 \exp(ik_1 \hat{\mathbf{K}}_i \cdot \mathbf{R}_{A_1})$ (le terme de pulsation temporelle est omis). $\mathbf{R}_{A_1} = x_{A_1} \hat{\mathbf{x}} + \zeta_{A_1} \hat{\mathbf{z}}$, avec x_{A_1} et ζ_{A_1} respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point A_1 .

Le champ transmis dans le milieu intermédiaire Ω_2 selon la direction de propagation descendante $\hat{\mathbf{K}}_{m1}$ (d'angle associé θ_{m1} , où l'indice m représente la direction descendante) est réfléchi sur la surface inférieure Σ_B au point B_1 dans la direction de propagation ascendante $\hat{\mathbf{K}}_{p1}$ (d'angle associé θ_{p1} , où l'indice p représente la direction ascendante), et ensuite réfléchi sur la surface supérieure Σ_A au point A_2 , et ainsi de suite. Ainsi, le champ à l'intérieur du milieu Ω_2 subit des multiples réflexions successives, sur la surface inférieure au point B_k (avec $k \in \{1..n-1\}$), puis sur la surface supérieure au point A_{k+1} . Ce système peut donc être vu comme un guide d'onde diélectrique rugueux. Seuls les champs réfléchis des premier et second ordres, $E_{r,1}$ et $E_{r,2}$, ainsi que le champ transmis du premier ordre $E_{t,1}$, seront traités en détail ici. Cependant les expressions des ordres supérieurs peuvent être obtenues pour n'importe quel ordre n , tant en réflexion qu'en transmission.

$E_{r,1}$ et $E_{r,2}$ dénotent les champs diffractés en réflexion des premier et second ordres dans le milieu incident Ω_1 . Ils sont observés dans la direction de réflexion $\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{r}} = (k_{rx}, k_{rz})/|k_1| = (\hat{k}_{rx}, \hat{k}_{rz})$, d'angle associé θ_r . $E_{t,1}$ dénote le champ diffracté en transmission du premier ordre dans le milieu inférieur Ω_3 . Il est observé dans la direction de transmission $\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{t}} = (k_{tx}, k_{tz})/|k_3| = (\hat{k}_{tx}, \hat{k}_{tz})$, d'angle associé θ_t . Les angles $\theta_i \in [-\pi/2; 0]$ et $\{\theta_{m1}, \theta_t, \theta_{p1}, \theta_r\} \in [-\pi/2; +\pi/2]$ sont mesurés par rapport à l'axe vertical $\hat{\mathbf{z}}$, où le sens positif des angles est le sens horaire. Avec $\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{m1}} = (k_{m1x}, k_{m1z})/|k_2| = (\hat{k}_{m1x}, \hat{k}_{m1z})$ et $\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{p1}} = (k_{p1x}, k_{p1z})/|k_2| = (\hat{k}_{p1x}, \hat{k}_{p1z})$, nous avons

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{i}} &= (-\sin \theta_i & , & -\cos \theta_i) \\ \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{r}} &= (+\sin \theta_r & , & +\cos \theta_r) \\ \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{m1}} &= (-\sin \theta_{m1} & , & -\cos \theta_{m1}) \\ \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{p1}} &= (+\sin \theta_{p1} & , & +\cos \theta_{p1}) \end{cases} . \quad (3.1)$$

Afin de déterminer les champs $E_{r,1}$, $E_{t,1}$ et $E_{r,2}$, l'itération de l'approximation de Kirchhoff (AK) est utilisée : l'AK est appliquée à chaque point de diffraction (en réflexion ou transmission) sur chacune des deux interfaces. Cette approximation peut être appliquée (pour des incidences modérées) pour des interfaces dont le rayon de courbure moyen est supérieur à la longueur d'onde. Sous l'AK, le champ en chaque point de diffraction sur l'interface considérée peut être approximé par le champ qui serait présent sur son plan tangent. Ainsi, les lois de Snell-Descartes et les coefficients de Fresnel peuvent être appliqués localement. De plus, l'approximation de la phase stationnaire (APS) est utilisée afin de simplifier les expressions des champs diffractés. Basée sur l'AK, elle suppose que la contribution majeure du champ diffracté provient de régions de la surface autour de points où la phase stationne. Ces points de la surface, appelés *points spéculaires*, sont caractérisés par une pente qui dépend uniquement des directions d'incidence et d'observation : physiquement, ce sont les points de la surface qui renvoient l'onde incidente dans la direction d'observation donnée de manière spéculaire.

Tout d'abord, le principe général du modèle est exposé à partir du cas du champ diffracté en réflexion du premier ordre $E_{r,1}$. Ensuite, $E_{t,1}$ et $E_{r,2}$ sont obtenus pour une surface inférieure rugueuse, puis $E_{r,2}$ est obtenu pour une surface inférieure plane.

3.2.1 Principe général du modèle

Tout d'abord, les champs diffractés respectivement en réflexion et transmission par la surface supérieure Σ_A au point A_1 sont obtenus à partir des équations intégrales de Kirchhoff-Helmholtz (1.114a, 1.114b). À l'aide de l'approximation de Kirchhoff, ces équations s'écrivent de manière simplifiée sous la forme suivante (2.27a, 2.27b)

$$\forall \mathbf{R} \in \Omega_1, E_{r,1}(\mathbf{R}) = +i \int d\Sigma_{A_1} (+2\mathbf{K}_{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{A}_1}) r_{12}(\chi_i) E_i(\mathbf{R}_{\mathbf{A}_1}) G_1(\mathbf{R}, \mathbf{R}_{\mathbf{A}_1}) \Xi(\mathbf{R}_{\mathbf{A}_1}), \quad (3.2a)$$

$$\forall \mathbf{R} \in \Omega_2, E_{m1}(\mathbf{R}) = -i \int d\Sigma_{A_1} (-2\mathbf{K}_{\mathbf{m1},\text{sp}} \cdot \hat{\mathbf{N}}_{\mathbf{A}_1}) t_{12}(\chi_i) E_i(\mathbf{R}_{\mathbf{A}_1}) G_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}_{\mathbf{A}_1}) \Xi(\mathbf{R}_{\mathbf{A}_1}). \quad (3.2b)$$

Puis, en utilisant la représentation de Weyl de la fonction de Green (1.118), il est possible d'exprimer les champs diffractés en tout point du milieu de diffraction considéré, c'est-à-dire Ω_1 pour l'onde diffractée en réflexion et Ω_2 pour l'onde diffractée en transmission. La représentation de Weyl de la fonction de Green, pour une onde se propageant d'un point M à un point M' dans le milieu Ω_α , est définie pour un problème 2D par

$$G_\alpha^{MM'} \equiv G_\alpha(\mathbf{R}_{M'}, \mathbf{R}_M) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \frac{e^{ik_x(x_{M'} - x_M) + if(k_x)|z_{M'} - z_M|}}{f(k_x)}, \quad \text{où } \mathbf{R} = x\hat{\mathbf{x}} + z\hat{\mathbf{z}}, \quad (3.3)$$

avec

$$f(k_x) = \begin{cases} \sqrt{k_\alpha^2 - k_x^2} & \text{si } k_\alpha^2 \geq k_x^2 \\ i \sqrt{k_x^2 - k_\alpha^2} & \text{si } k_\alpha^2 < k_x^2 \end{cases} . \quad (3.4)$$

Remarquons que la représentation de Weyl de la fonction de Green est valide pour des propagations en champ lointain, mais aussi en champ proche. Quand l'onde diffractée est observée en champ lointain en un point P , la fonction de Green, pour une onde se propageant d'un point M au point P dans le milieu Ω_α peut s'exprimer pour un problème 2D sous la forme approchée suivante (1.128a)

$$G_\alpha(\mathbf{P}, \mathbf{R}_M) \simeq \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k_\alpha R}} \exp [i(k_\alpha R - \mathbf{K}_s \cdot \mathbf{R}_M - \pi/4)], \quad (3.5)$$

où R est la distance du point P à une origine arbitraire. Pour notre configuration, $\mathbf{K}_s = \mathbf{K}_r$ si $\alpha = 1$ et $\mathbf{K}_s = \mathbf{K}_{m1}$ si $\alpha = 2$.

Alors, à partir de l'équation (3.2a) de l'équation intégrale sous l'AK et en utilisant la fonction de Green asymptotique de l'équation (3.5), nous pouvons exprimer le champ diffracté en réflexion du premier ordre $E_{r,1}^\infty$ dans le milieu Ω_1 dans la zone de champ lointain de Σ_A . De plus, en utilisant l'approximation de la phase stationnaire (APS), son expression se simplifie comme (2.28a)

$$\frac{E_{r,1}^\infty(\mathbf{R}_P)}{E_0} = -\sqrt{\frac{k_1}{2\pi R}} e^{i(k_1 R - \frac{\pi}{4})} f_r(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r) \int_{-L_A/2}^{+L_A/2} dx_{A_1} e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_r) \cdot \mathbf{R}_{A_1}} \Xi(\mathbf{R}_{A_1}), \quad (3.6)$$

avec

$$f_r(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r) = r_{12}(\chi_i^{0(r)}) (\hat{\mathbf{K}}_i \cdot \mathbf{N}^{0(r)}) = r_{12}(\chi_i^{0(r)}) \frac{1 - (\hat{k}_{ix}\hat{k}_{rx} + \hat{k}_{iz}\hat{k}_{rz})}{\hat{k}_{iz} - \hat{k}_{rz}}, \quad (3.7)$$

où r_{12} est le coefficient de réflexion de Fresnel défini en polarisations H et V respectivement par (1.23a) et (1.24a), avec $\chi_i^{0(r)} = (\theta_i - \theta_r)/2$ l'angle local d'incidence. $\Xi(\mathbf{R}_{A_1})$ est la fonction d'illumination de la surface, qui vaut 1 si le point A_1 est illuminé par l'onde incidente et vu par l'onde diffractée ; 0 sinon. L_A est la longueur de la surface éclairée⁵.

De même, afin d'obtenir les autres champs diffractés ($E_{t,1}, E_{r,2}, E_{t,2}, E_{r,3}$, etc.), il faut tout d'abord déterminer le champ diffracté par la surface supérieure (au point A_1) dans le milieu intermédiaire Ω_2 au point B_1 , $E_{m1}(\mathbf{R}_{B_1})$. Les deux surfaces et donc les deux points A_1 et B_1 étant a priori en champ proche l'un de l'autre, il suffit de partir de l'équation intégrale sous l'AK (3.2b), en utilisant la représentation de Weyl de la fonction de Green (3.3) pour une onde se propageant dans le milieu Ω_2 du point A_1 au point B_1 .

3.2.1.1 Obtention des champs diffractés pour une surface inférieure rugueuse

Le champ $E_{m1}(\mathbf{R}_{B_1})$ diffracté par la surface supérieure dans la direction $\hat{\mathbf{K}}_{m1}$ au point B_1 de la surface inférieure est connu. Il constitue un champ incident dans le milieu Ω_2 sur la surface Σ_B au point B_1 . Alors, pour déterminer le champ diffracté en transmission $E_{t,1}$ dans le milieu inférieur Ω_3 , ainsi que le diffracté en réflexion E_{p1} dans le milieu Ω_2 , nous pouvons utiliser les équations intégrales de Kirchhoff-Helmholtz sur la surface Σ_B . Le champ incident sur cette surface est alors $E_{m1}(\mathbf{R}_{B_1})$ de direction $\hat{\mathbf{K}}_{m1}$. De plus, comme pour la première diffraction par la surface supérieure Σ_A , en supposant (pour des angles d'incidence modérés) que le rayon de courbure moyen de Σ_B est supérieur à la longueur d'onde, l'AK peut être utilisée sur la surface

⁵qui est supposée vérifier la condition $L_A \gg L_c$, avec L_c la longueur de corrélation de la surface

inférieure Σ_B au point B_1 pour effectuer ce calcul. Les équations donnant les champs diffractés respectivement en réflexion et transmission s'écrivent alors

$$\forall \mathbf{R} \in \Omega_2, E_{p1}(\mathbf{R}) = +i \int d\Sigma_{B1} (+2\mathbf{K}_{m1} \cdot \hat{\mathbf{N}}_{B1}) r_{23}(\chi_{m1}) E_{m1}(\mathbf{R}_{B1}) G_2(\mathbf{R}, \mathbf{R}_{B1}) \Xi(\mathbf{R}_{B1}), \quad (3.8a)$$

$$\forall \mathbf{R} \in \Omega_3, E_{t,1}(\mathbf{R}) = -i \int d\Sigma_{B1} (-2\mathbf{K}_{t,1,sp} \cdot \hat{\mathbf{N}}_{B1}) t_{23}(\chi_{m1}) E_{m1}(\mathbf{R}_{B1}) G_3(\mathbf{R}, \mathbf{R}_{B1}) \Xi(\mathbf{R}_{B1}). \quad (3.8b)$$

Remarquons que ce principe est le même que celui du calcul, sous l'AK, de la double diffraction en réflexion par une seule interface rugueuse [52, 49]. Il s'agit donc là aussi d'une itération de l'AK, pour chaque point de réflexion (ou transmission), la propagation entre chaque point étant prise en compte par la fonction de Green appropriée. La différence majeure est qu'ici les réflexions multiples ont lieu non pas sur la même interface, mais successivement sur une interface, puis sur l'autre.

Ainsi, à partir de l'équation (3.8b), et en utilisant la fonction de Green en champ lointain (3.5), nous pouvons exprimer le champ diffracté en transmission $E_{t,1}^\infty$ dans le milieu Ω_3 dans la zone de champ lointain de Σ_B .

Il en est de même pour le champ diffracté en réflexion E_{p1} dans le milieu Ω_2 au point A_2 de la surface supérieure, à partir de l'équation (3.8a), et en utilisant la représentation de Weyl de la fonction de Green. A nouveau, l'AK est utilisée au point A_2 pour calculer les champs diffractés par Σ_A : en transmission et dans la zone de champ lointain de Σ_A pour obtenir le champ diffracté en réflexion du deuxième ordre $E_{r,2}$; et ainsi de suite pour les ordres supérieurs, où la diffraction en chaque point de l'une ou l'autre interface est calculée sous l'AK.

Alors, le champ $E_{t,1}^\infty$, diffracté en champ lointain par les deux interfaces rugueuses dans le milieu inférieur Ω_3 résulte de la diffraction en transmission par la surface Σ_A dans le milieu Ω_2 , puis de la diffraction en transmission par la surface Σ_B dans le milieu Ω_3 . En prenant en compte les fonctions d'illumination $\Xi(\mathbf{R}_{A1})$ et $\Xi(\mathbf{R}_{B1})$, et en utilisant l'APS, il est exprimé par

$$\begin{aligned} \frac{E_{t,1}^\infty}{E_0} &= \frac{k_2}{2\pi} \sqrt{\frac{k_3}{2\pi R}} e^{i(k_3 R - \frac{\pi}{4})} \int \frac{dk_x}{f(k_x)} dx_{A1} dx_{B1} f_t(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_{m1}; \mathbf{N}_{A1}^0) f_t(\mathbf{K}_{m1}, \mathbf{K}_t; \mathbf{N}_{B1}^0) \\ &\quad e^{i\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{R}_{A1}} e^{i[k_x(x_{B1} - x_{A1}) + f(k_x)|\zeta_{B1} - \zeta_{A1}|]} e^{-i\mathbf{K}_t \cdot \mathbf{R}_{B1}} \Xi(\mathbf{R}_{A1}) \Xi(\mathbf{R}_{B1}), \end{aligned} \quad (3.9)$$

avec de manière générale sous l'APS, pour une onde incidente dans une direction $\mathbf{K}_1$ dans un milieu Ω_α transmise dans une direction $\mathbf{K}_3$ dans un milieu Ω_β :

$$f_t(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_3; \mathbf{N}_1^{0(t)}) = t_{\alpha\beta}(\chi_1^{0(t)}) (-\hat{\mathbf{K}}_3 \cdot \mathbf{N}_1^{0(t)}) = t_{\alpha\beta}(\chi_1^{0(t)}) \frac{k_\beta - k_\alpha(\hat{k}_{1x}\hat{k}_{3x} + \hat{k}_{1z}\hat{k}_{3z})}{k_\alpha\hat{k}_{1z} - k_\beta\hat{k}_{3z}}, \quad (3.10)$$

où l'angle local d'incidence est défini par

$$\cos \chi_1^{0(t)} = \text{sign}[(-k_{1z}N_{1z}^{0(t)})(k_\beta k_{3z} - k_\alpha k_{1z})] \frac{k_\alpha - k_\beta(\hat{k}_{1x}\hat{k}_{3x} + \hat{k}_{1z}\hat{k}_{3z})}{\sqrt{k_\alpha^2 + k_\beta^2 - 2k_\alpha k_\beta(\hat{k}_{1x}\hat{k}_{3x} + \hat{k}_{1z}\hat{k}_{3z})}}, \quad (3.11)$$

avec $N_{1z}^{0(t)}$ la projection de la normale $\mathbf{N}_1^{0(t)}$ sur l'axe vertical $\hat{\mathbf{z}}$ (qui a été pris positif ici). Le calcul de $E_{t,1}^\infty$ implique alors 3 intégrations imbriquées. $k_x \in]-\infty; +\infty[$ a priori, cependant comme $E_{t,1}^\infty$ est calculé en champ lointain et comme le modèle est réduit à l'AOG pour déterminer les puissances diffusées, les ondes évanescences doivent être négligées : seuls les rayons "réels" d'un point de diffusion à l'autre doivent être pris en compte. Cette hypothèse est identique à

celle couramment utilisée lors du calcul de la double diffraction par une seule interface rugueuse [52, 49, 270, 271]. Ainsi, les bornes d'intégration sur $\hat{k}_x$ peuvent se réduire à $\hat{k}_x \in [-1; +1]$. En conséquence, $k_x/f(k_x)$ est égal à $d\theta_{m1}$, avec $\theta_{m1} \in [-\pi/2; +\pi/2]$. $x_{A1}, x_{B1} \in [-L_0/2; +L_0/2]$, avec L_0 la longueur de la surface illuminée (les deux surfaces sont supposées de même longueur $L_A = L_B \equiv L_0$). De plus, d'après l'équation (1.124), le terme de phase $[k_x(x_{B1} - x_{A1}) + f(k_x)|\zeta_{B1} - \zeta_{A1}|]$ peut se simplifier en $\mathbf{K}_{m1} \cdot (\mathbf{R}_{B1} - \mathbf{R}_{A1})$ [52, 53]. L'équation (3.9) se simplifie alors comme suit

$$\frac{E_{t,1}^\infty}{E_0} = \frac{k_2}{2\pi} \sqrt{\frac{k_3}{2\pi R}} e^{i(k_3 R - \frac{\pi}{4})} \iiint d\theta_{m1} dx_{A1} dx_{B1} f_t(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_{m1}; \mathbf{N}_{A1}^0) f_t(\mathbf{K}_{m1}, \mathbf{K}_t; \mathbf{N}_{B1}^0) e^{i(\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{R}_{A1} - \mathbf{K}_t \cdot \mathbf{R}_{B1})} e^{i\mathbf{K}_{m1} \cdot \mathbf{R}_{A1B1}} \Xi(\mathbf{R}_{A1}) \Xi(\mathbf{R}_{B1}), \quad (3.12)$$

avec $\mathbf{R}_{A1B1} = \mathbf{R}_{B1} - \mathbf{R}_{A1} = (x_{B1} - x_{A1})\hat{\mathbf{x}} + (\zeta_{B1} - \zeta_{A1})\hat{\mathbf{z}}$.

Le champ $E_{r,2}^\infty$, diffracté par les deux interfaces rugueuses dans le milieu incident Ω_1 en champ lointain, résulte de la diffraction en transmission par la surface Σ_A dans le milieu Ω_2 , de la diffraction en réflexion par la surface Σ_B dans Ω_2 , et de la diffraction en transmission par la surface Σ_A dans le milieu Ω_1 . En prenant en compte les fonctions d'illumination $\Xi(\mathbf{R}_{A1})$, $\Xi(\mathbf{R}_{B1})$ et $\Xi(\mathbf{R}_{A2})$, et en utilisant l'APS, il est exprimé en négligeant les ondes évanescentes par

$$\frac{E_{r,2}^\infty}{E_0} = - \left(\frac{k_2}{2\pi} \right)^2 \sqrt{\frac{k_1}{2\pi R}} e^{i(k_1 R - \frac{\pi}{4})} \iiint \iiint d\theta_{m1} d\theta_{p1} dx_{A1} dx_{B1} dx_{A2} f_t(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_{m1}; \mathbf{N}_{A1}^0) f_r(\mathbf{K}_{m1}, \mathbf{K}_{p1}; \mathbf{N}_{B1}^0) f_t(\mathbf{K}_{p1}, \mathbf{K}_r; \mathbf{N}_{A2}^0) e^{i(\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{R}_{A1} - \mathbf{K}_r \cdot \mathbf{R}_{A2})} e^{i(\mathbf{K}_{m1} \cdot \mathbf{R}_{A1B1} + \mathbf{K}_{p1} \cdot \mathbf{R}_{B1A2})} \Xi(\mathbf{R}_{A1}) \Xi(\mathbf{R}_{B1}) \Xi(\mathbf{R}_{A2}), \quad (3.13)$$

avec de manière générale sous l'APS, pour une onde incidente dans une direction $\mathbf{K}_1$ et réfléchie dans une direction $\mathbf{K}_2$ à l'intérieur d'un milieu Ω_α :

$$f_r(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2; \mathbf{N}_1^{0(r)}) = r_{\alpha\beta}(\chi_1^{0(r)}) (+\hat{\mathbf{K}}_1 \cdot \mathbf{N}_1^{0(r)}) = r_{\alpha\beta}(\chi_1^{0(r)}) \frac{1 - (\hat{k}_{1x}\hat{k}_{2x} + \hat{k}_{1z}\hat{k}_{2z})}{\hat{k}_{1z} - \hat{k}_{2z}}, \quad (3.14)$$

où l'angle local d'incidence est défini par (les angles étant orientés)

$$\chi_1^{0(r)} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}. \quad (3.15)$$

Le calcul de $E_{r,2}^\infty$ implique alors 5 intégrations imbriquées. $\theta_{m1}, \theta_{p1} \in [-\pi/2; +\pi/2]$ et $x_{A1}, x_{B1}, x_{A2} \in [-L_0/2; +L_0/2]$.

Alors, en appliquant le même principe pour les ordres supérieurs, il est possible d'obtenir l'expression du champ diffracté en transmission $E_{t,n}^\infty$ et en réflexion $E_{r,n}^\infty$ à n'importe quel ordre n . Les expressions des ordres supérieurs ne sont pas données ici pour les champs diffractés ; elles seront données pour les coefficients de diffusion correspondant.

3.2.1.2 Obtention des champs diffractés en réflexion pour une surface inférieure plane

Quand la surface inférieure Σ_B est plane (elle est alors usuellement notée S_B), le problème à résoudre est analogue à celui du cas rugueux. Cependant, il n'y a plus diffraction par la surface inférieure, mais une simple réflexion (ou transmission) spéculaire dont la direction est donnée par la deuxième loi de Snell-Descartes et l'amplitude par le coefficient de réflexion (ou

de transmission) de Fresnel. Ainsi, le principe de résolution du calcul des différents champs diffractés en réflexion est le suivant : la diffraction en transmission au point A_1 est calculée sous l'AK (3.2b). Puis la propagation de l'onde diffractée entre le point A_1 et le point A_2 , après réflexion au point B_1 de la surface inférieure S_B plane est décrite par la fonction de Green appropriée (1.127). Ensuite, l'AK est à nouveau appliquée pour calculer la diffraction de cette onde au point A_2 . Ceci permet d'obtenir le champ diffracté en réflexion du deuxième ordre $E_{r,2}$, et ainsi de suite pour les ordres supérieurs. Alors, en négligeant les ondes évanescences et en utilisant l'APS, le champ réfléchi du deuxième ordre s'écrit pour Σ_B plane

$$\begin{aligned} \frac{E_{r,2}^\infty}{E_0} = & \frac{k_2}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1}{2\pi R}} e^{i(k_1 R - \frac{\pi}{4})} \int d\theta_{m1} dx_{A_1} dx_{A_2} \delta(\theta_{p1} + \theta_{m1}) f_t(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_{m1}; \mathbf{N}_{A_1}^0) \\ & r_{23}(\theta_{m1}) f_t(\mathbf{K}_{p1}, \mathbf{K}_r; \mathbf{N}_{A_2}^0) e^{i(\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{R}_{A_1} - \mathbf{K}_r \cdot \mathbf{R}_{A_2})} \\ & e^{i(\mathbf{K}_{m1} \cdot \mathbf{R}_{A_1 B_1} + \mathbf{K}_{p1} \cdot \mathbf{R}_{B_1 A_2})} \Xi(\mathbf{R}_{A_1}) \Xi(\mathbf{R}_{A_2}). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ainsi, dans le cas particulier où la surface inférieure est plane, le calcul de $E_{r,2}$ ne requiert plus que 3 intégrations numériques imbriquées, au lieu de 5 pour le cas rugueux.

3.2.2 Coefficients de diffusion dans la limite haute fréquence

Le champ total diffracté d'ordre n $E_{s,n}^{tot}$ (exposant *tot* pour total; $s \equiv r$ en réflexion et $s \equiv t$ en transmission) vaut $E_{s,n}^{tot} = \sum_{m=1}^n E_{s,m}$. La puissance totale diffractée s'exprime alors comme

$$\frac{\langle |E_{s,n}^{tot}|^2 \rangle}{2\eta_\alpha} = \sum_{m=1}^n \frac{\langle |E_{s,m}|^2 \rangle}{2\eta_\alpha} + \frac{1}{\eta_\alpha} \Re \left(\left\langle \sum_{m=1}^{n-1} E_{s,m} \sum_{p=m+1}^n E_{s,p}^* \right\rangle \right). \quad (3.17)$$

Pour $n = 2$, le champ total s'écrit $E_{s,2}^{tot} = E_{s,1} + E_{s,2}$, alors

$$\frac{\langle |E_{s,2}^{tot}|^2 \rangle}{2\eta_\alpha} = \frac{1}{2\eta_\alpha} \left[\langle |E_{s,1}|^2 \rangle + \langle |E_{s,2}|^2 \rangle + 2 \Re \left(\langle E_{s,1} E_{s,2}^* \rangle \right) \right], \quad (3.18)$$

où $\Re(\dots)$ est l'opérateur partie réelle, $(\dots)^*$ l'opérateur complexe conjugué, et $\langle \dots \rangle$ l'opérateur moyenne statistique. Afin de faire la distinction entre l'expression du champ diffracté $E_{s,n}$ et de son complexe conjugué $E_{s,n}^*$, les points $\{A_m, B_m\}$ sont remplacés par $\{A'_m, B'_m\}$, ce qui implique $\{x_{A_m}, x_{B_m}, \zeta_{A_m}, \zeta_{B_m}\} \rightarrow \{x_{A'_m}, x_{B'_m}, \zeta_{A'_m}, \zeta_{B'_m}\}$ et $\{\theta_{MP}\} \rightarrow \{\theta'_{MP}\}$, où θ_{MP} représente l'angle de propagation entre deux points M et P de chacune des deux surfaces.

La puissance totale incohérente $P_{s,n}^{tot,inc}$ est obtenue à partir de

$$P_{s,n}^{tot,inc} = \frac{1}{2\eta_\alpha} \left[\langle |E_{s,n}^{tot}|^2 \rangle - |\langle E_{s,n}^{tot} \rangle|^2 \right]. \quad (3.19)$$

Afin de calculer le coefficient de diffusion de la couche rugueuse dans la limite haute fréquence, l'approximation de l'optique géométrique (AOG) est utilisée pour les deux interfaces. Valable pour $k\sigma_h > \pi$ (avec σ_h l'écart type des hauteurs de la surface considérée), elle suppose que la contribution majeure de la puissance diffractée par la surface provient de points M et M' de la surface fortement corrélés, c'est-à-dire séparés d'une distance faible devant la longueur de corrélation de la surface considérée. Avec cette approximation, la contribution cohérente $|\langle E_{s,n}^{tot} \rangle|^2$ peut être négligée. De plus, la différence des hauteurs $\zeta_M - \zeta_{M'}$ peut s'exprimer de manière approchée par $\gamma_M(x_M - x_{M'})$, avec γ_M la pente de la surface considérée au point M . Alors, il est possible de déterminer plus aisément le coefficient de diffusion total incohérent (égal

au coefficient de diffusion total $\sigma_{s,n}^{tot}$ sous l'AOG) d'une cible mono-dimensionnelle, défini par (1.138, 1.139)

$$\sigma_{s,n}^{tot}(\mathbf{K}_s, \mathbf{K}_i) = 2\eta_1 \frac{R P_{s,n}^{tot}}{L_0 \cos \theta_i |E_i|^2}, \quad (3.20)$$

où R est la distance de la cible, et L_0 la longueur de la surface illuminée. $\alpha \equiv 1$ et $s \equiv r$ en réflexion, et $\alpha \equiv 2$ et $s \equiv t$ en transmission. Dans l'équation ci-dessus, pour les cas $n = \{1, 2\}$, nous avons

$$P_{s,1}^{tot} = p_{s,1} \quad \text{et} \quad P_{s,2}^{tot} = p_{s,1} + p_{s,2}, \quad (3.21)$$

avec

$$\begin{cases} p_{s,1} &= \frac{1}{2\eta_\alpha} \langle |E_{s,1}|^2 \rangle \\ p_{s,2} &= \frac{1}{2\eta_\alpha} \left[\langle |E_{s,2}|^2 \rangle + 2 \Re \left(\langle E_{s,1} E_{s,2}^* \rangle \right) \right] \end{cases} \quad (3.22)$$

Il est ainsi possible de définir un coefficient de diffusion élémentaire $\sigma_{s,m}$, correspondant à la contribution de chaque puissance diffusée. Ainsi, pour $n = 1$, $\sigma_{s,1}$ correspond à la contribution de $p_{s,1}$. Pour $n = 2$, $\sigma_{s,1}$ correspond à la contribution de $p_{s,1}$, et $\sigma_{s,2}$ à la contribution de $p_{s,2}$.

Dans ce modèle, les effets d'ombrage de la surface en réflexion [148] et en transmission [149] sont pris en compte. En effet, pour des angles d'incidence et/ou de diffusion rasants, une partie de la surface n'est pas illuminée par l'émetteur et/ou pas vue par le récepteur. Ce phénomène doit être pris en compte pour ne pas surévaluer le coefficient de diffusion.

3.2.2.1 Coefficients de diffusion en réflexion des premier et second ordres

Dans toute la suite, les deux surfaces, de longueur L_0 , sont supposées grandes devant la longueur de corrélation L_{cA} ou L_{cB} .

Le calcul du coefficient de diffusion du premier ordre $\sigma_{r,1}$ est relativement simple et bien connu [147, 43]. Il a été présenté dans le chapitre précédent (dans la section 2.2.2), et ne sera donc pas rappelé ici. Il est égal à (2.44a)

$$\sigma_{r,1}(\mathbf{K}_r, \mathbf{K}_i) = \frac{1}{\cos \theta_i} |f_r(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r)|^2 \frac{p_s(\gamma_{A_1}^{0(r)})}{|\hat{k}_{rz} - \hat{k}_{iz}|} S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r | \gamma_{A_1}^{0(r)}), \quad (3.23)$$

avec $\gamma_{A_1}^{0(r)} = -(\hat{k}_{rx} - \hat{k}_{ix})/(\hat{k}_{rz} - \hat{k}_{iz})$. $S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r | \gamma_{A_1}^{0(r)})$ est la fonction d'ombre bistatique en réflexion exprimée par l'équation (2.53).

La contribution du second ordre est donnée par $p_{r,2} = p_{r,22} + p_{r,12}$, avec $p_{r,22} = \langle |E_{r,2}|^2 \rangle / 2\eta_1$ et $p_{r,12} = \Re(\langle E_{r,1} E_{r,2}^* \rangle) / \eta_1$. Ce calcul est beaucoup plus complexe, car il requiert 16 intégrations imbriquées (4 variables de surfaces, et 12 variables aléatoires : 6 pour les hauteurs et 6 pour les pentes) pour deux surfaces stationnaires (ou dites spatialement homogènes). Ce nombre d'intégrations est trop élevé pour une évaluation numérique. C'est pour cela qu'il est nécessaire de faire des approximations supplémentaires sur le modèle, dans le but d'obtenir une expression mathématique simple de $\sigma_{r,2}$.

Tout d'abord, l'AOG est utilisée sur les deux interfaces, en chaque point de diffraction : les points M et M' sont supposés fortement corrélés (séparés d'une distance faible devant la longueur de corrélation de la surface considérée), et la différence des hauteurs peut s'exprimer de manière approchée par $\zeta_M - \zeta_{M'} \simeq \gamma_M(x_M - x_{M'})$, avec γ_M la pente de la surface considérée au point M . Dans la limite haute fréquence, il est possible de montrer que le terme $p_{r,12} = 0$ du fait de l'ombre, ainsi $p_{r,2} = p_{r,22}$. Ceci est consistant avec l'AOG, appelée aussi parfois optique

des rayons, pour laquelle la phase de l'onde n'est pas prise en compte, et donc pour laquelle les phénomènes d'interférences peuvent être négligés. De plus, pour être consistant avec l'AOG, les ondes évanescentes ne sont pas prises en compte, et il est nécessaire (lors des calculs menés) de supposer que le nombre d'onde du milieu intermédiaire k_2 soit réel. Notons que cette dernière hypothèse, restrictive, implique que le modèle en lui-même ne peut pas prendre en compte des milieux diélectriques à pertes. Cependant, nous verrons par la suite qu'il est possible de corriger ce défaut simplement et efficacement.

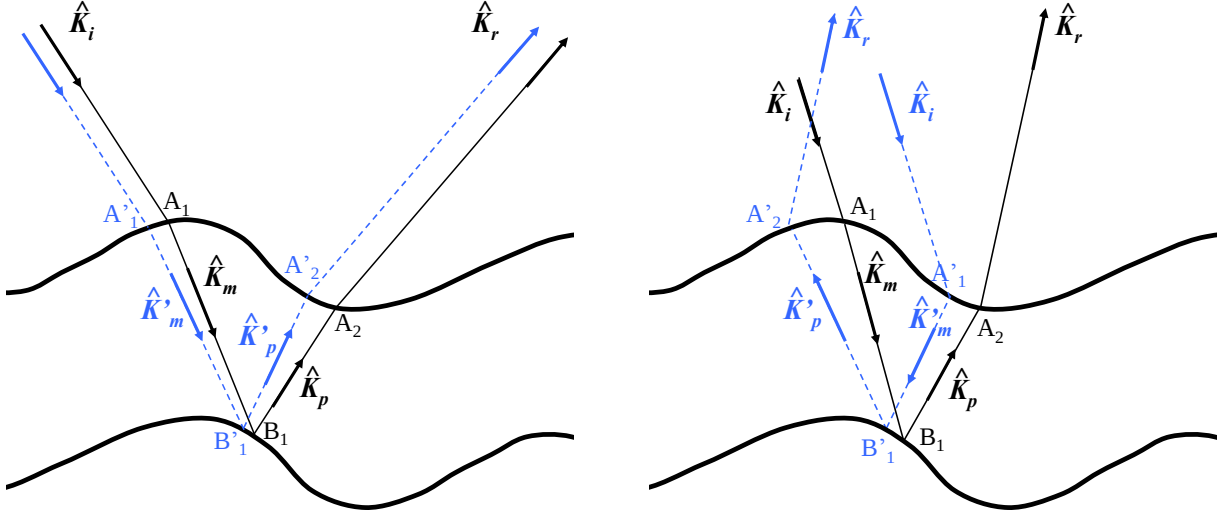


FIG. 3.2 – Cas coïncident à gauche et cas anticoïncident à droite

En appliquant le même principe que pour la double diffraction en réflexion par une simple interface rugueuse [52, 49, 108], le problème du calcul du champ diffracté en réflexion d'ordre deux $E_{r,2}$ peut être divisé en deux cas : le cas coïncident et le cas anti-coïncident (voir figure 3.2). Le cas coïncident correspond à A'_1 proche de A_1 , B'_1 proche de B_1 , et A'_2 proche de A_2 (comparativement à la longueur de corrélation de la surface considérée, L_{cA} ou L_{cB}). Ce cas, développé dans l'annexe D, contribue pour tous les angles de diffusion. Le cas anti-coïncident correspond à A'_1 proche de A_2 , B'_1 proche de B_1 , et A'_2 proche de A_1 (comparativement à la longueur de corrélation de la surface considérée, L_{cA} ou L_{cB}). Ce cas est susceptible de contribuer uniquement pour des angles de diffusion θ_r dans et autour de la direction de rétro-diffusion $\theta_r = -\theta_i$. Pour le cas coïncident, les points de réflexions successives A_1 , B_1 et A_2 peuvent être considérés comme décorrélés entre eux, ce qui permet de simplifier grandement l'équation finale.

En revanche, pour le cas anti-coïncident, afin de quantifier le pic de rétro-diffusion correctement, il est nécessaire de prendre en compte les corrélations entre les différents points de réflexions successives. Ceci complexifie grandement la résolution du problème, impliquant 3 intégrations numériques supplémentaires, ce qui donne un total de 5 intégrations numériques imbriquées. Des calculs (voir annexe E) ont été menés pour le cas plus simple où la surface inférieure est plane. Ils ont permis de montrer que pour les applications typiques présentées dans la section suivante, c'est-à-dire pour des écarts types des pentes faibles et/ou des épaisseurs de la couche de l'ordre de ou inférieures à la longueur d'onde, ce phénomène peut être négligé. Ceci est en accord avec des résultats de la littérature [272, 273, 197], qui ont établi que la condition pour laquelle ce phénomène contribue est [197]

$$\bar{H} > \frac{\sqrt{\epsilon_{r2}}}{\sqrt{\epsilon_{r2}} - 1} R_{cA}, \quad (3.24)$$

avec $\bar{H}$ l'épaisseur moyenne de la couche et R_{cA} le rayon de courbure moyen de la surface supérieure. Cette dernière inégalité implique, sous l'AK où le rayon de courbure moyen doit vérifier la condition $R_{cA} > L_{cA}$, que $\bar{H} > \lambda^6$. Ce phénomène pouvant être négligé pour une interface inférieure plane, cela est d'autant plus vrai pour une interface inférieure rugueuse, et ne sera pas considéré par la suite par simplicité.

Ainsi, en négligeant la contribution anti-coïncidente, nous pouvons obtenir une expression mathématique simple du coefficient de diffusion du second ordre $\sigma_{r,2}$ comme suit

$$\begin{aligned} \sigma_{r,2} = & \frac{1}{\cos \theta_i} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta_{m1} d\theta_{p1} \\ & |f_t(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_{m1}; \mathbf{N}_{A_1}^0)|^2 \frac{p_s(\gamma_{A_1}^{0(t)})}{|\hat{k}_{m1z} - \frac{k_1}{k_2} \hat{k}_{iz}|} S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_{m1} | \gamma_{A_1}^{0(t)}) \\ & |f_r(\mathbf{K}_{m1}, \mathbf{K}_{p1}; \mathbf{N}_{B_1}^0)|^2 \frac{p_s(\gamma_{B_1}^{0(r)})}{|\hat{k}_{p1z} - \hat{k}_{m1z}|} S_{22}(\mathbf{K}_{m1}, \mathbf{K}_{p1} | \gamma_{B_1}^{0(r)}) \\ & |f_t(\mathbf{K}_{p1}, \mathbf{K}_r; \mathbf{N}_{A_2}^0)|^2 \frac{p_s(\gamma_{A_2}^{0(t)})}{|\hat{k}_{rz} - \frac{k_2}{k_1} \hat{k}_{p1z}|} S_{21}(\mathbf{K}_{p1}, \mathbf{K}_r | \gamma_{A_2}^{0(t)}). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Afin d'obtenir des résultats physiques pour des angles rasants pour le cas avec ombre, les configurations de θ_{p1} et θ_r qui induisent un angle local de diffusion supérieur à $\pi/2$ en valeur absolue doivent être occultées. Les pentes $\gamma_{A_1}^{0(t)}$, $\gamma_{B_1}^{0(r)}$ et $\gamma_{A_2}^{0(t)}$ sont définies par

$$\gamma_{A_1}^{0(t)} = -\frac{k_{m1x} - k_{ix}}{k_{m1z} - k_{iz}}, \quad \gamma_{B_1}^{0(r)} = -\frac{k_{p1x} - k_{m1x}}{k_{p1z} - k_{m1z}}, \quad \gamma_{A_2}^{0(t)} = -\frac{k_{rx} - k_{p1x}}{k_{rz} - k_{p1z}}. \quad (3.26)$$

$S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_{m1} | \gamma_{A_1}^{0(t)})$, $S_{22}(\mathbf{K}_{m1}, \mathbf{K}_{p1} | \gamma_{B_1}^{0(r)})$ et $S_{21}(\mathbf{K}_{p1}, \mathbf{K}_r | \gamma_{A_2}^{0(t)})$ sont les fonctions d'ombre bistatiques, respectivement en transmission du milieu Ω_1 vers le milieu Ω_2 , en réflexion dans milieu Ω_2 sur le milieu Ω_3 , et en transmission du milieu Ω_2 vers le milieu Ω_1 . Il est possible de montrer, pour un processus aléatoire *quelconque*, que [149, 274]

$$S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_{m1} | \gamma_{A_1}^{0(t)}) = B[1 + \Lambda(\mu_i), 1 + \Lambda(\mu_{m1})], \quad (3.27)$$

$$S_{21}(\mathbf{K}_{p1}, \mathbf{K}_r | \gamma_{A_2}^{0(t)}) = B[1 + \Lambda(\mu_{p1}), 1 + \Lambda(\mu_r)], \quad (3.28)$$

où B représente la fonction Bêta (également appelée intégrale eulérienne de première espèce), et Λ est la fonction définie par

$$\Lambda(\mu) = \frac{1}{\mu} \int_{\mu}^{+\infty} (\gamma - \mu) p_s(\gamma) d\gamma, \quad (3.29)$$

avec $\mu = |\cot \theta|$ la valeur absolue de la pente de l'angle considéré.

Ainsi, le problème peut être réduit à seulement deux intégrations imbriquées, ce qui permet une implémentation numérique rapide. Nous pouvons observer que l'expression (3.25) sous l'AOG peut être appliquée pour toute statistique de pente donnée, et est indépendante de la

⁶Pour les applications présentées dans la section suivante, les statistiques des hauteurs et des pentes sont supposées gaussiennes. L'écart type des pentes est tel que $\sigma_h > 0.5\lambda$ sous l'AOG ; l'écart type des pentes considéré est $\sigma_s = 0.1$. Ainsi, le rayon de courbure, qui vérifie la relation $R_c \simeq \sqrt{\pi/6} \sigma_h / \sigma_s^2$, est alors tel que $R_c > 36\lambda$. Or l'épaisseur moyenne de la couche considérée est $\bar{H} = 6\lambda \ll R_c$: ceci confirme bien que la contribution anti-coïncidente est négligeable pour les applications présentées.

fréquence (dans le domaine de validité du modèle). De plus, en supposant que les points de réflexions successives A_1 , B_1 et A_2 sont décorrélés, cette expression apparaît comme le produit de 3 coefficients de diffusion élémentaires d'interfaces simples⁷, chacun correspondant à chaque diffusion en réflexion ou en transmission à l'intérieur du guide d'onde diélectrique. En effet, le premier correspond à la diffusion en transmission du point A_1 de la surface Σ_A dans le milieu Ω_2 , le deuxième à la diffusion en réflexion par le point B_1 de la surface Σ_B à l'intérieur de Ω_2 , et le troisième de la diffusion en transmission du point A_2 de la surface Σ_A dans le milieu Ω_1 .

Alors, sous l'AOG, pour obtenir le coefficient de diffusion total $\sigma_{r,2}^{tot}$, les contributions des premier $\sigma_{r,1}$, équation (3.23), et second ordres $\sigma_{r,2}$, équation (3.25), sont ajoutées de manière incohérente.

3.2.2.2 Coefficient de diffusion en transmission du premier ordre

De la même manière que pour le calcul de $\sigma_{r,1}$ et $\sigma_{r,2}$, nous pouvons obtenir l'expression du coefficient de diffusion en transmission du premier ordre $\sigma_{t,1}$. Le détail des calculs n'est pas présenté ici, puisque le principe est exactement le même. Ainsi, $\sigma_{t,1}$ est donné par

$$\sigma_{t,1} = \frac{\eta_1}{\eta_3} \frac{1}{\cos \theta_i} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta_{m1} \quad (3.30)$$

$$|f_t(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_{m1}; \mathbf{N}_{A_1}^0)|^2 \frac{p_s(\gamma_{A_1}^{0(t)})}{|\hat{k}_{m1z} - \frac{k_1}{k_2} \hat{k}_{iz}|} S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_{m1} | \gamma_{A_1}^{0(t)})$$

$$|f_t(\mathbf{K}_{m1}, \mathbf{K}_t; \mathbf{N}_{B_1}^0)|^2 \frac{p_s(\gamma_{B_1}^{0(t)})}{|\hat{k}_{tz} - \frac{k_2}{k_3} \hat{k}_{m1z}|} S_{23}(\mathbf{K}_{m1}, \mathbf{K}_t | \gamma_{B_1}^{0(t)}),$$

avec

$$\gamma_{B_1}^{0(t)} = -\frac{k_{tx} - k_{m1x}}{k_{tz} - k_{m1z}}, \quad (3.31)$$

et

$$S_{23}(\mathbf{K}_{m1}, \mathbf{K}_t | \gamma_{B_1}^{0(t)}) = B[1 + \Lambda(\mu_{m1}), 1 + \Lambda(\mu_t)]. \quad (3.32)$$

Les mêmes remarques peuvent être formulées sur l'expression de $\sigma_{t,1}$ que pour celle de $\sigma_{r,2}$.

3.2.2.3 Coefficients de diffusion en réflexion et en transmission d'ordres supérieurs

Ainsi, de la même manière que pour $\sigma_{r,1}$, $\sigma_{t,1}$ et $\sigma_{r,2}$, le calcul est généralisable à tout ordre de diffusion en réflexion $\sigma_{r,n}$ ou en transmission $\sigma_{t,n}$. Définissons les coefficients de diffusion

⁷ au coefficient $\cos \theta_i$ et au rapport des impédances η_1/η_α près

élémentaires suivants :

$$s_{r,12}^{A_1} = |f_r(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r; \mathbf{N}_{A_1}^0)|^2 \frac{p_s(\gamma_{A_1}^{0(r)})}{|\hat{k}_{rz} - \hat{k}_{iz}|} S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r | \gamma_{A_1}^{0(r)}), \quad (3.33)$$

$$s_{t,12}^{A_1} = |f_t(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_{m1}; \mathbf{N}_{A_1}^0)|^2 \frac{p_s(\gamma_{A_1}^{0(t)})}{|\hat{k}_{m1z} - \frac{k_1}{k_2} \hat{k}_{iz}|} S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_{m1} | \gamma_{A_1}^{0(t)}), \quad (3.34)$$

$$s_{r,23}^{B_q} = |f_r(\mathbf{K}_{mq}, \mathbf{K}_{pq}; \mathbf{N}_{B_q}^0)|^2 \frac{p_s(\gamma_{B_q}^{0(r)})}{|\hat{k}_{pqz} - \hat{k}_{mqz}|} S_{22}(\mathbf{K}_{mq}, \mathbf{K}_{pq} | \gamma_{B_q}^{0(r)}), \quad (3.35)$$

$$s_{t,23}^{B_n} = |f_t(\mathbf{K}_{mn}, \mathbf{K}_t; \mathbf{N}_{B_n}^0)|^2 \frac{p_s(\gamma_{B_n}^{0(t)})}{|\hat{k}_{tz} - \frac{k_2}{k_3} \hat{k}_{mnz}|} S_{23}(\mathbf{K}_{mq}, \mathbf{K}_t | \gamma_{B_n}^{0(t)}), \quad (3.36)$$

$$s_{r,21}^{A_q} = |f_r(\mathbf{K}_{pq-1}, \mathbf{K}_{mq}; \mathbf{N}_{A_q}^0)|^2 \frac{p_s(\gamma_{A_q}^{0(r)})}{|\hat{k}_{mqz} - \hat{k}_{pq-1z}|} S_{22}(\mathbf{K}_{pq-1}, \mathbf{K}_{mq} | \gamma_{A_q}^{0(r)}), \quad (3.37)$$

$$s_{t,21}^{A_n} = |f_t(\mathbf{K}_{pn-1}, \mathbf{K}_r; \mathbf{N}_{A_n}^0)|^2 \frac{p_s(\gamma_{A_n}^{0(t)})}{|\hat{k}_{rz} - \frac{k_2}{k_1} \hat{k}_{pn-1z}|} S_{21}(\mathbf{K}_{pn-1}, \mathbf{K}_r | \gamma_{A_n}^{0(t)}). \quad (3.38)$$

Alors, nous obtenons

$$\sigma_{r,1} = \frac{1}{\cos \theta_i} s_{r,12}^{A_1}, \quad (3.39)$$

$$\sigma_{t,1} = \frac{\eta_1}{\eta_3} \frac{1}{\cos \theta_i} \int d\theta_{m1} s_{t,12}^{A_1} s_{t,23}^{B_1}, \quad (3.40)$$

$$\sigma_{r,2} = \frac{1}{\cos \theta_i} \int \int d\theta_{m1} d\theta_{p1} s_{t,12}^{A_1} s_{r,23}^{B_1} s_{t,21}^{A_2}, \quad (3.41)$$

$$\sigma_{t,2} = \frac{\eta_1}{\eta_3} \frac{1}{\cos \theta_i} \int \int \int d\theta_{m1} d\theta_{p1} d\theta_{m2} s_{t,12}^{A_1} s_{r,23}^{B_1} s_{r,21}^{A_2} s_{t,23}^{B_2}, \quad (3.42)$$

et ainsi de suite, avec tous les angles d'intégration décrivant l'intervalle $[-\pi/2; +\pi/2]$. Alors, nous pouvons donner l'expression générale de $\sigma_{r,n}$, $\forall n \geq 3$:

$$\sigma_{r,n} = \frac{1}{\cos \theta_i} \underbrace{\int \cdots \int}_{2(n-1)} d\theta_{m1} d\theta_{pn} \prod_{q=2}^{n-1} (d\theta_{pq-1} d\theta_{mq} s_{r,21}^{A_q} s_{r,23}^{B_q}) s_{t,12}^{A_1} s_{r,23}^{B_1} s_{t,21}^{A_n}, \quad (3.43)$$

et l'expression générale de $\sigma_{t,n}$, $\forall n \geq 2$:

$$\sigma_{t,n} = \frac{\eta_1}{\eta_3} \frac{1}{\cos \theta_i} \underbrace{\int \cdots \int}_{2n-1} d\theta_{m1} \prod_{q=1}^{n-1} (d\theta_{mq} d\theta_{pq} s_{r,23}^{B_q} s_{r,21}^{A_{q+1}}) s_{t,12}^{A_1} s_{t,23}^{B_n}. \quad (3.44)$$

Le calcul de $\sigma_{r,n}$ requiert donc $2(n-1)$ intégrations numériques imbriquées, et celui de $\sigma_{t,n}$ $2n-1$ intégrations numériques imbriquées.

3.2.2.4 Coefficients de diffusion en réflexion pour une interface inférieure plane

Pour le cas d'une interface inférieure plane, les expressions des coefficients de diffusion en réflexion sont similaires et plus simples, puisque le terme générique $\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\theta_{pq} s_{r,23}^{B_q}$ est remplacé

par $|r_{23}(\theta_{mq})|^2 \delta(\theta_{pq} + \theta_{mq})$. Ainsi, pour ce cas plus simple, le calcul de $\sigma_{r,2}$ requiert seulement une intégration numérique (contre deux pour une interface inférieure rugueuse), ce qui permet d'obtenir des résultats numériques presque instantanément.

3.2.3 Propriétés physiques du modèle

Nous pouvons observer que le coefficient de diffusion peut être appliqué pour une statistique des pentes quelconque, et est indépendant de la fréquence (dans le domaine de validité du modèle). De plus, quand la contribution anti-coïncidente peut être négligée, le modèle est indépendant de l'épaisseur moyenne de la couche, ainsi que de la statistique des hauteurs des surfaces rugueuses.

Le modèle vérifie la propriété de réciprocité. Ainsi, pour un angle d'incidence nul, le coefficient de diffusion est symétrique par rapport à $\theta_s = 0^\circ$ (pour des statistiques paires). Les expressions des coefficients de diffusion sont données de manière explicite, et relativement simple. Leur implémentation numérique ne pose pas de problème particulier, et elle est stable numériquement. De plus, les résultats peuvent être obtenus rapidement, puisque le calcul du coefficient de diffusion en réflexion du second ordre n'implique que deux intégrations imbriquées.

Enfin, le modèle est applicable à des milieux parfaitement conducteurs ou diélectriques. Notons que le modèle en tant que tel ne peut pas prendre en compte des milieux diélectriques à pertes, cependant nous allons voir dans la mise en oeuvre du modèle qu'il est possible de prendre ce cas de figure en compte, de manière simple et avec des résultats jugés satisfaisants. Les limites du modèles correspondent au domaine de validité de l'AK⁸ réduite à l'AOG, avec l'hypothèse supplémentaire que les points de diffusion successifs sont décorrélés. Ainsi, il s'applique à des surfaces dont le rayon de courbure moyen vérifie $R_c > \lambda$, à des écarts types des pentes faibles ($\sigma_s < 0.35$ voire 0.5 pour des incidences modérées), et à des écarts types des hauteurs $\sigma_h > 0.5\lambda$.

3.2.4 Résumé et conclusion

L'itération de l'AK est utilisée pour calculer la diffusion électromagnétique (en réflexion et en transmission) avec prise en compte de l'effet d'ombre par deux interfaces rugueuses 1D $\zeta(x)$, modèle dans lequel les réflexions multiples à l'intérieur de la couche rugueuse sont prises en compte. L'utilisation de la fonction d'ombre permet de corriger le défaut du modèle pour des angles rasants. L'AK, itérée pour chaque point de diffusion multiple dans la couche rugueuse, est réduite à la limite haute fréquence sous l'AOG (correspondant à des surfaces très rugueuses comparativement à la longueur d'onde) pour obtenir des résultats numériques. A notre connaissance, c'est la première fois que des coefficients de diffusion ont été obtenus sous l'AOG pour le cas de plusieurs interfaces. Les expressions des coefficients de diffusion sont données de manière explicite.

En supposant que les points de réflexions (ou transmissions) successives sont décorrélés entre eux, ces expressions apparaissent comme le produit de coefficients de diffusion par de simples interfaces, correspondant à la réflexion (ou transmission) de l'onde diffusée dans le guide d'onde diélectrique. Les intégrales prennent en compte les directions d'un point de diffusion à un autre. Notons que le modèle n'est pas restreint à une épaisseur de la couche grande devant la longueur d'onde : comme pour la double diffusion en réflexion par une simple interface, la représentation de Weyl de la fonction de Green est utilisée pour décrire la propagation d'un point de diffusion

⁸du premier ordre, c'est-à-dire que les diffusions multiples par la même interface ne sont pas prises en compte

à l'autre. De même, la contribution des ondes évanescentes entre ces deux points est négligée : le point d'observation étant situé en champ lointain de la couche rugueuse, ces ondes ne contribuent pas à la puissance diffusée en champ lointain. Cependant les calculs se sont restreints, pour obtenir un résultat simple, à considérer que les surfaces sont décorréliées.

Sous l'AOG, le coefficient de diffusion total est obtenu par addition incohérente des contributions de tous les ordres : ceci est cohérent avec cette approximation qui ne prend pas en compte la phase de l'onde, donc qui néglige les phénomènes d'interférences. Ce modèle permet des résultats numériques rapides, puisque le calcul de la contribution du deuxième ordre en réflexion implique seulement deux intégrations numériques imbriquées (sachant que la contribution du troisième ordre peut, de manière générale pour une interface inférieure rugueuse, être négligée).

L'intérêt de ce modèle est que le coefficient de diffusion, en réflexion et en transmission, peut être obtenu à n'importe quel ordre pour une interface inférieure rugueuse. De même en réflexion pour une interface inférieure plane. De plus, en utilisant la même approche, le modèle peut être étendu à la superposition d'un nombre quelconque de surfaces rugueuses, ou même de la superposition d'interfaces rugueuses et planes.

Dans ce qui suit, des résultats numériques sont présentés par comparaison avec une méthode de référence [36, 205] basée sur la méthode des moments. Ceci permet de valider le modèle dans son domaine de validité. Puis le modèle est appliqué à la détection de nappes de pétrole sur la surface de la mer.

3.3 Mise en oeuvre du modèle

Pour les simulations, le système considéré est une couche de permittivité relative $\epsilon_{r2} = 3$, d'épaisseur moyenne $\bar{H} = 6\lambda$, et le milieu inférieur est un métal parfaitement conducteur, de permittivité relative $\epsilon_{r3} = i\infty$ (le milieu supérieur est assimilé au vide, $\epsilon_{r1} = 1$). Nous avons choisi un milieu inférieur parfaitement conducteur pour que la contribution du coefficient de diffusion d'ordre deux $\sigma_{r,2}$ soit la plus élevée. L'écart type des hauteurs des deux surfaces rugueuses est fixé (pour la méthode numérique) à $\sigma_h = \lambda/2$, et l'écart type des pentes est pris tel que $\sigma_s = 0.1$. Ceci est en accord avec le domaine de validité du modèle. Les deux surfaces sont supposées stationnaires. Le modèle peut être appliqué pour une statistique des pentes quelconque ; pour les simulations, nous considérons une statistique des pentes gaussienne. Seule la première réflexion à l'intérieur de la couche est prise en compte (à travers $\sigma_{r,2}$), et sa contribution est comparée avec la réflexion par l'interface supérieure (quantifiée par $\sigma_{r,1}$). Ainsi, nous étudions la comparaison entre le coefficient de diffusion total du second ordre $\sigma_{r,2}^{tot} = \sigma_{r,1} + \sigma_{r,2}$ et celui du premier ordre $\sigma_{r,1}^{tot} = \sigma_{r,1}$. Les simulations sont présentées pour des angles d'incidence $\theta_i = 0^\circ$ et $\theta_i = -20^\circ$.

Tout d'abord, des simulations numériques pour des applications optiques, avec une configuration bistatique, sont présentées pour valider le modèle par comparaison avec une méthode numérique de référence [36, 205] (cette méthode est résumée dans la section suivante) basée sur la méthode des moments. Les paramètres de simulations de la méthode numérique utilisés pour chaque surface sont : la longueur de la surface $L = 150\lambda$, le nombre d'échantillons de la surface $n_i = 1500$, le nombre de réalisations de la surface égal à 50, et le paramètre d'atténuation de l'onde de Thorsos incidente $g = L/10$. Elles permettront de montrer que le modèle est valide dans la limite haute fréquence. Une comparaison entre une interface inférieure rugueuse et une interface inférieure plane est réalisée, et le cas d'un milieu intermédiaire Ω_2 (et aussi inférieur Ω_3) à pertes est étudié et pris en compte dans le modèle. Enfin, des simulations numériques dans le domaine de la télédétection, avec une configuration mono-statique, sont présentées en considérant une nappe de pétrole sur la mer.

3.3.1 Validation par comparaison avec une méthode numérique de référence

Afin de valider les résultats, une méthode de référence exacte est nécessaire. Une façon rigoureuse de modéliser la diffraction par des interfaces rugueuses est une méthode intégrale [55]. Ces méthodes sont appropriées quand les milieux considérés sont homogènes. Dans ce cas, les équations intégrales peuvent aisément être obtenues en considérant les champs et leur dérivée normale sur les deux interfaces comme des inconnues. Ces inconnues sont échantillonnées en appliquant une méthode des moments [275] ; le point dur du travail est alors l'inversion du système linéaire correspondant.

Pour le cas de simples interfaces rugueuses, des méthodes efficaces d'inversion existent [64]. Parmi celles-ci, les plus couramment utilisées sont la Forward-Backward method (FBM) [276], la Banded Matrix Iterative Approach (BMIA) [55, 277], et la Fast Multipole Method (FMM) [278]. Pour le cas d'un empilement de deux interfaces rugueuses, le nombre d'inconnues augmente [197]. En conséquence, des méthodes rapides sont particulièrement intéressantes pour cette configuration, mais à notre connaissance, elles n'ont pas encore été développées pour le problème 2D. La seule manière de résoudre le système est alors d'utiliser des super-calculateurs.

Cependant, la récente Propagation-inside-Layer Expansion (PILE) method [36, 205] fournit une alternative de résolution. Cette méthode repose sur le partitionnement de la matrice du système linéaire en quatre blocs, chaque bloc ayant une interprétation physique simple. L'étape

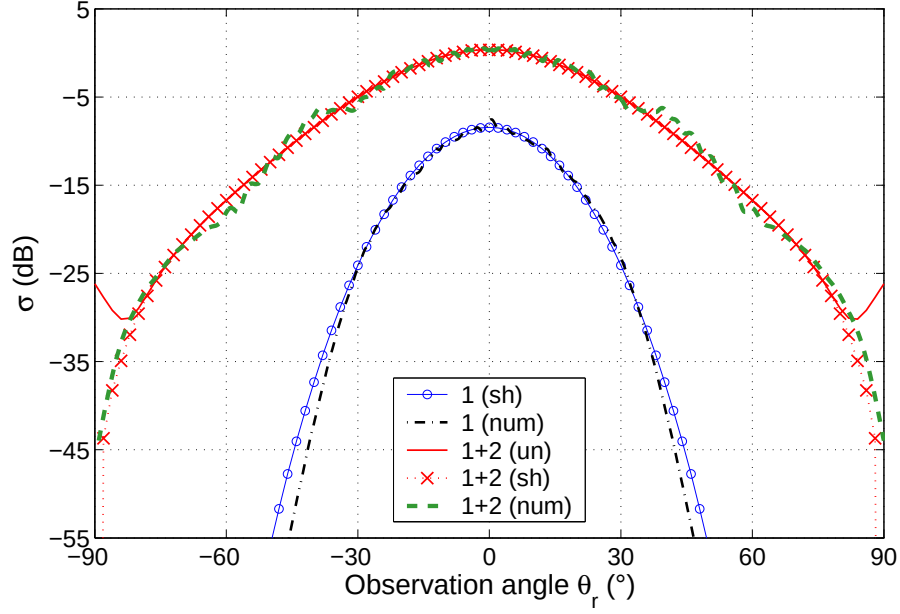


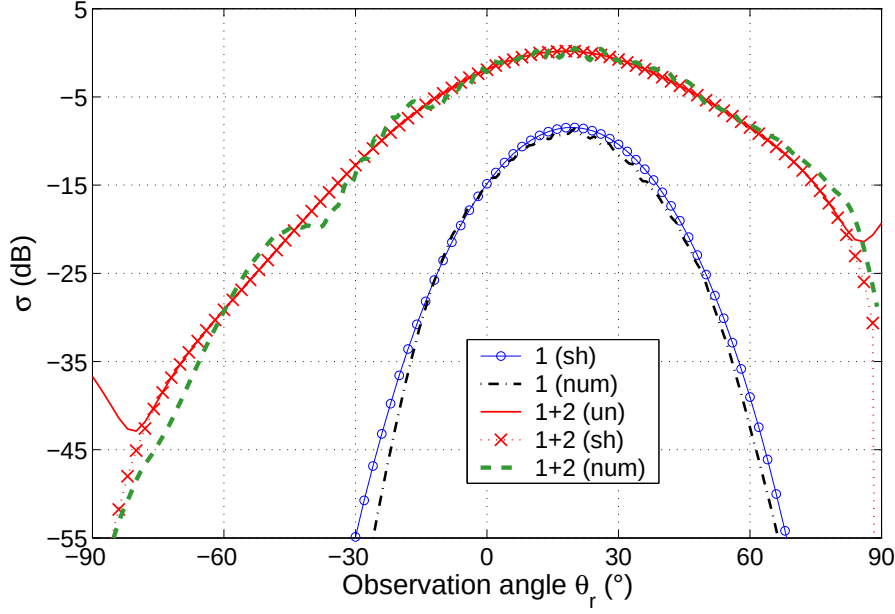
FIG. 3.3 – Simulations des contributions des coefficients de diffusion des premier et second ordres, $\sigma_{r,1}$ et $\sigma_{r,2}$ en dB, en fonction de l’angle d’observation θ_r en polarisation V , pour $\epsilon_{r2} = 3$ et $\epsilon_{r3} = i\infty$, avec $\theta_i = 0^\circ$.

d’inversion est alors remplacée par un développement en série dans laquelle le n -ième terme représente la contribution du champ diffracté n fois dans la couche. L’avantage principal de la méthode PILE est que tous les termes peuvent être calculés de manière efficace, en utilisant n’importe quelle méthode rapide connue pour une simple interface. En conséquence, les calculs peuvent être effectués sur un ordinateur de bureau standard, en un temps raisonnable (de l’ordre de 5 heures).

Pour nos simulations, nous avons implémenté la méthode PILE conjointement avec la méthode simple interface BMIA/CAG (Canonical Grid) [205, 277]. Cette méthode PILE est très performante quand l’écart type des hauteurs est “faible”, c’est-à-dire typiquement inférieur à λ ; c’est le cas pour les simulations où l’écart type des hauteurs $\sigma_h = 0.5\lambda$. Le pas d’échantillonnage sur chaque interface est $\delta x = \lambda/10$, et la longueur totale est $L = 150\lambda$, donc le nombre N total d’inconnues est $3N = 4500$ pour le cas PC et $4N = 6000$ pour le cas diélectrique. A l’aide de simulations de Monte-Carlo, le champ diffracté est moyenné sur 50 réalisations, et pour cette configuration, le temps de calcul est d’environ 5 minutes pour chaque réalisation avec un ordinateur de bureau (processeur cadencé à 1 GHz, avec 256 Mo de mémoire vive), à l’aide de MATLAB.

Le système étudié est composé d’une couche diélectrique de permittivité relative $\epsilon_{r2} = 3$ sur un métal parfaitement conducteur $\epsilon_{r3} = i\infty$. Le modèle présenté dans la section précédente [274] est comparé à la méthode numérique de référence [36, 205], basée sur la méthode des moments, présentée ci-dessus, avec $\theta_i = \{0^\circ; -20^\circ\}$, pour des applications dans le domaine optique. La configuration est bistatique, où l’angle de diffusion $\theta_r \in [-90^\circ; +90^\circ]$.

Les simulations des coefficients de diffusion en réflexion totaux des premier et second ordres, $\sigma_{r,1}^{tot}$ et $\sigma_{r,2}^{tot}$, sont présentées pour $\theta_i = 0^\circ$ sur la figure 3.3, et pour $\theta_i = -20^\circ$ sur la figure 3.4.


 FIG. 3.4 – Mêmes simulations que sur la figure 3.3, mais avec $\theta_i = -20^\circ$.

Rappelons que de manière générale dans la limite haut fréquence (sous l'AOG), $\sigma_{r,n}$ correspond à la corrélation statistique du champ diffracté en réflexion d'ordre n , $E_{r,n}$.

Sur les deux figures, pour la contribution du premier ordre $\sigma_{r,1}$, une comparaison est faite entre le modèle avec effet d'ombre, tracé en ligne cerclée bleue, et la méthode numérique de référence, tracée en traits-points noirs. Les résultats numériques de la contribution du premier ordre montrent un bon accord du modèle avec la méthode de référence, à la fois en polarisations V et H (seule la polarisation V est représentée ici), et pour les deux angles d'incidence, autour de la direction spéculaire $\theta_r = -\theta_i$. Le modèle sans effet d'ombre n'est pas représenté ici car pour cette configuration, il n'y a pas de différence avec le modèle avec ombre. En effet, pour des pentes faibles et des angles d'incidences modérés, l'ombrage (ou le masquage) de la surface n'a lieu que pour des angles de diffusion rasants, pour lesquels le coefficient de diffusion $\sigma_{r,1}$ a une contribution négligeable dans ce cas.

Pour la contribution du second ordre $\sigma_{r,2}$ (c'est-à-dire le coefficient de diffusion total du second ordre $\sigma_{r,2}^{tot}$), une comparaison est faite entre le modèle développé, tracé en ligne rouge pour le modèle sans ombre et en ligne en pointillés et surmontés de croix rouges pour le modèle avec ombre, et la méthode numérique de référence, tracée en ligne discontinue noire. Premièrement, nous pouvons observer que cette contribution est significative, non seulement dans et autour de la direction spéculaire, mais aussi dans toutes les autres directions de diffusion en réflexion. En effet, comme la permittivité du milieu intermédiaire est proche de celle du milieu supérieur, la majeure partie de la puissance incidente est transmise dans le milieu intermédiaire vers la surface inférieure parfaitement conductrice. Alors, toute cette énergie est diffusée en réflexion vers l'interface supérieure, qui en majeure partie est re-transmise dans le milieu incident. Ainsi, le coefficient de diffusion du second ordre a une contribution significative sur le coefficient de diffusion total, en comparaison avec celui du premier ordre. Deuxièmement, l'intensité diffusée n'est pas concentrée autour de la direction spéculaire, contrairement au premier ordre : elle possède une dispersion angulaire plus grande. En effet, la puissance diffusée du second ordre a subi trois diffusions successives : deux diffusions en transmission, et une diffusion en réflexion.

Les résultats numériques montrent également un bon accord du modèle avec la méthode de référence, à la fois en polarisations V et H (seule la polarisation V est représentée ici), et pour les deux angles d'incidence. Les résultats confirment le fait que pour cette configuration, l'effet d'ombre contribue seulement pour des angles de diffusion rasants (au-delà de $75 - 80^\circ$ ici), mais il a une contribution importante pour ces angles, et il est nécessaire de le prendre en compte pour obtenir des résultats numériques en accord avec la méthode de référence. Pour les deux angles d'incidence, les différences observées entre le modèle étudié et la méthode de référence sont dues aux difficultés à définir les paramètres de simulation de la méthode numérique rapide, paramètres qui ont une influence significative sur le coefficient de diffusion.

Ainsi, le modèle avec ombre est en bon accord avec la méthode numérique de référence. Ajoutons que d'autres simulations effectuées (mais non présentées ici) ont permis de confirmer qu'en prenant des épaisseurs moyennes de la couche différentes (par exemple $\bar{H} = 10\lambda$), les résultats numériques de la méthode de référence sont les mêmes. Des applications possibles de ce modèle pour cette configuration peuvent être la télédétection avancée, où l'émetteur et le récepteur sont en configuration bistatique, comme la télédétection de sable sur du granit [118], de glace sur la surface de la mer [175, 176] (quand la couche de glace peut être supposée homogène), et de nappes de pétrole sur la mer, comme présenté plus loin en configuration monostatique. D'autres applications possibles sont la tomographie optique de milieux biologiques [191, 190], en tant que modèle de base rapide quand les milieux peuvent être supposés homogènes.

3.3.2 Comparaison entre une interface inférieure rugueuse et plane

Cette section est dédiée à la comparaison du modèle entre le cas d'une surface inférieure rugueuse et d'une surface inférieure plane, et leur influence sur la contribution du coefficient de diffusion du second ordre $\sigma_{r,2}$ (en d'autres termes, sur le coefficient de diffusion du second ordre total $\sigma_{r,2}^{tot}$).

Le système étudié est le même que précédemment : il est composé d'une couche de permittivité relative $\epsilon_{r2} = 3$ sur une surface PC $\epsilon_{r3} = i\infty$. Des simulations sont présentées en configuration bistatique $\theta_r \in [-90^\circ; +90^\circ]$, pour deux angles d'incidence différents, $\theta_i = 0^\circ$ sur la figure 3.5 et $\theta_i = -20^\circ$ sur la figure 3.6. La contribution du premier ordre $\sigma_{r,1}$ pour une interface inférieure rugueuse est tracée ligne cerclée bleue. La contribution du second ordre $\sigma_{r,2}$ pour une interface inférieure rugueuse est tracée en pointillés surmontés de croix rouges, et celle pour une interface inférieure plane est tracée en ligne discontinue noire. Le temps de calcul CPU typique pour calculer $\sigma_{r,1}$ et $\sigma_{r,2}$ pour une interface inférieure plane est de l'ordre de 34 ms pour une valeur de l'angle de diffusion θ_r (et de l'angle d'incidence θ_i), avec 40 échantillons de θ_{m1} pour l'intégration numérique, en comparaison avec 190 ms pour une interface inférieure plane (processeur cadencé à 500 MHz, avec 670 Mo de mémoire vive).

Pour $\theta_i = 0^\circ$, la différence entre le cas rugueux et le cas plan sur la contribution du second ordre $\sigma_{r,2}$ est claire. Pour une interface inférieure plane, la contribution du second ordre est concentrée autour de la direction spéculaire $\theta_r = -\theta_i$. En effet, l'interface inférieure étant plane, l'énergie incidente sur l'interface inférieure n'est pas diffusée dans toutes les directions de réflexion comme pour le cas rugueux, mais réfléchié dans la direction spéculaire. Au contraire, pour une interface inférieure rugueuse, la contribution du second ordre est plus faible dans et autour de la direction spéculaire, et l'énergie diffusée est distribuée de manière plus uniforme sur tous les angles de diffusion. En effet, l'interface inférieure rugueuse diffuse l'énergie dans toutes les directions. Les mêmes observations peuvent être faites pour $\theta_i = -20^\circ$.

De plus, pour le cas plan, l'onde diffusée du second ordre a subi deux diffusions en trans-

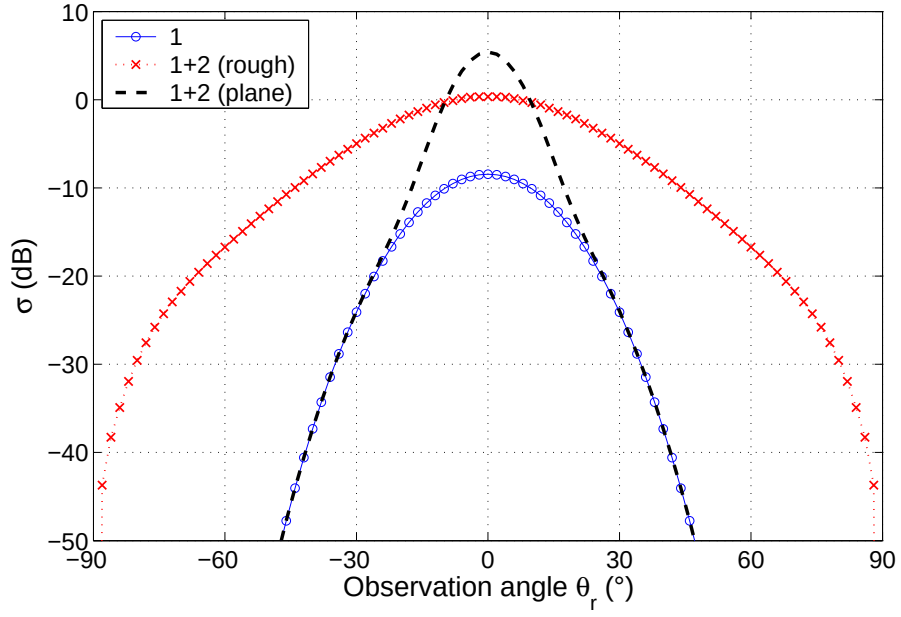


FIG. 3.5 – Simulations de la contribution du coefficient de diffusion du second ordre $\sigma_{r,2}$ en dB, en fonction de l'angle d'observation θ_r en polarisation V , pour $\epsilon_{r2} = 3$ et $\epsilon_{r3} = i\infty$, avec $\theta_i = 0^\circ$: comparaison entre une surface inférieure rugueuse et plane.

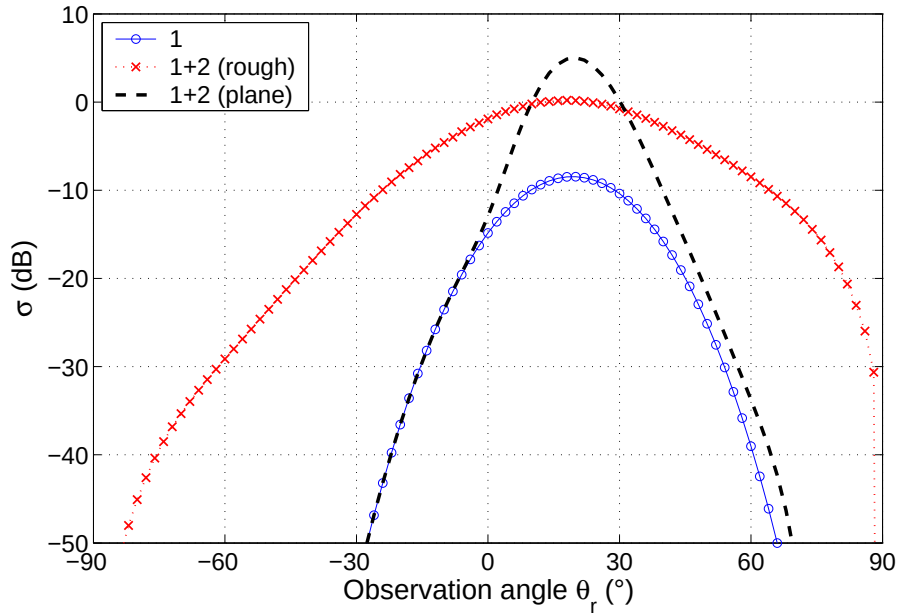


FIG. 3.6 – Même simulations que sur la figure 3.5, mais avec $\theta_i = -20^\circ$.

mission. Nous pouvons remarquer que la dispersion de l'énergie diffusée est équivalente à celle correspondant à la diffusion en réflexion par l'interface supérieure. Ceci permet de dire que la dispersion en transmission (vers un milieu plus réfringent) est moindre que la dispersion en réflexion. Ce n'est pas surprenant : ceci est lié à la loi de Snell-Descartes. Cette assertion est confirmée par la comparaison entre le cas plan et le cas rugueux, où la dispersion est bien plus importante.

Alors, il est aisé de faire la distinction d'un tel système avec une interface inférieure rugueuse ou une interface inférieure plane. Des applications possibles du cas plan sont par exemple la caractérisation de matériaux optiques, où une interface du verre est rugueuse et l'autre plane [56, 41, 186, 57, 184], pour des cas où la rugosité de la surface est plus grande que, ou de l'ordre de la demi-longueur d'onde.

3.3.3 Etude d'un milieu intermédiaire à pertes

Si nous regardons les expressions des coefficients de diffusion, nous pouvons remarquer qu'ils sont indépendants de l'épaisseur moyenne de la couche $\bar{H}$ (si nous négligeons le cas anti-coïncident), ce qui signifie que le modèle tel quel ne peut pas déterminer l'épaisseur de la couche du système étudié. Ceci correspond à l'utilisation de l'approximation de l'optique géométrique (AOG), dans laquelle le terme de phase n'est pas pris en compte. Ceci implique également que le modèle tel quel ne peut pas traiter des milieux intermédiaires à pertes (Ω_2 , avec $\epsilon_{r2} = \epsilon_{r2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$). Cependant, dans ce qui suit nous verrons qu'il est aisé de prendre en compte ce phénomène : en effectuant des ajustements mineurs au modèle, nous allons montrer qu'il est possible d'obtenir une bonne estimation des coefficients de diffusion de la couche avec pertes.

3.3.3.1 Analyse théorique des pertes dues à un milieu intermédiaire à pertes

Pour la contribution du coefficient de diffusion du premier ordre $\sigma_{r,1}$, la seule modification est que le coefficient de réflexion de Fresnel r_{12} devient complexe du fait de ϵ_{r2} . Alors, dans l'équation (3.23), concernant le terme $r_{12}(\chi_i^0)$ à l'intérieur de l'expression $|f_r(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r)|^2, |\dots|$ ne représente plus une valeur absolue, mais un module. En revanche, pour la contribution du second ordre $\sigma_{r,2}$, il y a plusieurs modifications mineures.

Premièrement, pour déterminer les pertes de propagation de l'onde dans le milieu à pertes, il est nécessaire de connaître le chemin suivi par l'onde dans ce milieu, et donc les angles de propagation. Or il y a un problème dans la définition des angles *physiques* de propagation dans le milieu intermédiaire à pertes Ω_2 , θ_{m1} et θ_{p1} . En effet, pour des milieux sans pertes, ces derniers sont habituellement obtenus à partir de la deuxième loi de Snell-Descartes, exprimée respectivement en transmission et réflexion par (1.21a, 1.21b)

$$\sqrt{\epsilon_{r2}} \sin \chi_t = \sqrt{\epsilon_{r1}} \sin \chi_i, \quad (3.45)$$

$$\chi_r = -\chi_i, \quad (3.46)$$

avec χ_i l'angle local d'incidence, χ_t l'angle local de transmission, et χ_r l'angle local de réflexion, par rapport à la normale locale de la surface considérée. Alors, connaissant la pente locale de la surface, il est facile d'obtenir θ_{m1} connaissant l'angle d'incidence θ_i et en utilisant la loi de Snell-Descartes en transmission (3.45) sur l'interface rugueuse ; puis θ_{p1} connaissant θ_{m1} et en utilisant la loi de Snell-Descartes en réflexion (3.46) sur l'interface inférieure. Le problème est que, pour $\epsilon_{r2} \equiv \epsilon_{r2} \in \mathbb{C}$, comme le terme de droite de l'équation (3.45) est réel, le produit $\sqrt{\epsilon_{r2}} \sin \chi_t$ à gauche de l'équation doit être réel, ce qui implique que χ_t est complexe (puisque ϵ_{r2}

est complexe). Cependant, nous cherchons à déterminer l'angle *physique* (avec donc une valeur réelle) local de propagation χ_t dans le milieu Ω_2 (dans le but de déterminer θ_{m1} connaissant la pente locale de la surface), qui n'est pas simplement la partie réelle de $\underline{\chi}_t$. Nous avons vu, dans le premier chapitre (1.34), qu'il est donné par [4, 17, 18]

$$\tan \chi_t^{phys} = \frac{\sin \chi_i}{p}, \quad (3.47)$$

avec

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{(\epsilon'_{r2} - \sin^2 \chi_i)^2 + \epsilon''_{r2}{}^2} + (\epsilon'_{r2} - \sin^2 \chi_i) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.48)$$

où $\epsilon_{r2} = \epsilon'_{r2} + i \epsilon''_{r2}$ et $p = \Re \left(\sqrt{\epsilon_{r2} - \sin^2 \underline{\chi}_t} \right)$. Alors, ceci permet de déterminer θ_{m1} , puis θ_{p1} en utilisant l'équation (3.46) sur l'interface inférieure, connaissant la pente locale de la surface.

Deuxièmement, dans l'équation de $\sigma_{r,2}$ (3.25), de même que pour $\sigma_{r,1}$, les coefficients de réflexion et transmission de Fresnel deviennent complexes, et $|\dots|$ ne représente plus une valeur absolue, mais un module. Notons que le coefficient de réflexion de Fresnel $r_{23}(\chi_{m1}^0)$, et le coefficient de transmission de Fresnel $t_{21}(\chi_{p1}^0)$ utilisent des angles d'incidence locaux, χ_{m1}^0 et χ_{p1}^0 , qui sont définis à l'aide des angles *physiques* de propagation θ_{m1} et θ_{p1} , et de la pente locale de la surface considérée.

Troisièmement, connaissant les angles physiques de propagation θ_{m1} et θ_{p1} dans le milieu Ω_2 , l'épaisseur moyenne $\bar{H}$, et la densité de probabilité des pentes des deux surfaces, nous pouvons déterminer le chemin suivi par l'onde du point A_1 au point B_1 , et du point B_1 au point A_2 . Ainsi, il est possible de déterminer les pertes de propagation de la puissance dans le milieu intermédiaire à pertes Ω_2 (de A_1 à B_1 , et de B_1 à A_2).

3.3.3.2 Estimation des pertes pour l'implémentation numérique

Afin d'implémenter numériquement le modèle pour le cas spécifique d'un milieu intermédiaire Ω_2 à pertes de manière rapide et facile, des modifications mineures au modèle initial sont faites.

Premièrement, pour évaluer les pertes de propagation $\mathcal{A}$, nous allons considérer ici le cas simple d'interfaces planes⁹. Alors, les pertes de propagation peuvent facilement être évaluées connaissant l'angle d'incidence θ_i , l'angle de propagation dans la couche θ_{m1} , et l'épaisseur moyenne de la couche $\bar{H}$. Ces pertes de puissance de propagation $\mathcal{A}$ sont évaluées pour des interfaces planes par l'expression $\mathcal{A}^{plan}$

$$\mathcal{A}^{plan} \simeq \exp \left(-4k_0 \bar{H} q / \cos \theta_t^{plan} \right), \quad (3.49)$$

avec

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{(\epsilon'_{r2} - \sin^2 \theta_i)^2 + \epsilon''_{r2}{}^2} - (\epsilon'_{r2} - \sin^2 \theta_i) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.50)$$

où θ_t^{plan} est défini à partir de la loi de Snell-Descartes en transmission (3.45) à l'interface supérieure, pour le cas d'une interface plane où l'angle local d'incidence χ_i est égal à l'angle

⁹En effet, même si le cas rugueux peut être calculé sans difficulté, considérer uniquement le cas plan donne dans ce type de configurations (c'est-à-dire des milieux à faibles pertes, un écart type des hauteurs de l'ordre de la longueur d'onde, et des incidences modérées) des résultats satisfaisants, et est plus facile à expliquer et à comprendre. De plus, il permet de conserver la propriété intéressante du modèle d'être indépendant de l'écart type des hauteurs.

d'incidence θ_i dans Ω_1 , et $q = \Im m \left(\sqrt{\epsilon_{r2} - \sin^2 \chi_t} \right)$. Alors, l'angle local de transmission χ_t est égal à l'angle de transmission $\theta_{m1} \equiv \theta_t^{plan}$ dans Ω_2 (comme l'interface inférieure est également plane, nous obtenons également $\theta_{p1} \equiv -\theta_t^{plan}$).

Deuxièmement, les angles physiques de propagation θ_{m1} et θ_{p1} peuvent être calculés, cependant il peut être intéressant de les évaluer en effectuant de légères modifications au modèle initial. Alors, nous pouvons utiliser l'approximation suivante : dans la loi de Snell-Descartes en transmission (3.45), au lieu d'utiliser la permittivité complexe ϵ_{r2} , nous pouvons utiliser soit sa partie réelle, ϵ'_{r2} , soit la partie réelle de la racine carrée de ϵ_{r2} , $\Re(\sqrt{\epsilon_{r2}})$. Alors, la loi de Snell-Descartes en transmission (3.45) devient, respectivement (1.36a, 1.36b)

$$\sqrt{\epsilon'_{r2}} \sin \chi_t^{(1)} \simeq \sqrt{\epsilon_{r1}} \sin \chi_i, \quad (3.51)$$

$$\Re(\sqrt{\epsilon_{r2}}) \sin \chi_t^{(2)} \simeq \sqrt{\epsilon_{r1}} \sin \chi_i. \quad (3.52)$$

Dans le cas d'interfaces planes, les angles locaux χ peuvent être dénotés θ . Ici, pour les simulations numériques, il est plus simple d'utiliser la première approximation de l'angle de propagation, $\theta_t^{(1)} \simeq \theta_t^{plan}$, en remplaçant la permittivité complexe ϵ_{r2} par sa partie réelle ϵ'_{r2} . Cette approximation est moins bonne que la seconde, comme nous l'avons vu au premier chapitre, mais elle est correcte pour des milieux à faibles pertes¹⁰. Par exemple, pour une permittivité relative complexe $\epsilon_{r2} = 3 + 0.1i$ à un angle d'incidence $\theta_i = -20^\circ$, l'angle physique de propagation $\theta_t^{plan} = -11.3871^\circ$, la première approximation obtenue à partir de l'équation (3.51) donne $\theta_t^{(1)} = -11.3888^\circ$, et la seconde approximation obtenue à partir de l'équation (3.52) donne $\theta_t^{(2)} = -11.3872^\circ$: les deux approximations sont valides et précises. Pour $\epsilon_{r2} = 3 + i$ à $\theta_i = -20^\circ$, $\theta_t^{plane} = -11.230^\circ$, $\theta_t^{(1)} = -11.389^\circ$, et $\theta_t^{(2)} = -11.236^\circ$: les deux approximations sont valides, mais seule la seconde reste précise.

Pour les simulations numériques, le système étudié est le même que pour les premières simulations, mais avec une permittivité relative de la couche de $\epsilon_{r2} = 3 + 0.1i$ (le milieu inférieur est parfaitement conducteur $\epsilon_{r3} = i\infty$). Nous considérons deux angles d'incidence $\theta_i = \{0^\circ; -20^\circ\}$. Alors, la première approximation de l'angle de propagation, qui consiste à remplacer $\epsilon_{r2} = 3 + 0.1i$ par sa partie réelle $\epsilon'_{r2} = 3$, peut être utilisée. Avec cette approximation, nous pouvons évaluer les pertes de puissance de propagation (évaluées pour le cas plan) $\mathcal{A} \approx \mathcal{A}^{plan} \simeq 0.046 \simeq -13.4$ dB pour $\theta_i = 0^\circ$, et $\mathcal{A} \approx \mathcal{A}^{plan} \simeq 0.041 \simeq -13.9$ dB pour $\theta_i = -20^\circ$. Les simulations numériques présentent une comparaison du cas d'un milieu intermédiaire à pertes $\epsilon_{r2} = 3 + 0.1i$, avec le cas d'un milieu intermédiaire sans pertes $\epsilon_{r2} = 3$, et une comparaison entre le modèle avec ombre, modifié pour prendre en compte les pertes comme décrit ci-dessus, et la méthode numérique de référence [36, 205]. Les simulations de la contribution du premier ordre $\sigma_{r,1}$ ne sont pas présentées ici. En effet, pour cette configuration de milieu à faibles pertes, la différence avec le cas sans pertes peut être ignorée, puisque le module du coefficient de réflexion de Fresnel varie très faiblement (le maximum de différence relative n'excède pas 0.03%!).

Les simulations de la contribution du coefficient de diffusion du second ordre $\sigma_{r,2}$ (c'est-à-dire le coefficient de diffusion total du second ordre $\sigma_{r,2}^{tot}$) sont présentées pour $\theta_i = 0^\circ$ sur la figure 3.7, et pour $\theta_i = -20^\circ$ sur la figure 3.8. Pour le cas à pertes, le modèle avec ombre est tracé en pointillés rouges, et la méthode de référence en ligne discontinue verte. Ici, pour les simulations,

¹⁰Plus précisément, l'exactitude dépend de l'angle d'incidence, de la partie réelle de la permittivité relative, ϵ'_{r2} , et de la partie imaginaire de la permittivité relative. En règle générale, même si ϵ'_{r2} est proche de 1, pour des angles d'incidence modérés et des milieux à faibles pertes, l'approximation est valide, et elle est d'autant meilleure que ϵ'_{r2} augmente [23].

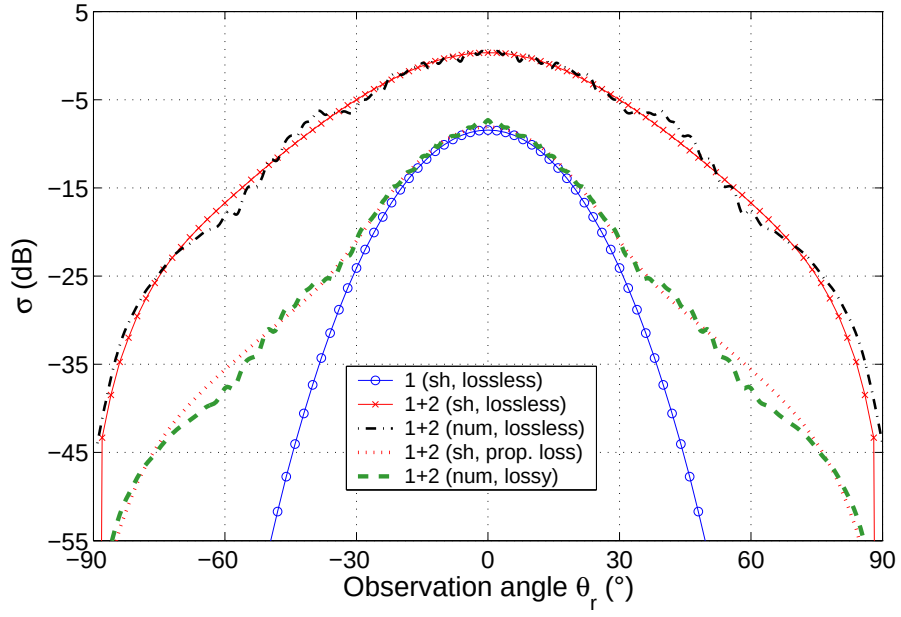


FIG. 3.7 – Simulations de l'influence d'un intermédiaire milieu à pertes de permittivité relative égale à $3 + 0.1i$ sur la contribution du coefficient de diffusion du second ordre $\sigma_{r,2}$ en dB, en fonction de l'angle d'observation θ_r en polarisation V , pour $\epsilon_{r3} = i\infty$ et avec $\theta_i = 0^\circ$.

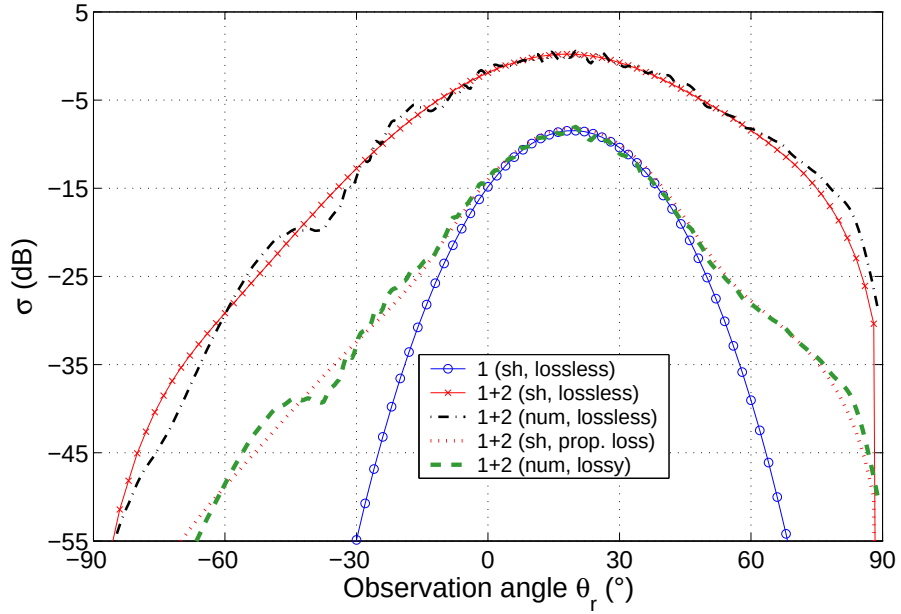


FIG. 3.8 – Mêmes simulations que sur la figure 3.7, mais avec $\theta_i = -20^\circ$.

seules les pertes de propagation $\mathcal{A}$ doivent être prises en compte dans le modèle pour quantifier le cas à pertes. Le cas sans pertes est aussi tracé pour comparaison, ainsi que la contribution du premier ordre du modèle avec ombre (le cas sans pertes, qui est quasiment égal au cas à pertes). Pour les deux angles d'incidence, pour les deux courbes du modèle avec ombre (prenant en compte uniquement les pertes de propagation) et de la méthode de référence, nous pouvons remarquer que la différence entre les cas avec et sans pertes sur la contribution de $\sigma_{r,2}$ est globalement constante, et est de l'ordre des pertes de propagation ($\mathcal{A} \approx \mathcal{A}^{plan} \simeq 0.046 \simeq -13.4$ dB pour $\theta_i = 0^\circ$, et $\mathcal{A} \approx \mathcal{A}^{plan} \simeq 0.041 \simeq -13.9$ dB pour $\theta_i = -20^\circ$), calculées à partir de l'équation (3.49). De plus, pour le cas à pertes, nous pouvons observer que les courbes du modèle avec ombre (prenant en compte uniquement les pertes de propagation) et de la méthode de référence coïncident autour de la direction spéculaire $\theta_r = -\theta_i$, et les différences dans les autres configurations sont les mêmes que celles observées pour le cas sans pertes, et peuvent être attribuées aux limitations de la méthode numérique.

Des simulations pour des valeurs différentes de $\epsilon_{r,2}$, pour des faibles pertes ($3 + 0.02i$ entre autres) ont été réalisées. Elles mènent aux mêmes résultats et conclusions, c'est-à-dire un bon accord entre le modèle avec ombre (prenant en compte uniquement les pertes de propagation) et la méthode de référence. En conséquence, pour des milieux à faibles pertes, les pertes de propagation sont le facteur principal d'atténuation en puissance de l'onde, et décrivent quantitativement les pertes dans le milieu intermédiaire.

Ainsi, même si le modèle étudié tel quel ne peut pas prendre en compte des milieux à pertes, des modifications simples du modèle (principalement l'addition du facteur de pertes de propagation $\mathcal{A}$ dans le coefficient de diffusion du second ordre $\sigma_{r,2}$, qui peut être évalué en considérant des interfaces planes) permettent de prendre ce cas particulier en compte, avec de bons résultats quantitatifs.

3.3.4 Application à la détection de pétrole sur la mer

Dans cette partie, la configuration mono-statique $\theta_r = +\theta_i$, pour des applications à des systèmes radar par exemple, est étudiée en détail. Le même système que dans les sections précédentes est considéré, mais pour une application à la détection d'une nappe de pétrole sur la surface de la mer. Pour des épaisseurs de pétrole de l'ordre de $\bar{H} \in [2; 6]$ cm, pour lesquelles les deux surfaces sont supposées décorréées, le modèle peut être utilisé pour des diffusiomètres dans la bande de fréquence Ka . Pour une fréquence de 35 GHz, l'épaisseur moyenne de la couche de pétrole vaut $\bar{H} \in [2.33; 7]\lambda$. De plus, les permittivités relatives du pétrole et de la mer sont respectivement de l'ordre de $\epsilon_{r,2} \simeq 2 + 0.04i$ et $\epsilon_{r,3} = 16 + 25i$ [12, 14, 279, 13].

Les paramètres de simulation sont présentés pour $\theta_r = +\theta_i$, avec $\theta_i \in [0^\circ; 90^\circ]$. Une comparaison est faite entre une mer propre et une mer recouverte de pétrole, qui n'ont pas les mêmes caractéristiques statistiques. En effet, une surface de mer est composée de vagues de gravité et de capillarité. Pour des angles d'incidence allant de 0° à environ $20^\circ - 30^\circ$, seules les vagues de gravité, correspondant aux fréquences basses du spectre de mer, contribuent au processus de diffusion modélisé alors par l'AOG. En revanche, au-delà de cet angle limite, les vagues de capillarité, correspondant aux fréquences hautes du spectre de mer, contribuent au processus de diffusion. Pour des angles d'incidence supérieurs à environ 40° , seules les vagues de capillarité contribuent au processus de diffusion, modélisé alors par la méthode des petites perturbations (SPM). Pour une surface de mer contaminée, les vagues de capillarité sont fortement atténuées, ce qui signifie que la contribution des fréquences hautes décroît, impliquant que l'écart type des pentes décroît également. Ainsi, l'AOG peut être utilisée pour des angles d'incidence couvrant

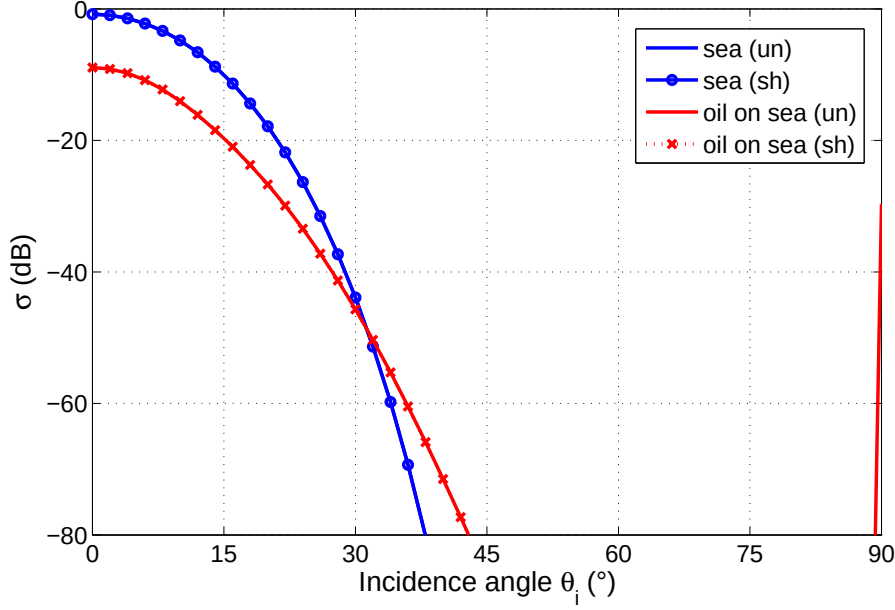


FIG. 3.9 – Comparaison entre une mer propre avec $\sigma_s^{sea} = 0.126$ et une mer de pétrole d'épaisseur moyenne $\bar{H} = 6\lambda$ avec $\sigma_s^{oil+sea} = 0.094$: simulations des coefficients de diffusion en dB, en fonction de l'angle d'incidence θ_i en polarisation V, pour $\epsilon_{r2} = 2.0 + 0.04i$ et $\epsilon_{r3} = 16 + 25i$.

un intervalle plus grand : de 0° à environ $30^\circ - 40^\circ$.

Alors, pour un même état de mer l'écart type des pentes σ_s d'une mer recouverte de pétrole est plus faible que celui d'une mer propre. En considérant une statistique des pentes gaussienne, et en utilisant le modèle de Cox and Munk [280] (modèle indépendant de l'épaisseur de la nappe de pétrole), l'écart type des pentes σ_s est lié à la vitesse du vent u_{12} à 12.5 m au-dessus de la surface dans la direction du vent par l'expression, respectivement pour une mer propre et une mer recouverte de pétrole (1.71, 1.73) [33]

$$\sigma_s^{sea} = 0.0562\sqrt{u_{12}}, \quad (3.53)$$

$$\sigma_s^{oil+sea} = (0.78 \times 10^{-3}u_{12} + 0.005)^{1/2}. \quad (3.54)$$

Alors, en prenant une vitesse du vent $u_{12} = 5$ m/s, l'écart type des pentes $\sigma_s^{sea} \simeq 0.126$ pour une mer propre et $\sigma_s^{oil+sea} \simeq 0.094$ pour une mer recouverte de pétrole (comme illustré dans le premier chapitre sur la figure 1.10).

En considérant les pertes de propagation $\mathcal{A}$ dans la couche de pétrole d'épaisseur moyenne $\bar{H} = \{2.33, 6, 7\}\lambda$, nous obtenons : pour $\bar{H} = 2.33\lambda$, $\mathcal{A}$ va de -3.6 dB pour $\theta_i = 0^\circ$ à -7.2 dB pour $\theta_i = 90^\circ$; pour $\bar{H} = 6\lambda$, $\mathcal{A}$ va de -9.3 dB pour $\theta_i = 0^\circ$ à -18.5 dB pour $\theta_i = 90^\circ$; et pour $\bar{H} = 7\lambda$, $\mathcal{A}$ va de -10.8 dB pour $\theta_i = 0^\circ$ à -21.6 dB pour $\theta_i = 90^\circ$. Alors, les pertes de propagation doivent être prises en compte pour les simulations numériques. De plus, comme dans ce cas le milieu inférieur de permittivité $\epsilon_{r3} = 16 + 25i$ n'est pas à faibles pertes, le coefficient de réflexion de Fresnel r_{23} est calculé sans approximation.

Les simulations de la figure 3.9 présentent la comparaison entre une mer propre pour $\sigma_s^{sea} = 0.126$ et une mer de pétrole d'épaisseur moyenne $\bar{H} = 6\lambda$ pour $\sigma_s^{oil+sea} = 0.094$ (correspondant à la même vitesse du vent $u_{12} = 5$ m/s), avec une comparaison entre le cas où l'effet d'ombre est pris en compte, et le cas où il ne l'est pas. Notons que pour une mer de pétrole, les simulations sont

présentées pour le coefficient de diffusion total du second ordre (les ordres supérieurs pouvant être négligés). Le cas d'une mer propre est tracé en ligne bleue pour le cas sans ombre et en ligne cerclée bleue pour le cas avec ombre ; le cas d'une mer de pétrole est tracé en ligne rouge pour le cas sans ombre et en pointillés surmontés de croix rouges pour le cas avec ombre.

Pour une mer propre, les résultats de simulation montrent que l'effet d'ombre peut être négligé pour cette configuration. En effet, l'ombre est conséquente seulement pour des angles rasants, qui ne contribuent pas ici. Pour une mer de pétrole, l'effet d'ombre peut également être négligé pour des angles rasants, sauf quand $|\theta_i| \rightarrow 90^\circ$. En effet, nous pouvons voir sur la figure 3.9 que le modèle sans ombre diverge et tend vers $+\infty$ quand $|\theta_i| \rightarrow 90^\circ$, ce qui n'a pas de signification physique. Par ailleurs, nous pouvons observer que pour cette configuration, la distinction entre une mer de pétrole et une mer propre est relativement aisée pour des angles d'incidence faibles. Néanmoins, pour des angles d'incidence de l'ordre de 30° et au-delà, cette distinction est difficile. Soit C le contraste entre une mer propre et une mer de pétrole. Avec σ_{sea} le coefficient de diffusion de la mer propre et $\sigma_{oil+sea}$ le coefficient de diffusion de la mer de pétrole, le contraste est défini par $C = \sigma_{oil+sea}/\sigma_{sea}$. Alors, pour un angle d'incidence $\theta_i = 0^\circ$, $C = -8.1$ dB : le contraste est significatif, et la détection de nappe de pétrole est aisée pour un capteur standard. Ce contraste diminue quand θ_i augmente jusqu'à 32° , où le contraste tend vers 1 (0 en dB) : la détection pour θ_i autour de 32° est alors très difficile. Pour des angles d'incidence supérieurs à 32° , ce contraste augmente : la détection de nappe de pétrole pourrait alors être possible. Cependant, les niveaux des coefficients de diffusion deviennent faibles (inférieurs à -50 dB), et seuls des capteurs de bonne sensibilité peuvent détecter de tels niveaux¹¹.

Ainsi, ce modèle permet d'obtenir rapidement un ordre de grandeur du coefficient de diffusion d'une mer recouverte de pétrole (avec une erreur maximale inférieure à 2 dB pour des incidences faibles). A ces fréquences, il est possible de détecter des nappes de pétrole d'épaisseur moyenne $\bar{H} = 6\lambda$, pour des angles d'incidence faibles. De plus, d'autres résultats (non présentés ici) pour $\bar{H} = 2.33\lambda$ et $\bar{H} = 7\lambda$ permettent d'aboutir aux mêmes conclusions. Notons que pour $\bar{H} = 2.33\lambda$, la détection est possible pour un angle d'incidence $\theta_i < 25^\circ$ seulement ; en revanche, pour $\bar{H} = 7\lambda$, la détection est possible pour $\theta_i < 35^\circ$. En effet, pour une mer de pétrole plus $\bar{H}$ est important, plus la contribution du coefficient de diffusion du second ordre est faible, du fait des pertes de propagation dans la couche de pétrole. Ceci permet alors de faire la distinction entre différentes épaisseurs de pétrole à ces fréquences.

3.3.5 Remarques de conclusion

Le modèle étudié a été validé par comparaison avec une méthode numérique de référence, basée sur la méthode des moments. Le modèle peut prendre en compte des systèmes composés d'une interface inférieure soit rugueuse soit plane, avec un milieu intermédiaire soit sans pertes soit avec pertes, pour lesquels des simulations ont été présentées. De plus, des milieux intermédiaires à faibles pertes peuvent être traités très simplement en prenant en compte uniquement les pertes de propagation (évaluées en considérant des interfaces planes qui plus est). Le modèle est rapide à calculer. En effet, pour un angle d'incidence et un angle d'observation donnés, avec 40 échantillons pour les intégrations numériques sur θ_{m1} et θ_{p1} , le temps de calcul CPU des coefficients de diffusion des premier et second ordres est de l'ordre de 190 ms avec un ordinateur standard (processeur cadencé à 500 MHz, avec 670 Mo de mémoire vive), avec MATLAB.

Les limites du modèle correspondent qualitativement aux limites de l'AK dans la limite haute

¹¹De plus, rappelons qu'au-delà de 30° environ, la surface de mer n'est pas correctement modélisée par l'AOG seule. Ainsi nous ne pouvons pas conclure de manière certaine pour des angles d'incidence au-delà de 30° environ.

fréquence, c'est-à-dire qu'elle n'est plus valide pour des angles très rasants (puisque le paramètre de Rayleigh en réflexion tend alors vers 0), et ne peut prendre en compte que des surfaces dont l'écart type des hauteurs est supérieur à environ la demi-longueur d'onde¹². De plus, le modèle étant basé sur l'AK du premier ordre, le phénomène de multiple diffusion par la même interface n'est pas pris en compte. Ceci réduit la validité du modèle à des écarts types des pentes σ_s inférieurs à environ 0.35¹³. Enfin, les surfaces sont supposées décorréelées, ainsi que les points de réflexion successives dans le guide d'onde diélectrique rugueux, pour obtenir un modèle simple et rapide à mettre en oeuvre numériquement. Ceci réduit la validité du modèle à des épaisseurs de la couche $\bar{H}$ relativement importantes ; dans la pratique, les résultats numériques sont satisfaisants dès lors que $\bar{H} \geq 5\lambda$. Ainsi, les conditions d'application du modèle pour un problème 2D peuvent se résumer qualitativement comme suit :

- angle d'incidence $\theta_i \leq 60^\circ$
- écart type des hauteurs $\sigma_h \geq \lambda/2$
- écart type des pentes $\sigma_s \leq 0.35$ (en configuration bistatique ; jusqu'à 0.5 en configuration monostatique pour des incidences faibles)
- épaisseur moyenne de la couche $\bar{H} \geq 5\lambda$

Le modèle et son domaine de validité une fois bien connus pour un problème 2D, l'intérêt est alors d'étendre ce modèle au cas général d'un problème 3D, afin de traiter des surfaces rugueuses 2D, notamment des surfaces anisotropes.

¹²Remarquons que les simulations présentées ici, qui ont permis de valider le modèle, ont été menées pour $\sigma_h = 0.5\lambda$.

¹³Comme nous l'avons vu lors de l'étude de la conservation d'énergie de l'AK-1 réduite à l'AOG, ceci dépend de manière générale de la précision voulue sur le modèle, ainsi que de l'angle d'incidence. De plus, cette condition est beaucoup moins restrictive en configuration monostatique que bistatique, puisque cette condition vaut pour tous les angles de diffusion.

3.4 Extension du modèle au cas de surfaces bidimensionnelles

Après une étude détaillée du cas 2D $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}})$, intéressons-nous à l'extension du modèle au cas vectoriel pour un problème 3D $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$, où les surfaces sont décrites par leurs hauteurs en fonction de x et y , $\zeta_A(x, y)$ et $\zeta_B(x, y)$. L'approximation de Kirchhoff (AK) est appliquée en chaque point de diffusion de l'onde à l'intérieur de la couche diélectrique rugueuse, et la propagation d'un point de diffusion à l'autre est décrite par la représentation de Weyl de la fonction de Green¹⁴. L'effet d'ombre est pris en compte dans le modèle afin d'en corriger les défauts pour des angles rasants.

Le modèle dans le cas 2D ayant été détaillé, nous donnerons uniquement les étapes principales de calcul. Ensuite, des résultats numériques pour une surface inférieure plane seront présentés.

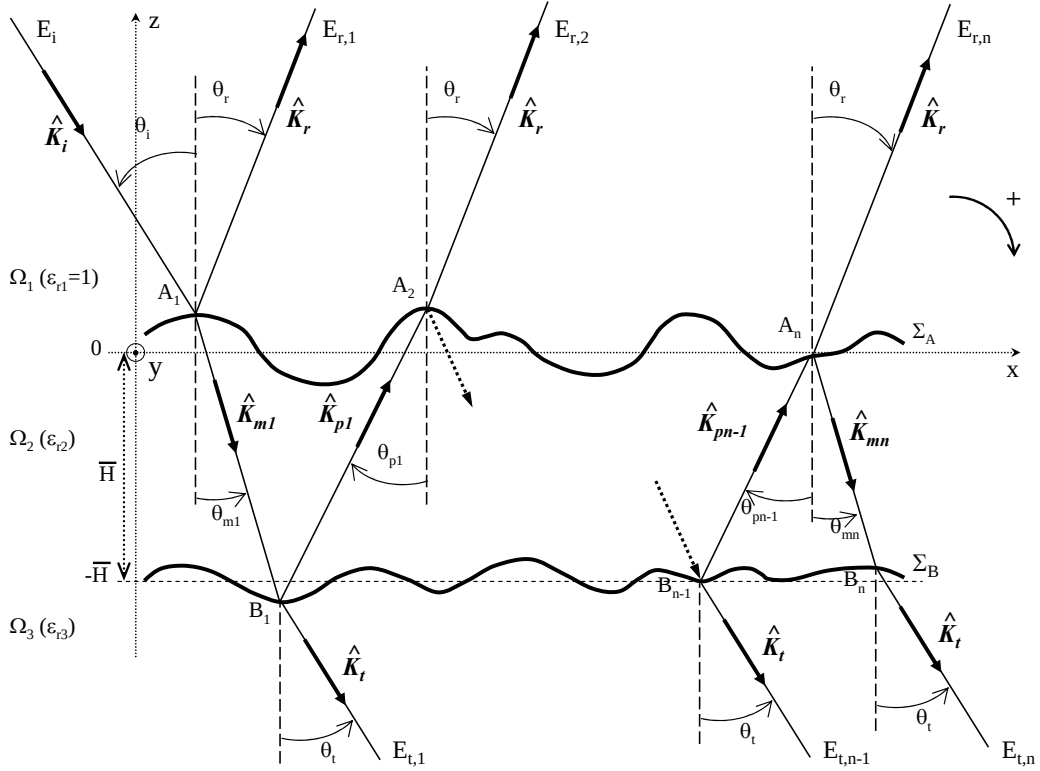


FIG. 3.10 – Diffusion multiple par deux interfaces rugueuses Σ_A et Σ_B en 3D (vue en coupe dans le plan $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}})$).

Le système étudié (voir figure 3.10 pour une représentation en coupe dans le plan $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}})$) est le même que dans le cas 2D, à la seule différence que l'espace est à trois dimensions $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$. Nous ne reviendrons donc pas sur cette configuration. Pour un problème 3D, les vecteurs d'onde unitaires $\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{a}}$ se décomposent de manière générale en $\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{a}} = (k_{ax}, k_{ay}, k_{az})/|k_{\mathbf{a}}| = (\hat{k}_{ax}, \hat{k}_{ay}, \hat{k}_{az})$ dans le milieu Ω_{α} considéré. Ces vecteurs d'onde ont pour angles associés θ_a (mesuré par rapport à l'axe $\hat{\mathbf{z}}$) et ϕ_a (mesuré par rapport à l'axe $\hat{\mathbf{x}}$). Pour exprimer les vecteurs d'onde normalisés $\hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{a}}$, ainsi que les bases de polarisation du champ électrique $(\hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{h}}_{\mathbf{a}}, \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{a}})$ dans la base $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$, nous pouvons choisir d'orienter ou non les angles. En 3D, si nous choisissons de ne pas orienter les angles, en

¹⁴Ce principe est donc exactement le même que les modèles utilisant l'itération de l'AK pour décrire la double diffusion en réflexion par une simple interface rugueuse [92, 52, 49].

prenant $\theta_a \in [0; \pi/2]$ et $\phi_a \in [0; 2\pi]$, nous obtenons dans la base $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}})$, respectivement pour l'onde incidente, et diffractée en réflexion (1.102, 1.103)

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{v}}_i &= (-\cos \theta_i \cos \phi_i, -\cos \theta_i \sin \phi_i, -\sin \theta_i) \\ \hat{\mathbf{h}}_i &= (-\sin \phi_i, +\cos \phi_i, 0) \\ \hat{\mathbf{K}}_i &= (+\sin \theta_i \cos \phi_i, +\sin \theta_i \sin \phi_i, -\cos \theta_i) \end{cases}, \quad (3.55)$$

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{v}}_r &= (+\cos \theta_r \cos \phi_r, +\cos \theta_r \sin \phi_r, -\sin \theta_r) \\ \hat{\mathbf{h}}_r &= (-\sin \phi_r, +\cos \phi_r, 0) \\ \hat{\mathbf{K}}_r &= (+\sin \theta_r \cos \phi_r, +\sin \theta_r \sin \phi_r, +\cos \theta_r) \end{cases}. \quad (3.56)$$

De même pour l'onde diffractée dans la direction $\hat{\mathbf{K}}_{m1}$ en remplaçant l'indice i par l'indice $m1$ dans l'équation (3.55), et pour l'onde diffractée dans la direction $\hat{\mathbf{K}}_{p1}$ en remplaçant l'indice r par l'indice $p1$ dans l'équation (3.56).

Afin de déterminer les champs diffractés $\mathbf{E}_{r,1}$, $\mathbf{E}_{t,1}$ et $\mathbf{E}_{r,2}$, l'itération de l'AK est utilisée en chaque point de diffraction dans le guide d'onde diélectrique rugueux. La représentation de Weyl de la fonction de Green est utilisée pour décrire la propagation entre un point de diffraction et le suivant. De plus, l'approximation de la phase stationnaire (APS) est utilisée sur les deux interfaces afin de simplifier le calcul des champs diffractés. Ensuite, l'approximation de l'optique géométrique (AOG) est appliquée pour le calcul de la puissance diffractée, ce qui réduit le domaine de validité du modèle au cas de surfaces fortement rugueuses comparativement à la longueur d'onde.

Tout d'abord, les expressions des champs diffractés par la couche diélectrique rugueuse $E_{r,1}$, $E_{t,1}$ et $E_{r,2}$ sont données pour une surface inférieure rugueuse, puis $E_{r,2}$ est exprimé pour une surface inférieure plane. Ensuite, les coefficients de diffusion sont obtenus sous l'AOG. Enfin, des simulations numériques sont présentées pour le cas d'une interface inférieure plane.

3.4.1 Calcul des champs diffractés par la couche diélectrique rugueuse

Les champs diffractés en réflexion et transmission par la surface supérieure Σ_A au point A_1 sont obtenus à partir des équations intégrales de Kirchhoff-Helmholtz (1.115a, 1.115b). Sous l'AK, ces expressions se simplifient en

$$\forall \mathbf{R} \in \Omega_1, \quad \mathbf{E}_{r,1}(\mathbf{R}) = +2ik_1 (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{K}}_r \hat{\mathbf{K}}_r) \cdot \int_{-L_x/2}^{+L_x/2} dx_{A_1} \int_{-L_y/2}^{+L_y/2} dy_{A_1} \quad (3.57a)$$

$$G_1(\mathbf{R}_{A_1}, \mathbf{R}) \mathbf{F}_r(\gamma_{A_1,x}, \gamma_{A_1,y}) E_i(\mathbf{R}_{A_1}) \Xi(\mathbf{R}_{A_1}),$$

$$\forall \mathbf{R} \in \Omega_2, \quad \mathbf{E}_{m1}(\mathbf{R}) = -2ik_2 (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{K}}_{m1} \hat{\mathbf{K}}_{m1}) \cdot \int_{-L_x/2}^{+L_x/2} dx_{A_1} \int_{-L_y/2}^{+L_y/2} dy_{A_1} \quad (3.57b)$$

$$G_2(\mathbf{R}_{A_1}, \mathbf{R}) \mathbf{F}_{m1}(\gamma_{A_1,x}, \gamma_{A_1,y}) E_i(\mathbf{R}_{A_1}) \Xi(\mathbf{R}_{A_1}),$$

où L_x , L_y sont les longueurs suivant $\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{\mathbf{y}}$ de la surface Σ_A , supposés grandes devant la longueur de corrélation $L_{cAx,y}$ associée. Dans les équations ci-dessus, la représentation de Weyl de la fonction de Green est utilisée pour décrire de manière générale la propagation de l'onde diffractée du point $\mathbf{R}_{A_1}$ de la surface supérieure au point $\mathbf{R}$ de l'espace considéré. Son équation est donnée par (1.120)

$$G_\alpha(\mathbf{R}_{A_1}, \mathbf{R}) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{A_1}) + i f(\mathbf{k})|z - \zeta_{A_1}|}}{f(\mathbf{k})}, \quad (3.58)$$

où $\mathbf{k} = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}}$ et $\mathbf{r} = x \hat{\mathbf{x}} + y \hat{\mathbf{y}}$, avec

$$f(\mathbf{k}) = \begin{cases} \sqrt{k_\alpha^2 - \|\mathbf{k}\|^2} & \text{si } k_\alpha^2 \geq \|\mathbf{k}\|^2 \\ i \sqrt{\|\mathbf{k}\|^2 - k_\alpha^2} & \text{si } k_\alpha^2 < \|\mathbf{k}\|^2 \end{cases} . \quad (3.59)$$

Si le point $\mathbf{R}$ est situé dans la zone de champ lointain de la surface Σ_A , correspondant à l'inégalité $\|\mathbf{R}\| \gg \|\mathbf{R}_{A_1}\|$, la fonction de Green peut s'exprimer de manière approchée par

$$G_\alpha(\mathbf{R}, \mathbf{R}_{A_1}) \simeq \frac{\exp[i(k_\alpha R - \mathbf{K}_s \cdot \mathbf{R}_{A_1})]}{4\pi R}, \quad (3.60)$$

avec $\mathbf{K}_s = \mathbf{K}_r$ pour $\alpha = 1$, et $\mathbf{K}_s = \mathbf{K}_{m1}$ pour $\alpha = 2$.

En réinjectant l'expression de la fonction de Green en champ lointain (3.60) dans l'équation (3.57a), le champ réfléchi du premier ordre $\mathbf{E}_{r,1}^\infty(\mathbf{R})$ s'exprime en champ lointain sous l'APS par (2.90a)

$$\mathbf{E}_{r,1}^\infty(\mathbf{R}) = + \frac{ik_1 E_0 e^{ik_1 R}}{2\pi R} (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{K}}_r \hat{\mathbf{K}}_r) \cdot \mathbf{F}_r(\gamma_{A_1,x}^0, \gamma_{A_1,y}^0) \int d\mathbf{r}_{A_1} e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_r) \cdot \mathbf{R}_{A_1}} \Xi(\mathbf{R}_{A_1}), \quad (3.61)$$

où $\int d\mathbf{r}_{A_1} \equiv \iint dx_{A_1} dy_{A_1}$, et $\mathbf{F}_r(\gamma_{A_1,x}^0, \gamma_{A_1,y}^0)$ est donné par l'équation (2.91a), avec $\gamma_{A_1,x}^0, \gamma_{A_1,y}^0$ donnés par (2.95a).

De même, les autres champs diffractés ($\mathbf{E}_{t,1}$, $\mathbf{E}_{r,2}$, etc.) sont obtenus à partir de l'équation (3.57b) en utilisant la représentation de Weyl de la fonction de Green pour décrire la propagation de l'onde de A_1 au point B_1 sur la surface inférieure Σ_B . Puis la diffraction en réflexion et transmission au point B_1 est décrite par l'équation intégrale de Kirchhoff-Helmholtz sous l'AK, exprimée respectivement en réflexion et transmission par

$$\forall \mathbf{R} \in \Omega_2, \quad \mathbf{E}_{p1}(\mathbf{R}) = +2ik_2 (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{K}}_{p1} \hat{\mathbf{K}}_{p1}) \cdot \int_{-L_x/2}^{+L_x/2} dx_{B_1} \int_{-L_y/2}^{+L_y/2} dy_{B_1} G_2(\mathbf{R}_{B_1}, \mathbf{R}) \mathbf{F}_{p1}(\gamma_{B_1,x}, \gamma_{B_1,y}) E_{m1}(\mathbf{R}_{B_1}) \Xi(\mathbf{R}_{B_1}), \quad (3.62a)$$

$$\forall \mathbf{R} \in \Omega_3, \quad \mathbf{E}_{t,1}(\mathbf{R}) = -2ik_3 (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{K}}_t \hat{\mathbf{K}}_t) \cdot \int_{-L_x/2}^{+L_x/2} dx_{B_1} \int_{-L_y/2}^{+L_y/2} dy_{B_1} G_3(\mathbf{R}_{B_1}, \mathbf{R}) \mathbf{F}_t(\gamma_{B_1,x}, \gamma_{B_1,y}) E_{m1}(\mathbf{R}_{B_1}) \Xi(\mathbf{R}_{B_1}). \quad (3.62b)$$

Alors, en utilisant l'expression de la fonction de Green en champ lointain, le champ diffracté en transmission du premier ordre en champ lointain est donné sous l'APS et en négligeant les ondes évanescentes par

$$\frac{\mathbf{E}_{t,1}^\infty(\mathbf{R})}{E_0} = \frac{-ik_2 k_3 e^{ik_3 R}}{(2\pi)^3 R} \iiint \frac{d\mathbf{k}_{m1}}{-k_{m1z}} d\mathbf{r}_{A_1} d\mathbf{r}_{B_1} \mathbf{F}_{m1}(\gamma_{A_1,x}^0, \gamma_{A_1,y}^0) \times \mathbf{F}_t(\gamma_{B_1,x}^0, \gamma_{B_1,y}^0) e^{i(\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{R}_{A_1} + \mathbf{K}_{m1} \cdot \mathbf{R}_{A_1 B_1} - \mathbf{K}_t \cdot \mathbf{R}_{B_1})} \Xi(\mathbf{R}_{A_1}) \Xi(\mathbf{R}_{B_1}), \quad (3.63)$$

avec $\mathbf{R}_{A_1 B_1} = \mathbf{R}_{B_1} - \mathbf{R}_{A_1}$. Le calcul de $\mathbf{E}_{t,1}^\infty$ implique donc 2×3 intégrales imbriquées. Remarquons au passage qu'appliquer l'APS sur le champ $\mathbf{E}_{t,1}^\infty$ est équivalent à appliquer l'APS en chaque point de diffraction.

De même que pour $\mathbf{E}_{t,1}^\infty$, le champ réfléchi d'ordre deux $\mathbf{E}_{r,2}^\infty$ est obtenu à partir du champ diffracté par Σ_B au point B_1 de l'équation (3.62a), en utilisant la représentation de Weyl de la fonction de Green pour décrire la propagation de B_1 au point A_2 de la surface supérieure Σ_A . A nouveau l'AK est utilisée en A_2 pour calculer l'onde diffractée en transmission. Alors, en

utilisant la fonction de Green en champ lointain, $\mathbf{E}_{\mathbf{r},2}^\infty$ s'exprime sous l'APS et en négligeant les ondes évanescentes par

$$\frac{\mathbf{E}_{\mathbf{r},2}^\infty(\mathbf{R})}{E_0} = \frac{-ik_1 k_2^2 e^{ik_1 R}}{(2\pi)^5 R} \iiint \frac{d\mathbf{k}_{\mathbf{m}1}}{-k_{m1z}} \frac{d\mathbf{k}_{\mathbf{p}1}}{+k_{p1z}} d\mathbf{r}_{\mathbf{A}1} d\mathbf{r}_{\mathbf{B}1} d\mathbf{r}_{\mathbf{A}2} \quad (3.64)$$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{m}1}(\gamma_{A_1,x}^0, \gamma_{A_1,y}^0) \times \mathbf{F}_{\mathbf{p}1}(\gamma_{B_1,x}^0, \gamma_{B_1,y}^0) \times \mathbf{F}_{\mathbf{r}}(\gamma_{A_2,x}^0, \gamma_{A_2,y}^0)$$

$$e^{i(\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{A}1} + \mathbf{K}_{\mathbf{m}1} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{A}1\mathbf{B}1} + \mathbf{K}_{\mathbf{p}1} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{B}1\mathbf{A}2} - \mathbf{K}_r \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{A}2})} \Xi(\mathbf{R}_{\mathbf{A}1}) \Xi(\mathbf{R}_{\mathbf{B}1}) \Xi(\mathbf{R}_{\mathbf{A}2}),$$

avec $\mathbf{R}_{\mathbf{A}1\mathbf{B}1} = \mathbf{R}_{\mathbf{B}1} - \mathbf{R}_{\mathbf{A}1}$ et $\mathbf{R}_{\mathbf{B}1\mathbf{A}2} = \mathbf{R}_{\mathbf{A}2} - \mathbf{R}_{\mathbf{B}1}$. Le calcul de $\mathbf{E}_{\mathbf{r},2}^\infty$ implique donc 2×5 intégrales imbriquées. Pour une surface inférieure plane, la diffraction est remplacée par une réflexion spéculaire, donnée par $r_{23}(\theta_{m1}) \delta(\hat{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}1} - \hat{\mathbf{k}}_{\mathbf{m}1})$. La propagation de l'onde du point A_1 au point A_2 , après réflexion sur la surface inférieure au point B_1 est décrite par la représentation de Weyl de la fonction Green donnée par l'équation (1.127). Alors, le champ diffracté en réflexion d'ordre deux $\mathbf{E}_{\mathbf{r},2}^\infty$ s'exprime sous l'APS (et en négligeant les ondes évanescentes) par

$$\frac{\mathbf{E}_{\mathbf{r},2}^\infty(\mathbf{R})}{E_0} = \frac{+ik_1 k_2 e^{ik_1 R}}{(2\pi)^3 R} \iiint \frac{d\mathbf{k}_{\mathbf{m}1}}{-k_{m1z}} d\mathbf{r}_{\mathbf{A}1} d\mathbf{r}_{\mathbf{A}2} \delta(\hat{\mathbf{k}}_{\mathbf{p}1} - \hat{\mathbf{k}}_{\mathbf{m}1}) \quad (3.65)$$

$$r_{23}(\theta_{m1}) \mathbf{F}_{\mathbf{m}1}(\gamma_{A_1,x}^0, \gamma_{A_1,y}^0) \times \mathbf{F}_{\mathbf{r}}(\gamma_{A_2,x}^0, \gamma_{A_2,y}^0)$$

$$e^{i(\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{A}1} + \mathbf{K}_{\mathbf{m}1} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{A}1\mathbf{B}1} + \mathbf{K}_{\mathbf{p}1} \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{B}1\mathbf{A}2} - \mathbf{K}_r \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{A}2})} \Xi(\mathbf{R}_{\mathbf{A}1}) \Xi(\mathbf{R}_{\mathbf{B}1}) \Xi(\mathbf{R}_{\mathbf{A}2}).$$

Le calcul de $\mathbf{E}_{\mathbf{r},2}^\infty$ implique donc 2×3 intégrales imbriquées pour une surface inférieure plane, au lieu de 10 pour une surface inférieure rugueuse.

En appliquant le même principe pour les ordres supérieurs, il est donc possible d'obtenir l'expression du champ diffracté en transmission $\mathbf{E}_{\mathbf{t},n}^\infty$ et en réflexion $\mathbf{E}_{\mathbf{r},n}^\infty$ à tout ordre n . Cependant, leurs expressions sont longues et ne seront pas données ici.

3.4.2 Coefficients de diffusion dans la limite haute fréquence

De même que pour le cas 2D, la puissance totale $P_{s,n}^{tot} = \langle |E_{s,n}^{tot}|^2 \rangle / 2\eta_\alpha$ diffractée par la couche rugueuse est donnée par l'équation (3.17), et la puissance totale incohérente $P_{s,n}^{tot,inc}$ est donnée par $P_{s,n}^{tot,inc} = [\langle |E_{s,n}^{tot}|^2 \rangle - \langle |E_{s,n}^{tot}| \rangle^2] / 2\eta_\alpha$. Afin de calculer le coefficient de diffusion, dans la limite haute fréquence, l'AOG est appliquée sur les deux interfaces rugueuses afin de simplifier le calcul. Valide pour $k\sigma_h > \pi$ (avec σ_h l'écart type des hauteurs de la surface considérée), elle suppose que la contribution majeure de la puissance diffractée par la surface vient de points M et M' de la surface fortement corrélés, relativement à la longueur de corrélation de la surface. Avec cette approximation, la contribution cohérente $|\langle E_{s,n}^{tot} \rangle|^2$ peut être négligée. De plus, la différence des hauteurs $\zeta_M - \zeta_{M'}$ peut s'exprimer de manière approchée par $\gamma_{M,x}(x_M - x_{M'}) + \gamma_{M,y}(y_M - y_{M'})$, avec $\gamma_{\mathbf{M}} = (\gamma_{M,x}, \gamma_{M,y})$ la pente de la surface considérée au point M . Alors, il est possible de déterminer plus aisément le coefficient de diffusion total incohérent (égal au coefficient de diffusion total $\sigma_{s,n}^{tot}$ sous l'AOG) d'une cible bidimensionnelle, défini par (1.136,1.137)

$$\sigma_{s,n}^{tot}(\mathbf{K}_s, \mathbf{K}_i) = 2\eta_1 \frac{R^2 P_{s,n}^{tot}}{L_x L_y \cos \theta_i |E_i|^2}, \quad (3.66)$$

où R est la distance de la cible, et L_x , L_y les longueurs selon $\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{\mathbf{y}}$ de la surface illuminée. $\alpha \equiv 1$ en réflexion ($s \equiv r$), et $\alpha \equiv 2$ en transmission ($s \equiv t$). Dans l'équation ci-dessous, pour les cas $n = \{1, 2\}$, nous avons

$$P_{s,1}^{tot} = p_{s,1} \quad \text{et} \quad P_{s,2}^{tot} = p_{s,1} + p_{s,2}, \quad (3.67)$$

avec

$$\begin{cases} p_{s,1} &= \frac{1}{2\eta_\alpha} \langle |E_{s,1}|^2 \rangle \\ p_{s,2} &= \frac{1}{2\eta_\alpha} \left[\langle |E_{s,2}|^2 \rangle + 2 \Re \left(\langle E_{s,1} E_{s,2}^* \rangle \right) \right] \end{cases} \quad (3.68)$$

Il est ainsi possible de définir un coefficient de diffusion élémentaire $\sigma_{s,n}$, correspondant à la contribution de chaque puissance diffusée. Ainsi, pour $n = 1$, $\sigma_{s,1}$ correspond à la contribution de $p_{s,1}$. Pour $n = 2$, $\sigma_{s,1}$ correspond à la contribution de $p_{s,1}$ et $\sigma_{s,2}$ à la contribution de $p_{s,2}$. Notons dès à présent que sous l'AOG avec prise en compte de l'effet d'ombre, nous pouvons montrer que le terme d'interférence $\langle E_{s,1} E_{s,2}^* \rangle$ est nul, ce qui est cohérent avec cette approximation.

Dans ce modèle, les effets d'ombrage de la surface en réflexion [148] et en transmission [149] sont pris en compte. En effet, pour des angles d'incidence et/ou de diffusion rasants, une partie de la surface n'est pas illuminée par l'émetteur et/ou pas vue par le récepteur. Ce phénomène doit être pris en compte pour ne pas surévaluer le coefficient de diffusion.

3.4.2.1 Coefficients de diffusion en réflexion des premier et second ordres

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que le coefficient de diffusion en réflexion du premier ordre vaut (2.105a)

$$\sigma_{ab}^r(\mathbf{K}_r, \mathbf{K}_i) = \frac{1}{\cos \theta_i} \left| \hat{\mathbf{a}}_r \cdot \mathbf{F}_b(\gamma^{\mathbf{0}(\mathbf{r})}) \right|^2 \frac{p_s(\gamma^{\mathbf{0}(\mathbf{r})})}{|\hat{k}_{rdz}|^2} S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r | \gamma^{\mathbf{0}(\mathbf{r})}), \quad (3.69)$$

avec $\hat{k}_{rdz} = \hat{k}_{rz} - \hat{k}_{iz}$.

Pour la contribution du second ordre, le principe est exactement le même que pour le cas 2D. Le fait de passer au cas 3D ne pose d'ailleurs pas de difficulté supplémentaire majeure lors du calcul, la différence principale étant que le terme de polarisation est un réel, $f_s(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_s)$, en 2D et un vecteur, $\mathbf{F}_s(\gamma_{M,x}^0, \gamma_{M,y}^0)$, en 3D. Cependant cela n'est vrai que pour le cas coïncident. Le cas anti-coïncident, déjà relativement difficile à quantifier dans le cas 2D (et ce même pour une interface inférieure plane), est complexe à quantifier dans le cas 3D. Nous nous placerons dans des configurations où cette contribution pourra être négligée, c'est-à-dire pour des épaisseurs moyennes de la couche inférieures au rayon de courbure moyen de la surface supérieure. Le coefficient de diffusion en réflexion du second ordre $\sigma_{r,2}$ s'exprime alors par

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{r,2}(\mathbf{K}_r, \mathbf{K}_i) &= \frac{1}{\cos \theta_i} \int_0^{\pi/2} \sin \theta_{m1} d\theta_{m1} \int_0^{2\pi} d\phi_{m1} \int_0^{\pi/2} \sin \theta_{p1} d\theta_{p1} \int_0^{2\pi} d\phi_{p1} \quad (3.70) \\ &\quad \left| \bar{F}_{t,12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_{m1}) \times \bar{F}_r(\mathbf{K}_{m1}, \mathbf{K}_{p1}) \times \bar{F}_{t,21}(\mathbf{K}_{p1}, \mathbf{K}_r) \right|^2 \\ &\quad \frac{p_s(\gamma_{A1,x}^{0(t)}, \gamma_{A1,y}^{0(t)})}{|\hat{k}_{m1z} - \frac{k_1}{k_2} \hat{k}_{iz}|^2} S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_{m1} | \gamma_{A1,x}^{0(t)}, \gamma_{A1,y}^{0(t)}) \\ &\quad \frac{p_s(\gamma_{B1,x}^{0(r)}, \gamma_{B1,y}^{0(r)})}{|\hat{k}_{p1z} - \hat{k}_{m1z}|^2} S_{22}(\mathbf{K}_{m1}, \mathbf{K}_{p1} | \gamma_{B1,x}^{0(r)}, \gamma_{B1,y}^{0(r)}) \\ &\quad \frac{p_s(\gamma_{A2,x}^{0(t)}, \gamma_{A2,y}^{0(t)})}{|\hat{k}_{rz} - \frac{k_2}{k_1} \hat{k}_{p1z}|^2} S_{21}(\mathbf{K}_{p1}, \mathbf{K}_r | \gamma_{A2,x}^{0(t)}, \gamma_{A2,y}^{0(t)}), \end{aligned}$$

avec

$$\gamma_{A1,x,y}^{0(t)} = -\frac{k_{m1x,y} - k_{ix,y}}{k_{m1z} - k_{iz}}, \quad \gamma_{B1,x,y}^{0(t)} = -\frac{k_{p1x,y} - k_{m1x,y}}{k_{p1z} - k_{m1z}}, \quad \gamma_{A2,x,y}^{0(t)} = -\frac{k_{rx,y} - k_{p1x,y}}{k_{rz} - k_{p1z}}. \quad (3.71)$$

La fonction d'ombre en réflexion $S_{22}(\mathbf{K}_{\mathbf{m1}}, \mathbf{K}_{\mathbf{p1}} \mid \gamma_{B_1,x}^{0(r)}, \gamma_{B_1,y}^{0(r)})$ est donnée par l'équation (2.106a), et les fonctions d'ombre en transmission sont données par

$$S_{12}(\mathbf{K}_{\mathbf{i}}, \mathbf{K}_{\mathbf{m1}} \mid \gamma_{A_1,x}^{0(t)}, \gamma_{A_1,y}^{0(t)}) = B[1 + \Lambda(\mathbf{K}_{\mathbf{i}}), 1 + \Lambda(\mathbf{K}_{\mathbf{m1}})], \quad (3.72a)$$

$$S_{21}(\mathbf{K}_{\mathbf{p1}}, \mathbf{K}_{\mathbf{r}} \mid \gamma_{A_2,x}^{0(t)}, \gamma_{A_2,y}^{0(t)}) = B[1 + \Lambda(\mathbf{K}_{\mathbf{p1}}), 1 + \Lambda(\mathbf{K}_{\mathbf{r}})]. \quad (3.72b)$$

Le coefficient de diffusion en réflexion du second ordre $\bar{\sigma}_{r,2}$ est exprimé sous forme d'une matrice carrée de dimension 2, dont chaque terme dépend de la polarisation de l'onde incidente et de l'onde diffusée. Le terme général $\bar{F}_s(\mathbf{K}_{\mathbf{1}}, \mathbf{K}_{\mathbf{s}})$ étant également une matrice, le coefficient de diffusion ne peut donc pas rigoureusement se décomposer en un produit de coefficients de diffusion élémentaires (comme dans le cas 2D) correspondant à chaque point de diffraction dans le guide d'onde diélectrique. De manière générale, $\bar{\sigma}_{r,2}$ et $\bar{F}_s(\mathbf{K}_{\mathbf{1}}, \mathbf{K}_{\mathbf{s}})$ s'expriment par

$$\bar{\sigma}_{r,2} = \begin{bmatrix} \sigma_{h_s h_i}^{r,2}(\mathbf{K}_{\mathbf{r}}, \mathbf{K}_{\mathbf{i}}) & \sigma_{v_r h_i}^{r,2}(\mathbf{K}_{\mathbf{r}}, \mathbf{K}_{\mathbf{i}}) \\ \sigma_{h_r v_i}^{r,2}(\mathbf{K}_{\mathbf{r}}, \mathbf{K}_{\mathbf{i}}) & \sigma_{v_r v_i}^{r,2}(\mathbf{K}_{\mathbf{r}}, \mathbf{K}_{\mathbf{i}}) \end{bmatrix}, \quad (3.73)$$

$$\bar{F}_s(\mathbf{K}_{\mathbf{1}}, \mathbf{K}_{\mathbf{s}}) = \begin{bmatrix} F_{h_s h_i}(\mathbf{K}_{\mathbf{1}}, \mathbf{K}_{\mathbf{s}}) & F_{v_s h_i}(\mathbf{K}_{\mathbf{1}}, \mathbf{K}_{\mathbf{s}}) \\ F_{h_s v_i}(\mathbf{K}_{\mathbf{1}}, \mathbf{K}_{\mathbf{s}}) & F_{v_s v_i}(\mathbf{K}_{\mathbf{1}}, \mathbf{K}_{\mathbf{s}}) \end{bmatrix}, \quad (3.74)$$

où le premier indice représente la polarisation de l'onde diffusée, et le second indice la polarisation de l'onde incidente. Le terme de polarisation en réflexion $F_{r,ab}(\mathbf{K}_{\mathbf{m1}}, \mathbf{K}_{\mathbf{p1}})$ est défini par

$$F_{r,ab}(\mathbf{K}_{\mathbf{m1}}, \mathbf{K}_{\mathbf{p1}}) = \frac{\|\mathbf{K}_{\mathbf{m1}} - \mathbf{K}_{\mathbf{p1}}\|^2}{\|\mathbf{K}_{\mathbf{m1}} \wedge \mathbf{K}_{\mathbf{p1}}\|^2 |k_{m1z} - k_{p1z}|} \left\{ r_h(\chi_{m1}^\circ) [(\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{m1}} \wedge \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{m1}}) \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{p1}}] [(\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{p1}} \wedge \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{p1}}) \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{m1}}] + r_v(\chi_{m1}^\circ) (\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{m1}} \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{p1}})(\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{p1}} \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{m1}}) \right\}, \quad (3.75)$$

et le terme général en transmission $F_{t,ab}(\mathbf{K}_{\mathbf{1}}, \mathbf{K}_{\mathbf{3}})$ est défini par

$$F_{t,ab}(\mathbf{K}_{\mathbf{1}}, \mathbf{K}_{\mathbf{3}}) = \frac{\|\mathbf{K}_{\mathbf{tdz}}\|(\hat{\mathbf{N}}^{0(t)} \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{3}})}{\|\mathbf{K}_{\mathbf{1}} \wedge \mathbf{K}_{\mathbf{3}}\|^2 |k_{tdz}|} \left\{ t_h(\chi_1^\circ) [(\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{1}} \wedge \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{1}}) \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{3}}] [(\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{3}} \wedge \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{3}}) \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{1}}] + t_v(\chi_1^\circ) (\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{1}} \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{3}})(\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{3}} \cdot \hat{\mathbf{K}}_{\mathbf{1}}) \right\}, \quad (3.76)$$

avec $\mathbf{K}_{\mathbf{1}}$ le vecteur d'onde incident dans le milieu Ω_α et $\mathbf{K}_{\mathbf{3}}$ le vecteur d'onde transmis dans le milieu Ω_β , et $\mathbf{K}_{\mathbf{tdz}} = \mathbf{K}_{\mathbf{3}} - k_\alpha/k_\beta \mathbf{K}_{\mathbf{1}}$.

Pour le cas où la surface inférieure est plane, $\bar{\sigma}_{r,2}$ devient

$$\bar{\sigma}_{r,2}(\mathbf{K}_{\mathbf{r}}, \mathbf{K}_{\mathbf{i}}) = \frac{1}{\cos \theta_i} \int_0^{\pi/2} \sin \theta_{m1} d\theta_{m1} \int_0^{2\pi} d\phi_{m1} \left| r_{23}(\theta_{m1}) \right|^2 \left| \bar{F}_{t,12}(\mathbf{K}_{\mathbf{i}}, \mathbf{K}_{\mathbf{m1}}) \times \bar{F}_{t,21}(\mathbf{K}_{\mathbf{p1}}, \mathbf{K}_{\mathbf{r}}) \right|^2 \frac{p_s(\gamma_{A_1,x}^{0(t)}, \gamma_{A_1,y}^{0(t)})}{\left| \hat{k}_{m1z} - \frac{k_1}{k_2} \hat{k}_{iz} \right|^2} S_{12}(\mathbf{K}_{\mathbf{i}}, \mathbf{K}_{\mathbf{m1}} \mid \gamma_{A_1,x}^{0(t)}, \gamma_{A_1,y}^{0(t)}) \frac{p_s(\gamma_{A_2,x}^{0(t)}, \gamma_{A_2,y}^{0(t)})}{\left| \hat{k}_{rz} - \frac{k_2}{k_1} \hat{k}_{p1z} \right|^2} S_{21}(\mathbf{K}_{\mathbf{p1}}, \mathbf{K}_{\mathbf{r}} \mid \gamma_{A_2,x}^{0(t)}, \gamma_{A_2,y}^{0(t)}). \quad (3.77)$$

Le produit des deux termes de polarisation vaut alors

$$\bar{F}_{t,12} \times \bar{F}_{t,21} = \begin{bmatrix} F_{h_r h_{p1}} F_{h_{m1} h_i} + F_{h_r v_{p1}} F_{v_{m1} h_i} & F_{v_r h_{p1}} F_{h_{m1} h_i} + F_{v_r v_{p1}} F_{v_{m1} h_i} \\ F_{h_r h_{p1}} F_{h_{m1} v_i} + F_{h_r v_{p1}} F_{v_{m1} v_i} & F_{v_r h_{p1}} F_{h_{m1} v_i} + F_{v_r v_{p1}} F_{v_{m1} v_i} \end{bmatrix}. \quad (3.78)$$

De même que pour $\bar{\sigma}_{r,2}$, le coefficient de diffusion en transmission du premier ordre $\bar{\sigma}_{t,1}$ est calculé en utilisant le même principe, et vaut

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{t,1}(\mathbf{K}_t, \mathbf{K}_i) &= \sqrt{\frac{\epsilon_r 3}{\epsilon_{r1}}} \frac{1}{\cos \theta_i} \int_0^{\pi/2} \sin \theta_{m1} d\theta_{m1} \int_0^{2\pi} d\phi_{m1} \\ &\quad \left| \bar{F}_{t,12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_{m1}) \times \bar{F}_{t,23}(\mathbf{K}_{m1}, \mathbf{K}_t) \right|^2 \\ &\quad \frac{p_s(\gamma_{A1,x}^{0(t)}, \gamma_{A1,y}^{0(t)})}{\left| \hat{k}_{m1z} - \frac{k_1}{k_2} \hat{k}_{iz} \right|^2} S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_{m1} \mid \gamma_{A1,x}^{0(t)}, \gamma_{A1,y}^{0(t)}) \\ &\quad \frac{p_s(\gamma_{B1,x}^{0(t)}, \gamma_{B1,y}^{0(t)})}{\left| \hat{k}_{tz} - \frac{k_2}{k_3} \hat{k}_{m1z} \right|^2} S_{23}(\mathbf{K}_{m1}, \mathbf{K}_t \mid \gamma_{B1,x}^{0(t)}, \gamma_{B1,y}^{0(t)}). \end{aligned} \quad (3.79)$$

Nous pouvons remarquer que le modèle, généralisé à un problème 3D, possède les mêmes propriétés que dans le cas 2D : il est indépendant de la statistique des hauteurs (quand la contribution anti-coïncidente peut être négligée), ainsi que de la fréquence et de l'épaisseur de la couche (pour des milieux diélectriques sans pertes). De même que dans le cas 2D, le modèle en tant que tel, puisque basé sur l'AOG, ne peut pas prendre en compte des milieux à pertes. Cependant, en appliquant exactement la même démarche qu'en 2D, la prise en compte de milieux à pertes ne pose pas de problèmes.

Des résultats de simulation, non présentés ici, ont permis de valider la contribution du coefficient de diffusion en réflexion du premier ordre $\sigma_{r,1}$ (correspondant à la diffusion par la surface supérieure) par comparaison avec des résultats de la littérature [105]. Dans la section suivante, des résultats de simulation du modèle présentent la contribution du coefficient de diffusion du second ordre $\sigma_{r,2}$ pour une surface inférieure plane.

3.4.3 Simulations numériques pour une surface inférieure plane

Des simulations numériques pour le cas d'une surface inférieure plane sont réalisées. Pour les simulations, le système considéré est une couche de permittivité relative $\epsilon_{r2} = 3$, superposant un milieu inférieur parfaitement conducteur $\epsilon_{r3} = i\infty$. L'écart type des hauteurs de la surface supérieure est supérieur à la demi-longueur d'onde, $\sigma_h > \lambda/2$, pour que le modèle soit valide dans la limite haute fréquence (c'est-à-dire pour que la composante cohérente puisse être négligée). L'épaisseur moyenne de la couche $\bar{H}$ peut être quelconque en théorie, puisque pour des milieux sans pertes, le modèle est indépendant de $\bar{H}$. Cependant, comme la surface supérieure est rugueuse, il doit vérifier la condition $\bar{H} > 3\sigma_h$. L'écart type des pentes de la surface supérieure est pris tel que $\sigma_{sx} = \sigma_{sy} = 0.1$. Le modèle peut être utilisé pour une statistique des pentes quelconque ; pour les simulations, une statistique des pentes gaussienne et isotrope est considérée. Seule la première réflexion dans la couche est considérée, et sa contribution est comparée à la diffusion par la surface supérieure. Cela signifie qu'une comparaison est faite entre le coefficient de diffusion en réflexion total du second ordre, $\sigma_{r,2}^{tot} = \sigma_{r,1} + \sigma_{r,2}$, et celui du premier ordre, $\sigma_{r,1}^{tot} = \sigma_{r,1}$. Des simulations sont présentées pour $\phi_i = 0^\circ$ et pour deux valeurs de l'angle d'incidence : $\theta_i = \{0^\circ; 20^\circ\}$, pour des applications optiques. Les résultats sont donnés dans le plan d'incidence, où la configuration est bistatique, avec l'angle d'observation $\theta_{obs} \in [-90^\circ; +90^\circ]$.

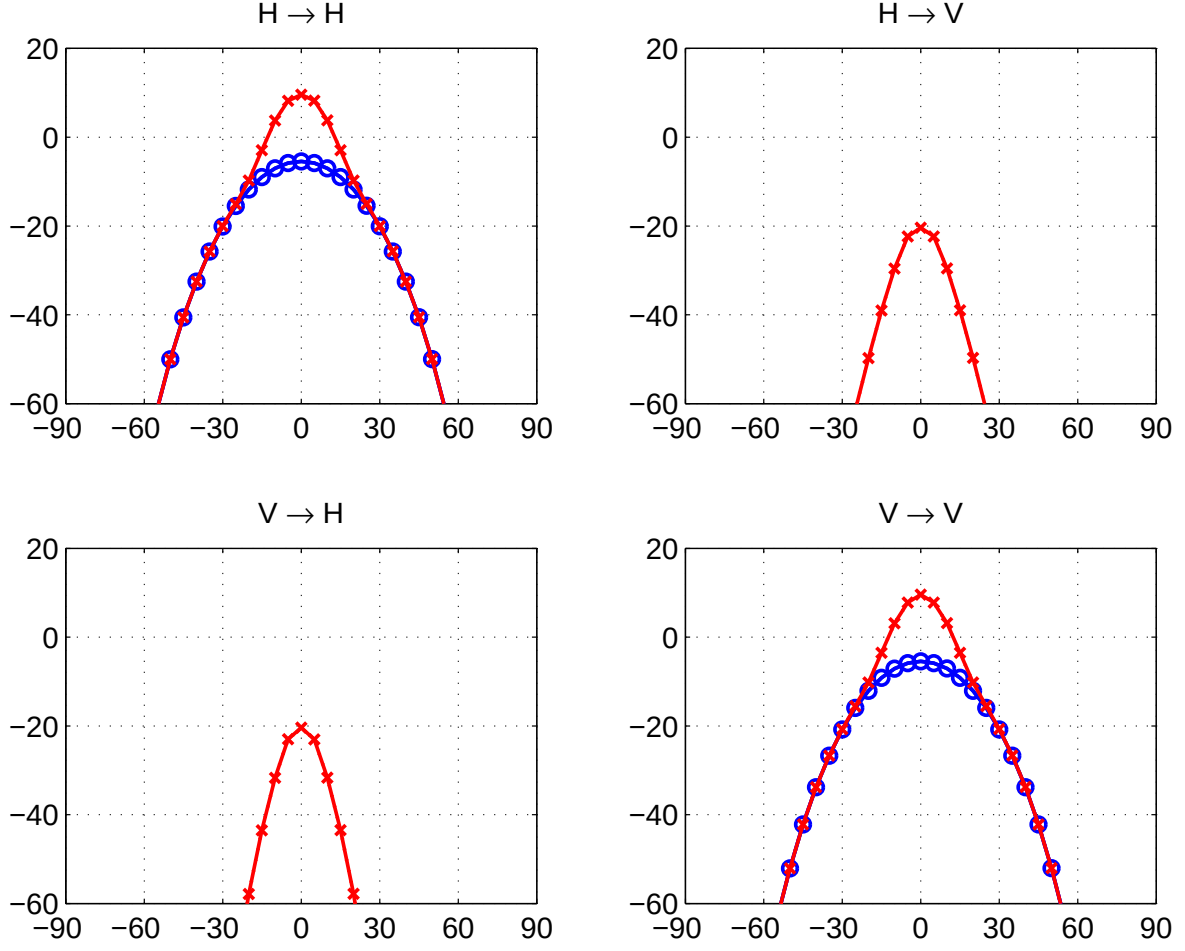


FIG. 3.11 – Simulations des coefficients de diffusion totaux des premier et second ordres, $\sigma_{r,1}^{tot}$ et $\sigma_{r,2}^{tot}$ en dB, en fonction de l'angle d'observation θ_{obs} , pour $\epsilon_{r2} = 3$ et $\epsilon_{r3} = i\infty$, avec $\theta_i = 0^\circ$.

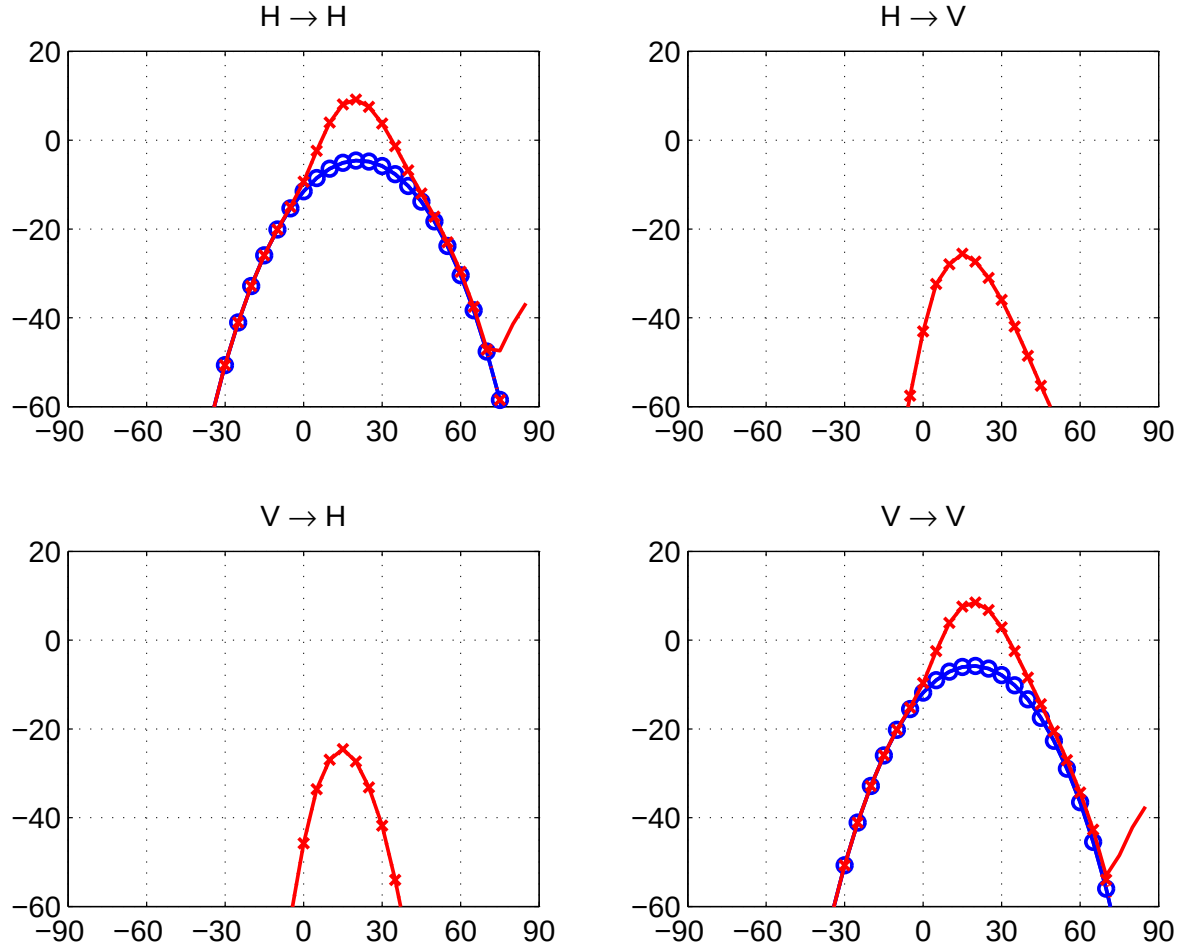


FIG. 3.12 – Simulations des coefficients de diffusion totaux des premier et second ordres, $\sigma_{r,1}^{tot}$ et $\sigma_{r,2}^{tot}$ en dB, en fonction de l'angle d'observation θ_{obs} , pour $\epsilon_{r2} = 3$ et $\epsilon_{r3} = i\infty$, avec $\theta_i = 20^\circ$.

Les simulations des coefficients de diffusion en réflexion totaux des premier et second ordres, $\sigma_{r,1}^{tot}$ et $\sigma_{r,2}^{tot}$, sont présentés dans le plan d'incidence, pour $\theta_i = 0^\circ$ sur la figure 3.11 et pour $\theta_i = 20^\circ$ sur la figure 3.12. Dans les deux figures, la contribution du premier ordre $\sigma_{r,1}^{tot}$ est représentée en ligne bleue pour le cas sans ombre, et en ligne cerclée bleue pour le cas avec ombre. La contribution du second ordre $\sigma_{r,2}^{tot}$ est représentée en ligne rouge pour le cas sans ombre, et en pointillés surmontés de croix rouges pour le cas avec ombre.

Globalement, les résultats de simulations sont similaires au cas 2D en co-polarisation, pour les deux valeurs de θ_i . Pour la contribution du premier ordre, il n'y a pas de différence entre le cas sans ombre et le cas avec ombre. En effet, pour cette configuration l'effet d'ombrage a une contribution négligeable : l'écart type des pentes et l'angle d'incidence sont faibles, ainsi l'ombrage n'est conséquent que pour des angles d'observation rasants, où le coefficient de diffusion tend vers 0.

Pour la contribution du second ordre, l'ombrage a également une contribution négligeable pour $\theta_i = 0^\circ$, pour les même raisons. En revanche, pour $\theta_i = 20^\circ$, l'ombrage contribue dans les deux co-polarisations en diffusion avant, pour des angles θ_{obs} rasants : pour le modèle avec ombre, la contribution du second ordre s'annule, alors que pour le modèle sans ombre elle diverge, ce qui n'a pas de sens physique. Ceci confirme, une fois de plus, que la prise en compte de l'effet d'ombre est nécessaire pour décrire correctement la diffusion électromagnétique par des surfaces (et des empilements de surfaces) très rugueuses. De plus, nous pouvons remarquer, pour les deux valeurs de θ_i , une contribution non négligeable de $\sigma_{r,2}$ pour les deux polarisations croisées. Ceci fournit alors un moyen supplémentaire pour faire la distinction entre une simple interface rugueuse et la superposition de deux interfaces.

Ainsi, un modèle simple traitant de la diffusion électromagnétique par deux interfaces rugueuses décorréelées a été développé, et des résultats numériques ont été présentés pour le cas d'une interface inférieure plane. Le modèle correspondant requiert le calcul de deux intégrations numériques imbriquées, ce qui permet des résultats de simulation rapides (de l'ordre de 25 ms pour une valeur des angles θ_r et ϕ_r sur un ordinateur de bureau standard). Il serait alors intéressant d'obtenir des résultats numériques pour une interface inférieure rugueuse. Cependant, ceci requiert le calcul de quatre intégrations numériques imbriquées, impliquant un temps de calcul relativement long par rapport au cas plan. Il serait alors intéressant de simplifier quelque peu ce dernier cas de figure, afin d'obtenir des résultats rapides. Ceci pourra faire l'objet de travaux futurs.

Conclusion et perspectives

Cette thèse a été consacrée à l'étude de la diffusion électromagnétique par des interfaces rugueuses, et plus particulièrement aux modèles asymptotiques. Ces modèles approchés, au domaine de validité restreint, permettent de résoudre le problème posé de façon plus rapide qu'avec des modèles exacts, lourds à mettre en oeuvre.

Le premier chapitre a introduit les notions importantes relatives à cette problématique. Il a permis en outre de présenter le critère de rugosité électromagnétique de Rayleigh pour le cas d'une onde réfléchie par la surface rugueuse, mais aussi et surtout pour le cas d'une onde transmise, ce qui constitue à notre connaissance une originalité. De plus, une comparaison de la rugosité électromagnétique entre le cas de la réflexion et le cas de la transmission a été menée. Elle a permis de constater que des différences significatives peuvent apparaître selon les valeurs de l'angle d'incidence et de la permittivité relative des deux milieux.

Dans le deuxième chapitre, l'étude s'est portée sur la diffusion par de simples interfaces rugueuses. Un panorama des méthodes existantes a été présenté, en se focalisant sur les modèles asymptotiques. L'approximation de Kirchhoff a ensuite été étudiée en détail, à la fois pour le cas d'une onde réfléchie et pour le cas d'une onde transmise. Afin de simplifier les expressions des champs diffractés, l'approximation de la phase stationnaire a été appliquée au modèle. Puis, afin de calculer plus simplement les puissances diffractées en réflexion et en transmission, le modèle est réduit à l'approximation de l'optique géométrique. De plus, l'effet d'ombrage de la surface est pris en compte dans le modèle. Cette fonction est bien connue et couramment utilisée pour le cas de la réflexion ; en revanche, pour le cas de la transmission cette fonction n'a à notre connaissance jamais été étudiée en détail. Ce travail a analysé ce cas de figure afin de pallier ce manque. Sous l'approximation de l'optique géométrique, supposée valide pour des interfaces fortement rugueuses comparativement à la longueur d'onde, la contribution cohérente est supposée négligeable devant la contribution incohérente. Cette première a donc été calculée sous cette approximation, afin d'obtenir un domaine de validité quantitatif du modèle. De plus, une étude de la conservation d'énergie du modèle a été conduite, sans et avec prise en compte de l'effet d'ombrage de la surface. Elle a permis de mettre en évidence l'importance d'introduire ce phénomène pour des angles rasants, afin de ne pas surévaluer la puissance diffusée par la surface. De plus, elle constitue un moyen quantitatif de détermination des cas de figure où le phénomène de diffusion multiple contribue au processus de diffusion.

Le troisième et dernier chapitre a été dédié aux modèles de diffraction électromagnétique par des empilements de surfaces rugueuses. Un panorama des méthodes existantes a également été présenté, en détaillant les modèles asymptotiques. Ceci nous a permis de constater qu'à notre connaissance, l'extension de l'approximation de Kirchhoff au cas de deux interfaces rugueuses n'a pas été étudiée. Ce travail a donc eu pour but de pallier ce manque. Ainsi, un nouveau modèle a été développé et présenté en détail. Celui-ci est basé sur l'approximation de Kirchhoff appliquée à chaque point de diffraction dans le guide d'onde diélectrique rugueux. Le but étant d'obtenir un

modèle relativement simple à mettre en oeuvre, des hypothèses simplificatrices supplémentaires ont été appliquées au modèle. Comme pour le cas simple interface, l'approximation de la phase stationnaire a été appliquée pour simplifier le calcul des différents champs diffractés en réflexion et transmission. Cependant, ceci n'est pas suffisant pour obtenir des expressions simples des puissances diffractées. L'approximation de l'optique géométrique est alors appliquée au modèle, à chaque point de diffraction. De plus, les points de diffraction sont supposés décorrélés entre eux. Limitant l'application du modèle au cas de surfaces fortement rugueuses comparativement à la longueur d'onde, cette approximation permet de simplifier les expressions des puissances diffusées, et les puissances diffractées cohérentes sont supposées négligeables. Le modèle est alors simple à implémenter, permettant des résultats numériques rapides. Les expressions des coefficients de diffusion en réflexion et en transmission ont été obtenues pour tout ordre de propagation de l'onde dans le guide diélectrique rugueux. Elles ont également été obtenues en réflexion pour tout ordre, dans le cas d'une interface inférieure plane.

Des simulations ont été présentées pour le cas d'une onde réfléchie dans le milieu d'incidence, où seules les contributions des coefficients de diffusion des premier et deuxième ordres ont été implémentées ; les ordres supérieurs ayant pour une surface monodimensionnelle une contribution faible voire négligeable au coefficient de diffusion total. Le modèle a alors été validé dans le cas bidimensionnel par comparaison avec une méthode numérique de référence, pour des milieux diélectriques sans pertes dans un premier temps. En effet, sous l'approximation de l'optique géométrique, le modèle en tant que tel ne peut pas prendre en compte des milieux à pertes. Cependant, des modifications mineures simples ont permis de prendre en compte des milieux diélectriques à pertes, et une comparaison avec la méthode de référence a validé cette démarche. Ceci a permis d'appliquer le modèle à la détection de nappes de pétrole sur la mer, pour laquelle des simulations ont été présentées. Enfin, le modèle a été étendu à un problème tridimensionnel, où des simulations ont été présentées pour le cas d'une interface inférieure plane.

Diverses perspectives de travail peuvent alors être envisagées. Tout d'abord, des simulations numériques en trois dimensions pour le cas de deux interfaces fortement rugueuses pourront être menées. De plus, si la fonction d'ombre en transmission développée ici a permis d'obtenir des résultats numériques très satisfaisants pour les applications à des couches rugueuses, une comparaison de cette fonction d'ombre avec une méthode exacte n'a pas permis rigoureusement de la valider. La différence observée peut être due à l'utilisation de la formulation de Smith de la fonction d'ombre. Des travaux plus approfondis, en utilisant la formulation de Wagner notamment, pourront éclaircir ce point. Le cas anti-coïncident, traité en détail pour un problème bidimensionnel dans le cas d'une interface inférieure plane, était négligeable pour les simulations présentées ici. Pour des configurations où le cas anti-coïncident contribue au coefficient de diffusion total, il serait intéressant de prendre en compte ce cas dans le calcul du modèle : par comparaison avec la méthode de référence, ceci permettrait de valider cette contribution. Il pourrait alors être intéressant d'étendre sa formulation pour le cas d'une interface inférieure rugueuse, et de la valider numériquement ; cependant, cette contribution est complexe à modéliser correctement. Le modèle peut assez facilement être étendu à la superposition de plus de deux interfaces : en supposant les points de diffusion successifs décorrélés, l'expression du coefficient de diffusion considéré est proportionnel au produit de coefficients de diffusion élémentaires, correspondant à chaque point de diffusion (en réflexion ou en transmission) dans le système considéré.

Des perspectives futures à plus long terme peuvent également être évoquées : le modèle a supposé que les points successifs de diffraction de l'onde dans le guide d'onde diélectrique rugueux sont décorrélés, afin d'obtenir un modèle rapide à calculer. Le cas d'une couche d'épaisseur fine, et

composée de surfaces identiques, a récemment été pris en compte en utilisant la même approche [39] (cependant sans validation numérique pour le moment). Il serait alors intéressant de pouvoir traiter une configuration intermédiaire, où les surfaces sont corrélées. Ceci est a priori complexe à modéliser correctement de manière rigoureuse : certaines hypothèses simplificatrices devront sans doute être appliquées pour envisager une implémentation numérique. Le challenge sera alors d'appliquer des hypothèses simplificatrices réalistes, permettant des résultats numériques relativement rapides, et concordant avec des applications concrètes. Le modèle développé est basé sur l'approximation de Kirchhoff, pour laquelle les multiples diffusions par une même interface ne sont pas prises en compte. Cependant, le problème de la double diffusion en réflexion par une simple interface, développé pendant plusieurs années par divers auteurs [104, 52, 53, 49] est maintenant bien connu. Ce phénomène ne peut être négligé pour des écarts types des pentes $\sigma_s > 0.35$ pour des incidences élevées et 0.5 pour toutes les incidences. L'incorporation de ce phénomène dans le modèle, qui ne pose pas de difficulté supplémentaire particulière en tant que telle, permettrait alors d'étendre son domaine de validité à des écarts types des pentes plus élevés. Comme pour le cas simple interface, une étude de la conservation d'énergie du modèle pour le cas double interface pourra être menée. Celle-ci permettra d'une part de vérifier de manière rigoureuse pour quelles configurations les ordres supérieurs à 3 des coefficients de diffusion (non calculés ici) peuvent être négligés. Elle quantifiera également les phénomènes de diffusion multiple par une même interface.

Annexe A

Diffraction en champ lointain et approximation de la phase stationnaire

Dans la zone de champ lointain de la surface, la fonction de Green 2D est donnée par l'expression (2.17). Sachant que $E_i(\mathbf{R}_A) = E_0 \exp(i\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{R}_A)$, les équations (2.27a-2.27b) s'écrivent

$$E_r^\infty(\mathbf{R}) = \frac{-E_0 e^{i(k_1 R - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{8\pi k_1 R}} \int_{\Sigma_A} d\Sigma_A (+2\mathbf{K}_i \cdot \hat{\mathbf{N}}_A) r_{12}(\chi_i) e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_r) \cdot \mathbf{R}_A} \Xi(\mathbf{R}_A), \quad (A.1a)$$

$$E_t^\infty(\mathbf{R}) = \frac{+E_0 e^{i(k_2 R - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{8\pi k_2 R}} \int_{\Sigma_A} d\Sigma_A (-2\mathbf{K}_{t,sp} \cdot \hat{\mathbf{N}}_A) t_{12}(\chi_i) e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_t) \cdot \mathbf{R}_A} \Xi(\mathbf{R}_A). \quad (A.1b)$$

Sachant que $d\Sigma_A = \sqrt{1 + \gamma_A^2} dx_A$, les bornes d'intégration peuvent se ramener à $x_A \in [-L_A/2; +L_A/2]$, avec L_A la longueur de la surface. Posons $\mathbf{N}_A = \sqrt{1 + \gamma_A^2} \hat{\mathbf{N}}_A$, alors

$$E_r^\infty(\mathbf{R}) = \frac{-E_0 e^{i(k_1 R - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{8\pi k_1 R}} \int dx_A (2\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{N}_A) r_{12}(\chi_i) e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_r) \cdot \mathbf{R}_A} \Xi(\mathbf{R}_A), \quad (A.2a)$$

$$E_t^\infty(\mathbf{R}) = \frac{+E_0 e^{i(k_2 R - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{8\pi k_2 R}} \int dx_A (-2\mathbf{K}_{t,sp} \cdot \mathbf{N}_A) t_{12}(\chi_i) e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_t) \cdot \mathbf{R}_A} \Xi(\mathbf{R}_A). \quad (A.2b)$$

Avec ces deux expressions, il est intéressant de pouvoir calculer le champ diffracté par la surface, en réflexion comme en transmission. Or, pour ce faire il faut connaître la normale locale $\hat{\mathbf{N}}_A$ en chaque point de la surface. Ceci permettra de déterminer l'angle local d'incidence χ_i et donc de calculer le champ diffracté.

Afin de calculer le champ diffracté, l'expression peut être simplifiée en utilisant l'approximation de la phase stationnaire (APS). Elle suppose que la majeure contribution du champ diffracté par la surface dans la direction $\hat{\mathbf{K}}_s$ donnée (pour une direction d'incidence $\hat{\mathbf{K}}_i$ donnée) provient des régions autour de la direction spéculaire du plan tangent. Cette direction spéculaire est donc donnée par la normale locale à la surface $\hat{\mathbf{N}}_A$, qui vérifie, respectivement en réflexion et transmission, les relations (2.24a) et (2.24b). Ainsi, $\hat{\mathbf{K}}_{t,sp} \equiv \hat{\mathbf{K}}_t$.

Nous pouvons remarquer que la condition mathématique sur la normale à la surface pour l'APS est a priori la même que pour l'AK. En effet, sous l'AK, pour une direction d'incidence $\hat{\mathbf{K}}_i$ donnée et une normale locale $\hat{\mathbf{N}}_A$ donnée, le champ est diffracté uniquement dans la direction

locale respectivement de réflexion $\hat{\mathbf{K}}_{r,sp}$ et de transmission $\hat{\mathbf{K}}_{t,sp}$, donnée par la relation (2.24a) et (2.24b). En utilisant l'APS pour une onde diffractée dans une direction $\hat{\mathbf{K}}_s$ donnée, pour une onde incidente $\hat{\mathbf{K}}_i$ donnée, la normale locale $\hat{\mathbf{N}}_A$ n'est plus une inconnue, mais vérifie la relation (2.24a) en réflexion et (2.24b) en transmission. La condition mathématique est donc la même. Cependant, pour l'AK et l'APS, il existe deux points de vues différents : pour l'AK, on ne s'intéresse pas à la direction de diffraction et c'est la normale locale qui est donnée, et pour l'APS, on ne s'intéresse pas à la normale locale et c'est la direction de diffraction qui est donnée. On pourrait penser que ces deux points de vue sont équivalents. Cependant, il y a une différence physique importante : il suffit d'imaginer, par exemple, un angle d'incidence relativement élevé (proche de l'incidence rasante) et/ou une pente γ_A relativement importante. Dans ce cas, l'angle $\theta_{s,sp}$ de l'onde diffractée dans la direction spéculaire $\hat{\mathbf{K}}_{s,sp}$ avec l'axe des ordonnées $\hat{\mathbf{z}}$ (cela est d'autant plus vrai en réflexion mais l'est aussi en transmission) dépasse $\pi/2$ en valeur absolue (voir figure A.1). Or ces configurations ne sont pas prises en compte sous l'APS. Ainsi, par un raisonnement physique relativement simple, il est possible de mettre en évidence une différence des domaines de validité entre l'AK et l'APS : notamment que l'APS possède une restriction plus importante sur l'angle d'incidence que l'AK, ainsi que sur l'écart type des pentes. Ce raisonnement physique est en accord avec des résultats rigoureux de la littérature [281].

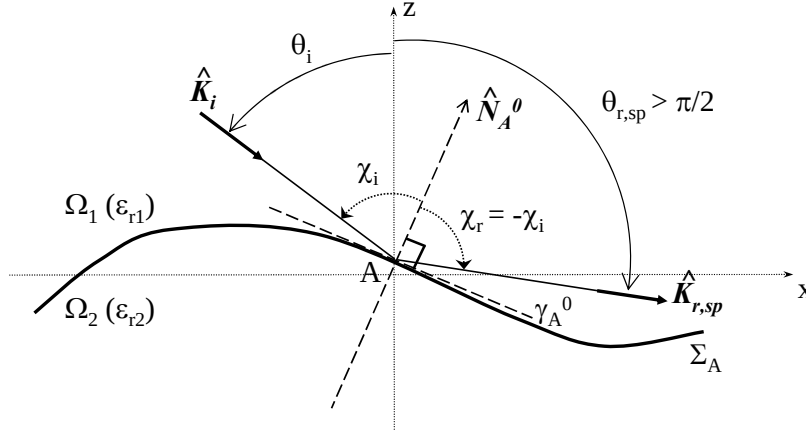


FIG. A.1 – Champ diffracté en réflexion par la surface rugueuse sous l'AK : la direction spéculaire de réflexion $\hat{\mathbf{K}}_{r,sp}$ est telle que l'angle $\theta_{r,sp}$ associé est supérieur à $\pi/2$.

Pour rentrer plus en détail dans l'APS, la condition de direction locale spéculaire revient mathématiquement à considérer que le terme de phase $g(x_A, \zeta_A)$ dans l'intégrale à calculer vérifie la relation

$$\frac{\partial g(x_A, \zeta_A)}{\partial x_A} = 0, \quad (\text{A.3})$$

où $g(x_A, \zeta_A) = (\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_s) \cdot \mathbf{R}_A = (k_{ix} - k_{sx})x_A + (k_{iz} - k_{sz})\zeta_A$. Puisque la pente $\gamma_A = \partial \zeta_A / \partial x_A$, elle vérifie sous l'APS d'après (A.3) la relation $\gamma_A \equiv \gamma_A^0 = -(k_{ix} - k_{sx}) / (k_{iz} - k_{sz})$. Pour le cas de la réflexion $\gamma_A^0 \equiv \gamma_A^{0(r)}$ et de la transmission $\gamma_A^0 \equiv \gamma_A^{0(t)}$, la pente s'écrit respectivement

$$\gamma_A^{0(r)} = -\frac{k_{ix} - k_{rx}}{k_{iz} - k_{rz}}, \quad \text{et} \quad \gamma_A^{0(t)} = -\frac{k_{ix} - k_{tx}}{k_{iz} - k_{tz}}. \quad (\text{A.4})$$

Ainsi, il est possible de déterminer l'angle local d'incidence χ_i^0 à partir de la relation $\cos \chi_i^0 =$

$-\hat{\mathbf{K}}_i \cdot \hat{\mathbf{N}}_A^0$ en utilisant les relations (2.14) et (A.4). De manière générale, l'expression s'écrit alors

$$\cos \chi_i^0 = \text{sign}(k_{sz} - k_{iz}) \frac{k_1^2 - (k_{ix}k_{sx} + k_{iz}k_{sz})}{k_1 \sqrt{k_1^2 + k_\alpha^2 - 2(k_{ix}k_{sx} + k_{iz}k_{sz})}}, \quad (\text{A.5})$$

où sign représente la fonction signe. Dans le cas de la transmission, l'équation donnant l'angle local d'incidence $\chi_i^0 \equiv \chi_i^{0(t)}$ peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} \cos \chi_i^{0(t)} &= \text{sign}(k_{tz} - k_{iz}) \frac{k_1^2 - (k_{ix}k_{tx} + k_{iz}k_{tz})}{k_1 \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - 2(k_{ix}k_{tx} + k_{iz}k_{tz})}} \\ &= \text{sign}(k_2 \hat{k}_{tz} - k_1 \hat{k}_{iz}) \frac{k_1 - k_2(\hat{k}_{ix}\hat{k}_{tx} + \hat{k}_{iz}\hat{k}_{tz})}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_2(\hat{k}_{ix}\hat{k}_{tx} + \hat{k}_{iz}\hat{k}_{tz})}}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

et dans le cas de la réflexion, l'équation donnant l'angle local d'incidence $\chi_i^0 \equiv \chi_i^{0(r)}$ peut se réécrire sous la forme simplifiée

$$\cos \chi_i^{0(r)} = \sqrt{\frac{1 - (\hat{k}_{ix}\hat{k}_{rx} + \hat{k}_{iz}\hat{k}_{tz})}{2}}. \quad (\text{A.7})$$

Pour le cas de la transmission, en remplaçant les projections des vecteurs d'ondes $\mathbf{K}_i$ et $\mathbf{K}_t$ sur $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{z}})$ par leurs expressions, l'équation (A.6) se réécrit

$$\cos \chi_i^{0(t)} = \text{sign}(k_1 \cos \theta_i - k_2 \cos \theta_t) \frac{k_1 - k_2 \cos(\theta_i - \theta_t)}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_2 \cos(\theta_i - \theta_t)}}. \quad (\text{A.8})$$

Pour le cas de la réflexion, l'expression (A.7) dépend de la convention choisie sur les angles (voir figure A.2). Si la convention utilise des angles orientés, avec le sens de rotation horaire défini comme le sens positif des angles, l'angle d'incidence $\theta_i \in [-\pi/2; 0]$, et les projections des vecteurs d'ondes normalisés sont définis par

$$\begin{cases} \hat{k}_{ix} = -\sin \theta_i \\ \hat{k}_{iz} = -\cos \theta_i \end{cases}, \text{ et } \begin{cases} \hat{k}_{rx} = +\sin \theta_r \\ \hat{k}_{rz} = +\cos \theta_r \end{cases}. \quad (\text{A.9})$$

Dans ce cas, $\chi_i^{0(r)}$ est défini par $\chi_i^{0(r)} = \pm(\theta_i - \theta_r)/2$. Géométriquement, seule la solution avec le signe $+$ est satisfaisante (voir figure A.2). On obtient alors

$$\chi_i^{0(r)} = \frac{\theta_i - \theta_r}{2}, \quad \text{et} \quad \gamma_A^{0(r)} = -\tan\left(\frac{\theta_r + \theta_i}{2}\right). \quad (\text{A.10})$$

Si la convention choisie utilise des angles non orientés, les projections des vecteurs d'ondes normalisés sont définis par

$$\begin{cases} \hat{k}_{ix} = +\sin \theta_i \\ \hat{k}_{iz} = -\cos \theta_i \end{cases}, \text{ et } \begin{cases} \hat{k}_{rx} = +\sin \theta_r \\ \hat{k}_{rz} = +\cos \theta_r \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

Dans ce cas, $\chi_i^{0(r)}$ est défini par $\chi_i^{0(r)} = \pm(\theta_i + \theta_r)/2$. Géométriquement, seule la solution avec le signe $+$ est satisfaisante (voir figure A.2). On obtient alors

$$\chi_i^{0(r)} = \frac{\theta_i + \theta_r}{2}, \quad \text{et} \quad \gamma_A^{0(r)} = -\tan\left(\frac{\theta_r - \theta_i}{2}\right). \quad (\text{A.12})$$

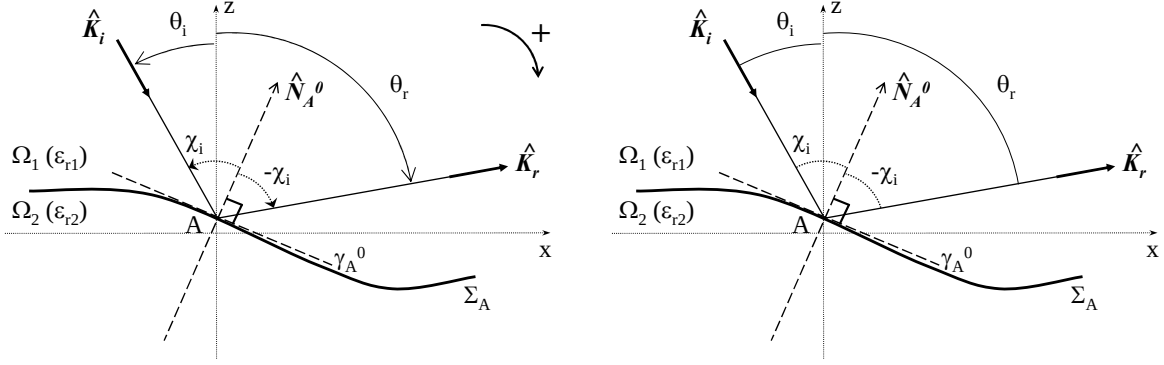


FIG. A.2 – Champ diffracté en réflexion sous l’APS : convention d’angles orientés (avec le sens de rotation horaire défini comme le sens positif des angles) à gauche, et convention d’angles non orientés à droite. Sur la figure de gauche, l’angle local d’incidence vérifie la relation $2\chi_i = \theta_i - \theta_r$, tandis que sur la figure de droite, il vérifie la relation $2\chi_i = \theta_i + \theta_r$.

Sous l’APS, de même que pour l’angle local d’incidence, il est possible de déterminer le produit scalaire $+2\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{N}_A^{0(r)}$ pour le cas de la réflexion et $-2\mathbf{K}_t \cdot \mathbf{N}_A^{0(t)}$ pour le cas de la transmission. En utilisant les relations (2.14) et (A.4), ces produits scalaires s’expriment par

$$+2\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{N}_A^{0(r)} = 2k_1 \frac{1 - (\hat{k}_{ix}\hat{k}_{rx} + \hat{k}_{iz}\hat{k}_{rz})}{\hat{k}_{iz} - \hat{k}_{rz}}, \quad (\text{A.13a})$$

$$-2\mathbf{K}_t \cdot \mathbf{N}_A^{0(t)} = 2 \frac{k_2^2 - (k_{ix}k_{tx} + k_{iz}k_{tz})}{k_{iz} - k_{tz}}. \quad (\text{A.13b})$$

Alors, les expressions des champs diffractés en réflexion (A.2a) et en transmission (A.2b) peuvent se réécrire respectivement sous la forme

$$\frac{E_r^\infty(\mathbf{R})}{E_0} = \frac{-e^{i(k_1 R - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{8\pi k_1 R}} 2k_1 f_r(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r) \int_{-L_A/2}^{+L_A/2} dx_A e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_r) \cdot \mathbf{R}_A} \Xi(\mathbf{R}_A), \quad (\text{A.14a})$$

$$\frac{E_t^\infty(\mathbf{R})}{E_0} = \frac{+e^{i(k_2 R - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{8\pi k_2 R}} 2k_2 f_t(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t) \int_{-L_A/2}^{+L_A/2} dx_A e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_t) \cdot \mathbf{R}_A} \Xi(\mathbf{R}_A), \quad (\text{A.14b})$$

avec

$$f_r(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r) = r_{12}(\chi_i^{0(r)}) (+\hat{\mathbf{K}}_i \cdot \mathbf{N}_A^{0(r)}) = r_{12}(\chi_i^{0(r)}) \frac{1 - (\hat{k}_{ix}\hat{k}_{rx} + \hat{k}_{iz}\hat{k}_{rz})}{\hat{k}_{iz} - \hat{k}_{rz}}, \quad (\text{A.15a})$$

$$f_t(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t) = t_{12}(\chi_i^{0(t)}) (-\hat{\mathbf{K}}_t \cdot \mathbf{N}_A^{0(t)}) = t_{12}(\chi_i^{0(t)}) \frac{k_2 - k_1(\hat{k}_{ix}\hat{k}_{tx} + \hat{k}_{iz}\hat{k}_{tz})}{k_1\hat{k}_{iz} - k_2\hat{k}_{tz}}. \quad (\text{A.15b})$$

Ainsi, le calcul des champs diffractés est simplifié sous l’APS, puisque la dépendance sur les pentes γ_A est supprimée : ce calcul ne dépend plus que de la hauteur, et de la fonction d’illumination.

Annexe B

Critère de Rayleigh en réflexion et transmission : calcul des composantes cohérentes

L'AOG est utilisée afin de simplifier le calcul de la puissance diffusée en réflexion et transmission par une interface fortement rugueuse. Cette approximation suppose que la composante cohérente de la puissance diffractée peut être négligée, ce qui revient à considérer le paramètre de Rayleigh (en réflexion ou en transmission selon le cas) “grand”. Le critère de Rayleigh souvent énoncé est $R_a > \pi/4$ (1.79). Pour qualifier une surface de très rugueuse, le critère plus restrictif peut être donné : $R_a > \pi/2$ (1.89). Cependant ce critère est *qualitatif*, car il dépend non seulement de la précision voulue du modèle utilisé, mais aussi du cas de figure étudié, notamment la statistique de la surface comme nous allons le voir par la suite.

Le calcul de la composante cohérente (en réflexion et en transmission) de la puissance diffractée par la surface va permettre de préciser ceci, et de donner un critère *quantitatif*, permettant d'établir un domaine de validité plus précis de l'AOG.

Le calcul de la puissance cohérente en réflexion et transmission est mené à partir des équations (2.28a) et (2.28b)

$$\frac{E_r^\infty(\mathbf{R})}{E_0} = \frac{-e^{i(k_1 R - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{8\pi k_1 R}} 2k_1 f_r(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r) \int_{-L_A/2}^{+L_A/2} dx_A e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_r) \cdot \mathbf{R}_A} \Xi(\mathbf{R}_A), \quad (B.1a)$$

$$\frac{E_t^\infty(\mathbf{R})}{E_0} = \frac{+e^{i(k_2 R - \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{8\pi k_2 R}} 2k_2 f_t(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t) \int_{-L_A/2}^{+L_A/2} dx_A e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_t) \cdot \mathbf{R}_A} \Xi(\mathbf{R}_A). \quad (B.1b)$$

La puissance cohérente s'exprime en fonction du champ diffracté par $p_{r,t}^{coh} = |\langle E_{r,t}^\infty(\mathbf{R}) \rangle|^2 / 2\eta_{1,2}$. Ainsi, elle s'exprime respectivement en réflexion et transmission par

$$\frac{|\langle E_r^\infty(\mathbf{R}) \rangle|^2}{2\eta_1 |E_0|^2} = \frac{k_1 |f_r(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r)|^2}{4\eta_1 \pi R} \left| \left\langle \int_{-L_A/2}^{+L_A/2} dx_A e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_r) \cdot \mathbf{R}_A} \Xi(\mathbf{R}_A) \right\rangle \right|^2, \quad (B.2a)$$

$$\frac{|\langle E_t^\infty(\mathbf{R}) \rangle|^2}{2\eta_2 |E_0|^2} = \frac{k_2 |f_t(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t)|^2}{4\eta_2 \pi R} \left| \left\langle \int_{-L_A/2}^{+L_A/2} dx_A e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_t) \cdot \mathbf{R}_A} \Xi(\mathbf{R}_A) \right\rangle \right|^2. \quad (B.2b)$$

Dans l'intégrale, le terme exponentiel peut se développer comme

$$e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_s) \cdot \mathbf{R}_A} = e^{i(k_{ix} - k_{sx})x_A} e^{i(k_{iz} - k_{sz})\zeta_A}, \quad (B.3)$$

où $s \equiv r$ en réflexion et $s \equiv t$ en transmission. L'intégration sur la variable x_A et la moyenne statistique (sur les variables aléatoires $\Xi(\mathbf{R}_A) \equiv \Xi(x_A, \zeta_A)$ et $\zeta_A \equiv \zeta(x_A)$) peuvent être inversées, ainsi le terme à l'intérieur du module peut s'écrire de manière générale

$$\left\langle \int dx_A e^{i(\mathbf{K}_i - \mathbf{K}_s) \cdot \mathbf{R}_A} \Xi(\mathbf{R}_A) \right\rangle = \int dx_A e^{i(k_{ix} - k_{sx})x_A} \left\langle e^{i(k_{iz} - k_{sz})\zeta_A} \Xi(\mathbf{R}_A) \right\rangle. \quad (\text{B.4})$$

L'opérateur moyenne statistique sur $\Xi(\mathbf{R}_A)$ et ζ_A utilise la densité de probabilité conjointe $p[\Xi(\mathbf{R}_A), \zeta_A]$, qui s'exprime par la loi de Bayes comme

$$p[\Xi(\mathbf{R}_A), \zeta_A] = p_h(\zeta_A) \times p[\Xi(\mathbf{R}_A)|\zeta_A], \quad (\text{B.5})$$

avec $p_h(\zeta_A)$ la densité de probabilité des hauteurs de la surface et $p[\Xi(\mathbf{R}_A)|\zeta_A]$ la probabilité conditionnelle de la fonction d'illumination $\Xi(\mathbf{R}_A)$ sachant la hauteur ζ_A . Cette dernière vérifie, respectivement en réflexion et en transmission, la relation [147]

$$p[\Xi(\mathbf{R}_A)|\zeta_A] = S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r|\zeta_A) \delta[\Xi(\mathbf{R}_A) - 1] + [1 - S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r|\zeta_A)] \delta[\Xi(\mathbf{R}_A)], \quad (\text{B.6a})$$

$$p[\Xi(\mathbf{R}_A)|\zeta_A] = S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t|\zeta_A) \delta[\Xi(\mathbf{R}_A) - 1] + [1 - S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t|\zeta_A)] \delta[\Xi(\mathbf{R}_A)]. \quad (\text{B.6b})$$

Ainsi, la moyenne statistique sur $\Xi(\mathbf{R}_A)$ et ζ_A dans l'équation (B.4) se simplifie en une moyenne statistique sur les hauteurs ζ_A seulement, et s'écrit, respectivement en réflexion et en transmission

$$\left\langle e^{i(k_{iz} - k_{rz})\zeta_A} \Xi(\mathbf{R}_A) \right\rangle_{\Xi(\mathbf{R}_A), \zeta_A} = \left\langle e^{i(k_{iz} - k_{rz})\zeta_A} S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r|\zeta_A) \right\rangle_{\zeta_A}, \quad (\text{B.7a})$$

$$\left\langle e^{i(k_{iz} - k_{tz})\zeta_A} \Xi(\mathbf{R}_A) \right\rangle_{\Xi(\mathbf{R}_A), \zeta_A} = \left\langle e^{i(k_{iz} - k_{tz})\zeta_A} S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t|\zeta_A) \right\rangle_{\zeta_A}. \quad (\text{B.7b})$$

L'équation donnant la puissance cohérente devient alors

$$\begin{aligned} \frac{|\langle E_r^\infty(\mathbf{R}) \rangle|^2}{2\eta_1 |E_0|^2} &= \frac{k_1 |f_r(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r)|^2}{4\eta_1 \pi R} \left| \left\langle e^{i(k_{iz} - k_{rz})\zeta_A} S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r|\zeta_A) \right\rangle \right|^2 \\ &\times \left| \int_{-L_A/2}^{+L_A/2} dx_A e^{i(k_{ix} - k_{rx})x_A} \right|^2, \end{aligned} \quad (\text{B.8a})$$

$$\begin{aligned} \frac{|\langle E_t^\infty(\mathbf{R}) \rangle|^2}{2\eta_2 |E_0|^2} &= \frac{k_2 |f_t(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t)|^2}{4\eta_2 \pi R} \left| \left\langle e^{i(k_{iz} - k_{tz})\zeta_A} S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t|\zeta_A) \right\rangle \right|^2 \\ &\times \left| \int_{-L_A/2}^{+L_A/2} dx_A e^{i(k_{ix} - k_{tx})x_A} \right|^2. \end{aligned} \quad (\text{B.8b})$$

De manière générale, l'intégration sur la variable x_A donne un sinus cardinal

$$\left| \int_{x_A=-L_A/2}^{+L_A/2} dx_A e^{i(k_{ix} - k_{sx})x_A} \right|^2 = L_A^2 \text{sinc}^2 \left[(k_{ix} - k_{sx}) \frac{L_A}{2} \right]. \quad (\text{B.9})$$

Ici, la longueur de la surface est supposée grande devant la longueur de corrélation¹, $L_A \gg L_c$. Alors le sinus cardinal peut être assimilé à un dirac tel que

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_A=-L_A/2}^{+L_A/2} dx_A e^{i(k_{ix} - k_{sx})x_A} \right|^2 &= 4\pi^2 \delta^2(k_{ix} - k_{sx}) \\ &= \frac{4\pi^2}{k_\alpha^2} \delta^2 \left(\hat{k}_{sx} - \frac{k_1}{k_\alpha} \hat{k}_{ix} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

¹Cette hypothèse est généralement vraie puisque la surface doit vérifier la propriété de stationnarité.

avec $\alpha \equiv 1$ en réflexion et $\alpha \equiv 2$ en transmission.

Le coefficient de diffusion cohérent s'exprime par la relation

$$\sigma_s^{coh}(\mathbf{K}_s, \mathbf{K}_i) = \lim_{R \rightarrow +\infty} 2\eta_1 \frac{R p_s^{coh}(\mathbf{K}_s, \mathbf{K}_i)}{L_A \cos \theta_i |E_i|^2}. \quad (B.11)$$

En réflexion et transmission, le coefficient de diffusion cohérent vaut alors

$$\sigma_r^{coh}(\mathbf{K}_r, \mathbf{K}_i) = \frac{1}{\cos \theta_i} \frac{2\pi}{k_1 L_A} |f_r(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r)|^2 \left| \left\langle e^{i(k_{iz} - k_{rz})\zeta_A} S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r | \zeta_A) \right\rangle \right|^2 \times \delta \left(\hat{k}_{rx} - \hat{k}_{ix} \right), \quad (B.12a)$$

$$\sigma_t^{coh}(\mathbf{K}_t, \mathbf{K}_i) = \frac{\eta_1}{\eta_2} \frac{1}{\cos \theta_i} \frac{2\pi}{k_2 L_A} |f_t(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t)|^2 \left| \left\langle e^{i(k_{iz} - k_{tz})\zeta_A} S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t | \zeta_A) \right\rangle \right|^2 \times \delta \left(\hat{k}_{tx} - \frac{k_1}{k_2} \hat{k}_{ix} \right). \quad (B.12b)$$

En supposant que la fonction d'ombre et la hauteur ζ_A sont décorréliées, la moyenne statistique sur les hauteurs devient

$$\left\langle e^{i(k_{iz} - k_{sz})\zeta_A} S_{1\alpha}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_s | \zeta_A) \right\rangle = \left\langle e^{i(k_{iz} - k_{sz})\zeta_A} \right\rangle S_{1\alpha}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_s), \quad (B.13)$$

où $S_{1\alpha}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_s)$ est la fonction d'ombre moyennée sur les pentes et les hauteurs de la surface.

La moyenne statistique $\left\langle e^{i(k_{iz} - k_{sz})\zeta_A} \right\rangle$ est égale à la fonction caractéristique $\chi_h(k_{iz} - k_{sz})$ telle que

$$\chi_h(k_{iz} - k_{sz}) \equiv \left\langle e^{i(k_{iz} - k_{sz})\zeta_A} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_{iz} - k_{sz})\zeta_A} p_h(\zeta_A) d\zeta_A. \quad (B.14)$$

Le résultat dépend alors de la statistique de la surface : la densité de probabilité des hauteurs $p_h(\zeta_A)$ est en général une gaussienne centrée

$$p_h(\zeta_A) = \frac{1}{\sigma_h \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\left(\frac{\zeta_A}{\sqrt{2}\sigma_h} \right)^2 \right], \quad (B.15)$$

et dans ce cas la fonction caractéristique vaut

$$\chi_h(k_{iz} - k_{sz}) \equiv \left\langle e^{i(k_{iz} - k_{sz})\zeta_A} \right\rangle = e^{-2R_a^2}, \quad (B.16)$$

avec

$$R_a = \frac{|k_{iz} - k_{sz}|}{2} \sigma_h. \quad (B.17)$$

On retrouve, en réflexion comme en transmission, le paramètre de Rayleigh exprimé dans le chapitre précédent (1.80) et (1.93), sous sa forme générale.

Ainsi, pour une statistique gaussienne, le coefficient de diffusion cohérent vaut

$$\sigma_r^{coh}(\mathbf{K}_r, \mathbf{K}_i) = \frac{1}{\cos \theta_i} \frac{2\pi}{k_1 L_A} |f_r(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r)|^2 \mathcal{A}_r \delta \left(\hat{k}_{rx} - \hat{k}_{ix} \right) S_{11}^2(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r), \quad (B.18a)$$

$$\sigma_t^{coh}(\mathbf{K}_t, \mathbf{K}_i) = \frac{\eta_1}{\eta_2} \frac{1}{\cos \theta_i} \frac{2\pi}{k_2 L_A} |f_t(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t)|^2 \mathcal{A}_t \delta \left(\hat{k}_{tx} - \frac{k_1}{k_2} \hat{k}_{ix} \right) S_{12}^2(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t), \quad (B.18b)$$

avec $\mathcal{A} = |\chi_h(k_{iz} - k_{sz})|^2$ le paramètre d'atténuation, exprimé pour une statistique gaussienne par

$$\mathcal{A} = e^{-g}, \quad \text{où } g = 4R_a^2 = |k_{iz} - k_{sz}|^2 \sigma_h^2. \quad (B.19)$$

La fonction de Dirac traduit le fait que pour une surface de dimensions grandes devant la longueur d'onde, la puissance cohérente diffractée par la surface rugueuse a lieu uniquement dans la direction spéculaire (en réflexion comme en transmission). Ainsi, l'atténuation de la puissance cohérente due à la rugosité de la surface est donnée par $\mathcal{A} = e^{-g}$ pour une surface de statistique gaussienne. De plus, pour une surface de longueur supposée infinie, la puissance cohérente est diffractée uniquement dans la direction spéculaire.

Pour une surface de statistique lorentzienne ou exponentielle, l'atténuation de la puissance cohérente due à la rugosité prend une forme différente. Par exemple, pour une statistique exponentielle centrée

$$p_h(\zeta_A) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_h} \exp\left[-\frac{\sqrt{2}|\zeta_A|}{\sigma_h}\right], \quad (\text{B.20})$$

le paramètre d'atténuation vaut

$$\mathcal{A} = \frac{1}{(1 + R_a)^2} = \frac{1}{(1 + g/2)^2}. \quad (\text{B.21})$$

Ainsi, l'approximation de l'optique géométrique (AOG) est valide si la puissance cohérente est négligeable devant la puissance incohérente ; ou en d'autres termes si le coefficient de diffusion cohérent (en réflexion ou transmission), donné par l'équation (B.18a) ou (B.18b), est négligeable devant le coefficient de diffusion incohérent (en réflexion ou transmission), donné par l'équation (2.44a) ou (2.44b). Ceci dépend de la précision voulue de l'application de l'AOG, et peut être calculée en fonction du cas de figure par comparaison entre les deux équations.

Rappelons que, de manière générale pour des permittivités relatives proche de 1, le paramètre de Rayleigh en transmission $R_{a,t}$ est plus faible que le paramètre de Rayleigh en réflexion $R_{a,r}$. Ainsi, une surface peut être considérée comme très rugueuse en réflexion mais seulement modérément rugueuse, voire peu rugueuse, en transmission. Alors, pour pouvoir appliquer l'AOG à la fois en réflexion et en transmission et étudier la conservation d'énergie du modèle par exemple, les deux critères de Rayleigh doivent être vérifiés conjointement.

Annexe C

Calcul des coefficients de diffusion sous l'AOG en 3D

Sous l'AOG, les contributions de l'intégrale proviennent de régions pour lesquelles $\mathbf{r}'_{\mathbf{A}} = (x'_A, y'_A)$ est proche de $\mathbf{r}_{\mathbf{A}} = (x_A, y_A)$. Ainsi, la différence des hauteurs $\zeta_A - \zeta'_A$ peut être exprimée par

$$\zeta_A - \zeta'_A \simeq \gamma_{A,x}(x_A - x'_A) + \gamma_{A,y}(y_A - y'_A), \quad (\text{C.1})$$

et le terme de phase à l'intérieur de l'intégrale s'écrit

$$[(k_{ix} - k_{rx,tx}) + \gamma_{A,x}(k_{iz} - k_{rz,tz})] x_m + [(k_{iy} - k_{ry,ty}) + \gamma_{A,y}(k_{iz} - k_{rz,tz})] y_m, \quad (\text{C.2})$$

avec $x_m = x_A - x'_A$ et $y_m = y_A - y'_A$. De plus, en posant $x_p = x_A + x'_A$ et $y_p = y_A + y'_A$, le changement de variable¹ de $\{x_A, x'_A, y_A, y'_A\} \rightarrow \{x_m, x_p, y_m, y_p\}$ est réalisé, le jacobien de la transformation valant 1/4.

Dans le terme $\langle I_s I_s^* \rangle$ ($s \equiv r$ en réflexion et $s \equiv t$ en transmission), la moyenne statistique a alors lieu sur les fonctions d'illumination $\Xi(\mathbf{R}_{\mathbf{A}})$ et $\Xi(\mathbf{R}'_{\mathbf{A}})$, et sur les pentes $\gamma_{A,x}$ et $\gamma_{A,y}$. Par application du théorème de Bayes, la probabilité conjointe de ces quatre variables aléatoires peut s'écrire [147]

$$p[\Xi(\mathbf{R}_{\mathbf{A}}), \Xi(\mathbf{R}'_{\mathbf{A}}), \gamma_{A,x}, \gamma_{A,y}] = p_s(\gamma_{A,x}, \gamma_{A,y}) \times p[\Xi(\mathbf{R}_{\mathbf{A}}), \Xi(\mathbf{R}'_{\mathbf{A}}) \mid \gamma_{A,x}, \gamma_{A,y}], \quad (\text{C.3})$$

avec $p_s(\gamma_{A,x}, \gamma_{A,y})$ la probabilité conjointe de la pente selon $\hat{\mathbf{x}}$ et selon $\hat{\mathbf{y}}$, et $p[\Xi(\mathbf{R}_{\mathbf{A}}), \Xi(\mathbf{R}'_{\mathbf{A}}) \mid \gamma_{A,x}, \gamma_{A,y}]$ la probabilité conditionnelle des fonctions d'illumination sachant les pentes. Celle-ci vérifie, respectivement en réflexion et transmission, la relation

$$p[\Xi(\mathbf{R}_{\mathbf{A}}), \Xi(\mathbf{R}'_{\mathbf{A}}) \mid \gamma_{A,x}, \gamma_{A,y}] = S_{11}(\mathbf{K}_{\mathbf{i}}, \mathbf{K}_{\mathbf{r}} \mid \gamma_{A,x}, \gamma_{A,y}) \delta(\Xi - \mathbf{1}) \quad (\text{C.4a})$$

$$+ [1 - S_{11}(\mathbf{K}_{\mathbf{i}}, \mathbf{K}_{\mathbf{r}} \mid \gamma_{A,x}, \gamma_{A,y})] \delta(\Xi),$$

$$p[\Xi(\mathbf{R}_{\mathbf{A}}), \Xi(\mathbf{R}'_{\mathbf{A}}) \mid \gamma_{A,x}, \gamma_{A,y}] = S_{12}(\mathbf{K}_{\mathbf{i}}, \mathbf{K}_{\mathbf{t}} \mid \gamma_{A,x}, \gamma_{A,y}) \delta(\Xi - \mathbf{1}) \quad (\text{C.4b})$$

$$+ [1 - S_{12}(\mathbf{K}_{\mathbf{i}}, \mathbf{K}_{\mathbf{t}} \mid \gamma_{A,x}, \gamma_{A,y})] \delta(\Xi),$$

avec $S_{11}(\mathbf{K}_{\mathbf{i}}, \mathbf{K}_{\mathbf{r}} \mid \gamma_{A,x}, \gamma_{A,y})$ (respectivement $S_{12}(\mathbf{K}_{\mathbf{i}}, \mathbf{K}_{\mathbf{t}} \mid \gamma_{A,x}, \gamma_{A,y})$) la probabilité conjointe qu'un point de la surface soit à la fois illuminé par l'onde incidente de direction $\mathbf{K}_{\mathbf{i}}$ et vu par l'onde réfléchie de direction $\mathbf{K}_{\mathbf{r}}$ (respectivement transmise de direction $\mathbf{K}_{\mathbf{t}}$), connaissant les pentes $\gamma_{A,x}$ et $\gamma_{A,y}$. $\delta(u)$ est la fonction de Dirac, qui vaut 1 lorsque $u = 0$; 0 autrement. Ξ et $\mathbf{1}$ sont des vecteurs de dimension deux définis par $\Xi = [\Xi(\mathbf{R}_{\mathbf{A}}) \ \Xi(\mathbf{R}'_{\mathbf{A}})]$ et $\mathbf{1} = [1 \ 1]$.

¹possible car la surface est supposée stationnaire

La surface étant stationnaire, la fonction d'ombre est indépendante des variables d'intégration $\{x_p, y_p\}$. L'intégration sur les variables $x_p \in [-L_{A,x}; +L_{A,x}]$ et $y_p \in [-L_{A,y}; +L_{A,y}]$ vaut alors respectivement $2L_{A,x}$ et $2L_{A,y}$. Bourlier et al. [282] ont montré que la fonction d'ombre est indépendante de la fonction d'autocorrélation. Ainsi, l'intégration sur les variables $x_m \in [-L_{A,x}; +L_{A,x}]$ et $y_m \in [-L_{A,y}; +L_{A,y}]$ peut être réalisée simplement : elle correspond de manière générale à la transformée de Fourier d'un signal rectangulaire. Cependant, la longueur de la surface selon $\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{\mathbf{y}}$ peut être considérée grande devant sa longueur de corrélation, $L_{A,x} \gg L_c$ et $L_{A,y} \gg L_c$. Alors les bornes d'intégration sur les variables x_m et y_m peuvent être considérées comme infinies, $x_m, y_m \in]-\infty; +\infty[$, et l'intégration devient

$$\int_{x_m=-\infty}^{+\infty} dx_m e^{i[(k_{ix}-k_{sx})+\gamma_{A,x}(k_{iz}-k_{sz})]x_m} = 2\pi \delta[(k_{ix}-k_{sx})+\gamma_{A,x}(k_{iz}-k_{sz})], \quad (C.5a)$$

$$\int_{y_m=-\infty}^{+\infty} dy_m e^{i[(k_{iy}-k_{sy})+\gamma_{A,y}(k_{iz}-k_{sz})]y_m} = 2\pi \delta[(k_{iy}-k_{sy})+\gamma_{A,y}(k_{iz}-k_{sz})], \quad (C.5b)$$

où δ représente la fonction de Dirac, et $s \equiv r$ en réflexion et $s \equiv t$ en transmission. La puissance diffusée par la surface s'écrit alors respectivement en réflexion et transmission par

$$\frac{\langle |\mathbf{E}_r^\infty(\mathbf{R})|^2 \rangle}{2\eta_1} = \frac{L_{A,x}L_{A,y}|E_0|^2}{2\eta_1 R^2 |\hat{k}_{rz} - \hat{k}_{iz}|^2} \left| (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{K}}_r \hat{\mathbf{K}}_r) \cdot \mathbf{F}_r(\gamma_{A,x}, \gamma_{A,y}) \right|^2 \left\langle S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r | \gamma_{A,x}, \gamma_{A,y}) \delta\left[\gamma_{A,x} + \frac{k_{rx} - k_{ix}}{k_{rz} - k_{iz}}\right] \delta\left[\gamma_{A,y} + \frac{k_{ry} - k_{iy}}{k_{rz} - k_{iz}}\right] \right\rangle, \quad (C.6a)$$

$$\frac{\langle |\mathbf{E}_t^\infty(\mathbf{R})|^2 \rangle}{2\eta_2} = \frac{L_{A,x}L_{A,y}|E_0|^2}{2\eta_2 R^2 |\hat{k}_{tz} - \frac{k_1}{k_2} \hat{k}_{iz}|^2} \left| (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{K}}_t \hat{\mathbf{K}}_t) \cdot \mathbf{F}_t(\gamma_{A,x}, \gamma_{A,y}) \right|^2 \left\langle S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t | \gamma_{A,x}, \gamma_{A,y}) \delta\left[\gamma_{A,x} + \frac{k_{tx} - k_{ix}}{k_{tz} - k_{iz}}\right] \delta\left[\gamma_{A,y} + \frac{k_{ty} - k_{iy}}{k_{tz} - k_{iz}}\right] \right\rangle, \quad (C.6b)$$

car $\delta(ax) = 1/|a|\delta(x)$, avec $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. On retrouve alors les expressions des pentes exprimées sous l'APS respectivement en réflexion et transmission

$$\gamma_{A,x} \equiv \gamma_x^{0(r)} = -\frac{k_{rx} - k_{ix}}{k_{rz} - k_{iz}}, \quad \text{et} \quad \gamma_{A,y} \equiv \gamma_y^{0(r)} = -\frac{k_{ry} - k_{iy}}{k_{rz} - k_{iz}}, \quad (C.7a)$$

$$\gamma_{A,x} \equiv \gamma_x^{0(t)} = -\frac{k_{tx} - k_{ix}}{k_{tz} - k_{iz}}, \quad \text{et} \quad \gamma_{A,y} \equiv \gamma_y^{0(t)} = -\frac{k_{ty} - k_{iy}}{k_{tz} - k_{iz}}. \quad (C.7b)$$

Les pentes $\gamma_{A,x}$ et $\gamma_{A,y}$ ne sont donc plus des variables aléatoires, et la moyenne statistique, qui a lieu sur les termes de pentes dans les équations (C.6a,C.6b), est égale à la densité de probabilité conjointe des pentes $p_s(\gamma_x^0, \gamma_y^0)$. D'après la relation (1.136,1.137), le coefficient de diffusion s'exprime par

$$\sigma_s(\mathbf{K}_s, \mathbf{K}_i) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{R^2 \|\langle \Pi_s \rangle\|}{L_{A,x}L_{A,y} \cos \theta_i \|\langle \Pi_i \rangle\|} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\eta_1}{\eta_\alpha} \frac{R^2 \langle |\mathbf{E}_s^\infty(\mathbf{R})|^2 \rangle}{L_{A,x}L_{A,y} \cos \theta_i |E_i|^2}, \quad (C.8)$$

avec $s \equiv r$ et $\alpha \equiv 1$ en réflexion, et $s \equiv t$ et $\alpha \equiv 2$ en transmission. Ainsi, le coefficient de

diffusion vaut respectivement en réflexion et transmission

$$\sigma_r(\mathbf{K}_r, \mathbf{K}_i) = \frac{1}{\cos \theta_i} \left| (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{K}}_r \hat{\mathbf{K}}_r) \cdot \mathbf{F}_r(\gamma_x^0, \gamma_y^0) \right|^2 \quad (C.9a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_t(\mathbf{K}_t, \mathbf{K}_i) &= \frac{\eta_1}{\eta_2} \frac{1}{\cos \theta_i} \left| (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{K}}_t \hat{\mathbf{K}}_t) \cdot \mathbf{F}_t(\gamma_x^0, \gamma_y^0) \right|^2 \\ &\quad \frac{p_s(\gamma_x^{0(r)}, \gamma_y^{0(r)})}{|\hat{k}_{rz} - \hat{k}_{iz}|^2} S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r | \gamma_x^0, \gamma_y^0), \\ &\quad \frac{p_s(\gamma_x^{0(t)}, \gamma_y^{0(t)})}{|\hat{k}_{tz} - \frac{k_1}{k_2} \hat{k}_{iz}|^2} S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t | \gamma_x^0, \gamma_y^0). \end{aligned} \quad (C.9b)$$

Le coefficient de diffusion peut alors s'écrire de manière simplifiée, en considérant une onde incidente de polarisation $\hat{\mathbf{b}}_i$, et une onde diffusée de polarisation $\hat{\mathbf{a}}_s$. Le terme $(\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{K}}_s \hat{\mathbf{K}}_s) \cdot \mathbf{F}_s(\gamma_x^0, \gamma_y^0)$ peut alors s'écrire, respectivement en réflexion et transmission, sous la forme

$$\hat{\mathbf{a}}_r \cdot \mathbf{F}_b(\gamma_x^{0(r)}, \gamma_y^{0(r)}) = \frac{||\hat{\mathbf{K}}_{rd}||^2}{|\hat{k}_{rdz}| ||\hat{\mathbf{K}}_i \wedge \hat{\mathbf{K}}_r||^2} W_{r,ab}, \quad \text{avec} \quad (C.10a)$$

$$W_{r,ab} = \left\{ \frac{r_H}{2} [(\hat{\mathbf{b}}_i \wedge \hat{\mathbf{K}}_i) \cdot \hat{\mathbf{K}}_r] [(\hat{\mathbf{a}}_r \wedge \hat{\mathbf{K}}_r) \cdot \hat{\mathbf{K}}_i] + \frac{r_V}{2} (\hat{\mathbf{b}}_i \cdot \hat{\mathbf{K}}_r)(\hat{\mathbf{a}}_r \cdot \hat{\mathbf{K}}_i) \right\},$$

$$\hat{\mathbf{a}}_t \cdot \mathbf{F}_b(\gamma_x^{0(t)}, \gamma_y^{0(t)}) = \frac{2 ||\hat{\mathbf{K}}_{td}|| (\hat{\mathbf{N}}^{0(t)} \cdot \hat{\mathbf{K}}_t)}{|\hat{k}_{tdz}| ||\hat{\mathbf{K}}_i \wedge \hat{\mathbf{K}}_t||^2} W_{t,ab}, \quad \text{avec} \quad (C.10b)$$

$$W_{t,ab} = \left\{ \frac{t_H}{2} [(\hat{\mathbf{b}}_i \wedge \hat{\mathbf{K}}_i) \cdot \hat{\mathbf{K}}_t] [(\hat{\mathbf{a}}_t \wedge \hat{\mathbf{K}}_t) \cdot \hat{\mathbf{K}}_i] + \frac{t_V}{2} (\hat{\mathbf{b}}_i \cdot \hat{\mathbf{K}}_t)(\hat{\mathbf{a}}_t \cdot \hat{\mathbf{K}}_i) \right\},$$

où $\hat{\mathbf{K}}_{rd} = \hat{\mathbf{K}}_r - \hat{\mathbf{K}}_i$ et $\hat{k}_{rdz} = \hat{k}_{rz} - \hat{k}_{iz}$, $\hat{\mathbf{K}}_{td} = \hat{\mathbf{K}}_t - k_1/k_2 \hat{\mathbf{K}}_i$ et $\hat{k}_{tdz} = \hat{k}_{tz} - k_1/k_2 \hat{k}_{iz}$, et $t_{H,V}$ le coefficient de transmission de Fresnel respectivement en polarisation H et V . Le terme $W_{s,ab}$ peut s'exprimer en ses 4 composantes de polarisations VV, VH, HV, HH (la première lettre représente la polarisation de l'onde diffusée, et la seconde celle de l'onde incidente) comme suit

$$W_{s,VV} = \left[\frac{s_H}{2} (\hat{\mathbf{h}}_s \cdot \hat{\mathbf{K}}_i) (\hat{\mathbf{h}}_i \cdot \hat{\mathbf{K}}_s) + \frac{s_V}{2} (\hat{\mathbf{v}}_s \cdot \hat{\mathbf{K}}_i) (\hat{\mathbf{v}}_i \cdot \hat{\mathbf{K}}_s) \right], \quad (C.11a)$$

$$W_{s,VH} = \left[\frac{s_H}{2} (\hat{\mathbf{h}}_s \cdot \hat{\mathbf{K}}_i) (\hat{\mathbf{v}}_i \cdot \hat{\mathbf{K}}_s) - \frac{s_V}{2} (\hat{\mathbf{v}}_s \cdot \hat{\mathbf{K}}_i) (\hat{\mathbf{h}}_i \cdot \hat{\mathbf{K}}_s) \right], \quad (C.11b)$$

$$W_{s,HV} = \left[\frac{s_H}{2} (\hat{\mathbf{v}}_s \cdot \hat{\mathbf{K}}_i) (\hat{\mathbf{h}}_i \cdot \hat{\mathbf{K}}_s) - \frac{s_V}{2} (\hat{\mathbf{h}}_s \cdot \hat{\mathbf{K}}_i) (\hat{\mathbf{v}}_i \cdot \hat{\mathbf{K}}_s) \right], \quad (C.11c)$$

$$W_{s,HH} = \left[\frac{s_H}{2} (\hat{\mathbf{v}}_s \cdot \hat{\mathbf{K}}_i) (\hat{\mathbf{v}}_i \cdot \hat{\mathbf{K}}_s) + \frac{s_V}{2} (\hat{\mathbf{h}}_s \cdot \hat{\mathbf{K}}_i) (\hat{\mathbf{h}}_i \cdot \hat{\mathbf{K}}_s) \right], \quad (C.11d)$$

avec $s \equiv r$ en réflexion et $s \equiv t$ en transmission. Les coefficients de réflexion et de transmission de Fresnel sont évalués à l'angle local d'incidence $\chi_i^{0(s)}$, dont l'expression est donnée par l'équation (2.98a) dans le cas réfléchi et (2.98b) dans le cas transmis.

Notons $\gamma^{0(s)}$ le vecteur de coordonnées $(\gamma_x^{0(s)}, \gamma_y^{0(s)})$. Ainsi, le coefficient de diffusion pour une onde incidente de polarisation $\hat{\mathbf{b}}_i$, et une onde diffusée de polarisation $\hat{\mathbf{a}}_s$, s'écrit respectivement en réflexion et transmission

$$\sigma_{ab}^r(\mathbf{K}_r, \mathbf{K}_i) = \frac{1}{\cos \theta_i} \left| \hat{\mathbf{a}}_r \cdot \mathbf{F}_b(\gamma^{0(r)}) \right|^2 \frac{p_s(\gamma^{0(r)})}{|\hat{k}_{rdz}|^2} S_{11}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_r | \gamma^{0(r)}), \quad (C.12a)$$

$$\sigma_{ab}^t(\mathbf{K}_t, \mathbf{K}_i) = \frac{\eta_1}{\eta_2} \frac{1}{\cos \theta_i} \left| \hat{\mathbf{a}}_t \cdot \mathbf{F}_b(\gamma^{0(t)}) \right|^2 \frac{p_s(\gamma^{0(t)})}{|\hat{k}_{tdz}|^2} S_{12}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_t | \gamma^{0(t)}). \quad (C.12b)$$

Les milieux Ω_1 et Ω_2 étant des milieux diélectriques non magnétiques, le rapport des impédances d'onde vaut $\eta_1/\eta_2 = \sqrt{\epsilon_{r2}/\epsilon_{r1}}$.

Annexe D

Calcul du coefficient de diffusion en réflexion du second ordre $\sigma_{r,2}$

Afin de calculer le coefficient de diffusion en réflexion du second ordre $\sigma_{r,2}$, nous nous focalisons sur le calcul de $p_{r,22} = \langle |E_{r,2}|^2 \rangle / 2\eta_1$, à partir de l'équation (3.13). Le calcul de $p_{r,12} = \Re(\langle E_{r,1} E_{r,2}^* \rangle) / \eta_1$ est basé sur les mêmes principes. Il n'est pas présenté ici, mais il est possible de montrer qu'il s'annule sous l'AOG avec prise en compte de l'effet d'ombre. Alors, l'expression de $\sigma_{r,2} = 2\eta_1 R p_{r,22} / (L_0 \cos \theta_i |E_i|^2)$ (3.20) est obtenue.

Dans cette annexe, pour faciliter les notations, l'indice $m1$ est remplacé par m , et l'indice $p1$ par p . Alors, le champ diffracté en réflexion du second ordre s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{E_{r,2}^\infty}{E_0} = & - \left(\frac{k_2}{2\pi} \right)^2 \sqrt{\frac{k_1}{2\pi R}} e^{i(k_1 R - \frac{\pi}{4})} \int d\theta_m d\theta_p dx_{A_1} dx_{B_1} dx_{A_2} f_t(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_m; \mathbf{N}_{\mathbf{A}_1}^0) \\ & f_r(\mathbf{K}_m, \mathbf{K}_p; \mathbf{N}_{\mathbf{B}_1}^0) f_t(\mathbf{K}_p, \mathbf{K}_r; \mathbf{N}_{\mathbf{A}_2}^0) e^{i(\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{A}_1} - \mathbf{K}_r \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{A}_2})} \\ & e^{i(\mathbf{K}_m \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1} + \mathbf{K}_p \cdot \mathbf{R}_{\mathbf{B}_1 \mathbf{A}_2})} \Xi(\mathbf{R}_{\mathbf{A}_1}) \Xi(\mathbf{R}_{\mathbf{B}_1}) \Xi(\mathbf{R}_{\mathbf{A}_2}), \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

avec $x_{A_1}, x_{B_1}, x_{A_2} \in [-L_0/2; +L_0/2]$, et $\theta_m, \theta_p \in [-\pi/2; +\pi/2]$. Le champ diffracté $E_{r,2}^*$ est obtenu en prenant le complexe conjugué de (D.1), et en remplaçant les variables $\{\theta_m, \theta_p, \hat{\mathbf{K}}_m, \hat{\mathbf{K}}_p, x_{A_1}, x_{B_1}, x_{A_2}, \zeta_{A_1}, \zeta_{B_1}, \zeta_{A_2}\}$ par $\{\theta'_m, \theta'_p, \hat{\mathbf{K}}'_m, \hat{\mathbf{K}}'_p, x_{A'_1}, x_{B'_1}, x_{A'_2}, \zeta_{A'_1}, \zeta_{B'_1}, \zeta_{A'_2}\}$. En effet, comme les points de diffusions successives sont a priori différents, les directions et angles de propagation sont a priori différents également.

Afin de calculer la puissance $p_{r,22}$, l'AOG est utilisée sur les deux interfaces, à chaque point de diffusion A_1 , B_1 et A_2 . Ceci implique que seuls les points de chaque surface fortement corrélés (c'est-à-dire séparés d'une distance faible devant la longueur de corrélation de la surface considérée) contribuent à la puissance diffusée. Ici, deux cas de figure peuvent être considérés (voir figure 3.2) : premièrement, le cas coïncident, où le point A'_1 est proche de A_1 et donc A'_2 proche de A_2 (ainsi que B'_1 proche de B_1). Deuxièmement, le cas anti-coïncident, où le point A'_1 est proche de A_2 et donc A'_2 proche de A_1 (ainsi que B'_1 proche de B_1). Le cas anti-coïncident peut contribuer uniquement dans et autour de la direction de rétro-diffusion. Ici, nous nous concentrons uniquement sur le cas coïncident.

Les deux surfaces étant supposées stationnaires, le changement de variables suivant, de

$\{x_{A_1}, x_{B_1}, x_{A_2}, x_{A'_1}, x_{B'_1}, x_{A'_2}\}$ en $\{x_{mA_1}, x_{mB_1}, x_{mA_2}, x_{pA_1}, x_{pB_1}, x_{pA_2}\}$ est utilisé :

$$\left. \begin{aligned} x_{mA_1} &= x_{A'_1} - x_{A_1} \\ x_{mB_1} &= x_{B'_1} - x_{B_1} \\ x_{mA_2} &= x_{A'_2} - x_{A_2} \\ x_{pA_1} &= x_{A'_1} + x_{A_1} \\ x_{pB_1} &= x_{B'_1} + x_{B_1} \\ x_{pA_2} &= x_{A'_2} + x_{A_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x_{A_1} &= (x_{pA_1} - x_{mA_1})/2 \\ x_{A'_1} &= (x_{pA_1} + x_{mA_1})/2 \\ x_{B_1} &= (x_{pB_1} - x_{mB_1})/2 \\ x_{B'_1} &= (x_{pB_1} + x_{mB_1})/2 \\ x_{A_2} &= (x_{pA_2} - x_{mA_2})/2 \\ x_{A'_2} &= (x_{pA_2} + x_{mA_2})/2. \end{aligned} \right. \quad (D.2)$$

Le même changement de variables de $\{\zeta_{A_1}, \zeta_{B_1}, \zeta_{A_2}, \zeta_{A'_1}, \zeta_{B'_1}, \zeta_{A'_2}\}$ en $\{\zeta_{mA_1}, \zeta_{mB_1}, \zeta_{mA_2}, \zeta_{pA_1}, \zeta_{pB_1}, \zeta_{pA_2}\}$ est utilisé.

L'AOG est utilisée sur les deux interfaces. Alors, seuls les points fortement corrélés de chacune des deux surfaces contribuent au coefficient de diffusion. Le cas coïncident seulement étant traité ici, les approximations suivantes peuvent être faites : $\zeta_{mA_1} = \zeta_{A'_1} - \zeta_{A_1} \approx \gamma_{A_1}(x_{A'_1} - x_{A_1}) = \gamma_{A_1}x_{mA_1}$, $\zeta_{mB_1} \approx \gamma_{B_1}x_{mB_1}$, $\zeta_{mA_2} \approx \gamma_{A_2}x_{mA_2}$, $x_{pA_1} = x_{A'_1} + x_{A_1} \approx 2x_{A_1}$, $\zeta_{pA_1} = \zeta_{A'_1} + \zeta_{A_1} \approx 2\zeta_{A_1}$, $x_{pB_1} \approx 2x_{B_1}$, $\zeta_{pB_1} \approx 2\zeta_{B_1}$, $x_{pA_2} \approx x_{A_2}$, et $\zeta_{pA_2} \approx \zeta_{A_2}$. De ce fait, le réel changement de variables est $\{x_{A_1}, x_{B_1}, x_{A_2}, x_{A'_1}, x_{B'_1}, x_{A'_2}\} \rightarrow \{x_{A_1}, x_{B_1}, x_{A_2}, x_{mA_1}, x_{mB_1}, x_{mA_2}\}$. Alors, la corrélation statistique de $E_{r,2}$ est donnée par l'équation suivante

$$\begin{aligned} \frac{\langle |E_{r,2}|^2 \rangle}{|E_0|^2} &= \left(\frac{k_2}{2\pi} \right)^4 \frac{k_1}{2\pi r} \int dx_{A_1} dx_{B_1} dx_{A_2} dx_{mA_1} dx_{mB_1} dx_{mA_2} d\theta_m d\theta'_m d\theta_p d\theta'_p \\ &\quad f_t(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_m; \mathbf{N}_{A_1}^0) f_t^*(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}'_m; \mathbf{N}_{A'_1}^0) f_r(\mathbf{K}_m, \mathbf{K}_p; \mathbf{N}_{B_1}^0) f_r^*(\mathbf{K}'_m, \mathbf{K}'_p; \mathbf{N}_{B'_1}^0) \\ &\quad f_t(\mathbf{K}_p, \mathbf{K}_r; \mathbf{N}_{A_2}^0) f_t^*(\mathbf{K}'_p, \mathbf{K}_r; \mathbf{N}_{A'_2}^0) \\ &\quad e^{i[-(k_2\hat{k}_{mx} - k_2^*\hat{k}'_{mx})x_{A_1} + (k_2\hat{k}_{mx} - k_2^*\hat{k}'_{mx} - k_2\hat{k}_{px} + k_2^*\hat{k}'_{px})x_{B_1} + (k_2\hat{k}_{px} - k_2^*\hat{k}'_{px})x_{A_2}]} \\ &\quad \left\langle \Xi(\mathbf{R}_{A_1}) \Xi(\mathbf{R}_{B_1}) \Xi(\mathbf{R}_{A_2}) \Xi(\mathbf{R}_{A'_1}) \Xi(\mathbf{R}_{B'_1}) \Xi(\mathbf{R}_{A'_2}) \right. \\ &\quad e^{i\{-k_1(\hat{k}_{ix} + \gamma_{A_1}\hat{k}_{iz}) + [(k_2\hat{k}_{mx} + k_2^*\hat{k}'_{mx}) + \gamma_{A_1}(k_2\hat{k}_{mx} + k_2^*\hat{k}'_{mx})]/2\}x_{mA_1}} \\ &\quad e^{-i/2[(k_2\hat{k}_{mx} + k_2^*\hat{k}'_{mx} - k_2\hat{k}_{px} - k_2^*\hat{k}'_{px}) + \gamma_{B_1}(k_2\hat{k}_{mx} + k_2^*\hat{k}'_{mx} - k_2\hat{k}_{pz} - k_2^*\hat{k}'_{pz})]x_{mB_1}} \\ &\quad e^{i\{k_1(\hat{k}_{rx} + \gamma_{A_2}\hat{k}_{rz}) - [(k_2\hat{k}_{px} + k_2^*\hat{k}'_{px}) + \gamma_{A_2}(k_2\hat{k}_{pz} + k_2^*\hat{k}'_{pz})]/2\}x_{mA_2}} \\ &\quad \left. e^{i[-(k_2\hat{k}_{mx} - k_2^*\hat{k}'_{mx})\zeta_{A_1} + (k_2\hat{k}_{mx} - k_2^*\hat{k}'_{mx} - k_2\hat{k}_{pz} + k_2^*\hat{k}'_{pz})\zeta_{B_1} + (k_2\hat{k}_{pz} - k_2^*\hat{k}'_{pz})\zeta_{A_2}] \right\rangle, \end{aligned} \quad (D.3)$$

avec $\{x_{mA_1}, x_{mB_1}, x_{mA_2}\} \in [-L_0; +L_0]$.

Dans la dernière équation, les variables aléatoires sont $\{\zeta_{A_1}, \zeta_{B_1}, \zeta_{A_2}, \gamma_{A_1}, \gamma_{B_1}, \gamma_{A_2}, \Xi\}$, avec $\Xi = [\Xi(\mathbf{R}_{A_1}) \Xi(\mathbf{R}_{B_1}) \Xi(\mathbf{R}_{A_2}) \Xi(\mathbf{R}_{A'_1}) \Xi(\mathbf{R}_{B'_1}) \Xi(\mathbf{R}_{A'_2})]$. La fonction densité de probabilité $p(\zeta_{A_1}, \zeta_{B_1}, \zeta_{A_2}, \gamma_{A_1}, \gamma_{B_1}, \gamma_{A_2}, \Xi)$ peut s'exprimer en fonction de la probabilité conditionnelle $p(\Xi | \zeta_{A_1}, \zeta_{B_1}, \zeta_{A_2}, \gamma_{A_1}, \gamma_{B_1}, \gamma_{A_2})$ par

$$\begin{aligned} p(\zeta_{A_1}, \zeta_{B_1}, \zeta_{A_2}, \gamma_{A_1}, \gamma_{B_1}, \gamma_{A_2}, \Xi) \\ = p(\zeta_{A_1}, \zeta_{B_1}, \zeta_{A_2}, \gamma_{A_1}, \gamma_{B_1}, \gamma_{A_2}) \times p(\Xi | \zeta_{A_1}, \zeta_{B_1}, \zeta_{A_2}, \gamma_{A_1}, \gamma_{B_1}, \gamma_{A_2}), \end{aligned} \quad (D.4)$$

où le dernier terme de l'équation (D.4) est donné par

$$\begin{aligned} p(\Xi | \zeta_{A_1}, \zeta_{B_1}, \zeta_{A_2}, \gamma_{A_1}, \gamma_{B_1}, \gamma_{A_2}) \\ = S_{1221}(\theta_i, \theta_m, \theta_p, \theta_r | \zeta_{A_1}, \zeta_{B_1}, \zeta_{A_2}, \gamma_{A_1}, \gamma_{B_1}, \gamma_{A_2}) \delta(\Xi - \mathbf{1}) \\ + [1 - S_{1221}(\theta_i, \theta_m, \theta_p, \theta_r | \zeta_{A_1}, \zeta_{B_1}, \zeta_{A_2}, \gamma_{A_1}, \gamma_{B_1}, \gamma_{A_2})] \delta(\Xi), \end{aligned} \quad (D.5)$$

avec Ξ et $\mathbf{1} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$ des vecteurs de dimension six. $p(\zeta_{A_1}, \zeta_{B_1}, \zeta_{A_2}, \gamma_{A_1}, \gamma_{B_1}, \gamma_{A_2})$ est la distribution conjointe des hauteurs et des pentes, de matrice de covariance

$$\begin{aligned}
 [C_6] &= \begin{bmatrix} \langle \zeta_{A_1}^2 \rangle & \langle \zeta_{A_1} \zeta_{B_1} \rangle & \langle \zeta_{A_1} \zeta_{A_2} \rangle & \langle \zeta_{A_1} \gamma_{A_1} \rangle & \langle \zeta_{A_1} \gamma_{B_1} \rangle & \langle \zeta_{A_1} \gamma_{A_2} \rangle \\ \langle \zeta_{A_1} \zeta_{B_1} \rangle & \langle \zeta_{B_1}^2 \rangle & \langle \zeta_{B_1} \zeta_{A_2} \rangle & \langle \zeta_{B_1} \gamma_{A_1} \rangle & \langle \zeta_{B_1} \gamma_{B_1} \rangle & \langle \zeta_{B_1} \gamma_{A_2} \rangle \\ \langle \zeta_{A_1} \zeta_{A_2} \rangle & \langle \zeta_{B_1} \zeta_{A_2} \rangle & \langle \zeta_{A_2}^2 \rangle & \langle \zeta_{A_2} \gamma_{A_1} \rangle & \langle \zeta_{A_2} \gamma_{B_1} \rangle & \langle \zeta_{A_2} \gamma_{A_2} \rangle \\ \langle \zeta_{A_1} \gamma_{A_1} \rangle & \langle \zeta_{B_1} \gamma_{A_1} \rangle & \langle \zeta_{A_2} \gamma_{A_1} \rangle & \langle \gamma_{A_1}^2 \rangle & \langle \gamma_{A_1} \gamma_{B_1} \rangle & \langle \gamma_{A_1} \gamma_{A_2} \rangle \\ \langle \zeta_{A_1} \gamma_{B_1} \rangle & \langle \zeta_{B_1} \gamma_{B_1} \rangle & \langle \zeta_{A_2} \gamma_{B_1} \rangle & \langle \gamma_{A_1} \gamma_{B_1} \rangle & \langle \gamma_{B_1}^2 \rangle & \langle \gamma_{B_1} \gamma_{A_2} \rangle \\ \langle \zeta_{A_1} \gamma_{A_2} \rangle & \langle \zeta_{B_1} \gamma_{A_2} \rangle & \langle \zeta_{A_2} \gamma_{A_2} \rangle & \langle \gamma_{A_1} \gamma_{A_2} \rangle & \langle \gamma_{B_1} \gamma_{A_2} \rangle & \langle \gamma_{A_2}^2 \rangle \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \sigma_{hA}^2 & \rho_{A_1 B_1} & \rho_{A_1 A_2} & 0 & \rho'_{A_1 B_1} & \rho'_{A_1 A_2} \\ \rho_{A_1 B_1} & \sigma_{hB}^2 & \rho_{B_1 A_2} & -\rho'_{A_1 B_1} & 0 & \rho'_{B_1 A_2} \\ \rho_{A_1 A_2} & \rho_{B_1 A_2} & \sigma_{hA}^2 & -\rho'_{A_1 A_2} & -\rho'_{B_1 A_2} & 0 \\ 0 & -\rho'_{A_1 B_1} & -\rho'_{A_1 A_2} & \sigma_{sA}^2 & \rho''_{A_1 B_1} & \rho''_{A_1 A_2} \\ \rho'_{A_1 B_1} & 0 & -\rho'_{B_1 A_2} & \rho''_{A_1 B_1} & \sigma_{sB}^2 & \rho''_{B_1 A_2} \\ \rho'_{A_1 A_2} & \rho'_{B_1 A_2} & 0 & \rho''_{A_1 A_2} & \rho''_{B_1 A_2} & \sigma_{sA}^2 \end{bmatrix}. \quad (D.6)
 \end{aligned}$$

Notons que les corrélations des hauteurs ρ sont paires, avec $\rho_{A_1 A_2} = \rho(x_{A_1 A_2}) = \rho(x_{A_2} - x_{A_1})$ la fonction d'auto-corrélation de Σ_A , et $\rho_{A_1 B_1}$, $\rho_{B_1 A_2}$ les fonctions d'inter-corrélation entre Σ_A et Σ_B . Comme ρ est paire, ρ' est impaire, et ρ'' est paire. De plus, $\rho(0) = \sigma_h^2$, $\rho'(0) = 0$, et $\rho''(0) = -\sigma_s^2$ (σ_s est l'écart type des pentes de la surface considérée). Pour un processus stationnaire, nous pouvons remarquer que la matrice de covariance est indépendante de $\{x_{mA_1}, x_{mB_1}, x_{mA_2}\}$. Alors, la moyenne statistique sur les fonctions d'illumination dans l'équation (D.3) donne $S_{1221}(\theta_i, \theta_m, \theta_p, \theta_r \mid \zeta_{A_1}, \zeta_{B_1}, \zeta_{A_2}, \gamma_{A_1}, \gamma_{B_1}, \gamma_{A_2})$.

Ici, les deux surfaces sont supposées décorréliées, ainsi que A_1 et A_2 ($x_{A_1 A_2} \gg L_{cA}$). Ainsi, en règle générale dans ce modèle (pour le cas coïncident), tous les points de réflexions (ou transmissions) successives sont supposés décorréliés entre eux. Alors, dans l'équation (D.3) le seul terme qui dépend de x_{A_1} est le terme à l'intérieur de l'exponentielle correspondante. Comme nous avons supposé la longueur de la surface supérieure $L_0 \gg L_{cA}$, l'intégration sur x_{A_1} se réduit à

$$\int_{-L_0/2}^{+L_0/2} \exp[-i(k_2 \hat{k}_{mx} - k_2^* \hat{k}'_{mx})x_{A_1}] dx_{A_1} = \frac{2\pi}{|k_2|} \delta\left(\frac{k_2^*}{k_2} \hat{k}'_{mx} - \hat{k}_{mx}\right), \quad (D.7)$$

ce qui implique $k_2^* = k_2$ (ce qui signifie que le milieu intermédiaire Ω_2 doit être sans pertes, c'est-à-dire tel que $\epsilon_{r2} \in \mathbb{R}$) et $\hat{k}'_{mx} = \hat{k}_{mx}$; d'où $\theta'_m = \theta_m$ et $\hat{k}'_{mz} = \hat{k}_{mz}$: ainsi $\mathbf{K}'_m = \mathbf{K}_m$. Alors, l'intégration sur la variable θ'_m est supprimée. De la même manière pour x_{A_2} , nous obtenons

$$\int_{-L_0/2}^{+L_0/2} \exp[ik_2(\hat{k}_{px} - \hat{k}'_{px})x_{A_2}] dx_{A_2} = \frac{2\pi}{|k_2|} \delta(\hat{k}'_{px} - \hat{k}_{px}), \quad (D.8)$$

ce qui implique que $\hat{k}'_{px} = \hat{k}_{px}$; d'où $\theta'_p = \theta_p$ et $\hat{k}'_{pz} = \hat{k}_{pz}$: ainsi $\mathbf{K}'_p = \mathbf{K}_p$. Nous avons également $\mathbf{N}_{A_1}^0 = \mathbf{N}_{A_1}^0$, $\mathbf{N}_{B_1}^0 = \mathbf{N}_{B_1}^0$ et $\mathbf{N}_{A_2}^0 = \mathbf{N}_{A_2}^0$. Alors, l'intégration sur la variable θ'_p peut être supprimée. De la même manière pour x_{B_1} , nous obtenons

$$\int_{-L_0/2}^{+L_0/2} \exp[ik_2(\hat{k}_{mx} - \hat{k}'_{mx} - \hat{k}_{px} + \hat{k}'_{px})x_{B_1}] dx_{B_1} = L_0. \quad (D.9)$$

Alors, nous pouvons remarquer que le terme dans l'exponentielle qui dépend des hauteurs est nul. Ainsi, la moyenne statistique sur les hauteurs et les pentes $p(\zeta_{A_1}, \zeta_{B_1}, \zeta_{A_2}, \gamma_{A_1}, \gamma_{B_1}, \gamma_{A_2})$ peut se réduire sur les pentes seulement $p_s(\gamma_{A_1}^0, \gamma_{B_1}^0, \gamma_{A_2}^0)$. De plus, comme les points A_1 , B_1 et A_2 sont décorréliés entre eux, le terme de densité de probabilité se réduit à $p_s(\gamma_{A_1}^0) p_s(\gamma_{B_1}^0) p_s(\gamma_{A_2}^0)$, et

la fonction d'ombre se simplifie en $S_{1221}(\theta_i, \theta_m, \theta_p, \theta_r \mid \zeta_{A_1}, \zeta_{B_1}, \zeta_{A_2}, \gamma_{A_1}, \gamma_{B_1}, \gamma_{A_2}) = S_{12}(\theta_i, \theta_m \mid \gamma_{A_1}^0) S_{22}(\theta_m, \theta_p \mid \gamma_{B_1}^0) S_{21}(\theta_p, \theta_r \mid \gamma_{A_2}^0)$, où chaque terme est moyenné sur les hauteurs.

Dans l'équation (D.3), le seul terme dépendant de x_{mA_1} est le terme à l'intérieur de l'exponentielle correspondante. En supposant que $L_0 \gg L_{cA}$, l'intégration sur x_{mA_1} mène à

$$\int_{-L_0}^{+L_0} e^{i[(k_{mx}-k_{ix})+\gamma_{A_1}(k_{mz}-k_{iz})]x_{mA_1}} dx_{mA_1} = \frac{2\pi}{|k_2| |\hat{k}_{mz} - \frac{k_1}{k_2} \hat{k}_{iz}|} \delta\left(\gamma_{A_1} + \frac{k_{mx} - k_{ix}}{k_{mz} - k_{iz}}\right). \quad (\text{D.10})$$

De la même manière pour x_{mB_1} , en supposant que L_0 est grand devant la longueur de corrélation de la surface inférieure L_{cB} , nous obtenons

$$\int_{-L_0}^{+L_0} e^{i[(k_{px}-k_{mx})+\gamma_{B_1}(k_{pz}-k_{mz})]x_{mB_1}} dx_{mB_1} = \frac{2\pi}{|k_2| |\hat{k}_{pz} - \hat{k}_{mz}|} \delta\left(\gamma_{B_1} + \frac{k_{px} - k_{mx}}{k_{pz} - k_{mz}}\right). \quad (\text{D.11})$$

de la même manière pour x_{mA_2} , comme nous avons supposé $L_0 \gg L_{cA}$, nous obtenons

$$\int_{-L_0}^{+L_0} e^{i[(k_{rx}-k_{px})+\gamma_{A_2}(k_{rz}-k_{pz})]x_{mA_2}} dx_{mA_2} = \frac{2\pi}{|k_1| |\hat{k}_{rz} - \frac{k_2}{k_1} \hat{k}_{pz}|} \delta\left(\gamma_{A_2} + \frac{k_{rx} - k_{px}}{k_{rz} - k_{pz}}\right). \quad (\text{D.12})$$

Ainsi, nous obtenons les expressions des pentes données par l'équation (3.26).

Le calcul de $p_{r,12} = \Re e(\langle E_{r,1} E_{r,2}^* \rangle) / \eta_1$ utilise les mêmes approximations et n'est donc pas présenté ici. Les approximations utilisées dans le calcul de $p_{r,12}$ avec prise en compte de l'effet d'ombre mènent à la condition $\hat{k}_{mz} = 0$, c'est-à-dire $\theta_m = \pm\pi/2$. Ceci implique que $p_{r,12} = 0$ du fait de l'ombre. Notons que cela signifie qu'il n'y a pas de corrélation entre $E_{r,1}$ et $E_{r,2}$, ce qui est cohérent avec l'utilisation de l'AOG.

Enfin, en utilisant l'équation (3.20), avec $p_{r,2} = p_{r,22}$, nous obtenons l'expression de l'équation (3.25).

Annexe E

Calcul du coefficient de diffusion en réflexion du second ordre $\sigma_{r,2}$: contribution anti-coïncidente pour une interface inférieure plane

Afin de calculer la contribution du cas anti-coïncident pour une interface inférieure plane, nous partons de l'expression du champ diffracté du second ordre $E_{r,2}$

$$\begin{aligned} \frac{E_{r,2}^\infty}{E_0} = & \frac{k_2}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1}{2\pi R}} e^{i(k_1 R - \frac{\pi}{4})} \int d\theta_m dx_{A_1} dx_{A_2} \delta(\theta_p + \theta_m) f_t(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_m; \mathbf{N}_{A_1}^0) \\ & r_{23}(\theta_m) f_t(\mathbf{K}_p, \mathbf{K}_r; \mathbf{N}_{A_2}^0) e^{i(\mathbf{K}_i \cdot \mathbf{R}_{A_1} - \mathbf{K}_r \cdot \mathbf{R}_{A_2})} \\ & e^{i(\mathbf{K}_m \cdot \mathbf{R}_{A_1 B_1} + \mathbf{K}_p \cdot \mathbf{R}_{B_1 A_2})} \Xi(\mathbf{R}_{A_1}) \Xi(\mathbf{R}_{A_2}), \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

où, pour faciliter les notations, l'indice $m1$ a été remplacé par m , et l'indice $p1$ par p . Alors, le champ diffracté $E_{r,2}^*$ est obtenu en prenant le complexe conjugué de l'équation (E.1), et en remplaçant les variables $\{\theta_m, \hat{\mathbf{K}}_m, \hat{\mathbf{K}}_p, x_{A_1}, x_{A_2}, \zeta_{A_1}, \zeta_{A_2}\}$ par $\{\theta'_m, \hat{\mathbf{K}}'_m, \hat{\mathbf{K}}'_p, x_{A'_1}, x_{A'_2}, \zeta_{A'_1}, \zeta_{A'_2}\}$.

La contribution du cas anti-coïncident de la puissance diffusée sous l'AOG correspond au point A'_2 proche de A_1 et A'_1 proche de A_2 (voir figure 3.2). Ainsi, le changement de variables de $\{x_{A_1}, x_{A_2}, x_{A'_1}, x_{A'_2}\}$ à $\{x_{d1}, x_{d2}, x_{c1}, x_{c2}\}$ est utilisé

$$\left. \begin{aligned} x_{d1} &= x_{A_1} - x_{A'_2} \\ x_{d2} &= x_{A_2} - x_{A'_1} \\ x_{c1} &= (x_{A_1} + x_{A'_2})/2 \\ x_{c2} &= (x_{A_2} + x_{A'_1})/2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x_{A_1} &= x_{c1} + x_{d1}/2 \\ x_{A'_2} &= x_{c1} - x_{d1}/2 \\ x_{A_2} &= x_{c2} + x_{d2}/2 \\ x_{A'_1} &= x_{c2} - x_{d2}/2. \end{aligned} \right. \quad (\text{E.2})$$

Le même changement de variables de $\{\zeta_{A_1}, \zeta_{A_2}, \zeta_{A'_1}, \zeta_{A'_2}\}$ à $\{\zeta_{d1}, \zeta_{d2}, \zeta_{c1}, \zeta_{c2}\}$ est utilisé.

Comme le cas coïncident, l'AOG est utilisée à chaque point de diffusion. Comme Bahar et al. [108] pour le cas de la double diffusion en réflexion par une simple interface rugueuse, la pente en chaque point de diffusion est approximée par la pente au point central¹, γ_{c1} et γ_{c2} , et la différence des hauteurs ζ_{d1} et ζ_{d2} est approximée respectivement par $\zeta_{d1} \approx \gamma_{c1} x_{d1}$ et $\zeta_{d2} \approx \gamma_{c2} x_{d2}$.

¹Remarquons que cette approximation aurait pu, de préférence, être utilisée également pour le cas coïncident, car elle est physiquement moins restrictive que de prendre la pente en l'un des deux points. Cependant, pour le cas coïncident, le résultat est le même.

Alors, de la même manière que pour le cas coïncident, mais en prenant en compte les corrélations entre les points de diffusions successives, nous obtenons l'expression de la contribution du cas anti-coïncident au coefficient de diffusion. La fonction d'ombre S_{1221} est supposée statistiquement indépendante des hauteurs. Alors, $\sigma_{r,2a}$ peut s'écrire

$$\sigma_{r,2a} = \frac{k_1}{2\pi \cos \theta_i} 2 \Re \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\theta_m d\theta'_m \frac{1}{\left| \frac{(\hat{k}_{mz} + \hat{k}'_{mz})}{2} - \frac{k_1}{k_2} \frac{(\hat{k}_{iz} - \hat{k}_{rz})}{2} \right|^2} \right. \quad (\text{E.3})$$

$$f_t(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_m, \mathbf{N}_{c1}^0) f_t^*(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}'_m, \mathbf{N}_{c2}^0) r_{23}(\theta_m) r_{23}^*(\theta'_m) f_t(\mathbf{K}_p, \mathbf{K}_r, \mathbf{N}_{c2}^0) f_t^*(\mathbf{K}'_p, \mathbf{K}_r, \mathbf{N}_{c1}^0)$$

$$S_{1221}(\mathbf{K}_i, \mathbf{K}_m, \mathbf{K}'_m, \mathbf{K}_r \mid \gamma_{c1}^0, \gamma_{c2}^0) e^{-2i(k_{mz} - k'_{mz})\bar{H}}$$

$$\left. \int_{x^{min}}^{x^{max}} dx_{mc} e^{i(k_{ix} + k_{rx} - k_{mx} - k'_{mx})x_{mc}} \left\langle e^{ik_{1z}\zeta_{c1}} e^{ik_{2z}\zeta_{c2}} \right\rangle \right),$$

où $x_{mc} = x_{c1} - x_{c2}$ avec $x_{mc} \in [x^{min}; x^{max}]$, $k_{1z} = k_{iz} + k_{rz} - k_{mz} + k'_{mz}$, $k_{2z} = -k_{iz} - k_{rz} - k_{mz} + k'_{mz}$, $\mathbf{N}_{c1}^0 = -\gamma_{c1}^0 \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}$ avec

$$\gamma_{c1}^0 = -\frac{(k_{ix} - k_{rx}) - (k_{mx} - k'_{mx})}{(k_{iz} - k_{rz}) - (k_{mz} + k'_{mz})}, \quad (\text{E.4})$$

et $\mathbf{N}_{c2}^0 = -\gamma_{c2}^0 \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{z}}$ avec

$$\gamma_{c2}^0 = -\frac{(k_{ix} - k_{rx}) + (k_{mx} - k'_{mx})}{(k_{iz} - k_{rz}) - (k_{mz} + k'_{mz})}. \quad (\text{E.5})$$

Ainsi, les difficultés résident dans la détermination ou au moins l'évaluation de x^{min} et x^{max} , et dans la détermination des moyennes statistiques sur les hauteurs. Dans l'équation (E.3), la moyenne statistique s'écrit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k_{1z}\zeta_{c1} + k_{2z}\zeta_{c2})} p(\zeta_{c1}, \zeta_{c2}, \gamma_{c1}^0, \gamma_{c2}^0; x_{mc}) d\zeta_{c1} d\zeta_{c2} = \chi_{\zeta_{c1}, \zeta_{c2}}(k_{1z}, k_{2z}, \gamma_{c1}^0, \gamma_{c2}^0; x_{mc}), \quad (\text{E.6})$$

où $\chi_{\zeta_{c1}, \zeta_{c2}}$ représente la fonction caractéristique de ζ_{c1} et ζ_{c2} . Ici, nous supposons une statistique des hauteurs gaussienne, c'est-à-dire que ζ_{c1} et ζ_{c2} sont gaussiennes. Alors, si $\zeta = k_{1z}\zeta_{c1} + k_{2z}\zeta_{c2}$, ζ est également une variable aléatoire gaussienne. Notons W_0 la fonction d'auto-corrélation de la surface Σ_A entre les variables ζ_{c1} et ζ_{c2} , qui est fonction de la distance horizontale $x_{mc} = x_{c1} - x_{c2}$ entre les deux points centraux. ζ_{c1} et ζ_{c2} étant de moyenne nulle, la variance de ζ , $\langle \zeta^2 \rangle$, est définie par $\langle \zeta^2 \rangle = (k_{1z}^2 + k_{2z}^2)\sigma_h^2 + 2k_{1z}k_{2z}W_0$. Le problème à résoudre est donc réduit à la résolution de l'intégrale I_1 définie par

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\zeta} p(\zeta, \gamma_{c1}^0, \gamma_{c2}^0; x_{mc}) d\zeta = \chi_{\zeta}(1, \gamma_{c1}^0, \gamma_{c2}^0; x_{mc}), \quad (\text{E.7})$$

où pour une statistique des pentes gaussienne, $p(\zeta, \gamma_{c1}^0, \gamma_{c2}^0)$ peut s'exprimer par

$$p(\zeta, \gamma_{c1}^0, \gamma_{c2}^0) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{|[C_3]|}} \exp \left(-\frac{1}{2} \mathbf{V}_3^T [C_3]^{-1} \mathbf{V}_3 \right), \quad (\text{E.8})$$

avec $\mathbf{V}_3 = [\zeta \ \gamma_{c1}^0 \ \gamma_{c2}^0]$ et $\mathbf{V}_3^T$ son transposé, $[C_3]$ la matrice de covariance de $\{\zeta, \gamma_{c1}^0, \gamma_{c2}^0\}$, et $|[C_3]|$ le déterminant de $[C_3]$. La matrice de covariance s'exprime par

$$[C_3] = \begin{bmatrix} \langle \zeta^2 \rangle & -k_{2z}W_1 & k_{1z}W_1 \\ -k_{2z}W_1 & \sigma_s^2 & -W_2 \\ k_{1z}W_1 & -W_2 & \sigma_s^2 \end{bmatrix}, \quad (\text{E.9})$$

avec W_1 la dérivée première de W_0 , et W_2 la dérivée seconde de W_0 . Alors, nous pouvons exprimer le produit $-\frac{1}{2} \mathbf{V}_3^T [C_3]^{-1} \mathbf{V}_3$ à l'intérieur de l'exponentielle de l'équation (E.8) comme une fonction de ζ de la forme $-a\zeta^2 - 2b\zeta - c$. Ainsi, nous pouvons montrer que I_1 peut s'exprimer par

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\zeta} p(\zeta, \gamma_{c1}^0, \gamma_{c2}^0) d\zeta = \frac{\sqrt{\pi/a}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{|[C_3]|}} e^{-(4ca-4b^2+4ib+1)/4a} \\ &= \frac{1}{2\pi \sqrt{\sigma_s^4 - W_2^2}} e^{-(4ca-4b^2+4ib+1)/4a}. \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

En regroupant les termes dépendant des pentes, nous obtenons finalement

$$I_1 \equiv I_1(x_{mc}) = p_s(\gamma_{c1}^0, \gamma_{c2}^0; x_{mc}) f(k_{1z}, k_{2z}, \gamma_{c1}^0, \gamma_{c2}^0; x_{mc}), \quad (\text{E.11})$$

avec

$$p_s(\gamma_{c1}^0, \gamma_{c2}^0) = \frac{1}{2\pi \sqrt{\sigma_s^4 - W_2^2}} \exp \left[-\frac{(\sigma_s^2 \gamma_{c1}^0)^2 + \sigma_s^2 \gamma_{c2}^0^2 + 2W_2 \gamma_{c1}^0 \gamma_{c2}^0}{2(\sigma_s^4 - W_2^2)} \right], \quad (\text{E.12})$$

et

$$\begin{aligned} f(k_{1z}, k_{2z}, \gamma_{c1}^0, \gamma_{c2}^0) &= e^{i \frac{W_1}{(\sigma_s^4 - W_2^2)} [(k_{1z} \sigma_s^2 - k_{2z} W_2) \gamma_{c2}^0 - (k_{2z} \sigma_s^2 - k_{1z} W_2) \gamma_{c1}^0]} \\ &\quad e^{-\frac{1}{2(\sigma_s^4 - W_2^2)} [2k_{1z} k_{2z} (W_0 \sigma_s^4 + W_1 W_2 - W_0 W_2^2) - (k_{1z}^2 + k_{2z}^2) W_1^2 \sigma_s^2]} \\ &\quad e^{-\frac{1}{2} (k_{1z}^2 + k_{2z}^2) \sigma_h^2}. \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Notons que I_1 dans l'équation (E.11) est une fonction de x_{mc} , puisque p_s et f dépendent implicitement de x_{mc} à travers W_0 , W_1 et W_2 . Quand les pentes sont décorréées, $W_0 = 0$, $W_1 = 0$ et $W_2 = 0$, ce qui mène à la formule décorréée $I_1 = p_s(\gamma_{c1}^0) p_s(\gamma_{c2}^0) \exp \left[-1/2 (k_{1z}^2 + k_{2z}^2) \sigma_h^2 \right]$.

La difficulté principale est alors de déterminer (ou au moins d'évaluer) les valeurs minimale et maximale de x_{mc} , x^{min} et x^{max} , qui sont des variables aléatoires dépendant des hauteurs et des pentes de ces points.

Si nous suivons la même idée que celle utilisée pour la double diffusion en réflexion par une simple interface rugueuse [52, 49, 108], supposons que les limites d'intégration de la variable x_{mc} peuvent être estimées par $[-L_m; +L_m]$, avec L_m la valeur absolue de la moyenne statistique (sur les hauteurs et les pentes) de la distance x_{mc} entre deux points centraux, $L_m \simeq 2\bar{H} |\langle \tan \theta_m \rangle|$, ce qui donne $L_m \simeq 2\bar{H} |\tan \theta_m^{plan}|$ (ceci correspond au cas approché où les deux interfaces sont planes, avec θ_m^{plan} l'angle de propagation associé dans le milieu intermédiaire). Néanmoins, ce choix de L_m ne donne pas des résultats satisfaisants : les simulations (non présentées ici) prenant en compte le cas anti-coïncident montrent que la contribution du cas anti-coïncident aboutit dans plusieurs cas à des valeurs (non physiques) négatives du coefficient de diffusion total. Alors, le choix des valeurs minimale et du maximale ne semble pas satisfaisant dans ce cas, et ce choix joue un rôle crucial dans la contribution des ondes anti-coïncidentes.

Il nous semble que comme la distance x_{mc} entre deux points centraux est une variable aléatoire, il faudrait plutôt estimer la valeur minimale x^{min} par la moyenne statistique $L_m = \langle x_{mc} \rangle$ moins plusieurs fois son écart type $\sigma_{x_{mc}}$, $x^{min} \simeq L_m - \alpha \sigma_{x_{mc}}$, et la valeur maximale par $x^{max} \simeq L_m + \alpha \sigma_{x_{mc}}$, avec α de l'ordre de quelques unités (souvent, α est pris égal à 3 ou 4). Alors, le problème consiste à donner une estimation simple mais bonne à la fois de L_m et $\sigma_{x_{mc}}$. Ceci est le point-clé du problème. En effet, les simulations (non présentées ici) montrent que les résultats numériques du cas anti-coïncident varient de manière significative en fonction du

choix des valeurs de L_m et $\alpha\sigma_{x_{mc}}$. Pour des angles d'incidence et des écarts types des pentes faibles, nous pouvons montrer qu'une première approximation de l'écart type est $\sigma_{x_{mc}} \approx 2\bar{H}\sigma_s$. Alors, les résultats numériques pour ce choix montrent de faibles oscillations du coefficient de diffusion total du second ordre $\sigma_{r,2}^{tot}$ autour de la direction spéculaire, dont les amplitudes et la fréquence varient avec le choix. De plus, elles varient également en fonction de l'écart type des hauteurs $\sigma_h \in [0.5; 4]\lambda$, de l'épaisseur moyenne $\bar{H} \in [0.1; 20]\lambda$, et de l'écart type des pentes $\sigma_s \in [0.1; 0.3]$, mais seulement faiblement. Ainsi, la détermination des limites d'intégration n'est pas aisée, cependant pour les cas typiques où des simulations sont présentées (c'est-à-dire pour des écarts types des pentes faibles et des épaisseurs moyennes de l'ordre de ou inférieures à la longueur d'onde), la contribution anti-coïncidente peut être négligée. Ceci est en accord avec les résultats de la méthode numérique de référence, où aucun pic de rétro-diffusion significatif n'est observé.

Bibliographie

- [1] P. Lynch, "Curvature corrections to rough-surface scattering at high frequencies," *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 47, pp. 804–815, Mar. 1970.
- [2] L. Rayleigh, *The theory of sound*. New York : Dover, 1945. (originally published in 1877).
- [3] L. Rayleigh, "On the dynamical theory of gratings," *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, vol. 79, pp. 399–416, Aug. 1907.
- [4] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*. London : Pergamon, 6th ed., 1980.
- [5] J. A. Kong, *Electromagnetic wave theory*. New York : John Wiley & Sons, 2nd ed., 1990.
- [6] J.-P. Faroux and J. Renault, *Electromagnétisme 2 : Equations de Maxwell et phénomènes d'induction*. Dunod, 1998.
- [7] J.-P. Pérez, R. Carles, and R. Fleckinger, *Electromagnétisme : Fondements et applications*. Dunod, 4ème ed., 2001.
- [8] J.-P. Pérez, *Optique : Fondements et applications*. Dunod, 7ème ed., 2004.
- [9] H. Lumbroso, *Ondes électromagnétiques dans le vide et les conducteurs*. Dunod, 2ème ed., 1996.
- [10] L. Klein and C. Swift, "An improved model for the dielectric constant of sea water at microwave frequencies," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 25, pp. 104–11, Jan. 1977.
- [11] D. Laurent, *Contribution à l'étude du comportement polarimétrique de la rétrodiffusion des océans*. PhD thesis, Université de Nantes, Nantes, France, Oct. 1993.
- [12] F. Daout, *Etude de la dépolarisation des ondes centimétriques par une surface rugueuse - Application au domaine maritime -*. PhD thesis, IRESTE, Nantes, France, Nov. 1996.
- [13] F. Ulaby, R. Moore, and A. Fung, *Microwave Remote Sensing : Active and passive*, vol. 3 - From Theory to Applications. Norwood : Artech House, 1986.
- [14] T. Friizo, Y. Schildberg, O. Rambeau, T. Tjomsland, H. Fordedal, and J. Sjoblom, "Complex permittivity of crude oils and solutions of heavy crude oils fractions," *Journal of Dispersion Science and Technology*, vol. 19, no. 1, pp. 93–126, 1998.
- [15] V. Byfield, *Optical remote sensing of oil in the marine environment*. PhD thesis, School of Ocean and Earth Science, University of Southampton, Southampton, UK, Oct. 1998.
- [16] Barre and Chavane, "Simulation et modélisation de nappes de pétrole sur le simulateur de scènes radar marines," tech. rep., Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes, Nantes, France, Oct. 2000.
- [17] P.-F. Combes, *Micro-ondes - Cours et exercices avec solutions. Tome 1 : Lignes, guides et cavités*. Dunod, 1996.

- [18] R. D. Roo and C.-T. Tai, "Plane wave reflection and refraction involving a finitely conducting medium," *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, vol. 45, pp. 54–61, Oct. 2003.
- [19] G. Brown and T. Black, "Currents on sinusoidal surfaces of small period," in *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, July 2006.
- [20] S. Mammar, "Traitement statistique du signal," 1998. <http://lsc.cemif.univ-evry.fr:8080/~smam/polycopies/ts71/ts31.pdf> - au 20/07/2006.
- [21] C. Bourlier, *Rayonnement infrarouge d'une surface stochastique - Application au domaine océanique* -. PhD thesis, Ecole polytechnique de l'université de Nantes, Nantes, France, Dec. 1999.
- [22] M. Rendas, "Processus stochastiques," 2001/2002. <http://www.i3s.unice.fr/~rendas/esinsa/TSSST0.PDF> - au 02/11/2004.
- [23] N. Pinel, "Diffusion radar par une couche de pétrole sur la mer par une méthode analytique," Master's thesis, Ecole polytechnique de l'université de Nantes, Nantes, France, Sept. 2003.
- [24] N. Pottier, "Physique statistique hors d'équilibre : équation de boltzmann, réponse linéaire," 2000. <http://cel.ccsd.cnrs.fr/cours/ce1-3/ce1-3.html> - au 17/01/2006.
- [25] J. Proakis, *Digital communications*. Boston : McGraw-Hill, 4th ed., 2001.
- [26] J. Ogilvy, *Theory of wave scattering from random surfaces*. Bristol and Philadelphia : Institute of Physics Publishing, 1991.
- [27] F. de Coulon, *Traité d'Electricité*, vol. VI - Théorie et traitement des signaux. Presses polytechniques et universitaires romandes, 4ème ed., 1998.
- [28] Y. Thomas, *Signaux et systèmes linéaires*. Paris : Masson, 2ème ed., 1995.
- [29] A. Soubret, *Diffusion des ondes électromagnétiques par des milieux et des surfaces aléatoires : étude des effets cohérents dans le champ diffusé*. PhD thesis, Université d'Aix-Marseille 2, Marseille, France, 2001.
- [30] A. Maradudin and T. Michel, "The transverse correlation length for randomly rough surfaces," *Journal of Statistical Physics*, vol. 58, no. 3-4, pp. 485–502, 1990.
- [31] R. Papa and J. Lennon, "Conditions for the validity of physical optics in rough surface scattering," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 36, pp. 647–650, May 1988.
- [32] V. Freilikher, E. Kanzieper, and A. Maradudin, "Coherent scattering enhancement in systems bounded by rough surfaces," *Physics Reports*, vol. 288, pp. 127–204, Sept. 1997.
- [33] C. Cox and W. Munk, "Measurement of the roughness of the sea surface from photographs of the sun's glitter," *Journal of the Optical Society of America*, vol. 44, pp. 838–850, 1954.
- [34] T. Elfouhaily, B. Chapron, K. Katsaros, and D. Vandemark, "A unified directional spectrum for long and short wind-driven waves," *Journal of Geophysical Research*, vol. 102, no. C7, pp. 781–96, 1997.
- [35] C. Bourlier and G. Berginc, "Microwave analytical backscattering models from randomly anisotropic sea surface - Comparison with experimental data in C and Ku bands," in *Progress In Electromagnetic Research* (D. J. A. Kong, ed.), vol. 37, pp. 31–78, EMW Publishing, 2002.
- [36] N. Déchamps, *Méthodes numériques appliquées au calcul de la diffusion d'une onde électromagnétique par des interfaces naturelles monodimensionnelles*. PhD thesis, Université de Nantes, Nantes, France, Dec. 2004.

-
- [37] P. Lombardini, B. Fiscella, P. Trivero, C. Cappa, and W. Garrett, "Modulation of the spectra of short gravity waves by sea surface films : slick detection and characterization with a microwave probe," *Journal of Atmospheric and Oceanic Technology*, vol. 6, pp. 882–90, Dec. 1989.
 - [38] A. Jenkins and S. Jacobs, "Wave damping by a thin layer of viscous fluid," *Physics of Fluids*, vol. 9, pp. 1256–64, May 1997.
 - [39] C. Bourlier, "Emission and reflection from a thin oil film over a rough sea surface for optical application," in *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, July 2006.
 - [40] L. Tsang, J. Kong, K. Ding, and C. Ao, *Scattering of Electromagnetic Waves, Volume I : Theories and Applications*. New York : John Wiley & Sons, 2000.
 - [41] P. Croce and L. Prod'homme, "On the conditions for applying light scattering methods to rough surface evaluation," *Journal of Optics*, vol. 15, no. 2, pp. 95–104, 1984.
 - [42] F. Ulaby, R. Moore, and A. Fung, *Microwave Remote Sensing : Active and passive*, vol. 2 - Radar Remote Sensing and Surface Scattering and Emission Theory. Reading, Massachusetts : Addison-Wesley, Advanced Book Program, 1982.
 - [43] L. Tsang and J. Kong, *Scattering of Electromagnetic Waves, Volume III : Advanced Topics*. New York : John Wiley & Sons, 2001.
 - [44] J. Caron, *Diffusion de la lumière dans les milieux stratifiés : prise en compte des interfaces rugueuses et des effets de polarisation*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), Université Paris 6, Paris, France, Oct. 2003.
 - [45] A. Sommerfeld, *Optics*. New York : Academic Press, 1954.
 - [46] M. B. Faroux, *Optique et physique ondulatoire*. Dunod, 1993.
 - [47] J. Stratton, *Electromagnetic theory*. New York : McGraw-Hill, 1941.
 - [48] S. Durant, *Propagation de la lumière en milieu aléatoire : Rôle de l'absorption, de la diffusion dépendante et du couplage surface-volume*. PhD thesis, Ecole centrale des arts et manufactures, Châtenay-Malabry, Hauts-de-Seine, France, Feb. 2003.
 - [49] C. Bourlier and G. Berginc, "Multiple scattering in the high-frequency limit with second-order shadowing function from 2D anisotropic rough dielectric surfaces : I. Theoretical study," *Waves in Random Media*, vol. 14, no. 3, pp. 229–52, 2004.
 - [50] A. Fung, *Microwave scattering and emission models and their applications*. Boston - London : Artech House, 1994.
 - [51] F. Bass and I. Fuks, *Wave scattering from statistically rough surfaces*. Oxford : Pergamon Press, 1978.
 - [52] A. Ishimaru, C. Le, Y. Kuga, L. Sengers, and T. Chan, "Polarimetric scattering theory for high slope rough surfaces," *Progress In Electromagnetic Research*, vol. 14, pp. 1–36, 1996.
 - [53] E. Bahar and M. El-Shenawee, "Double-scatter cross sections for two-dimensional random rough surfaces that exhibit backscatter enhancement," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 18, pp. 108–16, Jan. 2001.
 - [54] L. Tsang, E. Njoku, and J. Kong, "Microwave thermal emission from a stratified medium with nonuniform temperature distribution," *Journal of Applied Physics*, vol. 46, no. 12, pp. 5127–5133, 1975.
 - [55] L. Tsang, J. A. Kong, K. H. Ding, and C. O. Ao, *Scattering of Electromagnetic Waves, Volume II : Numerical Simulations*. New York : John Wiley & Sons, 2001.

- [56] P. Croce and L. Prod'homme, "Contribution of immersion technique to light scattering analysis of very rough surfaces," *Journal of Optics*, vol. 11, pp. 319–327, Sept. 1980.
- [57] Z. Yin, Z. Akkerman, B. Yang, and F. Smith, "Optical properties and microstructure of CVD diamond films," *Diamond and Related Materials*, vol. 6, pp. 153–8, Jan. 1997.
- [58] S. Rice, "Reflection of electromagnetic waves from slightly rough surfaces," *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 4, pp. 351–78, 1951.
- [59] C. Eckart, "The scattering of sound from the sea surface," *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 25, pp. 566–70, May 1953.
- [60] W. Peake, "Interaction of electromagnetic waves with some natural surfaces," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation [legacy, pre - 1988]*, vol. 7, pp. 324–329, Dec. 1959.
- [61] P. Beckmann and A. Spizzichino, *The scattering of electromagnetic waves from rough surfaces*. Oxford : Pergamon Press, 1963.
- [62] W. Chew, J.-M. Jin, C.-C. Lu, E. Michielssen, and J. Song, "Fast solution methods in electromagnetics," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, pp. 533–43, Mar. 1997.
- [63] M. Saillard and A. Sentenac, "Rigorous solutions for electromagnetic scattering from rough surfaces," *Waves in Random Media*, vol. 11, pp. 103–37, July 2001.
- [64] K. Warnick and W. Chew, "Numerical simulation methods for rough surface scattering," *Waves in Random Media*, vol. 11, pp. R1–R30, 2001.
- [65] S. Lee, H. Ling, and R. Chou, "Ray-tube integration in shooting and bouncing ray method," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 1, pp. 286–9, Oct. 1988.
- [66] N. de Beaucoudrey, P. Schott, and C. Bourlier, "Detection of oil slicks on sea surface depending on layer thickness and sensor frequency," in *2003 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, (Toulouse, France), pp. 2741–3, July 2003.
- [67] E. Thorsos, "The validity of the Kirchhoff approximation for rough surface scattering using a Gaussian roughness spectrum," *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 83, pp. 78–92, Jan. 1988.
- [68] E. Thorsos and D. Jackson, "The validity of the perturbation approximation for rough surface scattering using a Gaussian roughness spectrum," *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 86, pp. 261–77, July 1989.
- [69] J. Sanchez-Gil, A. Maradudin, J. Lu, V. Freilikher, M. Pustilnik, and I. Yurkevich, "Scattering of electromagnetic waves from a bounded medium with a random surface," *Physical Review B*, vol. 50, pp. 15353–68, Nov. 1994.
- [70] S. Rice, *Reflection of EM from Slightly Rough Surfaces*. New York : Interscience, 1963.
- [71] W. Peake, "Theory of radar return from terrain," in *IRE National Convention Record 7*, vol. 1, pp. 27–41, Mar. 1959.
- [72] G. Valenzuela, "Depolarization of em waves by slightly rough surfaces," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation [legacy, pre - 1988]*, vol. 15, pp. 552–7, July 1967.
- [73] G. Valenzuela, "Scattering of electromagnetic waves from a tilted slightly rough surfaces," *Radio Science*, vol. 13, p. 1057, 1968.
- [74] J. Johnson, "Third-order small-perturbation method for scattering from dielectric rough surfaces," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 16, pp. 2720–36, Nov. 1999.
- [75] M. Demir and J. Johnson, "Fourth- and higher-order small-perturbation solution for scattering from dielectric rough surfaces," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 20, pp. 2330–7, Dec. 2003.

-
- [76] F. Toigo, A. Marvin, V. Celli, and N. Hill, "Optical properties of rough surfaces : General theory and the small roughness limit," *Physical Review B*, vol. 15, pp. 5618–5626, June 1977.
 - [77] A. Soubret, G. Berginc, and C. Bourrelly, "Application of reduced Rayleigh equations to electromagnetic wave scattering by two-dimensional randomly rough surfaces," *Physical Review B*, vol. 63, p. 245411, June 2001.
 - [78] T. Elfouhaily and C.-A. Guérin, "A critical survey of approximate scattering wave theories from random rough surfaces," *Waves in Random Media*, vol. 14, no. 4, pp. R1–R40, 2004.
 - [79] A. Voronovich, *Wave scattering from rough surfaces*. Germany : Springer, 2nd ed., 1999.
 - [80] A. Stogryn, "Electromagnetic scattering from rough, finitely conducting surfaces," *Radio Science*, vol. 2, pp. 415–428, Apr. 1967.
 - [81] B. Kur'yanov, "The scattering of sound at a rough surface with two types of irregularity," *Sov. Phys. Acoust.*, vol. 8, pp. 252–57, 1963.
 - [82] J. Wright, "A new model for sea clutter," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation [legacy, pre - 1988]*, vol. 16, pp. 217–223, Mar. 1968.
 - [83] D. Barrick and W. Peake, "A review of scattering from rough surfaces with different roughness scales," *Radio Science*, vol. 3, pp. 865–868, 1968.
 - [84] G. Valenzuela, "Theories for the interaction of electromagnetic and oceanic waves-a review," *Boundary-Layer Meteorology*, vol. 13, pp. 61–85, Jan. 1978.
 - [85] E. Bahar, "Depolarisation of electromagnetic waves excited by distributions of electric and magnetic sources in inhomogeneous multilayered structures of arbitrarily varying thickness. full wave solutions," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 14, pp. 1510–5, Nov. 1973.
 - [86] E. Bahar and G. Rajan, "Depolarization and scattering of electromagnetic waves by irregular boundaries for arbitrary incident and scatter angles full-wave solutions," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-27, pp. 214–25, Mar. 1979.
 - [87] E. Bahar, "Full-wave solutions for the scattered radiation fields from rough surfaces with arbitrary slope and frequency," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-28, pp. 11–21, Jan. 1980.
 - [88] E. Bahar, "Full-wave solutions for the depolarization of the scattered radiation fields by rough surfaces of arbitrary slope," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-29, pp. 443–54, May 1981.
 - [89] E. Bahar and M. Fitzwater, "Depolarization and backscatter enhancement in light scattering from random rough surfaces : comparison of full-wave theory with experiment," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 6, pp. 33–43, Jan. 1989.
 - [90] E. Bahar, "Full wave solutions for the scattering of acoustic waves excited by arbitrary source distributions in irregular layered media," *Wave Motion*, vol. 12, pp. 301–14, July 1990.
 - [91] E. Bahar and B. Lee, "Radar scatter cross sections for two-dimensional random rough surfaces-full wave solutions and comparisons with experiments," *Waves in Random Media*, vol. 6, pp. 1–23, Jan. 1996.
 - [92] A. Fung, Z. Li, and K. Chen, "Backscattering from a randomly rough dielectric surface," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 30, pp. 356–69, Mar. 1992.
 - [93] C.-Y. Hsieh, A. Fung, G. Nesti, A. Sieber, and P. Coppo, "A further study of the iem surface scattering model," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 35, pp. 901–9, July 1997.

-
- [94] K. Chen, T.-D. Wu, M.-K. Tsay, and A. Fung, "A note on the multiple scattering in an IEM model," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 38, pp. 249–56, Jan. 2000.
 - [95] J. Álvarez Pérez, "An extension of the IEM/IEMM surface scattering model," *Waves in Random Media*, vol. 11, pp. 307–29, July 2001.
 - [96] A. Voronovich, "Small-slope approximation for electromagnetic wave scattering at a rough interface of two dielectric half-spaces," *Waves in Random Media*, vol. 4, no. 3, pp. 337–67, 1994.
 - [97] A. Voronovich, "A two-scale model from the point of view of the small-slope approximation," *Waves in Random Media*, vol. 6, pp. 73–83, Jan. 1996.
 - [98] A. Voronovich, "Small-slope approximation in wave scattering by rough surfaces," *Soviet Physics - JETP*, vol. 62, pp. 65–70, July 1985.
 - [99] A. Voronovich and V. Zavorotny, "Theoretical model for scattering of radar signals in K_u - and C-bands from a rough sea surface with breaking waves," *Waves in Random Media*, vol. 11, no. 3, pp. 247–69, 2001.
 - [100] T. Elfouhaily, S. Guignard, R. Awadallah, and D. Thompson, "Local and non-local curvature approximation : a new asymptotic theory for wave scattering," *Waves in Random Media*, vol. 13, pp. 321–37, Oct. 2003.
 - [101] C. Bourlier, N. Déchamps, and G. Berginc, "Comparison of asymptotic backscattering models (SSA, WCA, and LCA) from one-dimensional gaussian ocean-like surfaces," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 53, pp. 1640–52, May 2005.
 - [102] C.-A. Guerin, G. Soriano, and T. Elfouhaily, "Weighted curvature approximation : numerical tests for 2D dielectric surfaces," *Waves in Random Media*, vol. 14, pp. 349–63, July 2004.
 - [103] A. Ishimaru, "Experimental and theoretical studies on enhanced backscattering from scatterers and rough surfaces," in *Scattering in Volumes and Surfaces* (M. Nieto-Vesperinas and J. Dainty, eds.), Delta Series, pp. 1–15, Elsevier, North-Holland, 1990.
 - [104] Y.-Q. Jin and M. Lax, "Backscattering enhancement from a randomly rough interface," *Physical Review B*, vol. 42, pp. 9819–29, Dec. 1990.
 - [105] C. Bourlier and G. Berginc, "Multiple scattering in the high-frequency limit with second-order shadowing function from 2D anisotropic rough dielectric surfaces : II. Comparison with numerical results," *Waves in Random Media*, vol. 14, no. 3, pp. 253–76, 2004.
 - [106] C. Bourlier, G. Berginc, and J. Saillard, "Monostatic and bistatic statistical shadowing functions from a one-dimensional stationary randomly rough surface : II. Multiple scattering," *Waves in Random Media*, vol. 12, no. 2, pp. 175–200, 2002.
 - [107] E. Bahar and M. El-Shenawee, "Vertically and horizontally polarized diffuse double-scatter cross sections of one-dimensional random rough surfaces that exhibit enhanced-backscatter-full-wave solutions," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 11, pp. 2271–85, Aug. 1994.
 - [108] E. Bahar and M. El-Shenawee, "Enhanced backscatter from one-dimensional random rough surfaces : stationary-phase approximations to full-wave solutions," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 12, pp. 151–161, Jan. 1995.
 - [109] T. Elfouhaily, C. Bourlier, and J. Johnson, "Two families of non-local scattering models and the weighted curvature approximation," *Waves in Random Media*, vol. 14, no. 4, pp. 563–80, 2004.

- [110] A. Ishimaru, J. Chen, P. Phu, and K. Yoshitomi, "Numerical, analytical, and experimental studies of scattering from very rough surfaces and backscattering enhancement," *Waves in Random Media*, vol. 1, no. 3, pp. S91–S107, 1991.
- [111] A. Maradudin, J. Q. Lu, T. Michel, Z.-H. Gu, J. Dainty, A. Sant, E. Mendez, and M. Nieto-Vesperinas, "Enhanced backscattering and transmission of light from random surfaces on semi-infinite substrates and thin films," *Waves in Random Media*, vol. 1, pp. 129–41, July 1991.
- [112] E. Thorsos and D. Jackson, "Studies of scattering theory using numerical methods," *Waves in Random Media*, vol. 1, pp. 165–90, July 1991.
- [113] G. Soriano, C.-A. Guérin, and M. Saillard, "Scattering by two-dimensional rough surfaces : comparison between the method of moments, Kirchhoff and small-slope approximations," *Waves in Random Media*, vol. 12, no. 1, pp. 63–83, 2002.
- [114] E. Thorsos and S. Broschat, "An investigation of the small slope approximation for scattering from rough surfaces. part i. theory," *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 97, pp. 2082–93, Apr. 1995.
- [115] S. Broschat and E. Thorsos, "An investigation of the small slope approximation for scattering from rough surfaces. Part II. Numerical studies," *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 101, pp. 2615–25, May 1997.
- [116] C. Guérin, "Méthodes approchées en diffusion par les surfaces rugueuses," in *Journée spécialisée GdR Ondes "Diffusion par des surfaces rugueuses"*, Mar. 2006.
- [117] S. Bonnard, P. Vincent, and M. Saillard, "Inverse obstacle scattering for homogeneous dielectric cylinders using a boundary finite-element method," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 48, pp. 393–400, Mar. 2000.
- [118] M. Saillard and G. Toso, "Electromagnetic scattering from bounded or infinite subsurface bodies," *Radio Science*, vol. 32, no. 4, pp. 1347–60, 1997.
- [119] W. Ament, "Reciprocity and scattering by certain rough surfaces," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation [legacy, pre - 1988]*, vol. 8, pp. 167–74, Mar. 1960.
- [120] P. Croce and L. Prod'homme, "Light scattering investigation of the nature of polished glass surfaces," *Nouvelle Revue d'Optique*, vol. 7, pp. 121–32, Mar. 1976.
- [121] P. Cole, "Electromagnetic theory and rfid applications : Part Two Electromagnetic and signal theory," Aug. 2006. <http://www.eleceng.adelaide.edu.au/Personal/peter/peter/L5EMT&RFID/EAST.pdf> - au 01/08/2006.
- [122] R. Aronson, "Radiative transfer implies a modified reciprocity relation," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 14, pp. 486–90, Feb. 1997.
- [123] R. Potton, "Reciprocity in optics," *Reports on Progress in Physics*, vol. 67, pp. 717–54, May 2004.
- [124] P. Lynch and R. Wagner, "Rough-surface scattering : shadowing, multiple scatter, and energy conservation," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 11, no. 10, pp. 3032–42, 1970.
- [125] A. Fung and H. Eom, "Multiple scattering and depolarization by a randomly rough Kirchhoff surface," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-29, pp. 463–471, May 1981.
- [126] H. Eom, "Energy conservation and reciprocity of random rough surface scattering," *Applied Optics*, vol. 24, pp. 1730–2, June 1985.
- [127] L. Tsang and J. Kong, "Energy conservation for reflectivity and transmissivity at a very rough surface," *Journal of Applied Physics*, vol. 51, pp. 673–80, Jan. 1980.

- [128] J. Caron, J. Lafait, and C. Andraud, "Scalar Kirchhoff's model for light scattering from dielectric random rough surfaces," *Optics Communications*, vol. 207, pp. 17–28, June 2002.
- [129] J. Sanchez-Gil and M. Nieto-Vesperinas, "Light scattering from random rough dielectric surfaces," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 8, no. 8, pp. 1270–86, 1991.
- [130] R. Schiffer, "Reflectivity of a slightly rough surface," *Applied Optics*, vol. 26, pp. 704–12, Feb. 1987.
- [131] M. Saillard and D. Maystre, "Scattering from metallic and dielectric rough surfaces," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 7, pp. 982–90, June 1990.
- [132] J. Greffet, "Theoretical model of the shift of the brewster angle on a rough surface," *Optics Letters*, vol. 17, pp. 238–40, Feb. 1992.
- [133] M. Saillard, "A characterization tool for dielectric random rough surfaces : Brewster's phenomenon," *Waves in Random Media*, vol. 2, pp. 67–79, Jan. 1992.
- [134] A. Maradudin, R. Luna, and E. Mendez, "The brewster effect for a one-dimensional random surface," *Waves in Random Media*, vol. 3, pp. 51–60, Jan. 1993.
- [135] M. Demir, "Fourth order theories of emission and scattering from rough surfaces," Master's thesis, The Ohio State University, 2003.
- [136] C. Baylard, J.-J. Greffet, and A. Maradudin, "Coherent reflection factor of a random rough surface : applications," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 10, pp. 2637–47, Dec. 1993.
- [137] T. Kawanishi, I. Iwata, M. Kitano, H. Ogura, Z. L. Wang, and M. Izutsu, "Brewster's scattering angle and quasi-anomalous scattering in random scattering from dielectric interfaces," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 16, pp. 339–42, Feb. 1999.
- [138] R. D. Roo and F. Ulaby, "Bistatic specular scattering from rough dielectric surfaces," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 42, pp. 220–31, Feb. 1994.
- [139] M. Saillard, R. D. Roo, and F. Ulaby, "Comments on "bistatic specular scattering from rough dielectric surfaces" [and reply]," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 43, pp. 224–6, Feb. 1995.
- [140] T. Leskova, A. Maradudin, and I. Novikov, "Scattering of light from the random interface between two dielectric media with low contrast," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 17, pp. 1288–300, July 2000.
- [141] M. Nieto-Vesperinas and J. Sanchez-Gil, "Light scattering from a random rough interface with total internal reflection," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 9, no. 3, pp. 424–36, 1994.
- [142] K. Gasvik, "A theory of polarization-dependent off-specular peaks of light scattered from rough surfaces," *Optica Acta*, vol. 27, pp. 965–80, July 1980.
- [143] K. Gasvik, "Measurements of polarization-dependent off-specular peaks of laser light scattered from rough metal surfaces and dielectrics," *Optica Acta*, vol. 28, pp. 131–8, Jan. 1981.
- [144] J. Caron, J. Lafait, and C. Andraud, "Catastrophe theory interpretation of multiple peaks produced by light scattering from very rough dielectric surfaces," *Physica B*, vol. 325, pp. 76–85, Jan. 2003.
- [145] L. Brekhovskikh, *Waves in layered media*. Academic Press, 2nd ed., 1980.
- [146] A. Collaro, G. Franceschetti, M. Migliaccio, and D. Riccio, "Gaussian rough surfaces and Kirchhoff approximation," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 47, pp. 392–8, Feb. 1999.

- [147] M. Sancer, "Shadow-corrected electromagnetic scattering from a randomly rough surface," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-17, pp. 577–585, Sept. 1969.
- [148] C. Bourlier, G. Berginc, and J. Saillard, "Monostatic and bistatic statistical shadowing functions from a one-dimensional stationary randomly rough surface according to the observation length : I. Single scattering," *Waves in Random Media*, vol. 12, no. 2, pp. 145–73, 2002.
- [149] N. Pinel, C. Bourlier, and J. Saillard, "Energy conservation of the scattering from rough surfaces in the high-frequency limit," *Optics Letters*, vol. 30, pp. 2007–9, Aug. 2005.
- [150] R. Wagner, "Shadowing of randomly rough surfaces," *Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 41, pp. 138–147, Jan. 1967.
- [151] B. Smith, "Lunar surface roughness : shadowing and thermal emission," *Journal of Geophysical Research*, vol. 72, pp. 4059–4067, Aug. 1967.
- [152] B. Smith, "Geometrical shadowing of a random rough surface," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation [legacy, pre - 1988]*, vol. 15, pp. 668–671, Sept. 1967.
- [153] C. Le, Y. Kuga, and A. Ishimaru, "Angular correlation function based on the second-order Kirchhoff approximation and comparison with experiments," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 13, pp. 1057–67, May 1996.
- [154] V. Ross, D. Dion, and G. Potvin, "Detailed analytical approach to the gaussian surface bidirectional reflectance distribution function specular component applied to the sea surface," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 22, pp. 2442–53, Nov. 2005.
- [155] R. Kodis, "A note on the theory of scattering from an irregular surface," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation [legacy, pre - 1988]*, vol. 14, pp. 77–82, Jan. 1966.
- [156] C. Bourlier, G. Berginc, and J. Saillard, "One- and two-dimensional shadowing functions for any height and slope stationary uncorrelated surface in the monostatic and bistatic configurations," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 50, pp. 312–24, Mar. 2002.
- [157] I. Fuks and A. Voronovich, "Wave diffraction by rough interfaces in an arbitrary plane-layered medium," *Waves in Random Media*, vol. 10, no. 2, pp. 253–72, 2000.
- [158] R. Azadegan and K. Sarabandi, "Analytical formulation of the scattering by a slightly rough dielectric boundary, covered with a homogenous dielectric layer," in *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium*, vol. 3, (Columbus, OH, USA), pp. 420–3, 2003.
- [159] F. Izrailev, N. Makarov, and M. Rendon, "Gradient and amplitude scattering in surface-corrugated waveguides," *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)*, vol. 72, pp. 41403–1–4, July 2005. surface-corrugated waveguides;square-gradient scattering;amplitude scattering;rough surfaces;multimode waveguides;conducting quantum wire;wave-scattering length;electron mean free path;correlation length;surface disorder;surface scattering;.
- [160] I. Fuks, "Wave diffraction by a rough boundary of an arbitrary plane-layered medium," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 49, pp. 630–9, Apr. 2001.
- [161] V. Wismann, M. Gade, W. Alpers, and H. Hühnerfuss, "Radar signature of marine mineral oil spills measured by an airborne multi-radar," *International Journal of Remote Sensing*, vol. 19, pp. 3607–23, Dec. 1998.
- [162] A. Solberg, G. Stovik, R. Solberg, and E. Volden, "Automatic detection of oil spills in ERS SAR images," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 37, pp. 1916–24, July 1999.

- [163] F. D. Frate, A. Petrocchi, J. Lichtenegger, and G. Calabresi, "Neural networks for oil spill detection using ERS-SAR data," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 38, pp. 2282–7, Sept. 2000.
- [164] Z. Otremba and J. Piskozub, "Modelling of the optical contrast of an oil film on a sea surface," *Optics Express*, vol. 9, pp. 411–416, Oct. 2001.
- [165] Z. Otremba and J. Piskozub, "Modelling the bidirectional reflectance distribution function (BRDF) of seawater polluted by an oil film," *Optics Express*, vol. 12, pp. 1671–1676, Apr. 2004.
- [166] M. Ayari, A. Coatanhay, and A. Khenchaf, "The influence of ripple damping on electromagnetic bistatic scattering by sea surface," in *2005 International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, 2005.
- [167] Z. Otremba and T. Krol, "Light attenuation parameters of polydisperse oil-in-water emulsion," *Optica Applicata*, vol. 31, no. 3, pp. 599–609, 2001.
- [168] Z. Otremba and J. Piskozub, "Modeling the remotely sensed optical contrast caused by oil suspended in the sea water column," *Optics Express*, vol. 11, pp. 2–6, Jan. 2003.
- [169] M. Ayari, A. Khenchaf, and A. Coatanhay, "Marine oil-spills electromagnetic scattering model using two-scale model," in *European Conference on Propagation and Systems*, 2005.
- [170] S. Tjuatja, A. Fung, and J. Bredow, "A scattering model for snow-covered sea ice," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 30, pp. 804–10, July 1992.
- [171] A. Fung, M. Dawson, and S. Tjuatja, "An analysis of scattering from a thin saline ice layer," in *International Geoscience and Remote Sensing Symposium, 1992. IGARSS '92.*, pp. 1262–4, May 1992.
- [172] S. Tjuatja, A. Fung, and M. Dawson, "An analysis of scattering and emission from sea ice," *Remote Sensing Reviews*, vol. 7, pp. 83–106, 1993.
- [173] A. Fung, S. Tjuatja, S. Beaven, S. Gogineni, K. Jezek, A. Gow, and D. Perovich, "Modeling interpretation of scattering from snow-covered sea ice," in *Geoscience and Remote Sensing Symposium, 1994. IGARSS '94. 'Surface and Atmospheric Remote Sensing : Technologies, Data Analysis and Interpretation'. , International*, vol. 1, (Pasadena, CA), pp. 617–619, Aug. 1994.
- [174] S. Surdyk and M. Fily, "Results of a stratified snow emissivity model based on the wave approach : application to the antarctic ice sheet," *Journal of Geophysical Research*, vol. 100, pp. 8837–48, May 1995.
- [175] S. Nghiem, R. Kwok, S. Yueh, and M. Drinkwater, "Polarimetric signatures of sea ice. 1. Theoretical model," *Journal of Geophysical Research*, vol. 100, pp. 13665–13679, July 1995.
- [176] S. Nghiem, R. Kwok, S. Yueh, and M. Drinkwater, "Polarimetric signatures of sea ice. 2. Experimental observations," *Journal of Geophysical Research*, vol. 100, pp. 13681–13698, July 1995.
- [177] Y. Tzeng, S. Tjuatja, and A. Fung, "A T-matrix approach to scattering from a snow layer," in *International Geoscience and Remote Sensing Symposium, 1992. IGARSS '92.*, pp. 828–9, May 1992.
- [178] H. Giovannini, M. Saillard, and A. Sentenac, "Numerical study of scattering from rough inhomogeneous films," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 15, pp. 1182–91, May 1998.
- [179] P. Roche and E. P. abd G. Albrand, "Antiscattering transparent monolayers : theory and experiment," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 1, pp. 1032–3, Oct. 1984.

-
- [180] C. Amra, G. Albrand, and P. Roche, "Theory and application of antiscattering single layers : antiscattering antireflection coatings," *Applied Optics*, vol. 25, pp. 2695–702, Aug. 1986.
- [181] C. Amra, P. Roche, and E. Pelletier, "Interface roughness cross-correlation laws deduced from scattering diagram measurements on optical multilayers : effect of the material grain size," *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 4, pp. 1087–93, July 1987.
- [182] H. Kaplan, "Black coatings are critical in optical design," *Photonics Spectra*, vol. 31, pp. 48–50, Jan. 1997.
- [183] P. Roche, C. Amra, and E. Pelletier, "Measurement of scattering distribution for characterization of the roughness of coated or uncoated substrates," in *Proceedings of the SPIE - The International Society for Optical Engineering*, vol. 652, (Innsbruck, Austria), pp. 256–63, 1986.
- [184] B. Stagg and T. Charalampopoulos, "Surface-roughness effects on the determination of optical properties of materials by the reflection method," *Applied Optics*, vol. 30, pp. 4113–8, Oct. 1991.
- [185] C. Amra, "From light scattering to the microstructure of thin-film multilayers," *Applied Optics*, vol. 32, pp. 5481–91, Oct. 1993.
- [186] Z. Yin, H. Tan, and F. Smith, "Determination of the optical constants of diamond films with a rough growth surface," *Diamond and Related Materials*, vol. 5, no. 12, pp. 1490–6, 1996.
- [187] R. Swanepoel, "Transmission and reflection of an absorbing thin film on an absorbing substrate," *South African Journal of Physics*, vol. 12, pp. 148–56, Dec. 1989.
- [188] T. Germer, "Polarized light scattering by microroughness and small defects in dielectric layers," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 18, pp. 1279–88, June 2001.
- [189] M. O'Leary, D. Boas, B. Chance, and A. Yodh, "Experimental images of heterogeneous turbid media by frequency-domain diffusing-photon tomography," *Optics Letters*, vol. 20, pp. 426–8, Mar. 1995.
- [190] J. Ripoll, V. Ntziachristos, J. Culver, D. Pattanayak, A. Yodh, and M. Nieto-Vesperinas, "Recovery of optical parameters in multiple-layered diffusive media : theory and experiments," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 18, pp. 821–30, Apr. 2001.
- [191] J. Lu, X.-H. Hu, and K. Dong, "Modeling of the rough-interface effect on a converging light beam propagating in a skin tissue phantom," *Applied Optics*, vol. 39, pp. 5890–7, Nov. 2000.
- [192] M. Hébert and R. Hersch, "Classical print reflection models : a radiometric approach," *Journal of Imaging Science and Technology*, vol. 48, pp. 363–74, Aug. 2004.
- [193] K.-I. Nagata, "Specular reflectance curves of wax-polished painted surface : Determination of wax-film thickness and rms roughness," *Japanese Journal of Applied Physics*, vol. 6, pp. 1198–202, Oct. 1967.
- [194] H. Giovannini and C. Amra, "Scattering-reduction effect with overcoated rough surfaces : theory and experiment," *Applied Optics*, vol. 36, pp. 5574–9, Aug. 1997.
- [195] H. Giovannini and C. Amra, "Enhanced absorption in very rough overcoated black surfaces," in *Proceedings of the SPIE - The International Society for Optical Engineering*, vol. 3133, (San Diego, CA, USA), pp. 110–4, 1997.
- [196] H. Giovannini and C. Amra, "Dielectric thin films for maximized absorption with standard quality black surfaces," *Applied Optics*, vol. 37, pp. 103–5, Jan. 1998.

- [197] J. Lu, A. Maradudin, and T. Michel, "Enhanced backscattering from a rough dielectric film on a reflecting substrate," *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 8, no. 2, pp. 311–318, 1991.
- [198] Z.-H. Gu, J. Lu, and A. Maradudin, "Enhanced backscattering from a rough dielectric film on a glass substrate," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 10, pp. 1753–64, Aug. 1993.
- [199] I. Simonsen and A. Maradudin, "Numerical simulation of electromagnetic wave scattering from planar dielectric films deposited on rough perfectly conducting substrates," *Optics Communications*, vol. 162, pp. 99–111, Apr. 1999.
- [200] A. McGurn and A. Maradudin, "An analogue of enhanced backscattering in the transmission of light through a thin film with a randomly rough surface," *Optics Communications*, vol. 72, pp. 279–85, Aug. 1989.
- [201] Z.-H. Gu, A. Maradudin, E. Mendez, M. Ponce, and V. Ruiz-Cortes, "Enhanced transmission through randomly rough surfaces," *Waves in Random Media*, vol. 1, pp. 75–90, July 1991.
- [202] Z.-H. Gu, R. Dummer, A. Maradudin, A. McGurn, and E. Mendez, "Enhanced transmission through rough-metal surfaces," *Applied Optics*, vol. 30, pp. 4094–102, Oct. 1991.
- [203] J. Sanchez-Gil, A. Maradudin, J. Lu, V. Freilikher, M. Pustilnik, and I. Yurkevich, "Satellite peaks in the scattering of p-polarized light from a randomly rough film on a perfectly conducting substrate," *Journal of Modern Optics*, vol. 43, pp. 435–52, Mar. 1996.
- [204] R. Garcia-Llamas, L. Regalado, and C. Amra, "Scattering of light from a two-layer system with a rough surface," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 16, pp. 2713–19, Nov. 1999.
- [205] N. Déchamps, N. de Beaucoudrey, C. Bourlier, and S. Toutain, "Fast numerical method for electromagnetic scattering by rough layered interfaces : Propagation-inside-layer expansion method," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 23, pp. 359–69, Feb. 2006.
- [206] N. Déchamps, C. Bourlier, N. de Beaucoudrey, and S. Toutain, "Méthode de Kirchhoff avec ombre appliquée à la diffusion électromagnétique par une couche rugueuse diélectrique 1D," in *Numélec*, (Toulouse, France), Oct. 2003.
- [207] N. Déchamps, C. Bourlier, N. de Beaucoudrey, and S. Toutain, "Numerical simulations of scattering from multilayers separated by one-dimensional rough interfaces," in *2003 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, (Toulouse, France), pp. 118–20, July 2003.
- [208] E. Hecht, *Optique*. Pearson Education France, 4eme ed., 2005.
- [209] J. Lu, J. Sánchez-Gil, E. Méndez, Z.-H. Gu, and A. Maradudin, "Scattering of light from a rough dielectric film on a reflecting substrate : diffuse fringes," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 15, pp. 185–95, Jan. 1998.
- [210] Y. S. Kaganovskii, V. Freilikher, E. Kanzieper, Y. Nafcha, and M. Rosenbluh, "Interference in light scattering from slightly rough dielectric layers," *Optics Letters*, vol. 23, pp. 316–18, Mar. 1998.
- [211] Y. Kaganovskii, V. Freilikher, E. Kanzieper, Y. Nafcha, M. Rosenbluh, and I. Fuks, "Light scattering from slightly rough dielectric films," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 16, no. 2, pp. 331–8, 1999.
- [212] Z.-H. Gu, I. Fuks, and M. Ciftan, "Enhanced backscattering at grazing angles," *Optics Letters*, vol. 27, no. 23, pp. 2067–9, 2002.

- [213] Z.-H. Gu, I. Fuks, and M. Ciftan, "Grazing angle enhanced backscattering from a dielectric film on a reflecting metal substrate," *Optical Engineering*, vol. 43, no. 3, pp. 559–67, 2004.
- [214] A. Soubret, G. Berginc, and C. Bourrely, "Backscattering enhancement of an electromagnetic wave scattered by two-dimensional rough layers," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 18, pp. 2778–88, Nov. 2001.
- [215] I. Ohlídal, K. Navrátil, and F. Lukes, "Reflection of light by a system of nonabsorbing isotropic film - nonabsorbing isotropic substrate with randomly rough boundaries," *Journal of the Optical Society of America*, vol. 61, pp. 1630–1639, 1971.
- [216] J. Eastman, "Scattering by all-dielectric multilayer band-pass filters and mirrors for lasers," in *Physics of Thin Films* (G. Hass and M. H. Francombe, eds.), vol. 10, pp. 167–226, New York : Academic, 1978.
- [217] K. Krishen, "Scattering of electromagnetic waves from a layer with rough front and plane back (small perturbation method by rice)," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-18, pp. 573–6, July 1970.
- [218] A. D. Witte, "Interference in scattered light," *American Journal of Physics*, vol. 35, pp. 301–313, Apr. 1967.
- [219] J. Elson, "Light scattering from surfaces with a single dielectric overlayer," *Journal of the Optical Society of America*, vol. 66, pp. 682–94, July 1976.
- [220] J. Elson and R. Ritchie, "Diffuse scattering and surface-plasmon generation by photons at a rough dielectric surface," *Physica Status Solidi B*, vol. 62, pp. 461–8, Apr. 1974.
- [221] J. Elson, "Infrared light scattering from surfaces covered with multiple dielectric overlayers," *Applied Optics*, vol. 16, pp. 2873–81, Nov. 1977.
- [222] J. Elson, J. Rahn, and J. Bennett, "Light scattering from multilayer optics : comparison of theory and experiment," *Applied Optics*, vol. 19, pp. 669–79, Mar. 1980.
- [223] J. Elson, "Multilayer-coated optics : guided-wave coupling and scattering by means of interface random roughness," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 12, pp. 729–42, Apr. 1995.
- [224] N. Zuck, "Scattering of EM waves from a slightly rough surface of a generally anisotropic plane-layered half-space," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 45, no. 12, pp. 1774–82, 1997.
- [225] A. Tabatabaenejad and M. Moghaddam, "Scattering of electromagnetic waves from an N-layer dielectric structure with slightly rough boundaries," in *2006 IEEE Antennas and Propagation Society Symposium*, (Albuquerque, NM, USA), July 2006.
- [226] A. Tabatabaenejad, M. Moghaddam, and E. Michieleseen, "SPM simulations of one-dimensional two-layer rough surfaces : Accuracy and validity," in *2006 URSI Radio Science Meeting*, (Albuquerque, NM, USA), July 2006.
- [227] A. Tabatabaenejad and M. Moghaddam, "Bistatic scattering from three-dimensional layered rough surfaces," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 44, pp. 2102–14, Aug. 2006.
- [228] C. hao Kuo and M. Moghaddam, "Backscattering enhancement of surface plasmons from multilayer rough surfaces," in *2006 IEEE Antennas and Propagation Society Symposium*, (Albuquerque, NM, USA), July 2006.
- [229] R. G. Llamas, "Scattering of electromagnetic plane waves from rough periodic multilayered films," *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 11, pp. 618–23, Apr. 1994.

- [230] R. G. Lamas and L. Regalado, "Transmitted scattered light from a thin film with shallow random rough interfaces," *Applied Optics*, vol. 35, pp. 5595–9, Oct. 1996.
- [231] P. Bousquet, F. Flory, and P. Roche, "Scattering from multilayer thin films : theory and experiment," *Journal of the Optical Society of America*, vol. 71, pp. 1115–23, Sept. 1981.
- [232] C. Amra, "Light scattering from multilayer optics. I. Tools of investigation," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 11, pp. 197–210, Jan. 1994.
- [233] C. Amra, "Light scattering from multilayer optics. II. Application to experiment," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 11, pp. 211–26, Jan. 1994.
- [234] G. Brown, V. Celli, M. Haller, and A. Marvin, "Vector theory of light scattering from a rough surface : unitary and reciprocal expansions," *Surface Science*, vol. 136, no. 2-3, pp. 381–97, 1984.
- [235] A. Soubret, G. Berginc, and C. Bourrelly, "Electromagnetic wave scattering from a 3-dimensional rough dielectric film : study of the coupling between the randomly rough interfaces," in *Progress In Electromagnetic Research Symposium* (J. Kong, ed.), 2000.
- [236] A. Sentenac and J.-J. Greffet, "Mean-field theory of light scattering by one-dimensional rough surfaces," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 15, pp. 528–32, Feb. 1998.
- [237] O. Calvo-Perez, J.-J. Greffet, and A. Sentenac, "Scattering by randomly rough dielectric surfaces and rough dielectric films : influence of the height distribution," *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, vol. 1, no. 4, pp. 560–5, 1999.
- [238] O. Calvo-Perez, A. Sentenac, and J.-J. Greffet, "Light scattering by a two-dimensional, rough penetrable medium : a mean-field theory," *Radio Science*, vol. 34, pp. 311–35, Mar. 1999.
- [239] D. Aspnes, J. Theeten, and F. Hottier, "Investigation of effective-medium models of microscopic surface roughness by spectroscopic ellipsometry," *Physical Review B*, vol. 20, pp. 3292–302, Oct. 1979.
- [240] I. Ohlídal and K. Navrátil, "Scattering of light from multilayer with rough boundaries," in *Progress in Optics* (E. Wolf, ed.), vol. XXXIV, pp. 248–331, Elsevier Science, 1995.
- [241] I. Fuks, "Modeling of scattering by a rough surface of layered media," in *2002 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, vol. 2, (Toronto, Ontario, Canada), pp. 1251–3, June 2002.
- [242] D. Blumberg, V. Freilikher, I. Fuks, Y. Kaganovskii, A. Maradudin, and M. Rosenbluh, "Effects of roughness on the retroreflection from dielectric layers," *Waves in Random Media*, vol. 12, no. 3, pp. 279–92, 2002.
- [243] K. Krishen, "Electromagnetic wave scattering from a layer with a plane interface in front and a rough interface in back (Kirchhoff method)," *Canadian Journal of Physics*, vol. 50, pp. 431–9, Mar. 1972.
- [244] A. Aziz, W. Papousek, and G. Leising, "Polychromatic reflectance and transmittance of a slab with a randomly rough boundary," *Applied Optics*, vol. 38, pp. 5422–8, Sept. 1999.
- [245] S. Pimenov and N. Stepanova, "Strong scattering of radio waves by a two-layered medium with a rough boundary," *Radiophysics and Quantum Electronics*, vol. 40, pp. 485–92, June 1997.
- [246] S. Pimenov and M. Rudenko, "Radio-wave scattering by two-layer medium with irregular boundaries," *Radiophysics and Quantum Electronics*, vol. 35, pp. 187–93, Mar. 1992.

-
- [247] C. Carniglia, "Scalar scattering theory for multilayer optical coatings," *Optical Engineering*, vol. 18, pp. 104–15, Mar. 1979.
- [248] I. Ohlidal, "Approximate formulas for the reflectance transmittance, and scattering losses of nonabsorbing multilayer systems with randomly rough boundaries," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 10, pp. 158–71, Jan. 1993.
- [249] I. Ohlidal and F. Vizda, "Optical quantities of multilayer systems with correlated randomly rough boundaries," *Journal of Modern Optics*, vol. 46, pp. 2043–62, Nov. 1999.
- [250] E. Bahar and R. Kubik, "Computations of the mueller matrix elements for scattering from layered structures with rough surfaces, with applications to optical detection," *Applied Optics*, vol. 36, pp. 2947–55, May 1997.
- [251] E. Bahar and R. Kubik, "Scattering by layered structures with rough surfaces : comparison of polarimetric optical scatterometer measurements with theory," *Applied Optics*, vol. 36, pp. 2956–62, May 1997.
- [252] E. Bahar and T. Guminski, "Remote sensing of layered media with non-gaussian random rough interfaces full-wave approach," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 36, pp. 1938–44, Nov. 1998.
- [253] E. Bahar and Y. Zhang, "Diffuse like and cross-polarized fields scattered from irregular layered structures-full-wave analysis," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 47, pp. 941–8, May 1999.
- [254] E. Bahar and M. Fitzwater, "Full wave physical models of nonspecular scattering in irregular stratified media," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 37, pp. 1609–16, Dec. 1989.
- [255] Y. Zhang and E. Bahar, "Mueller matrix elements that characterize scattering from coated random rough surfaces," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 47, pp. 949–55, May 1999.
- [256] G. Rozhnov, "Electromagnetic-wave diffraction by multilayer media with rough interfaces," *Soviet Physics - JETP*, vol. 69, pp. 646–51, Sept. 1989.
- [257] G. Rozhnov, "Diffraction of electromagnetic waves by irregular interfaces in stratified, uniaxial anisotropic media," *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, vol. 77, pp. 709–18, Nov. 1993.
- [258] L. Li, "Formulation and comparison of two recursive matrix algorithms for modeling layered diffraction gratings," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 13, pp. 1024–35, May 1996.
- [259] L. Li, G. Granet, J. Plumey, and J. Chandezon, "Some topics in extending the C method to multilayer gratings of different profiles," *Pure and Applied Optics*, vol. 5, pp. 141–56, Mar. 1996.
- [260] Y. Lasne, F. Koudogbo, P. Combes, P. Paillou, and H. Mametsa, "Application de l'IEM à l'étude phasimétrique du coefficient de rétrodiffusion pour la détection des structures humides enfouies en milieux arides," in *Journée spécialisée GdR Ondes "Diffusion par des surfaces rugueuses"*, Mar. 2006.
- [261] A. Fung and G. Pan, "An integral equation method for rough surface scattering," in *Proc. Int. Symp. on Multiple Scattering of Waves in Random Media and Random Surfaces*, pp. 701–14, 1986.
- [262] A. Fung, W. Liu, K. Chen, and M. Tsay, "An improved IEM model for bistatic scattering from rough surfaces," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 16, no. 5, pp. 689–702, 2002.

- [263] G. Picard, *Modélisation radar des couverts végétaux. Application à la télédétection de couverts forestiers et agricoles*. PhD thesis, Université Paul Sabatier - Toulouse III, Toulouse, France, Oct. 2002.
- [264] J. Caron, C. Andraud, and J. Lafait, "Radiative transfer calculations in multilayer systems with smooth or rough interfaces," *Journal of Modern Optics*, vol. 51, pp. 575–95, Mar. 2004.
- [265] S. Mudaliar, "Radar cross sections of a random medium layer," *Waves in Random Media*, vol. 10, pp. 117–34, Jan. 2000.
- [266] S. Mudaliar, "Mean green's functions of a random medium layer with rough boundaries - a unified approach," in *XXVIIIth General Assembly of International Union of Radio Science (URSI)*, (New Delhi, India), Oct. 2005.
- [267] S. Mudaliar, "Transport equations for multilayer random media with rough interfaces," in *2006 URSI Radio Science Meeting*, (Albuquerque, NM, USA), July 2006.
- [268] S. Mudaliar, "Diffuse waves in a random medium layer with rough boundaries," *Waves in Random Media*, vol. 11, pp. 45–60, Jan. 2001.
- [269] H. Chuah and H. Tan, "A microwave emission model for vegetative medium using the Monte Carlo method. I," *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 6, no. 7, pp. 799–834, 1992.
- [270] C.-Y. Hsieh, "Effects of bistatic multiple surface scattering from perfectly conducting rough surfaces," *Electromagnetics*, vol. 20, pp. 99–124, Mar. 2000.
- [271] C.-Y. Hsieh, "Prediction of IEM model for backscattering enhancement," *Electromagnetics*, vol. 20, pp. 205–31, May 2000.
- [272] E. Jakeman, "Enhanced backscattering through a deep random phase screen," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 5, pp. 1638–48, Oct. 1988.
- [273] E. Jakeman, "The physical optics of enhanced backscattering," in *Scattering in Volumes and Surfaces* (M. Nieto-Vesperinas and J. Dainty, eds.), Delta Series, pp. 111–23, Elsevier, North-Holland, 1990.
- [274] N. Pinel, C. Bourlier, and J. Saillard, "Radar cross section from a stack of two one-dimensional rough interfaces in the high-frequency limit," in *European RADar 2005 Symposium*, (Paris, France), Oct. 2005.
- [275] F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*. IEEE Press, 1993.
- [276] D. Holliday, L. D. Jr., and G. St-Cyr, "Forward-Backward : a new method for computing low-grazing angle scattering," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 44, no. 5, pp. 722–9, 1996.
- [277] L. Tsang, C. Chan, K. Pak, and H. Sangani, "Monte-Carlo simulations of large-scale problems of random rough surface scattering and applications to grazing incidence with the BMIA/Canonical Grid Method," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 43, no. 8, pp. 851–859, 1995.
- [278] V. Rokhlin, "Rapid solution of integral equations of scattering theory in two dimensions," *Journal of Computational Physics*, vol. 36, no. 3, pp. 414–39, 1990.
- [279] K. Lamkaouchi, *L'eau : étalon diélectrique. Etude de lois diélectriques appliquées à l'eau et à des émulsions de pétrole mesurées en micro-ondes*. PhD thesis, Université de bordeaux I, Bordeaux, France, June 1992.
- [280] C. Cox and W. Munk, "Statistics of the sea surface derived from sun glitter," *Journal of Marine Research*, vol. 13, pp. 198–227, 1954.

- [281] C. Bourlier, G. Berginc, and J. Saillard, “Theoretical study of the Kirchhoff integral from a two-dimensional randomly rough surface with shadowing effect : application to the backscattering coefficient for a perfectly-conducting surface,” *Waves in Random Media*, vol. 11, pp. 91–118, Apr. 2001.
- [282] C. Bourlier and G. Berginc, “Shadowing function with single reflection from anisotropic Gaussian rough surface. Application to Gaussian, Lorentzian and sea correlations,” *Waves in Random Media*, vol. 13, no. 1, pp. 27–58, 2003.

Resumé

Ce travail a pour cadre la diffusion des ondes électromagnétiques par une ou deux interfaces rugueuses séparant des milieux homogènes. Il s'intéresse plus particulièrement aux modèles asymptotiques, qui permettent de résoudre le problème posé de manière rapide, au détriment d'un domaine de validité restreint.

Pour le cas simple interface, après un panorama des méthodes existantes, une étude approfondie de l'approximation dite de Kirchhoff est menée pour le cas de la diffraction en réflexion et en transmission par une simple interface. Cette méthode est réduite à l'approximation dite de l'optique géométrique, valide pour des interfaces fortement rugueuses comparativement à la longueur d'onde, pour calculer plus simplement et plus rapidement la puissance diffusée. Le phénomène d'ombrage de la surface, bien connu pour le cas de la réflexion, l'est beaucoup moins pour le cas de la transmission ; c'est pourquoi il est étudié en détail dans cette thèse.

Pour le cas double interface, une étude bibliographique des méthodes existantes nous permet de constater l'absence de méthode basée sur l'extension de l'approximation de Kirchhoff au cas de deux interfaces fortement rugueuses. Ainsi, la méthode développée dans cette thèse permet de pallier ce manque. Cette méthode est exposée en supposant que les deux surfaces sont décorréélées, afin de pouvoir obtenir une expression de la puissance diffusée simple à mettre en oeuvre. Par comparaison avec une méthode numérique de référence, la méthode développée a été validée dans le cas bidimensionnel. Une application à la détection de nappes de pétrole sur la surface de la mer est présentée, et la méthode est étendue au cas tridimensionnel.

Mots-clés : Diffraction électromagnétique, Surfaces rugueuses, Couches rugueuses, Modèles asymptotiques, Approximation de Kirchhoff, Approximation de l'optique géométrique.

Title and Abstract

STUDY OF ASYMPTOTIC MODELS OF ELECTROMAGNETIC SCATTERING FROM NATURAL INTERFACES - APPLICATION TO A SEA COVERED IN OIL -

This work's topic is the electromagnetic wave scattering from one or two rough interfaces separating homogeneous media. One focuses more precisely on asymptotic models, which enable to solve the raised problem in a fast way, but in consequence have a restricted domain of validity.

For the case of a single interface, after a description of the existing methods, a detailed study of the so-called Kirchhoff approximation is lead for the diffraction in reflection and transmission from a single interface. This method is reduced to the so-called geometric optics approximation, which is valid for strongly rough interfaces comparatively to the electromagnetic wavelength, in order to determine easily and rapidly the scattered power. The phenomenon of surface shadowing, which is well-known for the case of reflection, is not very familiar for the case of transmission ; that is why it is treated in details in this thesis.

For the case a rough layer, a bibliographical study of the existing methods allows us to notice the absence of methods based on the extension of the Kirchhoff approximation to the case of two strongly rough interfaces. Thus, the method developed in this thesis overcomes this issue. This method is explained by assuming uncorrelated surfaces, in order to obtain a simple expression of the scattered power for numerical implementation. By comparison with a reference numerical method, the developed method is validated for a two-dimensional problem. An application to the detection of oil slicks over the sea surface is presented, and the method is extended to a three-dimensional problem.

Keywords : Electromagnetic scattering, Rough surfaces, Rough layers, Asymptotic models, Kirchhoff Approximation, Geometric optics approximation.